Annales de la faculté des sciences de Toulouse

André Lichnerowicz

Algèbres de Lie attachées à un feuilletage

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 1 (1979), p. 45-76
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_45_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol N° 1 - Page 45 à 76

ALGEBRES DE LIE ATTACHEES A UN FEUILLETAGE

André Lichnerowicz (1)

(1) Collège de France, 75005 Paris, France.

Résumé : Soit $(W,\mathscr{F})$ une variété feuilletée ; $L_{\mathscr{F}}$ est l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux du feuilletage $\mathscr{F}$. L'algèbre de Lie L des champs de vecteurs tangents aux feuilles de $\mathscr{F}$ est un idéal de $L_{\mathscr{F}}$. Nous étudions ici la première et la seconde cohomologies de $L_{\mathscr{F}}$ et L à coefficients dans leurs représentations adjointes (cohomologie de Chevalley). Les premiers espaces des cohomologies (correspondant aux dérivations) ont été étudiés par Y. Kanie par des méthodes complètement différentes. Les seconds espaces des cohomologies déterminent les déformations infinitésimales des algèbres de Lie.

Summary : Let $(W,\mathscr{F})$ be a foliated manifold ; $L_{\mathscr{F}}$ is the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of the foliation $\mathscr{F}$. The Lie algebra L of the vector fields tangent to leaves of $\mathscr{F}$ is an ideal of $L_{\mathscr{F}}$. Here we study the first and second cohomologies of $L_{\mathscr{F}}$ and L with coefficients in their adjoint représentations (Chevalley cohomology). The first spaces of cohomologies (corresponding to the derivations) have been studied by Y. Kanie by means of a completely different method. The second spaces of cohomologies determine the infinitesimal deformations of the Lie algebras.

Introduction

La donnée d'un feuilletage $\mathscr{F}$ sur une variété différentiable W définit sur W l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs tangents au feuilletage et l'algèbre de Lie $L_{\mathscr{F}}$ des automorphismes infinitésimaux de ce feuilletage ; $L_{\mathscr{F}}$ n'est autre que le normalisateur de L dans l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de W.

Le but de cet article est l'étude, pour des feuilletages généraux, des algèbres de Lie L et $L_{\mathscr{F}}$ du point de vue de leurs dérivations et de leurs déformations infinitésimales, c'est-à-dire de leurs cohomologies de Chevalley. La détermination des dérivations a été faite par une voie différente par Kanie [1] . En adaptant les techniques que j'ai introduites dans [2] pour l'étude de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété, on obtient des généralisations des résultats de Kanie et la détermination des seconds espaces de cohomologie des algèbres de Lie et $L_{\mathcal{F}}$. Les résultats les plus délicats concernent naturellement $L_{\mathcal{F}}$.

Cet article est divisé en cinq sections ; la première est relative aux 1-cochaînes de L à cobord d-différentiable ($d \geqslant 1$). De telles l-cochaînes sont elles-mêmes définies par un opérateur différentiel d'ordre d. La détermination des dérivations de L se déduit de ce résultat. La seconde partie concerne les déformations infinitésimales différentiables de L et la détermination du second espace de cohomologie $H^2(L\,;L)$. Dans la troisième, nous étudions *les idéaux* de L par la méthode que nous avons introduite pour les algèbres de Lie infinies classiques (voir en particulier [2], [4], [5]) et nous montrons en particulier que L coïncide avec son idéal dérivé.

Les deux dernières parties sont relatives à $L_{\mathcal{F}}$; un théorème analogue à celui concernant L pour les 1-cochaînes à cobord d-différentiable est établi. De $[L,L] = L$, on déduit aisément la détermination des dérivations de $L_{\mathcal{F}}$ qui sont toutes intérieures. Une caractérisation de l'espace $H^2(L_{\mathcal{F}}\,;L)$ qui est isomorphe à un sous-espace de $H^2(L;L)$ est donnée. Les résultats principaux de cet article sont énoncés dans les théorèmes des § 5, 10, 15 et 16, 18.

Je remercie Bruce Reinhart pour une utile conversation au cours de ce travail.

1 - ALGEBRES DE LIE ATTACHEES A UN FEUILLETAGE

a) Soit W une variété différentiable, connexe, paracompacte, de dimension m et classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞. Nous notons $\{x^A\}$ $(A,B,\ldots = 1,\ldots,m)$ une carte locale de W de domaine U.

Supposons la variété W munie d'un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de codimension h ; $n = m - h$ est la dimension des feuilles. Une carte $\{x^A\} = \{x^i,x^a\}$ $(i,j,\ldots = 1,\ldots,n\,; a,b,\ldots = n+1,\ldots,m)$ de domaine U est dite *adaptée au feuilletage* $\mathcal{F}$ si, dans U, $x^a = \text{const.}$ le long des feuilles. Soit $\{x^{j'},x^{b'}\}$ une carte adaptée à $\mathcal{F}$, de domaine U' tel que $U \cap U' \neq \phi$; on a sur $U \cap U'$

$$x^{b'} = x^{b'}(x^a) \qquad x^{j'} = x^{j'}(x^i,x^a) \tag{1.1}$$

Soit Π une connexion linéaire sans torsion sur W ; sa 1-forme de connexion est définie dans une carte $\{x^A\}$ par la matrice (π^A_A) dont les éléments sont des formes de Pfaff locales. Si Π^A_{BC} sont les coefficients de la connexion $(\pi^A_B = \Pi^A_{BC}\, dx^C)$, on déduit de (1-1) que les coefficients (Π^a_{iC}) dans toute carte adaptée $\{x^i,x^a\}$ définissent sur W un tenseur. En retranchant ce tenseur de la connexion, on est conduit à la définition suivante.

DEFINITION. *Une connexion linéaire Γ de W est dite adaptée au feuilletage $\mathcal{F}$ si elle est sans torsion et si, pour toute carte adaptée $\{x^i,x^a\}$, sa 1-forme de connexion ω est telle que $\omega^a_i = 0$.*

b) Etant donnée une carte adaptée $\{x^i,x^a\}$ de domaine U, nous notons $\mathcal{A}(U)$ le module des fonctions éléments de $C^\infty(U\,;R)$, qui sont constantes sur les feuilles, c'est-à-dire ne dépendent que des x^a.

Un champ de vecteurs X de W préserve le feuilletage $\mathcal{F}$ si et seulement si, pour toute carte adaptée,

$$\mathcal{L}(X)\,\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}(U)$$

où $\mathscr{L}$ (.) est l'opérateur de dérivation de Lie. *Nous notons $L_{\mathscr{F}}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de W qui laissent invariant le feuilletage $\mathscr{F}$*. Pour que X appartienne à $L_{\mathscr{F}}$, il faut et il suffit que, dans toute carte adaptée, $\mathscr{L}(X)x^a = X^a \in \mathscr{A}(U)$, c'est-à-dire que les composantes $\{X^i, X^a\}$ de X vérifient

(1-2) $$\partial_i X^a = 0 \qquad (\partial_A = \partial / \partial x^A)$$

Soit Γ une connexion adaptée à $\mathscr{F}$, ∇ l'opérateur de dérivation covariante correspondant ; pour tout champ de vecteurs X, on a, pour toute carte adaptée $\nabla_i X^a = \partial_i X^a$. La condition (1-2) exprime donc que *le tenseur défini dans les cartes adaptées par $\{\nabla_i X^a = \partial_i X^a\}$ est nul.*

En particulier, si X est un champ de vecteurs de W *tangent au feuilletage*, on a $X^a = 0$ et X laisse invariant le feuilletage $\mathscr{F}$, feuille par feuille. *Nous notons L l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de W tangents au feuilletage.*

Soit $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de W. On voit immédiatement que $L_{\mathscr{F}}$ est *le normalisateur de L dans $\mathscr{L}$*. L'algèbre de Lie quotient $L_{\mathscr{F}} / L$ peut être considérée comme l'algèbre des automorphismes de l'espace des feuilles.

I - 1-COCHAINES DE L A COBORD d-DIFFERENTIABLE

2 - COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY

L'étude des dérivations et des déformations d'une algèbre de Lie procède d'une même cohomologie, la cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même correspondant à la représentation adjointe. Nous appelons ici cette cohomologie *la cohomologie de Chevalley* de l'algèbre de Lie envisagée.

a) Par définition, les p-cochaînes de l'algèbre de Lie L sont les applications p-linéaires alternées de L^p dans L, les o-cochaînes s'identifiant aux éléments de L. L'opérateur cobord ∂ fait correspondre à la p-cochaîne C la (p+1)-cochaîne ∂C définie de la manière suivante

(2-1) $$\begin{aligned} \partial C(X_o,\ldots,X_p) &= \epsilon^{\lambda_o \ldots \lambda_p}_{o \ldots p} \frac{1}{p!} [X_{\lambda_o}, C(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_p})] \\ &- \epsilon^{\lambda_o \ldots \lambda_p}_{o \ldots p} \frac{1}{2(p-1)!} C([X_{\lambda_o}, X_{\lambda_1}], X_{\lambda_2}, \ldots X_{\lambda_p}) \end{aligned}$$

où ϵ est l'indicateur antisymétrique de Kronecker et où $X_\lambda \in L$. Pour p = 1, on a :

(2-2) $$\partial C(X,Y) = [X,C(Y)] + [C(X),Y] - C([X,Y])$$

Il en résulte que les 1-cocycles ne sont autres que *les dérivations* de L et les 1-cocycles exacts *les dérivations intérieures.* En ce qui concerne les dérivations, aucune précision a priori portant sur le caractère des endomorphismes envisagés n'est nécessaire pour leur détermination.

b) Une p-cochaîne C de L est dite *locale* si, pour tout élément X_1 de L tel que $X_1|_U = 0$ pour un domaine U, on a $C(X_1,...,X_p)|_U = 0$. Si C est locale, C est aussi locale.

Une p-cochaîne C de L est dite *d-différentiable* ($d \geqslant 1$) si elle est définie par un opérateur p-différentiel sur L d'ordre maximum d en chaque argument. Une telle cochaîne est locale et sa restriction à tout domaine U est une p-cochaîne d-différentiable de L(U) en un sens évident. Les opérateurs multidifférentiels qui apparaissent peuvent être exprimés au moyen de ∇. Un calcul élémentaire montre que si C est d-différentiable, son cobord ∂C est aussi d-différentiable.

c) Nous avons établi dans [2] une proposition concernant, pour l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs d'une variété différentiable, les 1-cochaînes à cobord d-différentiable. Nous nous proposons dans cette section d'établir une propriété semblable pour l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à un feuilletage propre. Cette proposition permet la détermination des dérivations de L ; en dehors de son intérêt propre, une telle proposition intervient de manière essentielle dans la théorie de la trivialité ou de l'équivalence des déformations différentiables de L.

Nous établissons d'abord

PROPOSITION. *Une 1-cochaîne T sur L telle que ∂T soit une 2-cochaîne locale est elle-même locale*

En effet supposons que

$$[TX,Y] + [X,TY] - T[X,Y] = C(X,Y) \tag{2-3}$$

où C est une 2-cochaîne locale. Soit U un domaine de W et donnons-nous $X \in L$ tel que $X|_U = 0$; on a $C(X,Y)|_U = 0$. Choisissons un vecteur Y de L dont le support S(Y) est contenu dans U ; on a $[X,Y] = 0$ et par restriction à U, on déduit de (2-3) que $[TX,Y]|_U = 0$.

Soit x un point arbitraire de U, $\{x^A\}$ une carte adaptée de domaine V tel que $x \in V \subset U$. Choisissons Y tel que $Y(x) = 0$ et que le 1-jet $j^1(Y)(x)$ soit de rang n. Il vient

$$[TX,Y]^i\,(x) = (TX)^j\;\partial_j Y^i - Y^j\,\partial_j (TX)^i\quad (x) = 0$$

et par suite $(TX)(x) = 0$. Ainsi $TX|_U = 0$ et T est locale.

3 - 1-COCHAINE DE L(U) A COBORD d-DIFFERENTIABLE

Le cas envisagé ici et le cas de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs diffèrent peu. Les méthodes de démonstration employées sont proches et nous ne développons ici que celles des démonstrations qui présentent par rapport à [2] une certaine différence.

La proposition du § 2 nous conduit à effectuer une étude locale. *Nous supposons $n \geqslant 2$.*

a) Soit U le domaine d'une carte $\{x^A\}$ adaptée au feuilletage $\mathscr{F}$. Dans ce paragraphe, nous notons exceptionnellement $\{y^a\}$ les coordonnées locales constantes le long des feuilles de sorte que $\{x^A\} = \{x^i, y^a\}$. L(U) est l'algèbre des champs de vecteurs tangents au feuilletage pour $(U, \mathscr{F}|_U)$. Nous notons $\{e_{(A)}(x)\}$ la base naturelle en x de l'espace tangent définie par la carte.

Donnons-nous un endomorphisme T_U de L(U) tel que $\partial\, T_U$ soit une 2-cochaîne d-différentiable $(d \geqslant 1)$; pour $X, Y \in L(U)$, on a sur U :

$$T_U\,[X,Y] - [T_U X, Y] - [X, T_U Y] = C_U(X,Y) \tag{3-1}$$

la 2-cochaîne C s'exprimant par :

$$C^i(X,Y) = A^{iRS}_{k\ell}(\partial_R X^k\, \partial_S Y^\ell - \partial_R Y^k\, \partial_S X^\ell),\ \ C^a(X,Y) = 0$$

où R, S sont des indices multiples de différentiation vérifiant $0 \leqslant |R| \leqslant d,\ 0 \leqslant |S| \leqslant d$. On a

LEMME 1. *T_U et la carte adaptée $\{x^A\}$ de domaine U étant donnés, il existe un opérateur différentiel unique P_U d'ordre d sur L(U), tel que $T^{(d)}_U = T_U - P_U$ annule tous les vecteurs dont les composantes sont des polynomes de degré d en les coordonnées ; P_U vérifie (3-1) pour une 2-cochaîne d-différentiable convenable et est invariant par translation de la carte.*

En effet posons sur U

$$P^i_{(0)k} = T^i_U(e_{(k)}) \qquad\qquad P_{(0)}(X) = P^i_{(0)k}\, X^k\, e_{(i)}$$

On définit ainsi sur U un opérateur $P_{(0)}$ tel que l'endomorphisme $T^{(0)}_U = T_U - P_{(0)}$ annule les vecteurs à composantes constantes et vérifie (3-1). Posons de même

$$P^{iA}_{(1)k} = T^{(0)i}_U\,(X^A\, e_{(k)} \qquad\qquad P_{(1)}(X) = P^{iA}_{(1)k}\, \partial_A\, X^k\, e_{(i)}$$

On définit ainsi sur U un opérateur $P_{(1)}$ du premier ordre tel que $T^{(1)}_U = T^{(0)}_U - P_{(1)}$ annule les vecteurs à composantes polynomes du 1er degré et vérifie (3-1) pour $1 \leqslant d$. En procédant par récurrence, on aboutit à un endomorphisme $T^{(d)} = T_U - \sum_{A=0}^{d} P_{(A)} = T_U - P_U$ qui annule les vecteurs à composantes polynomes de degré d et vérifie (3-1). L'opérateur P_U vérifie les conditions énoncées dans le lemme.

LEMME 2. *L'endomorphisme $T^{(d)}_U$ du lemme 1 annule les vecteurs à composantes polynômes de degré (d+1) en les coordonnées choisies.*

Soit $x_o \in U$ le point de coordonnées nulles dans la carte envisagée. Nous posons

(3-2) $$X = (x^1)^{j_1} \dots (x^n)^{j_n} (y^1)^{p_1} \dots (y^h)^{p_h} e_{(k)}$$

avec

$$j_1 + \dots j_n + p_1 + \dots + p_h = d + 1 \geqslant 2$$

Supposons que l'un des entiers p, soit p_1, soit $\geqslant 1$. Le vecteur Y, à composante de degré (d + 1),

$$Y = (x^1)^{j_1} \dots \frac{(x^\ell)^{j_\ell+1}}{j_\ell+1} \dots (x^n)^{j_n} (y^1)^{p_1-1} \dots (y^h)^{p_h} e_{(k)}$$

est tel que

$$[y^1 e_{(\ell)}, Y] = X$$

En appliquant (3-1) à $T_U^{(d)}$ et aux vecteurs $y^1 e_{(\ell)}$ et Y, il vient en x_o :

$$T_U^d(X)(x_o) = [T_U^d(y^1 e_{(\ell)}), Y] (x_o) + [y^1 e_{(\ell)}, T_U^d Y] (x_o) + C_U(y^1 e_{(\ell)}, Y) (x_o)$$

où tous les termes du second membre sont nuls. Ainsi $T_U^d(X)$ est nul en x_o et, par translation de la carte, $T_U^d(X)$ est nul sur U.

Nous sommes donc ramenés à étudier le cas où $p_1 = \dots = p_h = 0$. Il résulte de (3-3) qu'ou bien deux des indices j sont $\geqslant 1$, ou bien l'un d'entre eux est $\geqslant 2$. Si $j_1 \geqslant 1$, le vecteur

$$Y = (x^1)^{j_1-1} \dots \frac{(x^\ell)^{j_\ell+1}}{j_\ell+1} \dots (x^n)^{j_n} e_{(\ell)} \text{ si } \ell \neq 1, \quad Y = X / j_1 \text{ si } \ell = 1$$

vérifie *pour k $\neq$ 1*

$$[x^1 e_{(\ell)}, Y] = X$$

En appliquant (3-1) à $T_U^{(d)}$ et aux vecteurs $x^1 e_{(\ell)}$ et Y, il vient $T_U^{(d)}(X)(x_o) = -(T_U^{(d)1}(Y) e_{(\ell)}) (x_o)$ où le choix de l'indice ℓ est arbitraire. Il en résulte que pour $k \neq 1$, $T_U^{(d)}(X)$ est nul sur U.

L'autre cas à envisager est $j_1 \geqslant 2$, k = 1. Pour $Y = X / (j_1 - 1)$, on a

$$[x^1 e_{(1)}, Y] = X$$

On en déduit en x_o :

$$(j_1 - 1)\, T_U^{(d)} X = -(T_U^{(d)} X)^1\, e_1$$

et par suite $(T_U^{(d)} X)(x_o) = 0$. Ainsi par translation $T_U^{(d)} X$ est nul sur U.

4 - DETERMINATION DES 1-COCHAINES DE L(U) COBORD d-DIFFERENTIABLE

a) Nous nous proposons d'établir le lemme suivant

LEMME - *Soit* $T_U^{(d)}$ *l'endomorphisme de L(U) défini par le lemme 1 du § 3. Si* $X \in L(U)$ *admet un (d+1)-jet* $j^{d+1}(X)(x_o)$ *nul en* $x_o \in U$, $T_U^{(d)}$ *est nul en* x_o.

Supposons par translation de la carte choisie que x_o soit le point de coordonnées nulles. Si $j^{d+1}(X)(x_o)$ est nul, X peut être pris égal à :

$$X = (x^1)^{j_1} \ldots (x^n)^{j_n} (y^1)^{p_1} \ldots (y^h)^{p_h}\, \mathcal{X}(x^A)\, e_{(n)}$$

avec

$$j_1 + \ldots + j_n + p_1 + \ldots + p_h = d + 2 \geqslant 3$$

Supposons d'abord que l'un des indices p, soit p_1, ne soit pas nul. Développons $\mathcal{X}(x^A)$ selon les puissances de x^1 par la formule de Taylor. On a :

$$\mathcal{X}(x^A) = \mathcal{X}_o(x^Q) + x^1\, \mathcal{X}_1(x^Q) + \ldots + (x^1)^r\, \mathcal{X}_r(x^Q) + (x^1)^{r+1}\, \mathcal{X}_{r+1}(x^A) \qquad (Q \neq 1)$$

Si l'on sait traiter le cas où $X = (x^1)^{d+3}\ \varphi(x^A)\, e_{(n)}$, on est ramené à traiter le cas suivant

(4-1) $$X = (x^1)^{j_1} \ldots (x^n)^{j_n} (y^1)^{p_1} \ldots (y^h)^{p_h}\ \varphi(x^Q) e_{(n)} \qquad (Q \neq 1)$$

avec

(4-2) $$j_1 + \ldots + j_n + p_1 + \ldots + p_h \geqslant d + 2 \geqslant 3 \quad \text{et} \quad p_1 \geqslant 1$$

Introduisons le vecteur

$$Y = \frac{(x^1)^{j_1+1}}{j_1+1} (x^2)^{j_2} \ldots (x^n)^{d_n} (y^1)^{p_1 - 1} \ldots (y^h)^{p_h}\ \ \varphi(x^Q)\ e_{(n)}$$

il vient :

$$[\, y^1\, e_{(1)}\, ,\, Y\,] = X$$

En appliquant (3-1) aux vecteurs $y^1\, e_{(1)}$ et Y et à l'endomorphisme $T_U^{(d)}$, on a :

$$T_U^{(d)}(X) = T_U^{(d)}(y^1\, e_{(1)}, Y) + [y^1\, e_1, T_U^{(d)} Y] + C_U(y^1\, e_{(1)}, Y)$$

On en déduit $(T_U^d(X))(x_o) = 0$.

Nous sommes amenés à traiter le cas où tous les indices p sont nuls, c'est-à-dire le cas où

$$X = (x^1)^{j_1} \dots (x^n)^{j_n}\, \mathcal{X}(x^A)\, e_{(n)}$$

avec

$$j_1 + \dots + j_n \geqslant d + 2 \geqslant 3$$

Par développements de $\mathcal{X}(x^A)$ selon les puissances de x^1 par la formule de Taylor on est ramené à l'étude des sept cas de [2], § 6, p. 357 qui peut s'effectuer de manière identique à la seule exception du cas 4. On a dans ce cas

$$X = (x^1)^3\ \varphi\,(x^Q)\, e_{(1)} \qquad (d = 1)$$

On a en développant $\varphi(x^Q)$ $(Q \neq 1)$ selon la formule de Taylor à plusieurs variables au voisinage de x_o

$$\varphi\,(x^Q) = \varphi_o + x^2\ \varphi_2(x^Q) + \dots + x^n\ \varphi_n(x^Q) + y^1\ \psi(x^Q) + \dots + y^h\ \psi_h(x^Q)$$

où φ_o est une constante et $\varphi_2, \dots, \varphi_n$, $\psi_1, \dots, \psi_h$ des fonctions convenables des variables x^Q. Les termes en y relèvent du cas précédemment traité et les autres termes de l'étude de [2]. Notre lemme est donc démontré.

c) On déduit de ces lemmes la proposition suivante

PROPOSITION - *Si T_U est un endomorphisme de L(U) tel que $\partial\, T_U$ soit une 2-cochaîne d-différentiable ($d \geqslant 1$), on a $T_U = P_U$, où P_U est un opérateur différentiel d'ordre d sur L(U).*

En effet soit x un point arbitraire de U, $\{x^A\}$ une carte adaptée de domaine U. A T_U correspond par cette carte un opérateur différentiel P_U d'ordre d tel que l'endomorphisme $T_U^{(d)} = T_U - P_U$ annule les vecteurs dont les composantes sont des polynômes de degré (d+1) en les coordonnées choisies (lemme 2 du § 3). Si $X \in L(U)$, il existe sur U un vecteur $\hat{X}$ dont les composantes sont des polynômes de degré (d+1), tel que $j_U^{d+1}(X)(x) = j_U^{d+1}(\hat{X})(x)$. Il résulte du lemme précédent

$$T_U^{(d)}(X)(x) = T_U^{(d)}(\hat{X})(x) = 0$$

Ainsi $T_U = P_U$.

5 - 1-COCHAINE DE L A COBORD d-DIFFERENTIABLE

Soit T une 1-cochaîne de L telle que ∂T soit une 2-cochaîne *d-différentiable*. Il résulte de la proposition du §2, c, que T est nécessairement *locale*.

Soit U un domaine de W ; si $X_U \in L(U)$, il existe des vecteurs $X \in L$ tels que $X|_U = X_U$. L'endomorphisme local T de L induit sur L(U) par $T_U(X_U) = T(X)|_U$ un endomorphisme T_U bien déterminé de L(U) qui est tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne d-différentiable de L(U). D'après la proposition du §4, c, T_U est défini par un opérateur différentiel P_U d'ordre d. En introduisant un recouvrement localement fini de W, on en déduit par un raisonnement standard (voir par exemple [3]).

THEOREME - *Si T est une 1-cochaîne de L telle que ∂T soit une 2-cochaîne d-différentiable ($d \geqslant 1$), la 1-cochaîne T est d-différentiable.*

Soit D une dérivation de L ; D étant nulle, D est nécessairement 1-différentiable, d'après le théorème précédent. Nous nous proposons d'en déduire la détermination des dérivations de L.

6 - DETERMINATION DES DERIVATIONS DE L

a) Soit $\{x^A\}$ une carte adaptée de domaine U. Si X est un élément de L, on déduit du théorème du § 5 que, pour une dérivation D de L, on a localement sur U

$$(DX)^i = A_k^{iB}\, \partial_B X^k + B_k^i X^k \tag{6-1}$$

où les A_k^{iB} sont les composantes *d'un $\mathcal{F}$-tenseur A*. Exprimons que D vérifie $\partial D = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&A_k^{iB}\, \partial_B(X^\ell \partial_\ell Y^k - Y^\ell \partial_\ell X^k) + B_k^i(X^\ell \partial_\ell Y^k - Y^\ell \partial_\ell X^k) \\
&- A_k^{\ell B}\, \partial_B X^k \partial_\ell Y^i + Y^\ell \partial_\ell(A_k^{iB} \partial_B X^k) - B_k^\ell X^k\, \partial_\ell Y^i + Y^\ell \partial_\ell(B_k^i X^k) \\
&+ A_k^{\ell B}\, \partial_B Y^k \partial_\ell X^i - X^\ell \partial_\ell(A_k^{iB}\, \partial_B Y^k) + B_k^\ell Y^k\, \partial_\ell X^i - X^\ell \partial_\ell(B_k^i Y^k) = 0
\end{aligned} \tag{6-2}$$

Les termes en dérivées secondes disparaissant, étudions les termes quadratiques en les dérivées premières de X et Y. Il vient pour tout X, Y ∈ L

$$A_k^{iB}(\partial_B X^\ell \partial_\ell Y^k - \partial_B Y^\ell \partial_\ell X^k) - A_k^{\ell C}(\partial_C X^k \partial_\ell Y^i - \partial_C Y^k \partial_\ell X^i) = 0$$

En mettant en évidence le coefficient de $\partial_B X^\ell \partial_C Y^k$, on en déduit :

$$A_k^{iB}\, \delta_\ell^C + A_k^{mC}\, \delta_\ell^i \delta_m^B = A_\ell^{iC}\, \delta_k^B + A_\ell^{mB}\, \delta_k^i\, \delta_m^C \tag{6-3}$$

En particulier si C = ℓ, on a (sans sommation)

(6-4)
$$A_k^{iB} + A_k^{m\ell}\ \delta_\ell^i\ \delta_m^B = A_\ell^{i\ell}\ \delta_k^B + A_\ell^{\ell B}\delta_k^i$$

Faisons dans (6-4) $k \neq i, B$ et $\ell = i$. Il vient :

$$A_k^{iB} = 0 \qquad \text{pour } k \neq i, B$$

Faisons dans (6-3) $k \neq i, B$ et $\ell = i$. Il reste

$$A_k^{mC}\ \delta_m^B = 0$$

Ainsi

(6-5)
$$A_k^{iC} = 0 \qquad \text{pour } k \neq i$$

Prenons enfin $k = i \neq B, \ell$ dans (6-4). On obtient :

$$A_k^{kB} = A_\ell^{\ell B} = Z^B$$

Ainsi, d'après (6-5), le tenseur A a nécessairement des composantes de la forme

(6-6)
$$A_k^{iB} = \delta_k^i Z^B$$

où les Z^B sont les composantes *d'un vecteur Z.*

b) Cela posé, étudions dans (6-2) les termes en $X^\ell\ \partial_B Y^i$. Il vient :

$$(\partial_\ell Z^B + B_\ell^k\ \delta_k^B)X^\ell\,\partial_B Y^i = 0$$

On en déduit

(6-7)
$$B_k^i\delta_i^B = -\ \partial_k Z^B$$

Faisons $B = a$ dans (6-7). Il reste

(6-8)
$$\partial_k Z^k = 0$$

et *Z appartient à* $L_{\mathcal{T}}$. Par suite $B_k^i = -\,\partial_k Z^i$. Ainsi (6-1) s'écrit nécessairement

$$(DX)^i = Z^B\,\partial_B X^i - X^k\,\partial_k Z^i = [Z,X]^i$$

c'est-à-dire

$$DX = [Z,X] \qquad (Z \in L_{\mathcal{T}})$$

Inversement L étant un idéal de $L_{\mathcal{T}}$, (6-9) définit toujours une dérivation de L. On a

THEOREME (KANIE) - *Toute dérivation de l'algèbre de Lie L est donnée par $X \in L \to [Z,X] \in L$, où $Z \in L_{\mathcal{G}}$. Le premier espace $H^1(L;L)$ de la cohomologie de Chevalley de L est isomorphe à $L_{\mathcal{G}}/L$.*

II - DEFORMATIONS DIFFERENTIABLES DE L'ALGEBRE DE LIE L

7 - DEFORMATIONS DE L. [6]

a) Soit $E(L;\lambda)$ l'espace des fonctions formelles en λ à coefficients dans L. Considérons une application bilinéaire alternée $L \times L \to E(L;\lambda)$ qui donne la série formelle en λ

(7-1)
$$[X,Y]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(X,Y) = [X,Y] + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_r(X,Y)$$

où les $C_r (r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes sur L qui s'étendent naturellement à $E(L;\lambda)$. Si S est la sommation après permutation circulaire sur $X, Y, Z \in L$ on a

(7-2)
$$S\,[[X,Y]_\lambda , Z]_\lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^t D_t(X,Y,Z)$$

où D_t est la 3-cochaîne de Chevalley :

(7-3)
$$D_t(X,Y,Z) = \sum_{r+s=t} S\, C_r(C_s(X,Y),Z) \qquad (r,s \geqslant 0)$$

On dit que (7-1) définit une *déformation formelle* de l'algèbre de Lie L si l'identité de Jacobi correspondante est formellement satisfaite, c'est-à-dire si $D_t = 0$ $(t = 1,2,\ldots)$. On vérifie immédiatement que

(7-4)
$$D_t \equiv E_t - \partial C_t$$

où l'on a posé

(7-5)
$$E_t(X,Y,Z) = \sum_{r+s=t} S\, C_r(C_s(X,Y),Z) \qquad (r,s \geqslant 1)$$

Si (7-1) est tronquée à l'ordre q, c'est une déformation à l'ordre q si $D_1 = \ldots = D_q = 0$; E_{q+1} est alors un 3-cocycle et l'on peut trouver une nouvelle 2-cochaîne C_{q+1} telle qu $D_{q+1} = 0$ si et seulement si E_{q+1} est *exact.* La classe définie par E_{q+1} est *l'obstruction à l'ordre* (q+1) à la construction d'une déformation de L. C'est un élément du troisième espace $H^3(L;L)$ de cohomologie de Chevalley.

Si $t = 1$ dans (7-4), on a seulement $\partial C_1 = 0$. Une déformation à l'ordre 1 est dite une *déformation infinitésimale* de L.

b) Considérons une série formelle en

(7-6)
$$T_\lambda = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s$$

où T_o = Id est l'opérateur identité et les T_s ($s \geqslant 1$) des endomorphismes de l'espace vectoriel L ; T_λ opère naturellement sur l'espace E (L ;λ). Soit

$$[X,Y]^*_\lambda = [X,Y] + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C^*_r (X,Y) \tag{7-7}$$

une autre application bilinéaire alternée. On démontre à partir de formules universelles la proposition suivante

PROPOSITION - *Une déformation (7-1) de L et l'opérateur formel T_λ étant donnés, il existe une application (7-7) unique telle que l'identité*

$$T_\lambda[X,Y]^*_\lambda = [T_\lambda X, T_\lambda Y]_\lambda \tag{7-8}$$

soit formellement satisfaite. Cette application est une nouvelle déformation de L qui est dite équivalente à (7-1). Une déformation équivalente à la déformation identité ($C_r = 0$ pour $r \geqslant 1$) est dite triviale.

Considérons une déformation (7-7) de L supposée équivalente à la déformation (7-1) jusqu'à l'ordre q. On met en évidence un 2-cocycle $(C^*_{q+1} - C_{q+1} + G_{q+1})$ élément de $H^2(L;L)$ qui est *l'obstruction à l'équivalence* à l'ordre (q+1) des deux déformations. S'il y a équivalence de deux déformations $C^*_t - C_t + G_t = \partial T_t$ où G_t s'exprime par une formule universelle en termes des 2-cochaînes C_r , C^*_r et des T_r d'indices strictement inférieurs à T. En particulier si deux déformations infinitésimales sont définies par les 2-cocycles C_1 et C^*_1, elles sont équivalentes si le 2-cocycle $(C^*_1 - C_1)$ est *exact.* Une déformation infinitésimale définie par C_1 est triviale si C_1 est exact.

c) La déformation (7-1) de L est dite *différentiable* si les 2-cochaînes C_r sont différentiables pour tout r. Si le 2-cocycle C_1 est d-différentiable et si la déformation est triviale à l'ordre 1, on a $C_1 = \partial T_1$, où T_1 est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre d d'après le théorème du § 5. En procédant par récurrence à partir de $C^*_t - C_t + G_t = \partial T_t$, on déduit du théorème du § 5 que si deux déformations formelles différentiables de L sont équivalentes, les termes de (7-6) qui assurent l'équivalence sont nécessairement donnés par des opérateurs différentiels. On traduit ce fait en disant que les déformations sont *différentiablement équivalentes* (voir [2]).

PROPOSITION - *Si deux déformations différentiables de L sont équivalentes, elles sont différentiablement équivalentes.*

8 - 2-COHOMOLOGIE 1-DIFFERENTIABLE DE L

Nous sommes conduits à étudier partiellement la cohomologie différentiable de l'algèbre de Lie L. Nous nous restreindrons d'abord aux cochaînes 1-différentiables.

Introduisons sur $(W,\mathscr{F})$ une connection Γ adaptée au feuilletage. Une p-cochaîne 1-différentiable $C_{(p)}$ de L peut s'écrire

$$C_{(p)} = \sum_{q=0}^{p} A_{(p,q)} \tag{8-1}$$

où la p-cochaîne 1-différentiable $A_{(p,q)}$, dite *de type* (q, p-q) par rapport aux dérivées premières des vecteurs et aux vecteurs eux-mêmes, est donnée, sur le domaine U d'une carte adaptée, par

$$(8\text{-}2)\qquad A^i_{(p,q)}(X_1,\dots,X_p)=\frac{1}{p!}\,\epsilon^{\lambda_1\dots\lambda_p}_{1\dots p}\,A^{iB_1\dots B_q}_{s_1\dots s_q k_{q+1}\dots k_p}\,\nabla_{B_1}X^{s_1}_{\lambda_1}\dots\nabla_{B_q}X^{s_q}_{\lambda_q}X^{k_{q+1}}_{\lambda_{q+1}}\dots X^{k_p}_{\lambda_p}$$

Les coefficients A sont supposés antisymétriques par rapport aux couples $(B_1,s_1),\dots,(B_q,s_q)$, antisymétriques par rapport aux indices $k_{q+1},\dots,k_p$. Ils définissent sur W un $\mathscr{F}$-tenseur noté encore $A_{(p,q)}$; la connexion étant donnée, la décomposition (8-1) de $C_{(p)}$ en somme de p-cochaînes de types déterminés est unique.

a) Soit $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de W. Nous considérons aussi des p-cochaînes sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ et l'opérateur cobord qui leur est naturellement associé. On déduit des résultats de [2] p.346-348

LEMME - *L'opérateur ∂ admet une décomposition en somme de trois opérateurs $\partial=\partial'+\Lambda+M$, où les opérateurs ∂', Λ, M sont respectivement de type (1,0), (0,1), (-1,2) ; par raison de type, ∂' est aussi un opérateur de cohomologie ($\partial'^2=0$) et la cohomologie définie sur les cochaînes 1-différentiables à valeurs dans $\mathscr{L}$ par l'opérateur ∂' est triviale. En particulier tout p-cocycle de type (p,0) est nul.*

On en déduit comme dans [2].

PROPOSITION - *Si $C_{(p)}$ est un p-cocycle 1-différentiable de L, il existe une (p-1)-cochaîne $T_{(p-1)}$ sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que*

$$(8\text{-}3)\qquad C_{(p)}=\partial T_{(p-1)}$$

Les éléments de $T_{(p-1)}$ sont déduits des (p-1)-cochaînes à valeurs dans $\mathscr{L}$ qui s'expriment à partir des A, sur le domaine U, par :

$$B^{B_1B_2\dots B_q}_{s_2\dots s_q k_{q+1}\dots k_p}=A^{s\,B_1B_2\dots B_q}_{s\,s_2\dots s_q k_{q+1}\dots k_p}$$

b) Limitons-nous aux 2-cochaînes 1-différentiables C de L. Sur le domaine U d'une carte adaptée, on a avec des antisymétriques évidentes :

$$(8\text{-}4)\qquad C^i(X,Y)\big|_U=\underset{(2)}{A}{}^{iAB}_{jh}\,\nabla_A X^j\,\nabla_B Y^h+\underset{(1)}{A}{}^{iA}_{jk}(X^j\,\nabla_A Y^k-Y^j\,\nabla_A X^k)+\underset{(0)}{A}{}^{i}_{jk}\,X^j\,Y^j$$

Il vient

COROLLAIRE - *Si C est un 2-cocycle 1-différentiable de L à valeurs dans L, il existe une application 1-différentiable T de L dans $\mathscr{L}$ telle que $C=\partial T$.*

Si l'on introduit la 1-cochaîne K sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ définie par :

$$K^A(X)\big|_U=A^{s\,AB}_{sk}\,\nabla_B X^k$$

il existe une constante λ telle que le 2-cocycle $\widetilde{C} = C - \lambda \partial K$, à valeurs dans $\mathscr{L}$, ne contienne pas de termes quadratiques en les dérivées premières des vecteurs. Ensuite si H est une 1-cochaîne définie, avec des notations évidentes, par :

$$H^A(X)\Big|_U = \widetilde{A}^{sA}_{(1)sj}\, X^j$$

il existe une constante μ telle que $\widetilde{C} - \mu\, \partial H$ ne contienne pas les dérivées premières et est par suite nul. On a ainsi un procédé régulier qui définit T d'une manière unique à partir de C. La 1-cochaîne T à valeurs dans $\mathscr{L}$ peut s'écrire sur U :

$$T^A(X)\Big|_U = P^{AB}_j\ \nabla_B X^j + Q^A_j X^j \tag{8-5}$$

où P et Q sont des $\mathscr{F}$-tenseurs ; T(X) peut aussi s'écrire sur U :

$$T^A(X)\Big|_U = P^{AB}_j\ \partial_B X^j + L^A_j X^j \tag{8-6}$$

où les coefficients L ne sont plus les composantes d'un tenseur. Il vient en évaluant ∂T :

$$\begin{aligned} \partial T^A(X,Y)\Big|_U &= P^{BC}_j(\partial_C X^j \partial_B Y^A - \partial_C Y^j \partial_B X^A) - P^{AB}_j(\partial_B X^\ell \partial_\ell Y^j - \partial_B Y^\ell \partial_\ell X^j) \\ &+ \partial_j P^{AB}_k(X^j \partial_B Y^k - Y^j \partial_B X^k) + L^B_j(X^j \partial_B Y^A - Y^j \partial_B X^A) + (\partial_j L^A_k - \partial_k L^A_j) X^j Y^k \end{aligned} \tag{8-7}$$

Le terme quadratique en les dérivées premières s'écrit :

$$(P^{CB}_j \delta^A_k - P^{BC}_k \delta^A_j - P^{AB}_k \delta^C_j + P^{AC}_j \delta^B_k)\partial_B X^j \partial_C Y^k \tag{8-8}$$

exprimons que les composantes A = a de $\partial T(X,Y)$ sont nulles. Il résulte d'abord de (8-8)

$$P^{aB}_k \delta^C_j = P^{aC}_j \delta^B_k$$

Pour $B \neq k$ il vient $P^{aB}_k = 0$. Pour $B = k$ et $C = j$ on a (sans sommation)

$$P^{ak}_k = P^{aj}_j = Z^a$$

et ainsi

$$P^{aB}_k = Z^a \delta^B_k \tag{8-9}$$

En un point x où Y(x) = 0, la nullité des composantes A = a de $\partial T(X,Y)$ donne en x

$$X^j\, \partial_j P^{aB}_k\, \partial_B Y^k = 0$$

On a donc nécessairement :

(8-10) $$\partial_j Z^a = 0$$

Il vient enfin

(8-11) $$\partial_j L_k^a - \partial_k L_j^a = 0$$

Ainsi la 1-cochaîne T est telle que :

(8-12) $$T^a(X)\Big|_U = Z^a \nabla_j X^j + Q_j^a X^j$$

où

$$L_j^a = Q_j^a + Z^a \Gamma_{kj}^k$$

vérifie (8-11). Introduisons le tenseur partiel de courbure de la connexion adaptée, défini par :

(8-13) $$S_{ij} = R_{k,ij}^k = \partial_i \Gamma_{kj}^k - \partial_j \Gamma_{ki}^k$$

La relation (8-11) se traduit par :

(8-14) $$\partial_j Q_k^a - \partial_k Q_j^a = -Z^a S_{jk}$$

c) La 1-cochaîne T que nous avons étudiée et qui est telle que $\partial T = C$ est déterminée à une 1-cochaîne 1-différentiable T' sur L près, à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que

$$\partial T' = 0$$

T' peut être représentée sur U par :

$$T'^A(X)\Big|_U = P'^{AB}_j \partial_B X^j + L'^A_j X^j$$

Il résulte de (8-8) appliquée à T' :

(8-15) $$P'^{CB}_j \delta_k^A - P'^{BC}_k \delta_j^A - P'^{AB}_k \delta_j^C + P'^{AC}_j \delta_k^B = 0$$

On en déduit pour $A = k \neq j$, $B \neq k$, $C \neq j$

$$P'^{CB}_j = 0 \qquad \text{pour } C \neq j$$

Pour $A = k$, $B \neq k$, $C = j$, il vient :

$$P'^{jB}_j - P'^{kB}_k = 0$$

Il existe par suite V^B tels que $P'^{jB}_j = V^B$ et l'on a :

(8-16) $$P'^{AB}_j = V^B \delta_j^A$$

Il résulte alors de (8-7) qu'en un point x où Y(x) = 0, on a

$$\partial_j P'^{AB}_k + L'^B_j \delta^A_k = 0$$

et par suite

$$L'^B_j = -\partial_j V^B$$

On a

LEMME - *Si T' est une 1-cochaîne 1-différentiable sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que $\partial T' = 0$, il existe un vecteur V de $\mathscr{L}$ tel que $T'X = [V,X]$, pour tout $X \in L$.*

d) Cherchons à quelles conditions le 2-cocycle C = T de L est *exact dans L.* S'il en est ainsi il existe une 1-cochaîne Θ à valeurs dans L telle que :

$$\partial(T - \Theta) = 0$$

Si $T' = T - \Theta$, on a $T'X = [V,X]$. Mais, Θ étant à valeurs dans L,

$$P'^{aC}_k = Z^a \delta^C_k = 0 \qquad\qquad L'^a_j = L^a_j = -\partial_j V^a$$

Ainsi Θ existe si $Z^a = 0$ et si :

(8-17) $$Q^a_j = -\partial_j V^a$$

9 - INTERPRETATION COHOMOLOGIQUE

On peut traduire les résultats précédents en termes cohomologiques

a) Soit $T\mathscr{F}$ le fibré tangent au feuilletage et $\nu\mathscr{F} = TW / T\mathscr{F}$ le fibré vectoriel normal. Nous notons respectivement $T^*\mathscr{F}$ et $\nu^*\mathscr{F}$ les fibrés vectoriels duaux ; $\nu^*\mathscr{F}$ peut être défini par les covecteurs $\in T^*W$ nuls sur les éléments de $T\mathscr{F}$ et $T^*\mathscr{F} = T^*W / \nu^*\mathscr{F}$. Si Λ désigne le produit extérieur de fibrés vectoriels, considérons le fibré vectoriel sur W défini par $\Lambda^p(T^p\mathscr{F}) \times \nu\mathscr{F}$; une section de ce fibré vectoriel est par définition *une p-forme tangentielle à valeurs normales.* Si F^p est l'espace de ces p-formes, nous notons $d_{\mathscr{F}} : F^p \to F^{p+1}$ la différentiation extérieure *tangente au feuilletage.* On définit ainsi des espaces de cohomologie notés $H^p(\mathscr{F};\nu\mathscr{F})$.

Un élément de F^o peut être défini, dans un atlas de cartes adaptées, par $\{Z^a\}$; c'est un 0-cocycle si, pour toute carte, $\partial_j Z^a = 0$. Il est clair que tout élément de $L_{\mathscr{F}} / L$ est un 0-cocycle. Inversement il résulte d'un raisonnement standard que, pour tout 0-cocycle, on peut construire un élément Z de $L_{\mathscr{F}}$ le définissant. On a ainsi

PROPOSITION - *L'espace $L_{\mathscr{F}} / L$ est isomorphe à l'espace $H^o(\mathscr{F}; \nu\mathscr{F})$.*

b) D'après (8-9), (8-10) les Z^a définissent un 0-cocycle ; les $Z^a S_{ij}$ définissent un 2-cocycle dont la classe, élément de $H^2(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$ est manifestement indépendante de la connexion adaptée choisie. Nous sommes conduits, d'après (8-14), à introduire l'application π de $H^0(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$ dans $H^2(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$ induite par $\{Z^a\} \to \{-Z^a S_{ij}\}$ et à poser

$$P^0(\mathcal{F};\nu\mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \pi$$

D'après (8-9), (8-10), (8-14) et le lemme, $C = \partial T$, *2-cocycles de L*, détermine un 0-cocycle appartenant à $P^0(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$ et une classe de 1-formes tangentielles $d_{\mathcal{F}}$-fermées à valeurs normales, c'est-à-dire un élément de $H^1(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$; d'après § 8, d, $C = \partial T$ est un *2-cocycle exact de L* si le 0-cocycle précédent est nul et si la classe des 1-formes $d_{\mathcal{F}}$-fermées est nulle. Nous obtenons ainsi

PROPOSITION - *Le second espace de cohomologie 1-différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie L est isomorphe à :*

$$P^0(\mathcal{F};\nu\mathcal{F}) \oplus H^1(\mathcal{F};\nu\mathcal{F})$$

10 - DEFORMATIONS INFINITESIMALES DIFFERENTIABLES

a) Nous nous proposons d'étudier les 2-cocycles d-différentiables ($d \geqslant 2$) sur L. Soit $C_{(d)}(X,Y)$ un 2-cocycle d-différentiable de L ; il peut s'écrire sur le domaine U d'une carte adaptée :

(10-1) $$C^i_{(d)}(X,Y)\big|_U = A^{iRS}_{jk} \; \nabla_R X^j \; \nabla_S Y^k$$

où $R = (B_1,\dots,B_\ell)$, $S = (C_1,\dots,C_\ell)$ sont des indices de différentiation composés vérifiant les inégalités $0 \leqslant |R| \leqslant d$, $0 \leqslant |S| \leqslant d$. Les coefficients $A^{\cdots}_{\cdots}$ sont supposés symétriques par rapport aux indices $B_1,\dots,B_\ell$, symétriques par rapport aux indices $C_1,\dots,C_k$, antisymétriques par rapport aux couples (R,j) et (S,k). Ils définissent sur W des $\mathcal{F}$-tenseurs. La connexion adaptée étant donnée, la décomposition (10-1) de $C_{(d)}$ est unique.

On établit comme dans [2] p.349

LEMME - *Soit $C_{(d)}$ un 2-cocycle d-différentiable de L, où d est $\geqslant 2$. On a*

$$C_{(d)} = \Gamma_{(d)} + C_{(d-1)}$$

où $\Gamma_{(d)}$ est une 2-cochaîne d-différentiable ne comportant que des opérateurs bidifférentiels de type maximum (d,1) et où $C_{(d-1)}$ est une 2-cochaîne (d-1)-différentiable de L.

Introduisons la 1-cochaîne d-différentiable $T_{(d)}$ de L définie par le tenseur qui s'exprime sur U par :

(10-2) $$T^{iR}_k = (1/d) A^{iR\ell}_{k\ell} \qquad (\text{avec } |R| = d)$$

Il résulte du lemme précédent et des calculs de [2] p.351-352 que

$$C_{(d)} - \partial T_{(d)} = C_{(d-1)} \tag{10-3}$$

où $C_{(d-1)}$ est un 2-cocycle (d-1)-différentiable. On voit ainsi par récurrence que tout 2-cocycle $C_{(d)}$ ($d \geqslant 2$) est cohomologue à un 2-cocycle 1-différentiable. Nous avons établi compte-tenu du § 9 :

THEOREME - *Le second espace $H^2(L;\, L)$ de cohomologie différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie L est isomorphe à :*

$$P^o(\mathcal{F}\,; \nu\mathcal{F}) \quad \oplus\ H^1(\mathcal{F}\,; \nu\mathcal{F})$$

b) Considérons une déformation infinitésimale différentiable de L

$$[X,Y]_\lambda = [X,Y] + \lambda\, C(X,Y) \tag{10-4}$$

où C est un 2-cocycle d-différentiable de L ; pour que (10-4) soit triviale, il faut et il suffit que $C = \partial T$, où T est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre d. Nous définissons ainsi la relation d'équivalence entre déformations infinitésimales différentiables et les obstructions à l'équivalence relèvent de $H^2(L;L)$. Il en résulte

THEOREME - *L'espace des déformations infinitésimales différentiables de l'algèbre de Lie, modulo les déformations triviales est isomorphe à $H^2(L;L)$ soit*

$$P^o(\mathcal{F}\,; \nu\,\mathcal{F}) \quad \oplus\ H^1(\mathcal{F}\,; \nu\,\mathcal{F})$$

III - IDEAUX DE L

11 - LEMME PRINCIPAL ET IDEAUX DERIVES

a) Nous nous proposons d'étudier les idéaux de l'algèbre de Lie L et notons L_o l'idéal de L défini par les champs de vecteurs à supports compacts. Nous utilisons, comme dans les cas analogues, ce que nous nommons un lemme principal (pour les lemmes semblables voir [2], [4], [5]).

Soit $\{x^i, x^a\}$ ($i = 1,\dots,n$; $a = n+1,\dots,m$) une carte adaptée de domaine U ; nous supposons que sur U, $\{x^a\}$ décrit un pavé I^h de $\mathbb{R}^h$ et que $\{x^i\}$ décrit un domaine contractile V de R^n. Le domaine $U \simeq V \times I^h$ est dit un domaine contractile produit de W, relativement au feuilletage. On a

LEMME - *Soit U, U' deux domaines contractiles produits de W tels que $\overline{U'} \subset U$. Si $\{x^i,x^a\}$ est une carte adaptée de domaine $U' \simeq V' \times I^h$, on note $\eta_{V'} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ l'élément de volume défini par la carte sur chaque feuille de U'. Donnons-nous n champs de vecteurs $Z_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Z_{(j)}) \subset U$ tels que $Z_{(j)}\big|_{U'} = \partial_j$. Si*

$X \in L_o$ est à support $S(X) \subset U'$ et vérifie pour tout i.

$$\int_{V'} X^i \, \eta_{V'} = 0$$

il existe n champs de vecteurs $Y_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Y_{(j)}) \subset U'$ tels que

$$X = \sum_j [Y_{(j)}, Z_{(j)}] \tag{11-2}$$

En effet, d'après (11-1), il existe des fonctions d^{ji} à valeurs réelles, à supports compacts contenus dans U', telles que :

$$X^i = \sum_j \partial_j d^{ji}$$

Introduisons les vecteurs $Y_{(j)}$ à supports compacts $S(Y_{(j)}) \subset U'$, définis sur U' par $Y_{(j)} = - \sum_i d^{ji} \partial_i$. On obtient immédiatement (11-2).

b) Pour $n \geqslant 3$, on en déduit :

LEMME PRINCIPAL - *Soit U, U' deux domaines contractiles produits de W tels que $\overline{U'} \subset U$. Donnons-nous une carte adaptée $\{x^{(o)i}, x^{(o)a} = x^a\}$ arbitraire de domaine U' et n vecteurs $Z^{(o)}_j \in L_o$, à supports $S(Z^{(o)}_{(j)}) \subset U$ tels que $Z^{(o)}_{(j)}\big|_{U'} = \partial^{(o)}_j$. On peut trouver (n+1) cartes locales $\{x^{(\alpha)i}, x^a\}$ ($\alpha = 0, 1,...,n$) de domaine U' et n(n+1) vecteurs $Z^{(\alpha)}_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Z^{(\alpha)}_{(j)}) \subset U$ tels que $Z^{(\alpha)}_{(j)}\big|_{U'} = \partial^{(\alpha)}_j$ vérifiant la condition suivante : si $X \in L_o$ est à support $S(X) \subset U'$, il existe n(n+1) vecteurs $Y^{(\alpha)}_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Y^{(\alpha)}_{(j)}) \subset U'$, tels que*

$$X = \sum_\alpha \sum_j [Y^{(\alpha)}_{(j)}, Z^{(\alpha)}_{(j)}] \tag{11-3}$$

De plus, pour chaque $\alpha \neq 0$, on peut choisir $Z^{(\alpha)}_{(j\alpha)} = Z^{(o)}_{(j\alpha)}$ pour un indice j_α

On a posé dans cet énoncé $\partial^{(\alpha)}_j = \partial / \partial x^{(\alpha)j}$ dans la carte $\{x^{(\alpha)j}, x^a\}$. Soit $\{x^{(o)j}, x^a\}$ une carte adaptée arbitraire de domaine U', $Z^{(o)}_{(j)} \in L_o$ n vecteurs à supports $S(Z^{(o)}_{(j)}) \subset U$ tels que $Z^{(o)}_{(j)}\big|_{U'} = \partial_j$. Pour l'indice 1, montrons qu'il existe un vecteur $T \in L_o$, à support $S(T) \subset U'$, de la forme $T = T^1 \partial_1$, vérifiant

$$\int_{V'} T^1 \, \eta_{V'} \quad 0 \tag{11-4}$$

et tel que

$$T = \sum_j [Y^{(1)}_{(j)}, Z^{(1)}_{(j)}] \tag{11-5}$$

où $S(Y^{(1)}_{(j)} \subset U'$, $S(Z^{(1)}_{(j)}) \subset U$ et $Z^{(1)}_{(j)}\big|_{U'} = \partial^{(1)}_j$ our une carte convenable $\{x^{(1)j}, x^a\} = \{x^{j'}, x^a\}$.

Donnons-nous, à cet effet, dans une carte adaptée encore indéterminée $\{x^{j'}, x^a\}$ de domaine U', tels que $\eta_{V'} = dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'}$, une fonction $T^{1'}$ à support compact $S(T^{1'}) \subset U'$, vérifiant

$$\int_{V'} T^{1'} \eta_{V'} = 0$$

Relions les cartes $\{x^i, x^a\}$ et $\{x^{j'}, x^a\}$ par les formules

$$x^1 = x^{1'} \varphi(x^{2'}), \quad x^2 = \psi(x^{2'}), \quad x^3 = x^{3'}, \ldots, \quad x^n = x^{n'} \tag{11-6}$$

avec $\varphi \psi' = 1$. Le vecteur $T = T^{1'} \partial_{1'}$, à support $S(T) \subset U'$, peut s'écrire $T = T^1 \partial_1$ avec $T^1 = \varphi T^{1'}$; le choix de $T^{1'}$ et φ permet d'assurer (11-4). De plus d'après (11-6) $\partial_3 = \partial_{3'}$. Appliquons à $T = T^{1'} \partial_{1'}$, le lemme du a en choisissant $Z^{(1)}_{(3)} = Z^{(0)}_{(3)}$; on obtient (11-5).

Soit maintenant $X \in L_o$ un vecteur à support $S(X) \subset U'$. Pour le vecteur $X^1 \partial_1$ il existe une constante k telle que

$$\int_{V'} (X^1 - kT') \eta_{V'} = 0$$

D'après le lemme du a, il existe $Y^{(o)}_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Y^{(o)}_{(j)}) \subset U'$ tels que

$$X^1 \partial_1 = \sum_j [Y^{(o)}_{(j)}, Z^{(o)}_j] + k \sum_j [Y^{(1)}_j, Z^{(1)}_{(j)}]$$

où les $Z^{(1)}_{(j)}$ et $Z^{(o)}_{(j)}$ satisfont aux conditions posées (en particulier $Z^{(1)}_{(3)} = Z^{(o)}_{(3)}$). En appliquant ce résultat à chaque composante $X^i \partial_i$ de X dans la carte initiale, on obtient le lemme principal.

c) En introduisant un recouvrement de Palais de W par des domaines contractiles produits, on déduit du lemme principal, par un raisonnement standard, le théorème suivant

THEOREME - *L'idéal dérivé de l'algèbre de Lie L (resp. L_o) coïncide avec cette algèbre de Lie elle-même*

$$[L, L] = L \qquad [L_o, L_o] = L_o \tag{11-7}$$

12 - IDEAUX ET IDEAUX CANONIQUES DE L

a) Soit M un sous-espace de L. Le fermé de nullité n(M) de M est l'ensemble fermé f des points x de W tels que $X(x) = 0$ pour tout $X \in M$: $\complement f$ est l'ouvert complémentaire. Etant donné un fermé f de W, considérons l'espace $I_c(f)$ des vecteurs $X \in L_o$ tels que $S(X_o) \subset \complement f$; $I_c(f)$ est un idéal de L admettant f comme fermé de nullité et appelé *l'idéal canonique* associé à f. On a

LEMME - *Soit M [avec $n(M) = f$] un sous-espace de L invariant par $I_c(f)$. Si $x_o \in \complement f$, on peut trouver des domaines contractiles produits U, U' de W, avec $x_o \in U'$, $\overline{U'} \subset U \subset \complement f$, tels que si $\{x^i, x^a\}$ est une carte adaptée de domaine U', $[M, I_c(f)]$ contienne n vecteurs $Z_{(j)} \in L_o$, à supports $S(Z_{(j)}) \subset U$, tels que $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$*

Si $X_o \in$ C f, soit $T \in M$ tel que $T(x_o) \neq 0$; il existe une carte $\{x^j, x^a\}$ adaptée, de domaine U' contenant x_o, telle que $T\big|_{U'} = \partial_1$. Choisissons U tel que $\overline{U'} \subset U \subset$ C f. Soit $X_{(j)} \in L_o$, à supports $S(X_{(j)}) \subset U$ tels que $X_{(j)}\big|_{U'} = x^1\, \partial_j$. Les vecteurs $Z_{(j)} = [T, X_{(j)}]$ appartiennent à $[M, I_c(f)]$, sont tels que $S(Z_{(j)}) \subset U$ et vérifient $Z_{(j)}\big|_{U'} = \partial_j$.

b) THEOREME - *Si M est un espace de L tel que n(M) = f et invariant par $I_c(f)$, on a :*

$$I_c(f) \subset M \qquad\qquad [M, I_c(f)] = I_c(f)$$

En particulier $M \neq \{0\}$ est de dimension infinie.

Soit $x_o \in$ C f et U, U' les domaines définis par le lemme précédent. Prenons dans le lemme principal $x^{(o)}{}_j = x^j$ et $Z^{(o)} = Z_{(j)} \in [M, I_c(f)]$ les notations étant celles de ce lemme. Pour $\alpha \neq 0$ fixé, les vecteurs $Z^{(\alpha)}_{(j)}$ sont tels que l'un d'entre eux au moins $Z^{(\alpha)}_{(j_\alpha)}$ peut être choisi appartenant à $[M, I_c(f)]$. En prenant $T = Z^{(\alpha)}_{(j_\alpha)}$ dans le lemme du a), on déduit de ce lemme que les $Z^{(\alpha)}_{(j)}$ peuvent tous être choisis appartenant à $[M, I_c(f)]$.

Soit $X \in L_o$ tel que $S(X) \subset U'$. D'après le lemme principal, il existe n(n+1) vecteurs $Y^{(\alpha)}_{(j)}$ à supports dans U' tel que

$$X = \sum_\alpha \sum_j [Y^{(\alpha)}_{(j)}, Z^{(\alpha)}_{(j)}]$$

où $Y^{(\alpha)}_{(j)} \in I_c(f)$. Ainsi X appartient à $[M, I_c(f)]$. Si $X \in I_c(f)$, on voit à partir d'un recouvrement fini d'un voisinage ouvert de son support que $X \in [M, I_c(f)]$. Ainsi $I_c(f) \subset [M, I_c(f)]$, ce qui établit le théorème.

c) Soit A une sous-algèbre de L contenant L_o. Il vient

COROLLAIRE - *Si I est un idéal de A tel que n(I) = f, on a :*

$$I_c(f) \subset f \qquad\qquad [I, I_c(f)] = I_c(f)$$

En particulier $I \neq \{0\}$ est de dimension n infinie.

Par des raisonnements standard ([4], [5]), on déduit du théorème précédent et de son corollaire.

PROPOSITION - *1) Tout idéal I d'une sous-algèbre A de L contenant L_o est semi-simple. En particulier L, L_o et tous leurs idéaux sont semi-simples.*
2) Un idéal I non trivial de A n'admet jamais un idéal supplémentaire dans A. Il en est ainsi en particulier pour L et L_o.

Soit G_o le groupe des difféomorphismes de W à supports compacts préservant chaque feuille du feuilletage. Si $I \neq \{0\}$ est un idéal de L_o *stable* par G_o (c'est-à-dire pour la représentation adjointe de G_o dans

L_o), $n(I)$ est necessairement vide et il résulte du corollaire que nécessairement $I = L_o$.

PROPOSITION - *Tout idéal $I \neq \{0\}$ de L_o stable par le groupe G_o coïncide avec L_o.*

IV - 1-COCHAINES DE $L_{\mathscr{F}}$ A COBORD d-DIFFERENTIABLE

13 - DEUX LEMMES

Les deux lemmes suivants nous seront utiles.

a) LEMME 1 - *Soit $X \in \mathscr{L}$ un champ de vecteurs de W. Si $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in L$, on a $X = 0$.*

Soit x un point arbitraire de W, $\{x^A\} = \{x^i, x^a\}$ une carte adaptée de domaine U contenant x. On peut choisir $Y \in L$ tel que $Y(x)$ soit nul et $(\partial_A Y^i)(x)$ arbitraire. Le lemme en résulte.

b) LEMME 2 - *Soit $T'_{\mathscr{F}}$ une 1-cochaîne 1-différentiable sur $L_{\mathscr{F}}$ à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que $\partial T'_{\mathscr{F}} = 0$. Il existe un vecteur V de $\mathscr{L}$ tel que $T'_{\mathscr{F}} X = [V,X]$ pour tout $X \in L_{\mathscr{F}}$.*

En effet la restriction T' à L de $T'_{\mathscr{F}}$ est une 1-cochaîne 1-différentiable sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$, telle que $\partial T' = 0$. Il résulte du lemme du 8 qu'il existe $V \in \mathscr{L}$ tel que pour tout $Y \in L$:

$$T'y = [V, Y]$$

Si $X \in L_{\mathscr{F}}$, $Y \in L$, on a :

$$\partial T'_{\mathscr{F}}(X,Y) = [T'_{\mathscr{F}} X, Y] + [X,[V,Y]] - [V,[X,Y]] = 0$$

Ainsi, pour tout $y \in L$:

$$[T'_{\mathscr{F}} X - [V,X], Y] = 0$$

Il résulte du lemme 1 :

$$T'_{\mathscr{F}} X = [V,X]$$

14 - 1-COCHAINE SUR L A VALEURS DANS $\mathscr{L}$

a) Soit T une 1-cochaîne sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que ∂T soit *locale.* Soit U un domaine de W et donnons-nous $X \in L$ tel que $X\big|_U = 0$. On a comme au § 2, c) :

$$[TX,Y]\big|_U = 0$$

pour tout $Y \in L$ à support $S(Y) \subset U$. On en déduit, comme au lemme 1 du § 13, $TX|_U = 0$. Il vient

PROPOSITION 1 - *Une 1-cochaîne T sur L à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que ∂T soit locale est elle-même locale.*

b) Supposons que ∂T soit *d-différentiable* ($d \geqslant 1$) ; T étant locale, sa restriction à un domaine U définit une application linéaire T_U de $L(U)$ dans $\mathscr{L}(U)$ telle que ∂T_U soit d-différentiable. Les lemmes 1 et 2 du § 3 et le lemme du § 4 s'étendent sans modifications et par suite T_U est un opérateur différentiel d'ordre d sur $L(U)$. On en déduit :

PROPOSITION 2 - *Si T est une 1-cochaîne de L à valeurs dans $\mathscr{L}$ telle que ∂T soit une 2-cochaîne d-différentiable, la 1-cochaîne T est d-différentiable elle-même.*

15 - 1-COCHAINE SUR $L_{\mathscr{F}}$ A VALEURS DANS $L_{\mathscr{F}}$

Soit $T_{\mathscr{F}}$ une 1-cochaîne de $L_{\mathscr{F}}$ (à valeurs dans $L_{\mathscr{F}}$) telle que $C_{\mathscr{F}} = \partial T_{\mathscr{F}}$ soit *d-différentiable.*

a) La restriction T de $T_{\mathscr{F}}$ à L est une 1-cochaîne sur L à valeurs dans $L_{\mathscr{F}}$ telle que ∂T soit d-différentiable. Il résulte du §14 que T est d-différentiable. Si $X \in L_{\mathscr{F}}$, $Y \in L$, on a :

$$(15\text{-}1) \qquad [T_{\mathscr{F}} X, Y] = T[X,Y] - [X, TY] + C_{\mathscr{F}}(X,Y)$$

Les trois termes du second membre sont respectivement de type bidifférentiels maxima $(d+1, d+1)$, $(1, d+1)$ et (d, d) en X, Y. Il en résulte que le premier membre est différentiable de type bidifférentiel maximum $(d+1, 1)$ en X, Y. On a sur le domaine U d'une carte adaptée :

$$(15\text{-}2) \qquad [T_{\mathscr{F}} X, Y]^i = (T_{\mathscr{F}} X)^B \partial_B Y^i - Y^k \partial_k (T_{\mathscr{F}} X)^i = H^{iRB}_{Aj} \partial_R X^A \partial_B Y^j + K^{iS}_{Aj} \partial_S X^A . Y^j$$

où les indices composés R, S vérifient $|R| \leqslant d+1$, $|S| \leqslant d+1$. En $x \in U$ prenons $Y \in L$ tel que $Y(x) = 0$ et $(\partial_B Y^j)(x)$ arbitraire. Il résulte de (15-2) qu'en un point :

$$\delta_j^i (T_{\mathscr{F}} X)^B = H^{iRB}_{Aj} \partial_R X^A$$

En faisant $i = j$ et sommant, il vient sur U :

$$(15\text{-}3) \qquad (T_{\mathscr{F}} X)^B = A^{BR}_A \partial_R X^A \qquad (|R| \leqslant d+1)$$

où l'on a posé $nA^{BR}_A = H^{iRB}_{Ai}$. Ainsi $T_{\mathscr{F}}$ s'exprime nécessairement par un *opérateur différentiel d'ordre (d+1)* au plus.

b) Si $Y \in L$,

$$(T_{\mathscr{F}} Y)^B = (TY)^B = A^{BR}_k \partial_R Y^k$$

ne peut contenir de termes d'ordre (d+1) et il vient $A_k^{BR} = 0$ pour $|R| = d+1$. Ainsi, à des termes près d'ordre d au plus en X, (15-3) peut s'écrire :

$$(T_{\mathscr{G}} X)^B \simeq A_a^{BR} \partial_R X^a \qquad (|R| = d+1)$$

On a d'après (15-1)

(15-4) $$[T_{\mathscr{G}} X, Y] \simeq T[X,Y]$$

modulo des termes d'ordre d au plus en X. Il résulte de (15-4) que si $R = (r_o, \dots, r_d)$ est tel que $|R| = d+1$ on a sur U :

$$A_a^{BR} \partial_R X^a \partial_B Y^i - Y^j \partial_j (A_a^{iR} \partial_R X^a) \simeq A_a^{iR} \partial_R (X^B \partial_B Y^a - Y^j \partial_j X^a) = 0$$

On obtient ainsi :

$$A_a^{BR} \partial_R X^a \partial_B Y^i - Y^j \partial_j A_a^{iR} \partial_R X^a = 0$$

Choisissons $Y \in L$ tel qu'en x, $Y(x) = 0$ et $(\partial_B Y^i)(x)$ soit arbitraire. Il vient pour $|R| = d+1$ et pour tout $X \in L_{\mathscr{G}}$:

$$A_a^{BR} \partial_R X^a = 0$$

Ainsi (15-3) s'écrit sur U :

$$(T_{\mathscr{G}} X)^B = A_A^{BR} \partial_R X^A \qquad (|R| \leqslant d)$$

et $T_{\mathscr{G}}$ s'exprime nécessairement par un opérateur différentiel d'ordre d.

THEOREME - *Si $T_{\mathscr{G}}$ est une 1-cochaîne de $L_{\mathscr{G}}$ telle que $\partial T_{\mathscr{G}}$ soit une 2-cochaîne d-différentiable ($d \geqslant 1$), la 1-cochaîne $T_{\mathscr{G}}$ est d-différentiable.*

En particulier une dérivation de $L_{\mathscr{G}}$ est nécessairement donnée par un opérateur différentiel du 1er ordre. Nous allons obtenir ces dérivations par une voie directe indépendante du théorème précédent.

16 - DERIVATIONS DE $L_{\mathscr{G}}$

Soit D une dérivation de l'algèbre de Lie $L_{\mathscr{G}}$. Si $X, Y \in L$, il résulte de

(16-1) $$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$$

que $D[X,Y]$ appartient à L. Comme L coïncide avec son idéal dérivé, la restriction de D à L est un endomorphisme de L et par suite une dérivation de L. Il existe donc $Z \in L_{\mathscr{G}}$ tel que, pour tout $Y \in L$, on ait $DY = \mathscr{L}(Z)Y$.

Si $X \in L_{\mathcal{F}}$, $Y \in L$, (16-1) prend la forme :

$$\mathcal{L}(Z)\,[X,Y] = [DX,Y] + [X,\ \mathcal{L}(Z)Y]$$

Il en résulte que, pour tout $Y \in L$:

$$[D - \mathcal{L}(Z)X,\ Y] = 0$$

et d'après le lemme 1 du § 13 :

$$D = \mathcal{L}(Z)$$

Nous obtenons par une voie différente et plus rigoureuse que celle de Kanie

THEOREME - *Les dérivations de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}}$ sont toute intérieures. Le premier espace $H^1(L_{\mathcal{F}}\,;L_{\mathcal{F}})$ de la cohomologie de Chevalley de $L_{\mathcal{F}}$ est nul.*

V - 2-COHOMOLOGIE DIFFERENTIABLE DE L

17 - ETUDE DES 2-COCYCLES 1-DIFFERENTIABLES DE $L_{\mathcal{F}}$

a) Le lemme suivant est utile pour les p-cochaînes *1-différentiables.*

LEMME - *Si $C_{\mathcal{F}}$ est une p-cochaîne de $L_{\mathcal{F}}$ (à valeurs dans $L_{\mathcal{F}}$), sa restriction à L est une p-cochaîne de L.*

Pour alléger les notations, nous établissons ce lemme pour une 2-cochaîne $C_{\mathcal{F}}$. Soit U le domaine d'une carte adaptée ; on a sur U, pour X, $Y \in L$.

$$C^a_{\mathcal{F}}(X,Y) = A^{aBC}_{k\ell}\,\partial_B X^k\,\partial_C Y^\ell + B^{aB}_{k\ell}(X^k\,\partial_B Y^\ell - Y^k\,\partial_B X^\ell) + D^a_{k\ell}\,X^k\,Y^\ell$$

où les A sont antisymétriques par rapport aux couples (B,k) et (C,ℓ) et les D par rapport à k, ℓ. Exprimons que $C_{\mathcal{F}}$ est à valeurs dans $L_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire que :

$$\partial_j C^a_{\mathcal{F}}\,(X,Y) = 0 \tag{17-1}$$

En un point x de U, choisissons X, Y tels que $X(x) = Y(x) = 0$, $(\partial_B X^k)(x) = 0$; (17-1) se réduit à :

$$A^{aBC}_{k\ell}\,\partial_{jB} X^k\,\partial_C Y^\ell = 0$$

En tenant compte de l'arbitraire du 1-jet de Y et du 2-jet de X, il vient $A^{aBC}_{k\ell} = 0$.

Prenons toujours $X(x) = 0$, $(\partial_B X^k)(x) = 0$, mais choisissons arbitrairement le vecteur Y(x). On en déduit de même $B^{aB}_{k\ell} = 0$. Enfin en prenant X tel que $X(x) = 0$ et de 1-jet quelconque et en choisissant Y arbitrairement, il vient $D^a_k = 0$.

Ainsi, *si $C_{\mathscr{F}}$ est une 2-cochaîne 1-différentiable de $L_{\mathscr{F}}$, $C_{\mathscr{F}}(L, L)$ est à valeurs dans L et définit une 2-cochaîne 1-différentiable C de L.*

b) En ce qui concerne les *2-cocycles* 1-différentiables de $L_{\mathscr{F}}$, on a un résultat plus géréral ; $C_{\mathscr{F}}$ étant un 2-cocycle, il vient pour $X, Y, Z \in L_{\mathscr{F}}$:

$$\partial C_{\mathscr{F}}(X,Y,Z) = S\,[X, C_{\mathscr{F}}(Y,Z)] - S\,C_{\mathscr{F}}([Y,Z], X) = 0 \tag{17-2}$$

Prenons $X, Y \in L$ et $Z \in L_{\mathscr{F}}$. Il résulte du lemme que $[Z, C_{\mathscr{F}}(X,Y)]$ et $C_{\mathscr{F}}([Y,Z],X)$, $C_{\mathscr{F}}([Z,X],Y)$ appartiennent à L. On en déduit que $C_{\mathscr{F}}([X,Y],Z) \in L$. Comme L coïncide avec son idéal dérivé, on voit que $C(L,L\ \ )$ est à valeurs dans L.

PROPOSITION - *Si $C_{\mathscr{F}}$ est un 2-cocycle 1-différentiable de $L_{\mathscr{F}}$, $C_{\mathscr{F}}(L,L_{\mathscr{F}})$ est à valeurs dans L.*

c) Soit $C_{\mathscr{F}}$ un 2-cocycle 1-différentiable de $L_{\mathscr{F}}$ et soit C sa restriction à L qui est un 2-cocycle 1-différentiable de L. On démontre comme au § 8 qu'il existe une 1-cochaîne 1-différentiable $T_{\mathscr{F}}$ sur $L_{\mathscr{F}}$ *à valeurs dans $\mathscr{L}$* telle que $C_{\mathscr{F}} = \partial T_{\mathscr{F}}$. Si T est la restriction de $T_{\mathscr{F}}$ à L, on a de même $C = \partial T$.

Supposons que le 2-cocycle C de L soit *exact dans L* et étudions le 2-cocycle $C_{\mathscr{F}}$; C étant exact, il existe un endomorphisme 1-différentiable Θ de L tel que $C = \partial\Theta$. Ainsi pour $X, Y \in L$

$$\partial(T - \Theta)(X,Y) = 0$$

D'après le lemme du § 8, il existe un vecteur V de $\mathscr{L}$ tel que, pour tout $Y \in L$,

$$TY = \Theta Y + [V,Y] \tag{17-3}$$

Soit $X \in L_{\mathscr{F}}$, $Y \in L$; on sait d'après la proposition précédente que $C_{\mathscr{F}}(X,Y) = \partial T_{\mathscr{F}}(X,Y)$ appartient à L, soit

$$[T_{\mathscr{F}} X,Y] + [X,TY] - T[X,Y] \in L$$

Il vient d'après (17-3)

$$[T_{\mathscr{F}} X,Y] + [X,[V,Y]] - [V,[X,Y]] \in L$$

Ainsi pour tout $Y \in L$:

$$[T_{\mathscr{F}} X - [V,X], Y] \in L \tag{17-4}$$

Il résulte de (17-4)

$$T_{\mathscr{F}} X - [V,X] = UX$$

où U est un endomorphisme 1-différentiable de $L_{\mathcal{F}}$. On déduit du lemme 2 du § 13

$$C_{\mathcal{F}} = \partial T_{\mathcal{F}} = \partial U$$

et *$C_{\mathcal{F}}$ est exact sur $L_{\mathcal{F}}$.*

d) On établit comme au § 10 que tout 2-cocycle d-différentiable de $L_{\mathcal{F}}$ est cohomologue à un 2-cocycle 1-différentiable. Il en résulte que, compte-tenu du théorème du § 15, le second espace $H^2(L_{\mathcal{F}} ; L_{\mathcal{F}})$ de cohomologie différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}}$ peut être obtenu en se limitant aux cochaînes 1-différentiables.

Désignons par $\Theta_{\mathcal{F}}$ un endomorphisme 1-différentiable de $L_{\mathcal{F}}$, par Θ sa restriction à L qui est un endomorphisme 1-différentiable de L. Si $C_{\mathcal{F}}$ et $C_{\mathcal{F}} + \partial\Theta_{\mathcal{F}}$ sont deux 2-cocycles 1-différentiables cohomologues de $L_{\mathcal{F}}$, leurs restrictions C et $C + \partial\Theta$ à L sont des 2-cocycles 1-différentiables cohomologues de L. Ainsi la restriction à L définit une application linéaire $\rho : H^2(L_{\mathcal{F}} ; L_{\mathcal{F}}) \to H^2(L ; L)$. Il résulte du c que ρ est injective. Il vient :

THEOREME - *La restriction à L des 2-cocycles 1-différentiables de $L_{\mathcal{F}}$ définit une application linéaire injective ρ de $H^2(L_{\mathcal{F}} ; L_{\mathcal{F}})$ dans $H^2(L ; L)$.*

Nous pouvons identifier $H^2(L_{\mathcal{F}} ; L_{\mathcal{F}})$ à un sous-espace de $H^2(L ; L)$. Nous nous proposons d'étudier ce sous-espace.

18 - 2-COHOMOLOGIE DIFFERENTIABLE DE $L_{\mathcal{F}}$

a) Soit $C_{\mathcal{F}}$ un 2-cocycle 1-différentiable de $L_{\mathcal{F}}$ et soit $T_{\mathcal{F}}$ une 1-cochaîne 1-différentiable sur $L_{\mathcal{F}}$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}$, définie à $T_{\mathcal{F}} \to T_{\mathcal{F}} + \mathcal{L}(V)$ près (où $V \in \mathcal{L}$), telle que $\partial T_{\mathcal{F}} = C_{\mathcal{F}}$. Si T est la restriction de $T_{\mathcal{F}}$ à L, $\partial T = C$ est la restriction de $C_{\mathcal{F}}$ à L. Sur le domaine U d'une carte adaptée, on a pour $Y \in L$ (voir 8,b) et pour une connexion adaptée :

$$T^a(Y)\Big|_U = Z^a \nabla_j Y^j + Q^a_j Y^j \tag{18-1}$$

où $Z \in P^0(\mathcal{F} ; \nu\mathcal{F})$ et où la 1-forme tangentielle Q à valeurs normales vérifie :

$$(d_{\mathcal{F}} Q)^a_{jk} = - Z^a S_{jk}$$

Exprimons que $\partial T_{\mathcal{F}}(L_{\mathcal{F}}, L)$ est à valeurs dans L. Si $X \in L_{\mathcal{F}}$, $Y \in L$, il vient :

$$[T_{\mathcal{F}} X, Y] + [X, TY] - T[X,Y] \in L$$

En explicitant à partir de (18-1) on obtient :

$$Y^k\partial_k(T_{\mathcal{F}}X)^a = X^A \nabla_A(Z^a\nabla_j Y^j + Q^a Y^j) - (Z^b\nabla_b Y^j + Q^b Y^j)\nabla_b X^a - Z^a\nabla_j(X^A \nabla_A Y^j - Y^k\nabla_k X^j) - Q^a_j(X^A \nabla_A Y^j - Y^k\nabla_k X^j)$$

Il vient en développant :

$$Y^k \partial_k (T_{\mathcal{F}} X)^a = X^b \nabla_b Z^a \nabla_j Y^j + Z^a X^A \nabla_{Aj} Y^j + X^A \nabla_A Q^a Y^j - (Z^b \nabla_j Y^j + Q^b Y j) \nabla_b X^a$$
$$- Z^a (X^A \nabla_{jA} Y^j - Y^k \nabla_{jk} X^j) + Q^a Y^k \nabla_k X^j$$

Or l'on a :

$$\nabla_{Aj} Y^j - \nabla_{jA} Y^j = R^j{}_{k,Aj} Y^k \ , \quad \nabla_{jk} X^j - \nabla_{kj} X^j = R^j{}_{A,jk} X^A$$

et on notera que, la connexion étant sans torsion :

$$R^j{}_{k,Aj} + R^j{}_{A,jk} = R^j{}_{j,Ak}$$

On en déduit :

$$Y^k \partial_k (T_{\mathcal{F}} X)^a = (X^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b X^a) \nabla_j Y^j + (\nabla_k (Z^a \nabla_j X^j) + Z^a S_{Ak} X^A) Y^k + (X^A \nabla_A Q^a_k + Q^a_j \nabla_k X^j - Q^b_k \nabla_b X^a) Y^k$$

où l'on a posé :

$$R^j{}_{j,Ak} = \partial_A \Gamma^j_{jk} - \partial_k \Gamma^j_{jk} = S_{Ak} \tag{18-3}$$

Nous notons que, pour $X \in L_{\mathcal{F}}$, $\nabla_a X^a$ définit un scalaire et qu'il en est par suite de même pour $\nabla_j X^j$. En tenant compte de l'arbitraire de $Y \in L$ dans (18-2), il vient :

$$X^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b X^a = 0 \tag{18-4}$$

et

$$\partial_k (T_{\mathcal{F}} X)^a = \partial_k (Z^a \nabla_j X^j) + (\mathcal{L}(X)Q)^a_k + Z^a S_{Ak} X^A \tag{18-5}$$

Il résulte de (18-4)

PROPOSITION - *Z appartient nécessairement au centre $\mathcal{C}(L_{\mathcal{F}} / L)$ de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}} / L$.*

Inversement on peut montrer par un calcul direct un peu long que si $T_{\mathcal{F}}$ est une 1-cochaîne 1-différentiable sur $L_{\mathcal{F}}$ à valeurs dans $\mathcal{L}$ vérifiant (18-4) et (18-5), $\partial T_{\mathcal{F}}$ définit un 2-cocycle $C_{\mathcal{F}}$ de $L_{\mathcal{F}}$.

b) Le second membre de (18-5) est un 1-forme tangentielle à valeurs normales. Montrons que la 1-forme Φ définie par

$$\Phi^a_k = (\mathcal{L}(X)Q)^a + Z^a S_{Ak} X^A \tag{18-6}$$

est $d_{\mathscr{F}}$*-fermée.* Il vient :

$$(d_{\mathscr{F}}\phi)^a_{jk} = \mathscr{L}(X)(d_{\mathscr{F}}Q)^a_{jk} + Z^a(\partial_j S_{Ak} - \partial_k S_{Aj})X^A + Z^a(\partial_j X^\ell S_{\ell k} + \partial_k X^\ell S_{\ell j})$$

Or l'on a :

$$(d_{\mathscr{F}} Q)^a_{jk} = - Z^a S_{jk} \qquad \partial_j S_{Ak} - \partial_k S_{Aj} = \partial_A S_{jk}$$

Il en résulte :

$$(d_{\mathscr{F}}\phi)^a_{jk} = Z^a(- \mathscr{L}(X)S_{jk} + \mathscr{L}(X)S_{jk}) = 0$$

Ainsi pour définir un 2-cocycle C de L restriction d'un 2-cocycle $C_{\mathscr{F}}$ de $L_{\mathscr{F}}$, Z doit satisfaire la conditon suivante :

CONDITION (C_1) - *Il existe une 1-forme Q associée à Z pour laquelle la 1-forme tangentielle ϕ à valeurs normales $d_{\mathscr{F}}$-fermée définie par (18-6) est exacte, avec*

(18-7) $$\phi = d_{\mathscr{F}} \ \mathscr{T}(X)$$

où $\mathscr{T}$ est un opérateur différentiel à valeurs normales du premier ordre en X.

Cette condition est indépendante du choix de la connexion adaptée ; substituons à la connexion Γ une connexion Γ' telle que $\Gamma' - \Gamma = N$ où N est un 3-tenseur de composantes $\{N^a_{BC}\}$ (avec $N^a_{iC} = 0$) dans une carte adaptée. La même 1-cochaîne T sur L est alors définie par

$$T^a(Y)\Big|_U = Z^a V^i_j Y^j + Q'^a_j Y^j$$

où

$$Q'^a_j = Q^a_j - Z^a N^i_{ij}$$

On vérifie aisément que les deux formes ϕ et ϕ' associées à Γ dans les deux connexions différent par :

$$d_{\mathscr{F}} (Z^a N^i_{iB} X^B)$$

c'est-à-dire par une 1-forme exacte, différentielle d'un opérateur d'ordre 0.

c) Soit F une 1-forme tangentielle $d_{\mathscr{F}}$*-fermée* à valeurs normales. Si Q satisfait (C_1), Q + F y satisfera aussi si F vérifie la condition suivante.

CONDITION (C_2) - *La 1-forme tangentielle Ψ $d_{\mathscr{F}}$-fermée à valeurs normales définie par :*

(18-8) $$\Psi = \mathscr{L}(X)F$$

est exacte, avec

$$\Psi = d_{\mathcal{F}} \mathcal{U}(X)$$

où $\mathcal{U}$ est un opérateur différentiel à valeurs normales du premier ordre en X.

La condition (C_2) ne porte que sur la classe de cohomologie $\in H^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F})$ définie par F. Si l'on substitue à F la 1-forme cohomologue $F' = F + d_{\mathcal{F}} M$, les formes Ψ et Ψ' correspondantes diffèrent par

$$d_{\mathcal{F}} \mathcal{L}(X)M$$

c'est-à-dire par une 1-forme exacte, différentielle d'un opérateur d'ordre 1.

d) Soit $Q^0(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F})$ *l'espace des éléments* $Z \in P^0(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) \cap \mathcal{C}(L_{\mathcal{F}} / L)$ *qui satisfait la condition* (C_1) et soit $K^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) \subset H^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F})$ l'espace des 1-classes de cohomologie qui satisfait la condition (C_2). Nous avons établi

THEOREME - *Le second espace $H^2(L_{\mathcal{F}} ; L_{\mathcal{F}})$ de cohomologie différentiable de Chevalley de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}}$ est isomorphe à :*

$$Q^0(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) \oplus K^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) \tag{18-9}$$

L'espace des déformations infinitésimales différentiables de l'algèbre de Lie L, modulo les déformations triviales, est isomorphe à (18-9).

19 - DEUX PROPOSITIONS

a) Soit p la projection $L_{\mathcal{F}} \to L_{\mathcal{F}} / L = \hat{L}$ et soit $\hat{L}' = [L, L]$ l'idéal dérivée de $\hat{L}$. Introduisons le sous-espace $L'_{\mathcal{F}}$ de $L_{\mathcal{F}}$ défini par les éléments X tels que $pX \in L'$. Si $X \in [L_{\mathcal{F}}, L_{\mathcal{F}}]$, pX appartient à $\hat{L}'$ et par suite $X \in L'_{\mathcal{F}}$. Ainsi $[L_{\mathcal{F}}, L_{\mathcal{F}}] \subset L'_{\mathcal{F}}$. Inversement si $X \in L'_{\mathcal{F}}$, pX est somme finie de crochets d'éléments de L qui sont des projections d'éléments Y_λ, Z^λ ($\lambda \in I$ ensemble fini) de $L_{\mathcal{F}}$. Ainsi

$$X - \sum_{\lambda \in I} [Y_\lambda, Z^\lambda] \in L_{\mathcal{F}}$$

Comme $[L, L] = L$, X est somme finie de crochets d'éléments de $L_{\mathcal{F}}$ et $L'_{\mathcal{F}} \subset [L_{\mathcal{F}}, L_{\mathcal{F}}]$. On a

PROPOSITION - *L'idéal dérivé de $L_{\mathcal{F}}$ est défini par l'espace $L'_{\mathcal{F}}$ des éléments de $L_{\mathcal{F}}$ qui se projettent sur l'idéal dérivé de $L_{\mathcal{F}} / L$.*

En particulier si $L_{\mathcal{F}} / L$ est abélienne, $[L_{\mathcal{F}}, L_{\mathcal{F}}] = L$.

b) Notons encore $\mathcal{F}$ la relation d'équivalence définie sur W par le feuilletage $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$ soit un feuilletage simple, c'est-à-dire que la projection π de W sur l'espace quotient $\hat{W} = W/\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse (S) π définit sur $\hat{W}$ une structure de variété différentiable de dimension h (submersion)

$L_{\mathcal{F}}/L$ peut alors être identifiée à l'algèbre de Lie $\hat{L}$ des champs de vecteurs de $\hat{W}$ qui est semi-simple et vérifie [2] $\hat{L}' = \hat{L}$. On en déduit

$$[L_{\mathcal{F}}, L_{\mathcal{F}}] = L_{\mathcal{F}} \tag{19-1}$$

c) Sous l'hypothèse précédente étudions $H^2(L_{\mathcal{F}}; L_{\mathcal{F}})$. Le centre de $L_{\mathcal{F}}/L$ étant nul, on a $Q^0(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) = 0$. Soit F une 1-forme tangentielle $d_{\mathcal{F}}$-fermée à valeurs normales appartenant à $K^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F})$. Il existe un opérateur différentiel $\mathcal{U}$ du premier ordre tel que $\mathcal{L}(X)F = d_{\mathcal{F}}\,\mathcal{U}(X)$. Pour une carte adaptée de domaine U, on a pour tout $X \in L$:

$$X^A \partial_A F^a_k + \partial_k X^i F^a_i - \partial_b X^a F^b_k = \partial_k (A^{aA}_B\, \partial_A X^B + B^a_b X^b) \tag{19-2}$$

où les A^{aA}_B sont les composantes d'un tenseur. En prenant $X \in L$ dans (19-2), il vient :

$$A^{aA}_j = 0 \qquad B^a_j = F^a_j \tag{19-3}$$

et pour $X \in L_{\mathcal{F}}$, (19-2) se réduit à :

$$X^b \partial_b F^a_k - \partial_c X^a F^c_k = \partial_k\, A^{ac}_b \partial_c X^b + \partial_k B^a_b X^b \tag{19-4}$$

De l'arbitraire de $\hat{X} = pX$ il résulte :

$$\delta^a_b F^c_b = -\partial_k A^{ac}_b$$

et par contraction :

$$h F^c_k = -\partial_k A^{ac}_a$$

où les A^{ac}_a définissent d'après (19-3) une 0-forme à valeurs normales. Ainsi F est nécessairement exacte et $K^1(\mathcal{F}; \nu\mathcal{F}) = \{0\}$.

PROPOSITION - *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple, $H^2(L_{\mathcal{F}}; L_{\mathcal{F}}) = 0$ et toute déformation infinitésimale différentiable de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}}$ est triviale.*

Ainsi, dans ce cas, $L_{\mathcal{F}}$ est infinitésimalement rigide.

REFERENCES

[1] Y. KANIE. *«Cohomologie of Lie algebras of vector fields with coefficients in adjoint representation»*, Foliated case, Mimeog (1977).

[2] A. LICHNEROWICZ.
Comm. Math. Helv. 39(51), (1976), 343-368.

[3] F. TAKENS.
Compos. Mathem. 26, (1973), 151-158.

[4] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ et A. DIAZ-MIRANDA.
J. of Diff. Geom. 9, (1974), 1-40.

[5] A. LICHNEROWICZ.
J. de Math. pures et appl. 52, (1973), 473-508. Ann. Inst. Fourier 24, (1974), 219-266.

[6] M. GERSTENHABER.
Ann. of Math. 79, (1964), 59-103.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1978)