

J. BACHELLIER

H. GARDY

## **Applications du calcul symbolique graphique à l'étude des systèmes différentielles linéaires**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série*, tome 18 (1954), p. 161-177

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1954\\_4\\_18\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1954_4_18__161_0)

© Université Paul Sabatier, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# APPLICATION DU CALCUL SYMBOLIQUE GRAPHIQUE A L'ÉTUDE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

par J. BACHELLIER et H. GARDY

---

## INTRODUCTION

L'Institut du Génie Chimique s'est proposé, tant par son cours de calcul graphique que par ses publications, d'appliquer systématiquement des méthodes graphiques à la résolution des nombreux problèmes qui se présentent en génie chimique. Parmi ces problèmes se trouvent, en particulier, celui de la régulation automatique des appareillage de l'Industrie Chimique et celui de l'étude des échanges et de la transmission de la chaleur. Ces deux problèmes ont le caractère commun de se ramener à l'étude d'ensembles régis par des systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires auxquels on peut appliquer les méthodes de calcul symbolique bien connues et largement utilisées pour l'étude des systèmes électriques.

Cependant, bien qu'identiques en forme aux problèmes électriques, les problèmes de Génie Chimique revêtent un aspect particulier. D'abord les unités de temps utilisées sont très grandes, de l'ordre de la minute, du quart d'heure et même davantage.

Il en résulte que des essais qui sont très faciles à effectuer sur des circuits électriques deviennent longs et pénibles au Génie Chimique. C'est ainsi que la réponse permanente d'un système électrique à une excitation sinusoïdale de basse fréquence s'obtient presque instantanément grâce à la rapidité de l'établissement de l'état permanent. Il n'en est pas de même au Génie Chimique où il n'est pas rare d'utiliser des périodes de 30 minutes et où il faut attendre plusieurs périodes avant que l'état permanent soit sensiblement atteint.

D'autre part, il est rarement possible, en Génie Chimique, d'imposer à un ensemble industriel une excitation de nature simple qui se traduirait par une fonction bien connue permettant de traiter complètement le problème par le calcul. L'excitation et la réponse sont ce qu'elles sont. Elles sont relevées par des appareils enregistreurs et ce sont ces courbes enregistrées, qui n'ont en général pas d'équations connues, qui constituent les seules données du problème.

A ces caractères particuliers des problèmes du Génie Chimique doivent correspondre des méthodes d'analyse particulières.

La méthode adoptée par l'Institut du Génie Chimique a été exposée par M. G. LAVILLE; Professeur à l'Institut du Génie Chimique, dans le cours-conférence : « La Régulation automatique des appareillages de l'Industrie Chimique » [1]. En se reportant à cette publication, on voit que l'idée fondamentale est de caractériser un système linéaire par sa réponse à une excitation représentée par la fonction Impulsion — unité d'Heaviside. Cela constitue l'analyse impulsionnelle qui prend place entre l'analyse unitaire et l'analyse fréquentielle jusqu'alors employées et qui consistent respectivement à caractériser le système par sa réponse à une excitation représentée par l'échelon-unité d'Heaviside ou par des fonctions sinusoïdales de diverses fréquences.

Les calculs nécessaires à l'analyse impulsionnelle font intervenir le calcul symbolique et ils sont systématiquement effectués par voie graphique : en particulier, la résolution de certaines intégrales utilisées constamment fait l'objet d'un article détaillé [2].

Nous nous proposons, après avoir brièvement rappelé les principaux points de la méthode impulsionnelle, d'étudier sa valeur sur des exemples concrets qui nous permettront de déterminer ses limites de validité et d'efficacité et d'y apporter, le cas échéant, les corrections et perfectionnements que la pratique suggèrera.

#### Méthode impulsionnelle.

Un système linéaire est complètement caractérisé par la réponse  $u'(t)$ , au temps  $t$ , qui correspondrait à une excitation débutant au temps zéro et représentée par la pseudo-fonction impulsion unité  $\gamma'(t)$  considérée par HEAVISIDE. On démontre, en effet, que la réponse  $f(t)$  à une excitation  $F(t)$  est donnée par l'intégrale :

$$f(t) = \int_{\tau=0}^t F(\tau) u'(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

Inversement, étant donné un système linéaire, non calculable, un ensemble industriel par exemple, on pourra déterminer la fonction  $u'(t)$  expérimentalement. Il suffira d'appliquer au système une excitation  $F(t)$  arbitraire mais connue et de relever sa réponse  $f(t)$ . D'après l'équation (1),  $u'(t)$  sera la solution d'une équation intégrale de VOLTERRA de première espèce, du type du cycle fermé. Le calcul symbolique donne le moyen de résoudre cette équation. En désignant  $\Phi(p)$ ,  $\varphi(p)$  et  $U'(p)$  les images dans la transformation de LAFLACE des fonctions  $F(t)$ ,  $f(t)$  et  $u'(t)$  on obtient  $U'(p)$  par la relation :

$$U'(p) = \frac{\varphi(p)}{\Phi(p)} \quad (2)$$

Il reste alors à revenir de  $U'(p)$  à son original  $u'(t)$  au moyen de la formule dite de MELLIN-FOURIER.

L'image  $\Phi(p)$  de la fonction  $F(t)$  est, comme on le sait, donnée par l'intégrale complexe :

$$\Phi(p) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-pt} F(t) dt \quad (3)$$

où  $p$  désigne la variable complexe  $\gamma + i\omega$  pour laquelle  $\gamma$  est essentiellement positif ou nul.

Nous nous limiterons au cas particulier, mais rencontré presque toujours dans la pratique, où  $F(t)$  est une fonction qui, nulle avant le temps zéro, redevient nulle pour  $t$  infiniment grand, de telle façon que l'intégrale réelle :

$$\int_0^{+\infty} F(t) dt$$

ait une valeur finie.

Il en sera de même pour l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt$$

relative à la réponse.

Dans ce cas, on peut ne considérer que des valeurs de  $p$  imaginaires pures, de la forme  $p = i\omega$  et l'image est alors donnée par l'intégrale complexe :

$$\Phi(i\omega) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt \quad (4)$$

qui se ramène au calcul des deux intégrales réelles :

$$X_F = \int_{t=0}^{+\infty} F(t) \cos \omega t dt$$

$$Y_F = - \int_{t=0}^{+\infty} F(t) \sin \omega t dt$$

Dans la représentation d'ARGAND,  $X_F$  et  $Y_F$  sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point  $M_F$  qui est l'affixe de  $\Phi(i\omega)$ .

Lorsque  $\omega$  varie,  $M_F$  décrit une courbe  $C_F$  qui représente  $\Phi(i\omega)$  (à côté de chaque point  $M_F$ , on supposera indiquée en côte la valeur correspondante de  $\omega$ ).

D'une façon analogue sera construite la courbe  $c_r$  lieu des points  $M_r$  de coordonnées,

$$X_r = \int_{t=0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$Y_r = - \int_{t=0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

On obtiendra la courbe  $c_{u'}$ , qui représente  $U' (i\omega) = \frac{\varphi (i\omega)}{\Phi (i\omega)}$  en faisant le rapport des modules de deux points de même cote des courbes  $c_t$  et  $C_r$  et en prenant la différence de leurs arguments.

Sur cette courbe  $c_{u'}$ , on relève les abscisses et les ordonnées :

$$X_{u'} = \int_{t=0}^{t=\infty} u' (t) \cos \omega t dt$$

$$Y_{u'} = - \int_{t=0}^{t=\infty} u' (t) \sin \omega t dt$$

Le calcul de  $u' (t)$  à partir de ces dernières quantités s'effectue à l'aide de la formule de MELLIN-FOURIER qui, dans le cas particulier considéré, se réduit à :

$$u' (t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{+\infty} X_{u'} \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{+\infty} Y_{u'} \sin \omega t d\omega \quad (5)$$

Il suffira d'effectuer ce calcul pour diverses valeurs de  $t$  pour obtenir la courbe représentant  $u' (t)$  entre  $t = 0$  et  $t = \infty$ .

On voit que tous ces calculs utilisent des intégrales du même type, qui, par un changement de variable convenable se ramènent aux deux types suivants :

$$\int_0^{\infty} f(\theta) \cos k\theta d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} f(\theta) \sin k\theta d\theta$$

où  $k$  représente un nombre positif, mais non nécessairement entier.

Ces intégrales se prêtent au calcul graphique, qui apparaît d'ailleurs comme indispensable lorsque la fonction  $f(\theta)$  provient d'une détermination expérimentale et se trouve représentée par une courbe dont l'équation n'est pas connue.

Les opérations graphiques à effectuer sont, en principe, très simples. Elles consistent à tracer sur un même graphique la courbe  $f(\theta)$ , les sinusoïdes  $\cos. k\theta$  et  $\sin. k\theta$ , puis à construire les courbes  $f(\theta) \cos. k\theta$  et  $f(\theta) \sin. k\theta$ .

On intègre ensuite par la méthode de MASSAU (voir cours-conférence : « La régulation automatique des appareillages de l'industrie chimique », pp. 35 et 38).

Mais il faut répéter ces opérations pour un assez grand nombre de valeurs de  $k$ . Cette répétition devient vite fastidieuse, c'est pourquoi M. LAVILLE a indiqué une méthode graphique particulière consistant à construire d'un seul coup l'intégrale complexe  $\int_0^{\infty} f(\theta) e^{ik\theta} d\theta$  qui rassemble

en un seule les deux intégrales précédentes.

Ce procédé consiste à découper la courbe  $f(\theta)$  en un nombre assez restreint d'arcs partiels qui peuvent être représentés avec une précision suffisante par des fonctions entières du troisième degré en  $\theta$ .

Pour un arc partiel dont les limites sont  $\theta_0$  et  $\theta_1$ , l'intégrale  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$  qui correspond à  $k = 1$  s'obtient en construisant les figures  $M_0 M'_0 M''_0 M'''_0 \Omega$  et  $M_1 M'_1 M''_1 M'''_1 \Omega$ , composées de segments de droites rectangulaires et appelées pour cette raison orthogones (fig. 1). Les premiers côtés  $M_0 M'_0$  et

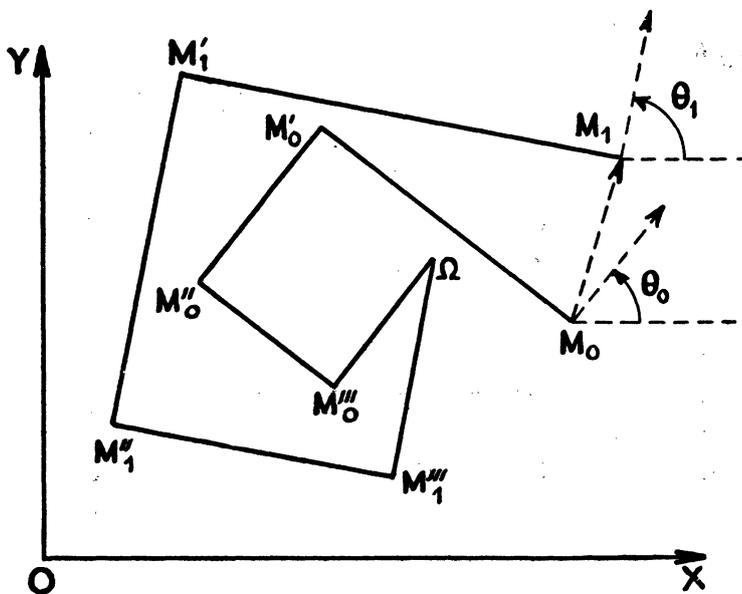


FIG. 1.

$M_1 M'_1$  font respectivement, avec l'axe réel  $OX$ , les angles :

$$\theta_0 + \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_1 + \frac{\pi}{2};$$

quant aux longueurs des côtés des orthogones, elles se déduisent, par des calculs arithmétiques simples des ordonnées relevées sur la courbe  $f(\theta)$

pour les abscisses  $\theta_0, \frac{2\theta_0}{3} + \frac{\theta_1}{3}; \frac{\theta_0}{3} + \frac{2\theta_1}{3}; \theta_1$

croissant en progression arithmétique (fig. 2).

En posant :  $\frac{\theta_1 - \theta_0}{3} = \varphi$ , on obtient :

$$M'_0 M_0 = f(\theta_0) - \frac{11}{6} f(\theta_0) + 3f(\theta_0 + \varphi) - \frac{3}{2} f(\theta_0 + 2\varphi) + \frac{f(\theta_1)}{3}$$

$$M''_0 M'_0 = \frac{\quad}{\varphi}$$

$$M''', M_1 = \frac{2f(\theta_0) - 5f(\theta_0 + \varphi) + 4f(\theta_0 + 2\varphi) - f(\theta_1)}{\varphi^3}$$

$$M''_0, \Omega = M''_1, \Omega = \frac{-f(\theta_0) + 3f(\theta_0 + \varphi) - 3f(\theta_0 + 2\varphi) + f(\theta_1)}{\varphi^3}$$

$$M' M_1 = f(\theta_1)$$

$$M''_0, M'_1 = \frac{-f(\theta_0)/3 + 3f(\theta_0 + \varphi)/2 - 3f(\theta_0 + 2\varphi) + 11f(\theta_1)/6}{\varphi}$$

$$M''', M''_1 = \frac{-f(\theta_0) + 4f(\theta_0 + \varphi) - 5f(\theta_0 + 2\varphi) + 2f(\theta_1)}{\varphi^3}$$

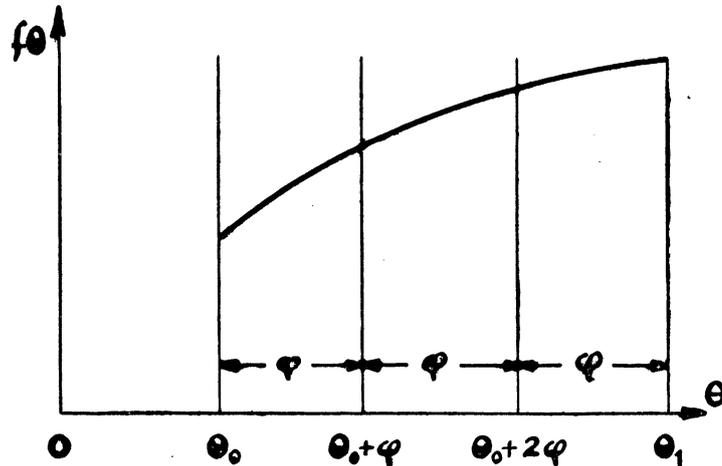


FIG. 2.

L'intégrale partielle  $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$  est représentée par le segment  $M_0 M_1$  qui joint les origines des deux orthogones relatifs aux extrémités de l'arc considéré.

Un avantage du procédé est de n'utiliser qu'un nombre relativement restreint d'arcs partiels assez étendus. En outre, les calculs faits pour l'intégrale correspondant à  $k = 1$  servent lorsque l'on donne à  $k$  d'autres valeurs. En effet, pour l'intégrale générale  $\int f(\theta) e^{ik\theta} d\theta$ , les orthogones se déduisent de ceux trouvés pour  $k = 1$ , en conservant les longueurs  $M_0 M'_0$  et  $M_1 M'_1$ , en divisant par  $k$  les longueurs  $M'_0 M''_0$  et  $M'_1 M''_1$ , par  $k^2$  les longueurs  $M''_0 M'''_0$  et  $M''_1 M'''_1$ , par  $k^3$  enfin, les longueurs  $M'''_0 \Omega$  et  $M'''_1 \Omega$ .

Il faut aussi modifier les orientations en remplaçant  $\theta_0$  par  $k\theta_0$ ;  $\theta_1$  par  $k\theta_1$ , etc...

On obtient ainsi l'intégrale  $k \int_0^{\infty} f(\theta) e^{ik\theta} d\theta$ . M. LAVILLE a donné dans

sa publication un exemple d'application de sa méthode au développement en série de FOURIER d'une fonction connue. Mais dans cet exemple n'intervenaient que des valeurs de  $k$  entières et peu élevées, tandis que, en calcul symbolique,  $k$  varie de 0 à l'infini, les valeurs limites étant très importantes.

#### Vérification de la méthode.

Pour étudier la valeur pratique de la méthode, nous avons choisi en exemple qui, faisant intervenir des fonctions simples, peut être traité rigoureusement par le calcul.

Nous avons pris, pour l'excitation, à partir du temps zéro :

$$F(t) = t e^{-t}$$

et pour la réponse :

$$f(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{2}$$

Dans ce cas, les transformées de LAPLACE sont :

$$\Phi(i\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \quad \text{et} \quad \varphi(i\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^3}$$

de sorte que l'image de la réponse à l'impulsion 2 unité est :

$$U'(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$$

La réponse à l'impulsion unité est alors  $u'(t) = e^{-t}$  comme on peut le voir à l'aide d'une table de correspondance. Les trois courbes images  $\Phi(i\omega)$ ,  $\varphi(i\omega)$  et  $U'(i\omega)$  sont très faciles à construire exactement, d'après les valeurs calculées. En particulier  $U'(i\omega)$  est représentée par un cercle de diamètre égal à l'unité, centré sur l'axe réel et passant par l'origine. Ces trois courbes ont été construites avec soin sur des graphiques et elles vont servir de termes de comparaison pour les courbes images construites au moyen de la méthode graphique.

La construction de ces courbes images nous a conduit à quelques remarques que nous exposerons à propos de la construction de  $\Phi(i\omega)$ .

Après avoir tracé la courbe représentant  $F(t) = t e^{-t}$  en portant le temps en abscisses (1 minute = 50 mm.) et  $F(t)$  en ordonnées (1 unité = 100 mm.) (fig. 3), nous avons construit par la méthode des orthogones l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-it} F(t) dt \quad \text{qui correspond à } \omega = 1.$$

De la même façon, nous avons construit les intégrales correspondant aux valeurs suivantes de  $\omega$  :  $1/2 < \omega < 3$ .

Cela nous a permis de tracer une portion importante de la courbe image, et nous voyons sur la figure 3 que les points figuratifs correspondants sont très voisins des points théoriques, l'erreur maximum constatée n'excédant

pas 2 %. D'autre part, l'intégration graphique de l'intégrale réelle  $\int_0^{\infty} F(t) dt$ , nous donne la valeur relative à  $\omega = 0$  qui, comme on le voit sur la figure 3, est très exactement déterminée.

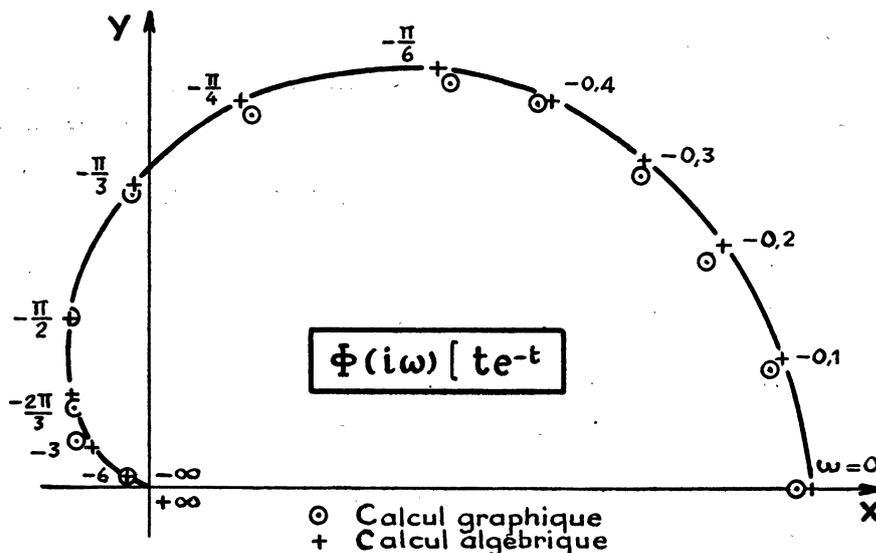


FIG. 3.

Cependant les deux extrémités de la courbe image sont inaccessibles, il reste deux « trous » importants, à savoir pour :

$$3 < \omega < \infty \quad \text{et pour} \quad 0 < \omega < \frac{1}{2}$$

Pour les grandes valeurs de  $\omega$ , la méthode des orthogones conduit à des erreurs de graphique importantes qui affectent non seulement le module, qui devient très petit, mais surtout l'argument qui devient indéterminé. Nous avons pu combler en partie ce « trou » supérieur en utilisant une remarque de M. LAVILLE.

L'intégrale  $\int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$  est égale à la somme :

$$\int_0^{\infty} F(t) \cos \omega t dt - i \int_0^{\infty} F(t) \sin \omega t dt$$

Lorsque la fonction  $F(t)$  reste positive entre 0 et  $\infty$  et reprend la valeur zéro au bout d'un certain temps, on peut, dans le calcul des intégrales :

$$\int_0^{\infty} F(t) \sin \omega t dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} F(t) \cos \omega t dt$$

et pour des valeurs élevées de  $\omega$ , assimiler la partie décroissante de la

courbe  $F(t)$  à un arc de parabole du second degré dont l'équation est de la forme  $a + bt + ct^2$ .

L'intégrale réelle  $\int_0^\infty F(t) \sin \omega t dt$  s'exprime alors approximativement par :

$$-\left[ \frac{F(t)}{\omega} - \frac{2c}{\omega^3} \right] \cos \omega t + \frac{b + 2ct}{\omega^2} \sin \omega t + Cte.$$

et l'intégrale réelle  $\int_0^\infty F(t) \cos \omega t dt$  par :

$$\frac{b + 2ct}{\omega^2} \cos \omega t + \left[ \frac{F(t)}{\omega} - \frac{2c}{\omega^3} \right] \sin \omega t + Cte$$

Envisageons la première de ces intégrales et supposons que l'on ait arrêté l'intégration à un nombre entier de périodes.

Désignons par  $S_o^n$  l'intégrale  $\int_0^{nT} F(t) \sin \omega t dt$

$$S_o^n = \int_0^{nT} F(t) \sin \omega t dt$$

Si, à partir de la période suivante, on peut assimiler  $F(t)$  à un arc de parabole du second degré, nous obtiendrons :

$$S_n^{n+1} = \int_{nT}^{(n+1)T} F(t) \sin \omega t dt = \left[ -\left[ \frac{F(t)}{\omega} - \frac{2c}{\omega^3} \right] \cos \omega t + \frac{b + 2ct}{\omega^2} \sin \omega t \right]_{nT}^{(n+1)T}$$

d'où :

$$S_n^{n+1} = \frac{F_n - F_{n+1}}{\omega}$$

$F(t)$  reprenant la valeur zéro pour  $t$  suffisamment grand,

$$S_n^\infty \approx \frac{F_n}{\omega}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$S_o^\infty = S_o^n + \frac{F_n}{\omega}$$

Envisageons maintenant la seconde intégrale. Supposons que l'on ait arrêté l'intégration à un nombre entier de périodes plus un quart de période :

$$S_o^{n+\frac{1}{4}} = \int_0^{(n+\frac{1}{4})T} F(t) \cos \omega t dt$$

Pour la période suivante, il vient :

$$S_{n+\frac{1}{4}}^{n+\frac{5}{4}} = \int_{(n+\frac{1}{4})T}^{(n+\frac{5}{4})T} F(t) \cos \omega t dt = \left[ \frac{b + 2ct}{\omega^2} \cos \omega t + \left[ \frac{F(t)}{\omega} - \frac{2c}{\omega^3} \right] \sin \omega t \right]_{(n+\frac{1}{4})T}^{(n+\frac{5}{4})T}$$

d'où :

$$S_{n+\frac{1}{4}}^{n+\frac{5}{4}} = \frac{F_{n+5/4} - F_{n+\frac{1}{4}}}{\omega}$$

et

$$s_{n+\frac{1}{4}}^{\infty} = -\frac{F_{n+\frac{1}{4}}}{\omega}$$

L'expression de  $s_0^{\infty}$  est alors :

$$s_0^{\infty} = s_0^{n+\frac{1}{4}} - \frac{F_{n+\frac{1}{4}}}{\omega}$$

Nous avons ainsi obtenu les points figuratifs de la courbe  $\Phi(i\omega)$  correspondant aux valeurs  $\omega = 3$  et  $\omega = 6$ , mais il apparaît difficile d'aller au-delà et la façon dont la courbe rejoint l'origine pour  $\omega = \infty$  reste absolument indéterminée.

Pour les valeurs faibles de  $\omega$ , c'est-à-dire pour  $0 < \omega < \frac{1}{2}$ , la méthode des orthogones tombe également en défaut car les côtés des orthogones sont alors démesurément grands et sortent de l'épure.

Dans ce cas, on peut utiliser une seconde remarque de M. LAVILLE :

$$F(t) e^{-i\omega t} = F(t) - i\omega t F(t) + \frac{i^2 \omega^2 t^2}{2!} F(t) - \frac{i^3 \omega^3 t^3}{3!} F(t) + \dots$$

On a donc :

$$\int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} F(t) dt - i\omega \int_0^{\infty} t F(t) dt - \frac{\omega^2}{2} \int_0^{\infty} t^2 F(t) dt + \frac{i\omega^3}{3} \int_0^{\infty} t^3 F(t) dt$$

Les intégrales  $S_0 = \int_0^{\infty} F(t) dt$ ,  $S_1 = \int_0^{\infty} t F(t) dt$ ,

$$S_2 = \frac{1}{2!} \int_0^{\infty} t^2 F(t) dt \dots \text{etc} \dots$$

s'obtiennent facilement par des transformations par l'abscisse de  $F(t)$  suivies d'intégrations graphiques.

On constitue l'orthogone de référence  $OA_0 A_1 A_2 A_3$  dont les côtés successifs sont  $S_0 S_1 S_2 S_3 \dots$ . Pour une valeur de  $\omega$  petite, on construit l'orthogone  $OA_0 B_1 B_2 B_3 \dots$  dont les côtés sont  $OA_0 = S_0$ ;  $A_0 B_1 = (A_0 A_1) \omega$ ,  $B_1 B_2 = (A_1 A_2) \omega^2$ ,  $B_2 B_3 = (A_2 A_3) \omega^3$ . Le point terminal  $B_n$  se fixe très rapidement et  $OB_n$  représente l'intégrale cherchée. La construction est d'autant plus rapide que  $\omega$  est plus voisin de 0 et il suffit alors d'un orthogone dont le nombre de côtés est peu élevé (3 ou 4) (*fig. 4*).

Cette construction comble très suffisamment le « trou » inférieur de la courbe image, compris entre  $\omega = 0$  et  $\omega = \frac{1}{2}$  et ceci, dans une région qui présente, comme nous le verrons, un grand intérêt.

Finalement, nous obtenons une courbe dont la forme générale est très exacte depuis les fréquences très basses jusqu'à une certaine fréquence



Il en sera a fortiori de même de la courbe image de la réponse à l'impulsion unité qui s'obtient en prenant le quotient des modules des deux courbes précédentes et en retranchant leurs arguments.

On voit (fig. 6) que, relativement correcte pour les faibles valeurs de  $\omega$ ,

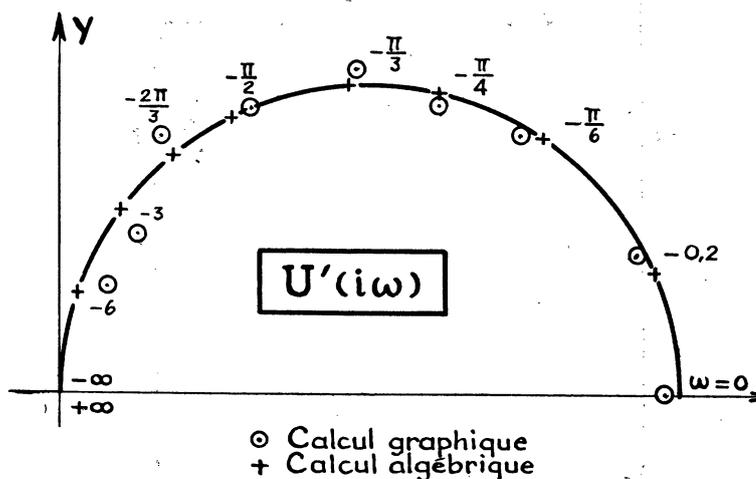


FIG. 6.

elle devient vite mal définie à partir de  $\omega = 3$  au point de perdre toute signification.

Que peut-on obtenir d'une telle courbe ainsi tronquée quand on passera à la restitution de l'original? Peut-on espérer que la portion correcte de cette courbe à partir des fréquences très basses sera suffisante pour déterminer correctement cet original?

C'est à cette question que répond la fig. 7 construite d'après le tableau suivant :

$t =$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$e^{-t}$	1	0,606	0,367	0,135	0,015
$u'(t)$	1,03	0,54	0,37	0,13	0,01

A part un point aberrant, qui paraît entâché d'une erreur due aux imperfections des extrapolations graphiques  $0 \leq t < 1$ , la réponse à l'impulsion unité obtenue graphiquement coïncide étroitement avec celle que donne le calcul. La coïncidence subsiste même pour les valeurs élevées de  $t$ . Ceci semble prouver que la partie la plus utile d'une courbe image est celle qui correspond aux faibles valeurs de  $\omega$ , la partie correspondant aux valeurs élevées de  $\omega$  a beaucoup moins d'importance, car elle donne naissance à des intégrales très petites.

Ce fait, dont on aperçoit l'importance pratique, est à rapprocher de la remarque qu'ont souvent faite les spécialistes de l'Analyse fréquentielle et

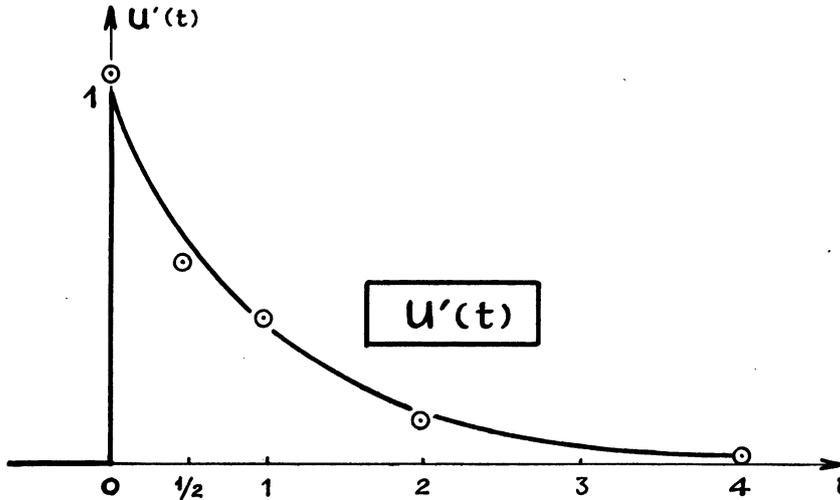


FIG. 7.

suivant laquelle les réponses aux excitations de très basses fréquences sont de la plus haute importance à connaître pour bien caractériser un système linéaire.

A ce point de vue la méthode impulsionnelle a le grand avantage de présenter son maximum de précision pour  $\omega = 0$ .

Il n'en est pas de même pour la méthode fréquentielle incapable de fournir la réponse correspondant à une fréquence nulle et d'une application longue et difficile pour les fréquences très basses.

Ces remarques montrent qu'il suffit au fond de peu de points pour déterminer les courbes images et qu'il n'est point nécessaire de se préoccuper des valeurs élevées de  $\omega$ .

A l'occasion de cette construction, nous ferons encore une remarque : la fonction  $u'(t)$  présente pour  $t = 0$  une discontinuité de première espèce. Si l'on applique la formule de MELLIN-FOURIER au point de discontinuité, il vient :

$$u'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} X(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \left| \text{arc tg } \omega \right|_0^{\infty}$$

$$u'(0) = \frac{1}{2}$$

Le calcul graphique conduit au même résultat : ainsi, quand  $u'(t)$  présente une discontinuité de première espèce, on obtient sa valeur moyenne au point de discontinuité; ceci peut être rapproché du phénomène de GIBBS. Il a donc fallu doubler l'ordonnée trouvée par le calcul graphique pour  $t = 0$ .

*Deuxième exemple :*

Nous avons pu vérifier l'application de la méthode impulsionnelle sur un deuxième exemple tiré d'une recherche expérimentale sur la transmission de la chaleur dans un régénérateur du type FRANKL [4].

Décrivons rapidement le dispositif utilisé :

A travers un empilement, convenablement calorifugé, d'une longueur de 14 cm., formé de sept galettes de régénérateur, nous avons fait passer, au moyen d'un ventilateur, de l'air à une vitesse voisine de 3 m./sec. A l'entrée de l'empilement, est disposée une chauffèrette constituée par un quadrillage serré de fil RNC et permettant d'élever de quelques degrés la température de l'air. Des thermocouples reliés à des galvanomètres enregistreurs mesurent la température de l'air à l'entrée et à la sortie. Le ventilateur étant mis en marche, nous attendions l'établissement d'un régime permanent dans l'appareillage. Celui-ci étant atteint, nous mettions la chauffèrette en route pendant une demi-minute. Nous arrêtons l'expérience lorsque le régime permanent était rétabli.

L'excitation à l'entrée et la réponse à la sortie, enregistrées photographiquement (Fig., 8) sont des courbes quelconques dont les équations, si elles

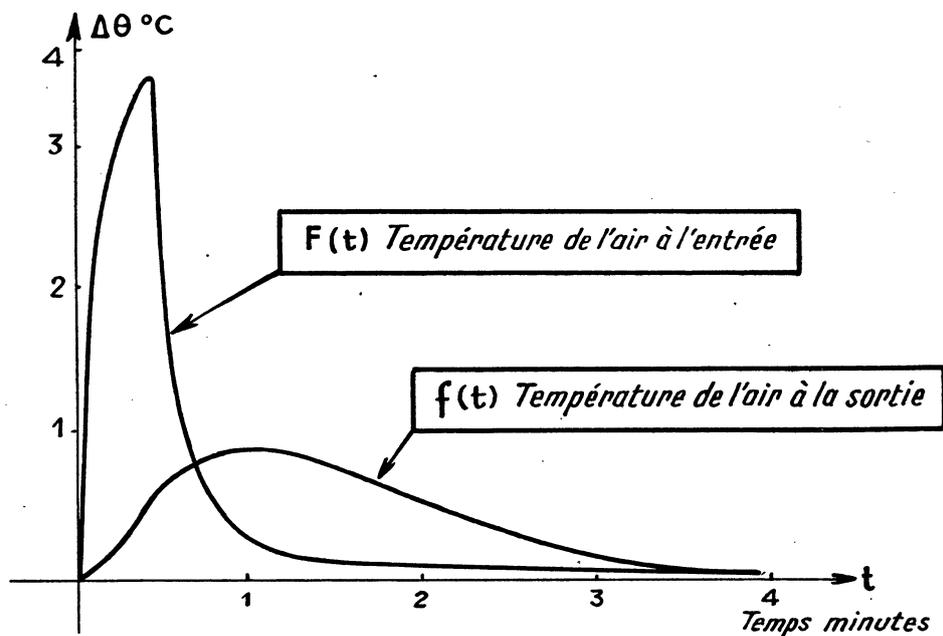


FIG. 8.

existent, nous sont inconnues et d'ailleurs indifférentes.

Traitées par la méthode précédemment exposée, elles ont donné pour la réponse à l'impulsion unité la courbe de la fig. 9. Cette courbe semble

avoir une ordonnée à l'origine finie, mais, en réalité, elle a peut-être une forme comme celle que nous indiquons en pointillé. Le graphique est impuissant à en décider. Cela n'a d'ailleurs aucune importance pratique, car l'existence d'une discontinuité ne change en rien les intégrales et la courbe trouvée donnera les mêmes résultats que la courbe qui pourrait avoir la forme indiquée en pointillé sur la fig. 9.

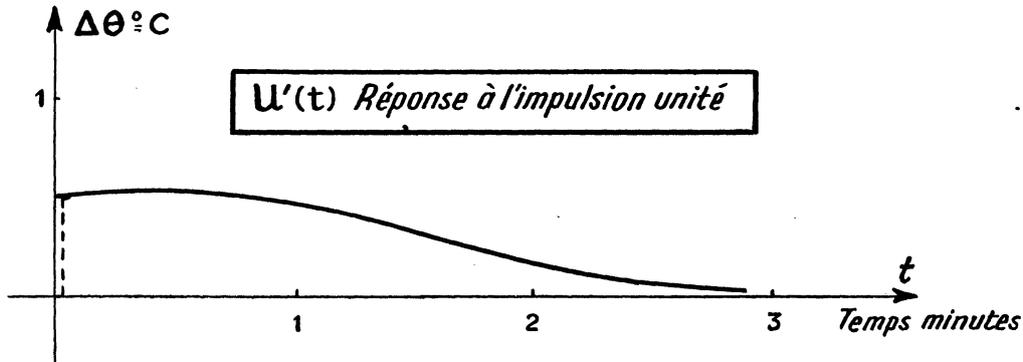


FIG. 9.

Comme vérification, nous avons utilisé cette réponse à l'impulsion unité pour retrouver la courbe de réponse du système quand la courbe d'excitation est précisément celle qui a été relevée expérimentalement. Pour cela nous avons calculé l'intégrale :

$$f(t) = \int_{\tau=0}^t F(\tau) u'(t - \tau) d\tau$$

M. PARODI donne dans son livre « Applications physiques de la Transformation de LAPLACE » une méthode graphique de calcul de cette intégrale définie.

Nous avons utilisé une deuxième méthode exposée par M. LAVILLE dans son cours de calcul graphique (Fig. 10).

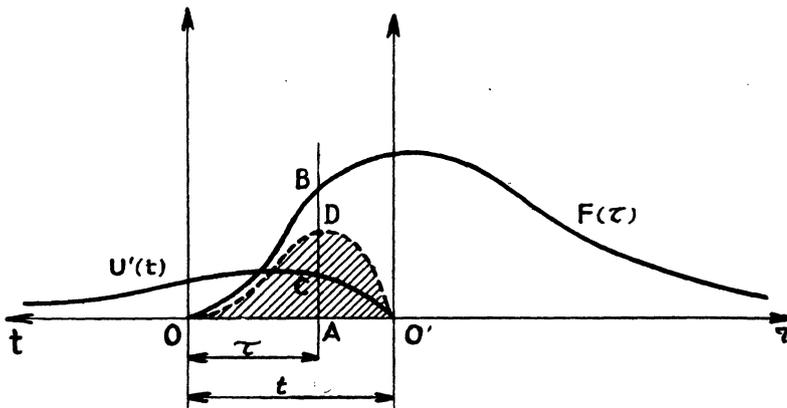


FIG. 10.

La courbe  $u'(t)$  étant tracée sur du papier transparent, on retourne ce papier, face pour face, et on l'applique sur la feuille où est tracée la courbe d'excitation  $F(t)$  de manière que les axes des abscisses  $O't$  et  $Ot$  coïncident, les deux origines  $O$  et  $O'$  étant distantes de  $t$ .

On construit alors la courbe dont les ordonnées sont les produits des ordonnées des deux courbes  $u'(t)$  et  $F(t)$ . On intègre ensuite cette dernière courbe par la méthode de MASSAU. On effectue ces opérations pour différentes valeurs de  $t$ .

La *fig. 11* montre que la réponse à l'excitation  $F(t)$  ainsi déterminée graphiquement coïncide remarquablement avec celle qui a été relevée expérimentalement.

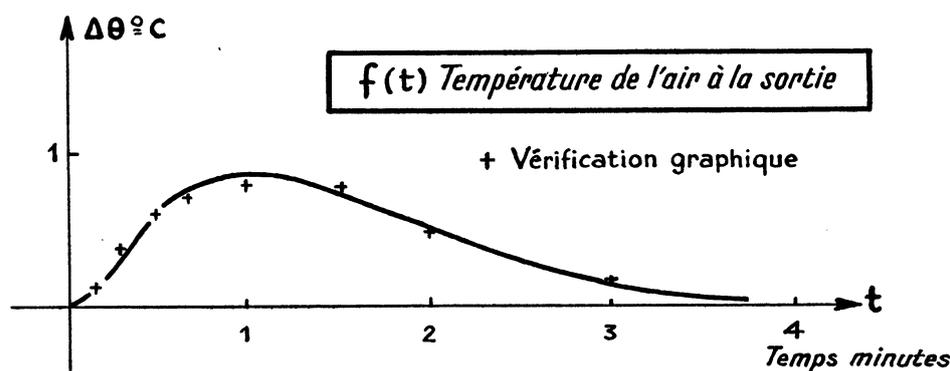


FIG. 11.

### RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

Nous avons appliqué la méthode graphique d'analyse impulsionnelle adoptée par l'I.G.C. de Toulouse à un cas simple entièrement calculable. Les résultats comparés à ceux du calcul se sont montrés très satisfaisants.

Au cours de cette étude, nous avons reconnu l'importance primordiale des pulsations faibles comparée à celle des pulsations très élevées. Nous avons montré que la construction des courbes images exige au fond assez peu de points.

Nous avons ensuite appliqué la méthode à un problème expérimental (Etude d'un régénérateur de chaleur).

Les courbes d'excitation et de réponse relevées sur des enregistrements ne correspondaient à aucune équation connue et l'on n'a pu, par conséquent, vérifier par le calcul l'exactitude de la courbe de réponse à l'impulsion unité qui caractérise complètement l'appareil.

Mais, en utilisant cette dernière courbe de réponse, nous avons pu à partir de la courbe d'excitation expérimentale, reconstituer la courbe de réponse du système. Cette reconstitution est remarquable car elle nous a donné

une courbe qui coïncide avec la courbe enregistrée aux erreurs expérimentales près, soit 1/100.

La méthode impulsionnelle paraît donc sûre et d'un emploi commode pour les essais pratiques des appareillages de l'Industrie Chimique. Elle peut constituer également un outil de recherches théoriques et expérimentales permettant de déterminer certaines grandeurs physiques intervenant dans les phénomènes de transmission de la chaleur et de propagation du son.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

1. G. LAVILLE : « La Régulation Automatique des appareillages de l'industrie chimique. » *Cours, Conférences, Centre de Perfectionnement Technique*. Fascicule n° 3026, 20/6/53. Presses Documentaires, Paris.
2. G. LAVILLE : « Résolution graphique d'intégrales utilisées en analyse harmonique et en calcul symbolique. » *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1953.
3. G. LAVILLE : « Méthode graphique applicable à l'analyse harmonique et au calcul symbolique. » *C. R.*, 28 avril 1952.
4. G. LAVILLE, H. GARDY : « Régulation automatique et Génie Chimique. — II. Transmission thermique entre un écoulement gazeux et une surface métallique. Méthode de mesure par perturbation thermique. » *Congrès des Sociétés Savantes*, avril 1953.
5. M. PARODI : « Applications physiques de la transformation de Laplace. » (C.N.R.S.).
6. L. POLI : « Leçons de calcul symbolique. » *Ecole Catholique d'Arts et Métiers de Lyon*.