ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MAURICE MIGNOTTE

Approximation des nombres algébriques par des nombres algébriques de grand degré

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 2 (1979), p. 165-170
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_2_165_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol. I, 1979, P. 165 à 170

APPROXIMATION DES NOMBRES ALGEBRIQUES PAR DES NOMBRES ALGEBRIQUES DE GRAND DEGRE

Maurice MIGNOTTE[(1)]

(1) Département de mathématiques, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France.

Résumé : Nous obtenons une minoration effective de $|\alpha-\beta|$, α et β étant deux nombres algébriques non conjugués. Cette minoration est parfois meilleure qu'une estimation de Liouville ; c'est par exemple le cas lorsque β est fixé, que le degré de α tend vers l'infini tandis que la mesure de α reste bornée. La preuve est simple et élémentaire.

Summary : We get an effective lower bound for $|\alpha-\beta|$, when α and β are non conjugate algebraic numbers. This lower bound is sometimes better than Liouville's estimate ; for example this is true when β is fixed, the degree of α tends to infinity while the measure of α remains bounded. The proof is simple and elementary.

I . ENONCE DES RESULTATS

Si γ est un nombre algébrique de conjugués $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ dont le polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$ admet c comme coefficient du terme de plus haut degré, on définit avec Mahler la mesure de γ par la formule

$$M(\gamma) = |c| \,. \prod_{|\gamma_i| > 1} |\gamma_i|$$

Nous démontrons ici le résultat suivant.

THEOREME. *Soient α et β deux nombres algébriques non conjugués, de degrés respectifs* D *et* d, *avec* D > 1. *Soit* $\beta^* = \max \{1, |\beta|\}$. *On a alors*

$$(1) \qquad |\alpha-\beta| > M(\beta)^{-2D} . \exp \left\{-4 \sqrt{dD \,.\, \mathrm{Log}\,(4D\,\beta^*\, M(\alpha)).\mathrm{Log}\,(2D)}\right\}$$

lorsque

$$(2) \qquad 2d \operatorname{Log}(4D\,\beta^*\,M(\alpha)) \leqslant D \operatorname{Log} D$$

Ce résultat est à comparer avec l'estimation de Liouville bien connue

$$(3) \qquad |\alpha - \beta| > 2^{-dD} M(\beta)^{-D} M(\alpha)^{-d}, \text{ si } \alpha \neq \beta$$

que l'on obtient immédiatement en considérant la norme de $\alpha - \beta$.

Pour simplifier cette comparaison supposons $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ bornés. Sous ces hypothèses la relation (3) implique

$$\operatorname{Log} |\alpha - \beta| \gg -dD$$

tandis que (1) conduit à l'estimation

$$\operatorname{Log} |\alpha - \beta| \gg -\sqrt{dD}\,.\,(\operatorname{Log} D) - D$$

qui est valable si D et d vérifient la condition

$$D \geqslant c_1 d ,$$

où c_1 est une constante convenable.

Dans le cas particulier $\beta = 1$, le théorème a la conséquence suivante.

COROLLAIRE. *Si α est un nombre algébrique irrationnel de degré* D *et de mesure au plus* 2 *alors il vérifie*

$$|\alpha - 1| > \exp\left\{-4\sqrt{D}\,.\operatorname{Log}(4D)\right\}.$$

Pour $\beta = 1$ et $M(\alpha) \leqslant 2$, l'estimation de Liouville fournit l'inégalité plus faible (pour D assez grand)

$$|\alpha - 1| > 2^{-D-1}.$$

Je tiens à remercier chaleureusement C.L. Stewart et M. Waldschmidt avec lesquels j'ai eu de fructueuses conversations lors de la préparation de ce travail.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME

Le plan de cette démonstration est classique en théorie des nombres transcendants.

1. Construction d'une fonction auxiliaire

On cherche un polynôme à coefficients entiers

$$F(X) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k X^k$$

qui admet un zéro d'ordre T au point β, les paramètres K et T ayant les valeurs suivantes

$$T = [\{ D \,.\, \mathrm{Log}(4D\,\beta^*\, M(\alpha)) \,/\, d\, \mathrm{Log}(2D) \}^{1/2}] + 1,$$

$$K = D + dT.$$

Ceci équivaut à résoudre le système suivant

$$\sum_{k=t}^{K-1} a_k \binom{k}{t} \beta^{k-t} = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,\dots,T-1.$$

D'après le lemme 4 de [1], une solution non triviale existe qui vérifie

$$A := \mathrm{Log}(\max |a_k|) \leqslant \mathrm{Log}\, 2 + \frac{1}{K-dT} \left\{ T\, \mathrm{Log}\, 2 + K\upsilon T + d \sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{Log} \binom{K}{t} \right\},$$

où

$$\upsilon = \mathrm{Log}\,(M(\beta)).$$

Ceci implique (grâce à la relation $K = D + dT$)

$$A \leqslant \mathrm{Log}\, 2 + \frac{T}{D} \left\{ \mathrm{Log}\, 2 + K\upsilon + d\, \mathrm{Log} \binom{K}{T} \right\}.$$

2. Majoration de F(z)

La quantité $|F(z)|$ vérifie les majorations

(4) $$|F(z)| \leqslant K\, e^A \,.\, \max \left\{ 1, |z|^K \right\}$$

et

(5) $$|F(z)| \leqslant |z-\beta|^T K e^A . \left(\frac{|\beta| K}{K-T}\right)^K \left(\frac{K-T}{|\beta|\, T}\right)^T \text{ si } |z| \leqslant R := \frac{|\beta| K}{K-T}.$$

La première de ces majorations est triviale. En appliquant le principe du maximum à la fonction entière $w \mapsto F(w)\,(w-\beta)^{-T}$ sur le disque de rayon R, il vient

$$|F(z)| \leqslant |z-\beta|^T \left(\Sigma\, |a_k|\right) R^K (R - |\beta|)^{-T},$$

d'où la seconde majoration.

3. Conclusion

Par construction $F(\alpha)$ n'est pas nul. On a donc

$$|\mathrm{Norme}\,(F(\alpha))| \geqslant a^{-D},$$

où a désigne le coefficient dominant du polynôme minimal de α sur $\mathbb{Z}$.

On peut supposer

$$|\alpha| \leqslant |\beta|\, \left(1 + \frac{1}{D+d}\right),$$

sinon l'inégalité (1) a lieu. Alors $|\alpha| \leqslant R$. Majorons $|F(\alpha)|$ grâce à (5) et les $|F(\alpha_i)|$, α_i conjugué de α distinct de α, grâce à (4). Il vient

$$-T \operatorname{Log} |\alpha-\beta| \leqslant D(A+\operatorname{Log} K) + (K-T) \operatorname{Log} |\beta| + K \operatorname{Log} \left(\frac{K}{K-T}\right) + T \operatorname{Log} \left(\frac{K-T}{T}\right) + K \operatorname{Log} (M(\alpha)).$$

Ce qui implique

(6) $$-\operatorname{Log} |\alpha-\beta| \leqslant \frac{D \operatorname{Log} 2}{T} + \operatorname{Log} 2 + K\upsilon + d \operatorname{Log}\left(\frac{K}{T}\right) + \frac{D}{T}\operatorname{Log} K + \frac{K}{T} \operatorname{Log}(\beta^* M(\alpha)) + \frac{K}{K-T} + \operatorname{Log}(K/T)$$

donc, puisque $K = D + dT$,

(7) $$-\operatorname{Log} |\alpha-\beta| \leqslant \frac{K}{T} \operatorname{Log}\,(2\, K\, \beta^*\, M(\alpha)) + K\upsilon + dT \operatorname{Log} K.$$

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé la condition (2), elle ne sert qu'à fournir les inégalités

$$dT \leqslant D \quad \text{et} \quad K \leqslant 2D.$$

Dans ces conditions l'inégalité (7) donne

$$-\operatorname{Log}|\alpha-\beta| \leqslant 2\,D\nu + 4\sqrt{Dd\,.\operatorname{Log}(4D\,\beta^{*}\ M(\alpha))\,.\operatorname{Log}(2D)}\,,$$

c'est le résultat cherché.

III. REMARQUES

1. La démonstration du théorème montre que la condition (2) peut être supprimée, quitte à remplacer l'inégalité (1) par (6) dans laquelle les seules contraintes sont $T \geqslant 1$ et $K = D + dT$. Par souci de simplicité choisissons $T = [\sqrt{D/d}] + 1$ et supposons $D \geqslant d$. On a alors $K \leqslant 3D$. On trouve ainsi que si α et β ne sont pas conjugués et si $D \geqslant d$ alors on a

$$|\alpha-\beta| > M(\beta)^{-3D} \exp\left\{-4\sqrt{Dd}\operatorname{Log}(6D\,\beta^{*}\ M(\alpha))\right\}.$$

2. Dans la démonstration du théorème l'inégalité (5) n'a été utilisée que pour α. Si on suppose que α et certains de ses conjugués sont proches de β, on obtient une inégalité meilleure que (6) en général. Plus précisément, soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ des conjugués de α et posons $\delta = \max_{1\leqslant i\leqslant r} |\alpha_i-\beta|$.

L'inégalité (6) peut être remplacée par

$$-r\operatorname{Log}\delta \leqslant \frac{D}{T}(A+\operatorname{Log}K) + \frac{rK}{T}\operatorname{Log}(\beta^{*}) + r\operatorname{Log}(K\,e/T) + \frac{K}{T}\operatorname{Log}M(\alpha).$$

A titre d'exemple, supposons $\beta = 1$. Cette inégalité s'écrit

$$-r\operatorname{Log}\delta \leqslant \frac{D\operatorname{Log}2}{T} + \operatorname{Log}2 + T\operatorname{Log}K + \frac{D}{T}\operatorname{Log}K + r\operatorname{Log}(K\,e/T) + \frac{K}{T}\operatorname{Log}M(\alpha).$$

En choisissant $T = [\sqrt{D}] + 1$, on en déduit

$$-r\operatorname{Log}\delta \leqslant 3\sqrt{D}\operatorname{Log}(4D\,M(\alpha)) + r\operatorname{Log}(3D).$$

Il en résulte en particulier que si α est un nombre algébrique de degré D et de mesure au plus 2 alors le nombre r de conjugués α_i de α qui vérifient

$$|\alpha_i-1| \leqslant \frac{1}{9D}$$

est majoré par $3\sqrt{D}\operatorname{Log}(8D)$. Apparemment, une estimation de Liouville fournit seulement une majoration du type $r \ll D/\operatorname{Log}D$.

REFERENCE

[1] MIGNOTTE Maurice and WALDSCHMIDT Michel. *«Linear forms in two logarithms and Schneider's method»*. Math. Ann. t. 231. 1978. p. 241-267.

(Manuscrit reçu le 11 décembre 1978)