ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ALBERT CRUMEYROLLE

Sur les représentations de degré fini du groupe spécial unitaire et du groupe spécial linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 28 (1964), p. 131-138

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__131_0>

Sur les représentations de degré fini du groupe spécial unitaire et du groupe spécial linéaire

par Albert CRUMEYROLLE

INTRODUCTION

Il est bien connu (1) qu'il existe un homomorphisme θ du groupe spécial unitaire SU (2, C) sur le groupe spécial orthogonal SO (3, R), et que le noyau de θ se compose de l'application identique et de son opposée. Munissant ces groupes de leurs topologies usuelles d'espaces métriques (SU (2, C), θ) est un revêtement d'ordre 2 de SO (3, R) : comme SU (2, C) est simplement connexe le revêtement obtenu est le revêtement universel de SO (3, R). Cette remarque conduit naturellement à étudier toutes les représentations de SU (2, C), au lieu d'étudier celles de SO (3, R).

Nous bornant ici aux représentations de degré fini, nous étudions par une nouvelle méthode certaines représentations de SU (2, C) : cette méthode s'étend sans modification essentielle à de nombreux groupes et en particulier au groupe linéaire spécial SL (2, C), revêtement universel du groupe de LORENTZ restreint L_0 (4, R).

1. — REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SPÉCIAL UNITAIRE.

Les représentations que nous considérons d'abord s'entendent dans des espaces vectoriels de dimension finie sur C. SU (2, C) est compact et toute représentation de degré fini de ce groupe est semi-simple (1), nous nous bornons donc à considérer des représentations irréductibles du groupe SU (2, C).

Considérons l'algèbre symétrique $\vee$ (E) de l'espace $E = C^2$, $\overset{p}{\vee}$ (E) désigne l'ensemble des éléments homogènes de degré p, qui constitue un espace de dimension $(p + 1)$ selon la formule :

$$\dim \overset{p}{\vee} (E) = \frac{(p + n - 1)!}{p!(n - 1)!} \quad (\dim E = n) \text{ ; faisant varier } p \text{ on}$$

obtient toutes les dimensions finies.

(e_1, e_2) désigne une base de $E = C^2$, trivialement orthonormée, et $(e_{i_1} \vee e_{i_2} \ldots \vee e_{i_p})$, $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_p \leqslant 2$, la base correspondante de $\overset{p}{\vee}$ (E), muni lui-même de sa structure canonique d'espace hermitien.

Posons : $\overset{p}{\vee}(u)(x_1 \vee x_2 \dots \vee x_p) = u(x_1) \vee u(x_2) \dots\dots \vee u(x_p)$ pour $u \in SU(2, C)$ et $x_1, x_2 \dots x_p$ appartenant à E, puis étendons par linéarité la définition de $\overset{p}{\vee}(u)$ aux éléments non décomposables de $\overset{p}{\vee}(E)$. $\overset{p}{\vee}(u)$ est un isomorphisme de $\overset{p}{\vee}(E)$ e comme $\overset{q}{\vee}(u \circ v) = (\overset{p}{\vee} u) \circ (\overset{p}{\vee} v)$, l'application $\rho : u \rightarrow \overset{p}{\vee}(u)$ est une représentation linéaire de degré $(p+1)$ de SU (2, C) (puissance symétrique $p^{\text{ième}}$).

On sait que u est diagonalisable en repères orthonormés et que si

$$u(e_i) = \zeta_i e_i \ (i = 1, 2) \ (|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1, \ \zeta_2 = \bar{\zeta}_1) \qquad \text{alors :}$$

$$\overset{p}{\vee} u (e_{i_1} \vee \dots\dots \vee e_{i_p}) = \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots\dots \zeta_{i_p} (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots\dots \vee e_{i_p})$$

de sorte que $\overset{p}{\vee} u$ se trouve diagonalisée dans le repère correspondant de $\overset{p}{\vee} E$ et ses valeurs propres sont les $(p+1)$ produits $\zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \dots \zeta_{i_p}$: $\overset{p}{\vee} u$ est unitaire et le noyau de ρ, facile à déterminer, se réduit à l'identité si p est impair, à l'identité et à son opposé si p est pair ; le noyau de ρ est discret de sorte que ρ est un revêtement, il est facile d'en tirer des conclusions pour les représentations de SO (3, R).

La représentation ρ est irréductible.

Soit E′ un sous-espace $\neq 0$ de $\overset{p}{\vee} E$, invariant par tous les opérateurs de la représentation. Prenons (e_1, e_2) orthonormé dans E et désignons par (e_α). pour abréger, le repère correspondant de $\overset{p}{\vee} E$.

Lemme 1. — E′ est engendré librement par certains vecteurs du repère (e_α).

Prenons u_1 diagonalisée dans (e_1, e_2) telle que les valeurs propres de $(\overset{p}{\vee} u_1)$ soient toutes distinctes, ce qui est réalisé si ζ_2/ζ_1 n'est pas une racine de l'unité ; si $x \in E'$ est vecteur propre de la restriction v de $\overset{p}{\vee} u_1$ à E′, il est aussi vecteur propre de $(\overset{p}{\vee} u_1)$ dans E avec la même valeur propre : les sous-espaces propres de v dans E′ sont donc de dimension 1 et s'identifient à certains sous-espaces propres de $(\overset{p}{\vee} u_1)$.

Lemme 2.— E′ contient : $e_1 \vee e_1 \dots \vee e_1 \overset{p}{=} (\vee e_1)$

Prenons $u_2 \in SU(2, C)$ de matrice $\| a^i_j \|$ dans (e_1, e_2) telle que $a^1_2 \, a^1_1 \neq 0$, c'est-à-dire un élément de SU (2. C) qui ne commute pas avec u_1 et de trace non nulle. $(\overset{p}{\vee} u_2)(e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_p}) = a^1_{i_1} \dots a^1_{i_p} (\overset{p}{\vee} e_1)$, modulo des termes ne contenant pas $(\overset{p}{\vee} e_1)$; donc d'après le lemme 1, E′ contient $(\overset{p}{\vee} e_1)$ puisque $a^1_{i_1} \dots a^1_{i_p} \neq 0$.

Lemme 3.— E′ contient un vecteur dont les composantes dans le repère (e_α) sont toutes différentes de 0.

Avec les notations du lemme 2, $a^2_1 \, a^1_1 = - \bar{a}^1_2 \, a^1_1 \neq 0$

$(\overset{p}{\vee} u_2)(\overset{p}{\vee} e_1) = a_1^{k_1} \dots a_1^{k_p}.(e^{k_1} \vee \dots \vee e_{k_p})$ (avec sommation en $k_1, k_2, \dots k_p$ de 1 à 2); le cœfficient de $(\overset{m_1}{\vee} e_1) \vee (\overset{m_2}{\vee} e_2)$ (avec $n_1+n_2=p$) est $C_p^{n_1}(a^1_1)^{n_1}(a^2_1)^{n_2} \neq 0$.

Donc E′ = E et le résultat est établi.

Ce résultat peut aisément se généraliser : soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K commutatif de caractéristique nulle, A un sous-ensemble de $\mathcal{L}$ (E); soit $B = \{ \rho(u) = \overset{p}{\vee}(u) \in \mathcal{L}(\overset{p}{\vee} E) : u \in A \}$

1° Si A contient v_1, diagonalisable dans un repère (e_i), telle que les valeurs propres de $\rho(u_1)$ soient au nombre de n et toutes distinctes,

2° Si A contient u_2 de matrice $\| a^i_j \|$ telle que $a^i_1 \neq 0, i = 1, 2 \dots n$, dans le repère qui diagonalise u_1,

alors l'ensemble des transformations B est irréductible. Ce théorème s'applique au groupe SU (n, C).

Il suffit de choisir u_1 de valeurs propres $e^{i\varphi_k}$ ($k = 1, 2 \dots, n-1$) $\frac{\varphi_k}{2\pi} = \left(\frac{\varphi_1}{2\pi}\right)^k$, $\frac{\varphi_1}{2\pi}$ transcendant, et u_2 tel que $u_2(e_1) = f_1$, f_1 étant un vecteur unitaire dont les composantes dans (e_i) sont toutes différentes de 0.

Il est alors évident que la restriction de ρ à tout sous-groupe de SU (n, C) qui contient u_1 et u_2 est irréductible. Dans le cas où $n = 2$, ce sous-groupe est partout dense dans SU (2, C), comme on peut facilement l'établir. On sait aussi (3) que pour $n = 2$ toute représentation continue de degré p du groupe spécial unitaire et équivalente à la représentation ρ : ce résultat peut s'établir par la théorie des caractères ou par la considération de l'algèbre de Lie du groupe(2).

Nous allons précisément déduire de l'étude précédente des résultats sur l'algèbre de Lie de SU (2, C). ρ étant un homomorphisme continu de SU (2, C) dans GL $(\overset{p}{\vee} C^2)$ de noyau discret $d\rho$ est un isomorphisme entre l'algèbre de Lie de SU (2, C) et l'algèbre de Lie de ρ [SU (2. C)] = G′, algèbre de dimension 3 sur R.

Les trois éléments

$$u_1(t) = \begin{Vmatrix} \cos t/2 & i \sin t/2 \\ i \sin t/2 & \cos t/2 \end{Vmatrix} \; ; \; u_2(t) = \begin{Vmatrix} \cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2 \end{Vmatrix}$$

$$u_3(t) = \begin{Vmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{Vmatrix}$$

qui appartiennent à un voisinage de l'identité définissent une base de l'algèbre de Lie de G′ :

$$U_i = \left(\frac{d(\overset{p}{\vee} u_i(t))}{dt}\right)_{t=0} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$U_3 = i \operatorname{diag}\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} - 1, \dots \dots - \frac{p}{2}\right)$$

On pose usuellement $p = 2k$ et k est le poids de la représentation.
De même comme :

$$(\overset{p}{\vee}\, u_1)(t)(e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2}) = a_1^{i_1} \ldots\ldots a_1^{i_{n_1}}\; a_2^{k_1} \ldots a_2^{k_{n_2}}\; (e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_{n_1}}) \vee (e_{k_1} \vee \ldots\ldots \vee e_{k_{n_2}}$$

$$U_1(e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2}) = \frac{n_1 i}{2}(e_1^{n_1-1} \vee e_2^{n_2+1}) + \frac{n_2 i}{2}(e_1^{n_1+1} \vee e_2^{n_2-1})$$

$$(n_1 + n_2 = p \text{ et } \overset{n_i}{\vee}(e_i) = e_i^{n_i}) \left.\begin{matrix} 0 \leqslant n_1 \leqslant p \\ 0 \leqslant n_2 \leqslant p \end{matrix}\right\} (n_1 \text{ et } n_2 \text{ entiers}$$

De la même manière :

$$U_2(e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2}) = \frac{n_1}{2}(e_1^{n_1-1} \vee e_2^{n_2+1}) - \frac{n_2}{2}(e_1^{n_1+1} \vee e_2^{n_2-1})$$

Si nous définissons $H = U_1 + i\,U_2$, $K = U_1 - i\,U_2$, il vient :

$$H(e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2}) = i\, n_1 (e_1^{n_1-1} \vee e_2^{n_2+1})$$
$$K(e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2}) = i\, n_2 (e_1^{n_1+1} \vee e_2^{n_2-1})$$

Puis en normant les vecteurs du repère (e_α) et définissant ainsi la base

$$f_{n_1, n_2} = \left(\frac{p\,!}{n_1\,!\, n_2\,!}\right)^{1/2} (e_1^{n_1} \vee e_2^{n_2})$$

$$H(f_{n_1, n_2}) = i\,[n_1(n_2+1)]^{1/2} (f_{n_1-1, n_2+1}) \text{ si } n_1 > 0$$
$$= 0 \text{ si } n_1 = 0$$
$$K(f_{n_1, n_2}) = i\,[n_2(n_1+1)]^{1/2} (f_{n_1+1, n_2-1}) \text{ si } n_2 > 0$$
$$= 0 \text{ si } n_2 = 0$$
$$U_3(f_{n_1, n_2}) = i\,\frac{(n_1 - n_2)}{2}(f_{n_1, n_2})$$

II. — Représentations irréductibles de degré fini de SL (2, C)

Considérons l'espace $F = (\overset{m}{\vee}\, C^2)(\overset{n}{\vee}\, C^2)$ de dimension $(m+1)(n+1)$, ce nombre pouvant prendre par un choix convenable de m et n toute valeur entière positive. (e_1, e_2) étant une base orthonormée de C^2, la b se correspondant de F :

$(e_{i_1} \vee \ldots e_{i_m}) \otimes (e_{j_1} \vee \ldots \vee e_{j_n})$ où : $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant 2$ et $1 \leqslant j_1 < \ldots \leqslant j_m \leqslant 2$, sera notée en abrégé $(e_\alpha)_m \otimes (e_\beta)_n$

Posons pour $u \in SL(2, C)$: $\overline{u(\bar{x})} = \bar{u}(x)$, $\bar{u} \in SL(2, C)$, puis :

$(\overset{m}{\vee}\, u) \otimes (\overset{n}{\vee}\, \bar{u})(\overset{m}{\vee}\, x_1 \otimes \overset{n}{\vee}\, x_2) = (u(x_1) \vee \ldots \vee u(x_m)) \otimes (\overline{u(\bar{x}_{m+1})} \vee \ldots \vee \overline{u(\bar{x}_{m+n})})$
$x_1, x_2, \ldots x_{m+n} \in C^2$, et étendons cette application par linéarité à F tout entier $\rho(u) = (\overset{m}{\vee}\, u) \otimes \overset{n}{\vee}\, \bar{u})$ est un endomorphisme de F, de plus ρ est un homomorphisme de groupe car, selon un résultat classique :

$$\rho\,(u \circ v) = \overset{m}{\vee}(u \circ v) \otimes \overset{n}{\vee}(u \circ v) = (\overset{m}{\vee}\, u \circ \overset{n}{\vee}\, v) \otimes (\overset{m}{\vee}\, \bar{u} \circ \overset{n}{\vee}\, \bar{v})$$
$$= (\overset{m}{\vee}\, u \otimes \overset{n}{\vee} \bar{u}) \circ (\overset{m}{\vee}\, v \otimes \overset{n}{\vee} \bar{v}) = \rho(u) \circ \rho(v)$$

Si u est choisie diagonale dans le repère (e_1, e_2) et de valeurs propres ζ_1, ζ_2 avec $\zeta_1 \zeta_2 = 1$, on a :

$$\rho(u)((e_\alpha)_m \otimes (e_\beta)_n) = \zeta_{i1}\zeta_{i2} \ldots \zeta_{im}\zeta_{j1} \ldots \zeta_{jn}(e_\alpha)_m \otimes (e_\beta)_n$$

de sorte que $\rho(u)$ est diagonale dans le repère correspondant à (e_1, e_2) et que les valeurs propres de $\rho(u)$ sont de la forme :

$$r^{2(m_1+n_1)-(m+n)} e^{i(n-m+2m_1-2n_1)\varphi}$$

si l'on pose : $\zeta_1 = re^{i\varphi}$. m_1 et n_1 étant des entiers variant respectivement de 0 à m et de 0 à n inclus.

Ces valeurs propres ne sont pas toutes de module 1 quand $r \neq 1$ de sorte que $\rho(u)$ n'est pas unitaire.

La méthode donnée pour le groupe SU (2, C) montre presque immédiatement que la représentation $u \to \rho(u)$ est irréductible; en se reportant au I on voit que le lemme 1 s'applique ici en choisissant $r \neq 1$ et $\frac{\varphi}{\pi}$ irrationnel. quant aux lemmes 2 et 3 ils sont valables en remplaçant simplement $\overset{p}{\vee}(e_1)$ par $\overset{m}{\vee} e_1 \otimes \overset{n}{\vee} e_1$.

Toutes les représentations irréductibles de degré fini de SL (2, C) sont équivalentes à ρ (3). En effet le raisonnement classique (2) (3) sur l'algèbre de Lie de SU (2, C) est encore valable ici, car l'algèbre de Lie de SL (2, C) admet sur C la base E, F, H formée par les trois éléments :

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = E \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = F \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = H$$

tels que : $[E, F] = H, \quad [H\ E] = 2E, \quad [H, F] = -2F$

Il est donc inutile, de donner de cette irréductibilité une demonstration nouvelle.

L'algèbre de Lie de SL (2, C), munie de sa structure d'espace vectoriel sur R est isomorphe à celle de L_6 (4, R) (3) et les sous-groupes à un paramètre qui correspondent à des rotations de Lorentz dans les plans de coordonnées du repère de l'espace de Minkowski sont :

$u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$, de la même forme que plus haut, et :

$$v_1(t) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch} t/2 & \operatorname{sh} t/2 \\ \operatorname{sh} t/2 & \operatorname{ch} t/2 \end{Vmatrix}, \quad v_2(t) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch} t/2 & i \operatorname{sh} t/2 \\ -i \operatorname{sh} t/2 & \operatorname{ch} t/2 \end{Vmatrix}, \quad v_3(t) = \begin{Vmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{Vmatrix}$$

d'où l'on déduit aisément 6 matrices linéairement indépendantes sur R constituant une base sur R de l'algèbre de Lie de SL (2, C).

Posant : $H_3 = \left\{ \frac{d}{dt} \rho(u_3(t)) \right\}_{t=0}$ il vient :

$$H_3 = i \operatorname{diag}\left(\frac{n-m}{2} + m_1 - n_1\right)$$

Ainsi les valeurs propres de H_3 sont comprises entre $\left|\frac{m-n}{2}\right|$ et $\frac{m+n}{2}$.
Il est sans difficulté de calculer les matrices qui correspondent à u_1, u_2, v_1, v_2, v_3. Pour les résultats numériques on pourra consulter le livre de NAIMARK (3).

III. — IRRÉDUCTIBILITÉ DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS DE SL (p, C)

p étant maintenant un entier naturel supérieur à 2, établissons le théorème suivant :

Les représentations $\rho : u \to (\overset{m}{\vee} u) \otimes (\overset{n}{\vee} \bar{u})$ *où* $u \in SL\,(p.\ C)$ *sont irréductibles.*
Choisissons u diagonalisée et soient $\zeta_\alpha = r_\alpha\, e^{i\varphi_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2 \ldots p)$ les valeurs propres de u, $(r_1 \times r_2 \times \ldots r_p = 1$, $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_p = 0$, alors on voit aisément que les valeurs propres de $\rho\,(u)$ sont données par

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=p-1} r_\alpha(j_\alpha + k_\alpha - j_p - k_p)\quad e^{\,i\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=p-1}(l_1 + \ldots +{}_2\, l_\alpha + \ldots\, l_{p-1})\,\varphi_\alpha}$$

(à un cœfficient multiplicatif constant près)
où les k_α, j_α sont des entiers positifs ou nuls, tels que :

$$k_1 + \ldots k_p = m\ ;\ j_1 + j_2 + \ldots j_p = n \text{ et } l_\alpha = k_\alpha - j_\alpha$$

Nous poserons $\lambda_\alpha = l_1 + l_2 + \ldots 2\, l_\alpha + \ldots\, l_{p-1}$

Choisissons $\frac{\varphi_1}{2\pi}$ transcendant et $\frac{\varphi_\alpha}{2\pi} = \left(\frac{\varphi_1}{2\pi}\right)^\alpha$, $(\alpha = 1, 2 \ldots p-1)$, avec r_1, $r_2 \ldots r_{p-1}$ entiers, distincts et premiers.
Alors toutes les valeurs propres de $\rho\,(u)$ sont distinctes. En effet, on a avec des notations évidentes, si deux valeurs propres sont égales :

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p-1} (\lambda_\alpha - \lambda'_\alpha)\,\varphi_\alpha = 0 \quad (\text{mod } 2\pi)$$

Si les $(\lambda_\alpha - \lambda'_\alpha)$ ne sont pas tous nuls :

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=p-1} (\lambda_\alpha - \lambda'_\alpha)\left(\frac{\varphi_1}{2\pi}\right)^\alpha = 0 \ (\text{mod } 1),$$ ce qui est impossible ; donc

les $\lambda_\alpha - \lambda'_\alpha$ sont tous nuls, mais cela entraîne $l_\alpha = l'_\alpha$, $\alpha = 1, 2 \ldots p-1$ puis en sommant de 1 à $(p-1)$ $l_p = l'_p$. Comparant les modules nous avons aussi dans la même hypothèse et en posant :

$$j_\alpha + k_\alpha - j_p - k_p = s_\alpha$$

$$r_1^{s_1} \times r_2^{s_2} \times \ldots r_{p-1}^{s_{p-1}} = r_1^{s'_1} \times r_2^{s'_2} \times \ldots r_{p-1}^{s'_{p-1}}$$

ce qui entraîne que :

$s_\alpha = s'_\alpha$, $\alpha = 1, 2 \ldots (p-1)$ puis en sommant de 1 à $(p-1)$

$$j_p + k_p = j'_p + k'_p$$ et finalement :

$$k_\alpha = k'_\alpha \ , \ j_\alpha = j'_\alpha \qquad \alpha = 1, 2 \ldots p$$

Ainsi on peut appliquer le lemme 1 du n° I et en ce qui concerne les lemmes 2 et 3 il n'y a qu'à se reporter à ce que l'on a dit pour SU (n, C) et SL (2, C) : les modifications sont insignifiantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY. — Theory of Lie Groups — Princeton 1946.

[2] JACOBSON. — Lie algebras — Interscience (pages 83-86) New-York (1962).

[3] NAIMARK. — Les représentations linéaires du groupe de Lorentz — Dunod Paris 1962.

[4] WIGNER. — Group Theory, Academic Press. 1959.