ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. VINCENSINI

Propagation d'aires invariantes Correspondances par plans tangents parallèles entre surfaces réglées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 25 (1933), p. 41-68
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1933_3_25__41_0>

PROPAGATIONS D'AIRES INVARIANTES

CORRESPONDANCES PAR PLANS TANGENTS PARALLÈLES ENTRE SURFACES RÉGLÉES

PAR M. P. VINCENSINI

INTRODUCTION

Généralisant ses travaux antérieurs sur les propagations *rectilignes* d'intégrales doubles invariantes attachées à une surface quelconque, M. A. Buhl a été amené à étudier les propagations s'effectuant, non plus dans des canaux rectilignes, mais dans des canaux *curvilignes* de forme absolument quelconque(1).

Le point de vue adopté dans le Mémoire cité est généralement le suivant.

On se donne une surface (S) $[\Phi(x, y, z) = 0]$, et, d'autre part, un système de canaux définis par les deux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} P(x, y, z) = u, \\ Q(x, y, z) = v, \end{cases}$$

où u et v sont des constantes *arbitraires*.

[un canal élémentaire est défini par les quatre surfaces $P = u$, $P = u + du$; $Q = v$, $Q = v + dv$].

On cherche alors à déterminer les surfaces, autres que (S), sur lesquelles, les canaux qui viennent d'être définis, déterminent des aires égales à l'aire découpée sur (S), ou, plus généralement, conservent tout leur long une intégrale double donnée

$$(2) \qquad \int\int_{\Sigma} A(X, Y, Z)\, dS,$$

(Σ) étant la cloison déterminée par un canal quelconque sur les différentes surfaces.

On conçoit, qu'au moyen d'un assemblage convenable de canaux élémentaires,

(1) A. BUHL, *Tourbillons, Corpuscules, Ondes*. Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1932.

on puisse projeter, sur les surfaces précédentes, une intégrale double portant sur une cloison limitée par un contour arbitrairement tracé sur la surface initiale.

L'ensemble des surfaces (S) définit, à l'intérieur des canaux donnés, une propagation invariante de l'intégrale double (2).

Si $A = 1$, on a une propagation d'aires invariantes.

Ce dernier cas donne lieu à d'élégants résultats géométriques, dont quelques-uns généralisent des questions autrefois étudiees par Georges Humbert([1]).

Nous nous proposons, dans la première partie de ce travail, d'illustrer par quelques images géométriques nouvelles, obtenues en particularisant convenablement les systèmes de canaux propagateurs, le Mémoire dont il vient d'être question.

Nous modifierons légèrement le point de vue qui vient d'être exposé, en n'imposant pas à la famile de surfaces transportant l'intégrale double invariante (2) [qui pour nous sera toujours une aire], la condition de contenir une surface (S) initialement donnée.

Cette façon de procéder, laisse un peu d'imprévu dans les résultats, et permet de donner toujours à l'équation aux dérivées partielles (du premier ordre) attachée à un système déterminé de canaux, la forme *unitaire* dont l'avantage a été nettement mis en évidence par M. A. Buhl.

Dans la seconde partie du Mémoire, nous donnons quelques exemples de déterminations de familles de surfaces se correspondant avec égalité des courbures aux points correspondants. Si la correspondance est par plans tangents parallèles, on retrouve les propagations d'aires invariantes. Nous avons pu indiquer des exemples explicites de ce nouveau problème, en utilisant la propriété si simple, de la parabole, suivant laquelle le lieu des milieux des portions de tangentes limitées à la courbe et à l'un quelconque de ses diamètres, est une droite (tangente à la parabole).

Ces exemples concernent les surfaces réglées les plus générales, pour lesquelles se trouve établi le résultat suivant :

Étant donnée une surface réglée arbitraire, on peut toujours lui associer une infinité de nouvelles surfaces réglées (formant une famille dépendant d'une fonction arbitraire) correspondant à la première par plans tangents parallèles, par génératrices parallèles, et avec égalité des courbures totales.

Le cas des quadriques (surfaces doublement réglées) est examiné d'une façon particulière, et nous montrons, à propos de ce cas, comment, par uue méthode purement géométrique, on peut mettre en évidence l'existence (signalée jadis par J.-M. Serret dans une étude d'analyse) de ces surfaces gauches (imaginaires) applicables sur la sphère, dont s'est occupé, plus récemment, M. Bertrand Gambier.

([1]) G. Humbert, *Œuvres* publiées par P. Humbert et G. Julia, t. I, 1929.

1. — Propagations curvilignes d'aires invariantes.

Donnons-nous une famille de canaux curvilignes, définis par les deux équations :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P(x, y, z) = u, \\ Q(x, y, z) = v, \end{array} \right.$$

où u et v sont des constantes arbitraires.

Un canal fini est limité par deux surfaces (P) correspondant à deux valeurs distinctes u et u' de la constante u, et par deux surfaces (Q) correspondant à deux valeurs distinctes v et v' de v.

Un canal *élémentaire*, est défini par u et $u + du$, v et $v + dv$.

En juxtaposant des canaux élémentaires, on peut constituer un canal fini dont la surface latérale contient une courbe fermée arbitrairement donnée.

C'est ainsi que nous concevrons les différents canaux finis dont il sera question dans la suite.

Coupons la congruence de courbes (1), par une surface S quelconque, et évaluons l'élément d'aire déterminé par le canal élémentaire $[u, u + du;\ v, v + dv]$ sur cette surface.

Nous supposerons l'équation de S mise sous la forme

$$z - f(x, y) = 0,$$

et nous adopterons les notations usuelles

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'élément d'aire au point (x, y, z) de S, a pour expression

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx dy.$$

Transformons cet élément, en introduisant les variables u et v à la place de x et y. Il suffit, pour cela, de remplacer $dx dy$ par $\dfrac{du dv}{H}$, H étant le jacobien de u et v supposés évalués en fonction de x et y.

Un calcul simple donne, en désignant, comme nous le ferons toujours dans la suite, par P_x la dérivée de P par rapport à x

$$H = \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix},$$

d'où

$$(3) \qquad dS = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}}\, du dv\,.$$

Pour que les différents canaux élémentaires définis par (1), déterminent sur une famille de surfaces (S) des aires équivalentes, il faut et il suffit que les dS définis par (3) sur les différentes surfaces de la famille, ne dépendent que de u et de v.

Cela exige, d'après (1), que la quantité

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}},$$

ne dépende que des fonctions P et Q, et soit par suite une fonction (arbitraire d'ailleurs) de P et de Q.

A chaque forme $\Phi(P, Q)$ de cette fonction, correspondra une famille de surfaces (S), sur lesquelles les courbes de la congruence (1) détermineront une correspondance par aires constantes.

Cette famille de surfaces (S), est définie par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(4) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \Phi(P, Q).$$

On peut extraire des surfaces (S) solutions de (4), une infinité de suites de surfaces à un paramètre t (qui peut être le temps); chaque suite donne une propagation d'aires invariantes dans les canaux dont les génératrices sont des courbes de la congruence (1).

2. — **Transformation de (4).**

Il est clair que si l'on remplace P par $\Theta(P, Q)$, et Q par $\Omega(P, Q)$, Θ et Ω étant des fonctions arbitraires de P et Q, on ne modifie pas la congruence (1). Mais l'équation (4) est *en général modifiée*, de sorte qu'elle définit une *nouvelle* famille de surfaces donnant des propagations d'aires invariantes dans les canaux définis par les équations (1).

Il est cependant possible (et la chose est physiquement évidente), de déterminer les fonctions Θ et Ω, de façon que l'équation (4) se transforme en elle-même, le second membre ayant une forme différente.

On peut même conserver l'équation en réduisant le second membre à une constante, ou à l'unité (forme unitaire de M. A. Buhl).

Il suffit, par exemple, à cet effet, de conserver l'une des fonctions Q, et de remplacer l'autre, P, par la nouvelle fonction $\Theta(P, Q)$ définie par

$$\Theta(P, Q) = \int \frac{dP}{\Phi(P, Q)}.$$

L'équation (4) se présente alors sous la nouvelle forme

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \Theta_x & \Theta_y & \Theta_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 1.$$

Ainsi, le problème de la recherche des familles de surfaces propageant des aires invariantes dans les différents canaux extraits d'une congruence déterminée, peut toujours se ramener à l'intégration d'une équation du type unitaire.

Dorénavant, nous n'envisagerons plus que des équations de ce type, et nous les écrirons, en remplaçant Θ par P, conformément aux notations initiales

$$(5) \qquad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 1,$$

Soit encore, en prenant les équations des surfaces propagatrices sous la forme $\Phi(x, y, z) = 0$:

$$(5') \qquad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 1.$$

3. — Propagations rectilignes. — Cas archimédien.

Les propagations rectilignes les plus générales s'obtiennent en supposant que la congruence (1) est une congruence rectiligne arbitraire.

Les cas les plus intéressants sont ceux où la congruence est constituée, soit par des rayons issus d'un point fixe (propagations coniques), soit par les rayons issus d'une droite fixe normalement à celle-ci (propagations conoïdales).

Ces deux types de propagations ont été étudiés, par M. A. Buhl et moi-même([1]).

Le cas des propagations coniques d'éléments superficiels issus d'une sphère centrée au sommet des cônes propagateurs, se traite *complètement*, et conduit à ce résultat élégant que l'on obtient toutes les surfaces sur lesquelles les différents cônes de sommet O déterminent des aires égales à celle déterminée sur une sphère de centre O et de rayon a, en envisageant toutes les surfaces de Monge engendrées par le roulement du plan d'une lemniscate de centre O et de demi-axe a, sur un cône arbitraire de sommet O.

Pour les propagations conoïdales on est moins avancé. Dans le cas des propagations archimédiennes (propagations d'éléments superficiels issus d'un cylindre de révolution d'axe Oz, dans des conoïdes droits de même axe) M. A. Buhl a pu cependant (*Mémoire* de 1932) donner des résultats intéressants, notamment en montrant que la question est liée aux surfaces de révolution à courbure totale constante positive.

Je me propose de revenir sur ce dernier cas pour y apporter quelques compléments.

Définissons la congruence (1) par les équations :

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} P \equiv z = u, \\ Q \equiv R \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = v. \end{cases}$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$\text{(7)} \qquad -\frac{px+qy}{(x^2+y^2)\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{R}.$$

Dans les canaux conoïdaux définis par (6), les surfaces solutions de (7) propagent des aires invariantes.

L'équation (7) s'interprète géométriquement de façon très simple.

M étant un point d'une surface solution, $Mm = r$ la perpendiculaire abaissée de M sur Oz, (π) le plan issu de Oz normalement à Mm et λ l'angle de la normale à la surface envisagée avec Mm, (7) équivaut à $R\cos\lambda = r$, et exprime que la normale en M limitée à (π) a pour longueur R (*fig. 1*).

La propriété $R\cos\lambda = r$, appartient à des surfaces évidentes telles que le

([1]) A. Buhl, *Sur la Formule de Stokes*, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1914.
Tourbillons, Corpuscules, Ondes. Ibid., 1932.
P. Vincensini, *Aires courbes en perspective. Ibid.*, 1931.

cylindre d'axe Oz et de rayon R, les cylindres de diamètre R admettant Oz pour génératrice et les sphères de rayon R centrées sur Oz.

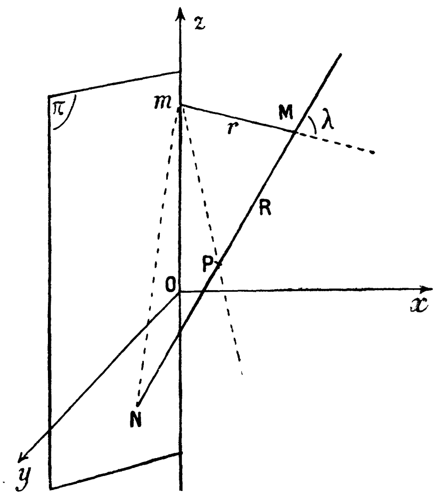

FIG. 1.

Donc (7) détermine toutes les surfaces qui se projettent (normalement à Oz) sur les trois types ci-dessus avec conservation des aires.

Pour tenter l'intégration, aussi générale que possible de l'équation (7), écrivons-la

$$(8) \qquad (x^2+y^2)^2(p^2+q^2+1)-R^2(px+qy)^2=0.$$

et transformons-la en coordonnées semi-polaires r, θ, z.

Elle devient

$$(9) \qquad (R^2-r^2)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2-r^2=0.$$

Il suffit de poser $z=a\theta+f(r)$ dans (9); d'où

$$(10) \qquad \frac{df}{dr}=\sqrt{\frac{a^2+r^2}{R^2-r^2}}$$

pour avoir l'intégrale complète (famille d'hélicoïdes)

$$(11) \qquad z=a\theta+b+\int\sqrt{\frac{a^2+r^2}{R^2-r^2}}\,dr,$$

(a et b sont les deux constantes arbitraires).

L'intégrale générale s'obtient en posant $b=b(a)$ et en cherchant l'enveloppe à un paramètre de la famille d'hélicoïdes (11).

Envisageons plus particulièrement les hélicoïdes (11). Leur section $(\mathcal{C})$ par un plan issu de Oz est définie par l'équation différentielle (10), et l'on constate aisément (A. Buhl, *Mémoire cité*), que $(\mathcal{C})$, mise en rotation autour de Oz, engendre une surface de révolution de *courbure totale constante* $\frac{1}{R^2 + a^2}$.

Parmi les surfaces sur lesquelles les conoïdes droits d'axe Oz déterminent des aires égales à celles déterminées sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon R, figurent donc les surfaces hélicoïdales (de pas réduit a), engendrées par les méridiennes des surfaces de révolution de courbure constante $\frac{1}{R^2 + a^2}$.

Revenons maintenant à la figure (1). MN étant constant, N décrit une surface (S'), parallèle à la surface (S) décrite par M. Il est clair que (S') est une nouvelle solution de (9). Il suffit pour s'en rendre compte, de remplacer dans la figure (1) M par N et (π) par le plan perpendiculaire issu de Oz (qui contiendra M).

On peut donc dire

Toute surface (S) *solution de l'équation* (9), *en livre immédiatement une autre* (S') *parallèle, à la distance* R *de la première* (*lieu du point* N *de la figure* (1)).

Si (S) est l'un des hélicoïdes précédemment définis, (S') en est un autre (évidemment de même pas réduit a).

La section de (S') par Oz (solution de (10)), est égale à celle de (S), et s'en déduit par déplacement hélicoïdal autour de Oz.

Les hélicoïdes (S) jouissent donc de cette propriété :

Ils sont égaux à l'un de leurs parallèles.

Pareille propriété n'appartient pas aux surfaces générales (S) qui nous occupent, de sorte qu'à une telle surface correspond une surface (distincte) parallèle (à la distance R) partageant avec la première la propriété de se projeter sur le cylindre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ avec conservation des aires. Nous dirons les deux surfaces *associées*.

Nous allons voir maintenant, comment il est possible de rattacher le problème dont il vient d'être question, à celui de la détermination des surfaces se projetant *cylindriquement* sur une sphère avec conservation des aires.

Envisageons deux surfaces (S) et (S') *associées*. Elles sont parallèles et distantes de R. Soit (Σ) la surface équidistante de (S) et (S'). (Σ) est le lieu du milieu P de MN, dans la figure (1), lorsque M et N décrivent respectivement (S) et (S').

Considérons la sphère (σ), de centre O et de rayon $\frac{R}{2}$. Il est clair qu'en l'un des points où la parallèle issue de P à Oz coupe (σ), la normale à (σ) (rayon) est parallèle à mP.

Or mP et MP font le même angle avec Oz. On peut donc dire que les normales à (Σ) et à (σ), en des points situés sur une même parallèle à Oz, font le même angle avec Oz. Il résulte immédiatement de là que la projection de (Σ) sur (σ), faite parallèlement à Oz, *conserve les aires*. Ainsi

Les surfaces, parallèles aux différents couples de surfaces associées et équidistantes de ces surfaces, se projettent cylindriquement sur la sphère (σ) *avec conservation des aires.*

La réciproque de cette proposition est évidente. A toute surface (Σ), se projetant, parallèlement à Oz, avec conservation des aires, sur la sphère (σ) de centre O et de rayon $\frac{R}{2}$, on peut associer deux surfaces (S) et (S'), parallèles à (Σ) et distantes de (Σ) de $\frac{R}{2}$, se projetant avec conservation des aires, sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon R (projection conoïdale d'axe Oz).

Ce rapprochement entre les deux problèmes de projections conoïdales et cylindriques que l'on vient d'étudier, est assez curieux.

Nous avons dit plus haut, que, parmi les surfaces (S), figurent les hélicoïdes engendrés par les méridiennes des surfaces de révolution de courbure totale constante $\frac{1}{R^2+a^2}$. On obtiendra donc des solutions du problème de la recherche des surfaces, se projetant, parallèlement à Oz, sur la sphère (σ), avec conservation des aires, en prenant des surfaces parallèles aux hélicoïdes précédents, distantes de ces hélicoïdes de la longueur $\frac{R}{2}$.

4. — Propagations planes.

Nous appellerons ainsi, les propagations d'aires invariantes dans les canaux définis par deux familles de surfaces dont l'une est formée de plans.

Considérons plus particulièrement le cas où l'une des deux familles est formée par les plans parallèles à un plan fixe ($z=0$).

La congruence (1) du numéro (2), sera définie par les équations

$$\begin{cases} P \equiv z = u, \\ Q(x, y, z) = v. \end{cases}$$

L'équation des surfaces dans lesquelles, les canaux de la congruence précédente déterminent des aires égales, est l'équation (5) du numéro (2), qui s'écrit ici :

$$\frac{qQ_x - pQ_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 1. \tag{12}$$

Chaque particularisation de la fonction Q, donnera une famille particulière de surfaces.

Canaux toriques. — Prenons

$$Q \equiv \frac{1}{2K}(x^2 + y^2). \qquad (K = \text{const.})$$

Les courbes de la congruence qui définit les canaux sont des cercles d'axe Oz, de sorte que les canaux élémentaires ont figure de tores d'axe Oz.

L'équation (12) devient dans ce cas

$$\frac{qx - py}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = K. \tag{13}$$

Alors (13) est l'équation des surfaces qui, par rotation autour de Oz, engendrent des volumes proportionnels aux aires des cloisons qu'elles portent ($V = KS$), le coefficient de proportionnalité K se rapportant à une rotation *unité*.

Nous avons intégré complètement cette équation dans un Mémoire qui paraîtra prochainement au *Bulletin de la Société Mathématique de France*[1], et trouvé la famille de surfaces

$$\left\{\begin{aligned} x &= U\cos v - K\frac{\sin v - v\sin^2 u\cos v}{\sin u}, \\ y &= U\sin v + K\frac{\cos v + v\sin^2 u\sin v}{\sin u}, \\ z &= Kv\cos u - \int \operatorname{tg} u\, d(U). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

où U est une fonction arbitraire de u.

Les surfaces (14), définissent, dans les canaux toriques précédemment définis, une propagation d'aires invariantes.

Notons que la propriété $V = KS$, pouvait nous laisser prévoir que les surfaces (14) étaient aptes à propager des aires invariantes dans des canaux toriques d'axe Oz.

S et S' étant les aires des sections de deux surfaces distinctes solutions de (13) par un même canal, les volumes engendrés par S et S' pour une même rotation (d'angle unité par exemple) sont égaux; d'où

$$KS = KS',$$

et par suite

$$S = S'.$$

Si, comme nous l'avons fait observer au numéro 2, tout en conservant l'allure générale des canaux toriques, nous modifions la forme des canaux élémentaires (leur

(1) *Sur certains mouvements de figures invariables. Hélicoïdes pseudo-sphériques et couples de sphères.*

section), en remplaçant P et Q par des fonctions arbitraires de P et de Q, nous obtiendrons, *en général,* de nouvelles familles de surfaces propageant des aires égales dans les canaux toriques d'axe Oz.

Ainsi, si, dans (12), nous remplaçons la fonction Q, qui tout à l'heure était égale à $\frac{1}{2K}(x^2+y^2)$, par $\frac{1}{K}\sqrt{x^2+y^2}$, nous substituons à l'équation (13), la nouvelle équation

$$\frac{qx - py}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+p^2+q^2}} = K. \tag{15}$$

Cette fois (15) définit, comme il est facile de le voir, des *surfaces de Joachimsthal* d'axe Oz (coupées sous un angle constant par les plans issus de Oz), qui sont, elles aussi, aptes à propager des aires invariantes dans les canaux toriques d'axe Oz.

Il était évident *a priori*, que, pour une forme particulière de la fonction Q, on trouverait cette famille de surfaces.

5. — Propagations hélicoïdales.

Nous appellerons ainsi les propagations, pour lesquelles, les canaux élémentaires ont figure d'hélices de même axe Oz et de même pas h.

On obtiendra une propagation de ce type, en définissant les canaux par la congruence

$$\begin{cases} P \equiv \dfrac{1}{2K}(x^2+y^2) = u, \\ Q \equiv z - h \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = v, \end{cases}$$

(K et h sont des constantes données).

L'équation (5) relative au cas actuel est :

$$\frac{py - qx + h}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = K. \tag{16}$$

Cette équation est celle qui définit les surfaces, que nous avons étudiées antérieurement, jouissant de cette propriété que les cloisons qu'elles portent, engendrent des volumes proportionnels à leurs aires, lorsqu'on les soumet à un mouvement hélicoïdal d'axe Oz et de pas réduit h ($V = KS$ pour une rotation unité).

L'équation (16) s'intègre complètement(1). Les surfaces solutions sont définies par les équations

$$(17)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{U}\cos v + h \operatorname{cotg} u \sin v - \mathrm{K}\,\dfrac{\sin v - v \sin^2 u \cos v}{\sin u}, \\ y = \mathrm{U}\sin v - h \operatorname{cotg} u \cos v + \mathrm{K}\,\dfrac{\cos v + v \sin^2 u \sin v}{\sin u}, \\ z = v(\mathrm{K}\cos u - h) - \displaystyle\int \operatorname{tg} u\, d(\mathrm{U}), \end{cases}$$

où U est une fonction arbitraire de la seule variable u.

Dans les canaux hélicoïdaux définis plus haut, les surfaces (17) propagent des aires invariantes.

Ici, comme d'ailleurs dans les propagations toriques étudiées au numéro précédent, il est très facile d'avoir des familles de surfaces à un paramètre t (surfaces d'ondes successives si t est le temps), transportant des aires invariantes dans les canaux imposés.

Il suffit de prendre pour U, dans les équations (17) ou (14), une fonction déterminée de u et de t, $\mathrm{U}(u, t)$, quelconque d'ailleurs.

La solution (17), du problème de la recherche des propagations hélicoïdales d'aires invariantes, pouvait être prévue, pour une raison analogue à celle indiquée à propos de la solution (14) du problème des propagations toriques.

En conservant la fonction Q, et en remplaçant P par $\dfrac{1}{2\mathrm{K}}(x^2+y^2)^m$, on obtient une nouvelle famille de surfaces, propageant des aires invariantes dans les mêmes canaux hélicoïdaux que dans l'exemple précédent.

L'équation aux dérivées partielles de cette nouvelle famille est :

$$(18)\qquad \frac{m(x^2+y^2)^{m-1}(px - qy + h)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \mathrm{K}.$$

6. — Sur certaines propagations issues d'une surface donnée.

Jusqu'à présent, nous nous sommes donné arbitrairement les canaux, et nous avons cherché des familles de surfaces propageant des aires invariantes dans les canaux imposés.

Donnons-nous maintenant, arbitrairement, une surface (S)[$\Phi(x, y, z) = 0$], et

(1) Voir le Mémoire de la *Société Mathématique de France*, cité plus haut.

cherchons à déterminer des systèmes de canaux dans lesquels les différentes cloisons de (S) peuvent se propager en restant équivalentes à elles-mêmes.

Le problème ainsi posé est évidemment entièrement indéterminé. Nous entendons par là que le choix des canaux peut être fait de façon absolument arbitraire. Pour la démonstration analytique précise de cette proposition, nous renvoyons au Mémoire déjà cité de M. A. Buhl.

Fixons plus particulièrement notre attention sur les canaux obtenus, en exprimant que la surface (S) vérifie l'équation (5') et en cherchant à déterminer les fonctions P et Q pour qu'il en soit ainsi.

Les systèmes de canaux ($P = u$, $Q = v$) ainsi obtenus, jouiront de cette propriété intéressante, que, parmi les surfaces transportant les aires invariantes prises sur (S) [$\Phi(x, y, z) = 0$], figureront toutes les surfaces d'équation

$$\Phi(x, y, z) = t,$$

où t est une constante arbitraire, qui pourra être le temps.

Pour la détermination effective des canaux, on se donnera arbitrairement P, et l'on déterminera Q par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire.

Donnons d'abord un exemple simple, en recherchant les propagations d'éléments superficiels plans issus d'un plan donné $z = 0$, telles que, parmi les surfaces transportant les aires prises dans le plan indiqué, figure la famille $z = t$ des plans parallèles au plan donné.

Les canaux propagateurs seront définis par les couples de fonctions P et Q, vérifiant l'équation (5') où Φ est remplacé par z.

On obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} = 1. \tag{19}$$

En se donnant arbitrairement P, et en déterminant Q au moyen de (19), on obtient tous les systèmes de canaux [$P = u$, $Q = v$] réalisant l'effet voulu.

En posant

$$P = \frac{K}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x},$$

on obtiendra des systèmes de canaux engendrés par des courbes situées dans des plans passant par Oz.

Déterminons Q dans ces conditions. L'équation (19) devient :

$$y\frac{\partial Q}{\partial y} + x\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2}{K}(x^2 + y^2). \tag{20}$$

L'intégration fournit la solution

$$Q = f(z) - \frac{1}{K}(x^2 + y^2) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où f et φ sont des fonctions arbitraires.

Les canaux définis par les équations

$$(21) \qquad \begin{cases} P \equiv \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = u, \\ Q \equiv f(z) - (x^2 + y^2) + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = v, \end{cases}$$

propagent, avec équivalence, les éléments d'aire pris dans le plan $z = 0$, sur les surfaces solutions de (5′) où P et Q ont les expressions ci-dessus. En outre, parmi les familles, en nombre infini, de surfaces au paramètre t, que l'on peut extraire de la solution générale, figurent les plans $z = t$.

Si, dans les équations (21), on fait $\varphi = 0$, le système de canaux propagateurs est *de révolution* autour de Oz.

Si, plus particulièrement encore, $f(z) = az^2$ (avec, toujours $\varphi = 0$), les canaux élémentaires, sont déterminés, par deux plans voisins issus de Oz, et par deux quadriques à centre, voisines, de révolution, homothétiques et concentriques.

On déduit immédiatement de ces remarques, les conséquences géométriques suivantes :

Deux quadriques à centre, homothétiques et concentriques, de révolution, déterminent, sur les différents plans perpendiculaires à l'axe de révolution commun, des couronnes équivalentes.

Cette propriété se conserve (comme le montre une affinité) si les quadriques (à centre), sont simplement homothétiques (sans être de révolution et concentriques), les plans sécants, toujours parallèles entre eux, étant parallèles à la ligne des centres.

Enfin, il résulte de ce qui vient d'être dit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que, le volume limité par deux quadriques à centre homothétiques, et deux plans parallèles entre eux et à la ligne des centres, reste invariable, lorsque le système des deux plans se déplace, parallèlement à lui-même, la distance des plans restant constante.

Dans le cas de deux sphères, la vérification directe de ces résultats est immédiate.

Si l'on ne veut pas avoir à considérer des aires et des volumes négatifs, on doit supposer, dans les énoncés ci-dessus, que l'une des deux quadriques est intérieure à l'autre.

Propagations d'éléments sphériques. — Pour donner un autre exemple, choisissons pour (S) la sphère

$$\Phi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

et donnons-nous

$$P \equiv \text{arc tg} \frac{y}{x} = u.$$

L'équation (5') s'écrira ici

$$(22) \qquad -\frac{xz}{x^2+y^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{yz}{x^2+y^2}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Parmi les solutions de (22), nous signalerons en particulier, les fonctions Q de la forme

$$Q \equiv \varphi(x^2+y^2+z^2) + z\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$(\varphi = \text{fonction arbitraire})$$

qui donnent un système de canaux, *de révolution autour de* Oz. Nous entendons par là, que *l'ensemble* des canaux infiniment déliés, appartenant à la congruence $[P = u,\ Q = v]$, est de révolution autour de Oz.

La congruence elle-même est définie par

$$(23) \qquad \begin{cases} \text{arc tg} \dfrac{y}{x} = u, \\ \varphi(x^2+y^2+z^2) + z\sqrt{x+y+z^2} = v. \end{cases}$$

Conformément à ce qu'on a dit plus haut, il existe, à l'intérieur des canaux de la congruence (23), une propagation d'aires invariantes définie par les sphères (concentriques)

$$x^2+y^2+z^2 = t.$$

A chaque instant t, les éléments superficiels issus d'une sphère quelconque de centre O, et transportés à l'intérieur des canaux (23), se trouvent situés sur des surfaces d'ondes sphériques concentriques (de centre O).

Parmi les congruences définies par les formules (23), signalons celles obtenues par la rotation, autour de Oz, des courbes d'équations polaires (Oz = axe polaire)

$$\rho^2 \cos\omega = v, \qquad \rho \cos\frac{\omega}{2} = v.$$

La deuxième de ces deux équations, définit une famille de *trisécantes de Delanges* homothétiques par rapport au centre O des sphères d'onde.

Ce rôle, de la trisécante, dans le transport des éléments superficiels issus d'une sphère par ondes sphériques (concentriques), est assez curieux à noter.

On pourrait chercher, par le procédé qui vient d'être indiqué, à déterminer des propagations par ondes homothétiques, les éléments superficiels invariants transportés, étant situés, à chaque instant, sur des quadriques homothétiques (ou sur d'autres surfaces). Les calculs seraient, seulement, plus compliqués.

Si, au lieu d'imposer à l'équation (5') qui est à la base de cette étude, la condition d'admettre *une* solution déterminée (S), on lui impose la condition d'en admettre *deux*, (S) et (S'), on obtiendra évidemment, par la résolution d'un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles, aux fonctions inconnues P et Q, des propagations, transportant avec équivalence, les éléments superficiels de (S) sur (S').

Si (S') est un plan, on aura des planifications de (S). Il serait aisé de donner des exemples explicites. Nous n'insistons pas sur ce point.

7. — Variation des canaux.

Supposons que la famille des surfaces $\Phi = \text{const.}$, vérifie l'équation

$$(5') \qquad \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = 1 .$$

On peut, sans modifier l'équation, remplacer les canaux $[P = u,\ Q = v]$, par les nouveaux canaux

$$(24) \qquad \begin{cases} P + \mathcal{F}_1(\Phi) = u, \\ Q + \mathcal{F}_2(\Phi) = v, \end{cases}$$

où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des fonctions arbitraires de Φ.

Les équations (24) définissent une déformation (dépendant des deux fonctions arbitraires $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$), des canaux initiaux, telle que chaque système déformé, tout comme le système initial, détermine des aires équivalentes sur la famille de surfaces $\Phi = \text{const.}$

Ainsi, eu égard au premier des deux exemples étudiés au numéro précédent, on peut dire que les canaux définis par les équations

$$\begin{cases} \text{arc tg}\, \dfrac{y}{x} + \mathcal{F}_1(z) = u, \\ f(z) - (x^2 + y^2) + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) = v, \end{cases}$$

(où $\mathcal{F}_2$ est compris dans f), sont susceptibles de propager, avec équivalence, les éléments superficiels du plan $z = 0$, sur les plans $z = t$.

De même, les canaux

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{arc tg} \frac{y}{x} + \mathcal{F}_1(x^2 + y^2 + z^2) = u, \\ &\varphi(x^2 + y^2 + z^2) + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v, \end{aligned}\right.$$

où $\mathcal{F}_1$ est une fonction arbitraire, beaucoup plus généraux que les canaux (23), peuvent, comme ces derniers, servir à propager, avec équivalence, les éléments d'aire issus de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, sur le système des sphères concentriques à la précédente.

8. — Sur quelques nouvelles correspondances par aires équivalentes.

Dans les exemples étudiés dans les paragraphes qui précèdent, l'orientation, dans l'espace, des éléments d'aire propagés, changeait au cours de la propagation.

Nous nous proposons, pour terminer ce travail, d'indiquer quelques exemples de familles de surfaces, en correspondance ponctuelle telle, que les éléments superficiels homologues soient, non seulement équivalents, mais aussi parallèles.

Il est évident qu'on réalise de pareilles correspondances, au moyen de familles de surfaces, d'égale courbure totale aux points de même représentation sphérique.

L'une quelconque de ces familles est définie par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, de la forme

$$s^2 - rt = \mathcal{F}(p, q), \tag{25}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction arbitraire de p et q.

Si on envisage une suite à un paramètre de surfaces solutions de l'équation (25), les canaux de la congruence définie par les courbes portant les points homologues, fournissent une propagation d'éléments d'aire remplissant les conditions voulues.

Nous allons, dans ce qui suit, exposer une construction, fournissant une infinité de familles de surfaces, se correspondant par plans tangents parallèles et égalité des courbures.

Nous aurons besoin, à cet effet, de rappeler une propriété des congruences de Ribaucour à surface moyenne plane attachées à une surface quelconque.

Soit $z = f(x, y)$, l'équation, en axes rectangulaires, d'une surface (S) quelconque.

(S) peut, comme l'on sait, être regardée comme la *génératrice* d'une congruence rectiligne (Γ) à surface moyenne plane (xOy).

On obtient un rayon quelconque de (Γ), en projetant orthogonalement, chaque point M de (S), sur xOy, en faisant tourner la projection d'un angle droit autour de Oz, et en menant par le point m ainsi obtenu la parallèle à la normale en M à (S).

Si x, y, z sont les coordonnées du point courant M sur (S), le rayon Δ de la congruence (Γ), correspondant au point M de (S), est le lieu du point de coordonnées

$$X = -y + p\lambda, \qquad Y = x + q\lambda, \qquad Z = -\lambda.$$

$$\left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \lambda = \text{paramètre}\right].$$

Inversement, la connaissance *a priori* de la congruence (Γ), entraîne celle de la surface génératrice (S).

Si (Γ) est donnée par les équations

$$X = -\eta + p\lambda, \qquad Y = \xi + q\lambda, \qquad Z = -\lambda, \tag{26}$$

où ξ, η, p, q, sont fonctions de deux paramètres u et v; la surface (S) correspondante sera définie par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= \eta, \\ z &= \int p\,d\xi + q\,d\eta. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Si K est la courbure totale de (S) au point $M(x, y, z)$, et si 2ρ est la distance des foyers portés par le rayon correspondant Δ de (Γ), on établit sans peine que l'on a :

$$\frac{\rho}{\cos\alpha} = \sqrt{-\frac{1}{K}}, \tag{28}$$

α étant l'angle de la normale en M à (S) [ou du rayon Δ] avec Oz(¹).

Pour la réalité des foyers de (Γ), on doit supposer la courbure de (S) négative.

Si deux surfaces (S) et (S′) se correspondent avec parallélisme des plans tangents et égalité des courbures, les rayons homologues des deux congruences (Γ) et (Γ') associées, se correspondent *par rayons parallèles*, et (comme le montre la formule (28)) avec *égalité des segments focaux*.

Toute famille de congruences à surface moyenne plane (xOy), se correspondant comme il vient d'être dit, fournira une famille de surfaces (définies par les équations (27)), ayant même courbure aux points de même représentation sphérique.

(¹) Voir le Mémoire du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, cité au n° 4.

Un exemple de telles familles de surfaces, nous est fourni, par les surfaces génératrices des congruences à surface moyenne plane, admettant pour nappes focales, deux courbes *quelconques* situées dans les plans $z = \pm h$ $(h = \text{const.})$.

Il est clair, en effet, que les segments focaux portés par les rayons homologues (parallèles) des congruences qui viennent d'être définies, sont égaux.

Les surfaces génératrices ont été déterminées par M. J. Drach[1], comme solutions d'un problème différent. Ce sont d'ailleurs les solutions de l'équation aux dérivées partielles $s^2 - rt = \frac{1}{\lambda^2}$ (de la forme (25)).

Leurs équations sont :

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u + G(v)}{2}, \\ y &= \frac{v + F(u)}{2}, \\ 4hz &= F(u)\,G(v) - uv + \int (G - v\,G')\,dv + \int (F - u\,F')\,du, \end{aligned}\right.$$

où F et G sont deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v, u et v étant les paramètres des asymptotiques.

Sur toutes les surfaces (29), les courbures sont les mêmes aux points de même représentation sphérique.

9. — Sur certaines congruences à surface moyenne développable.

Les familles les plus générales de surfaces se correspondant avec égalité des courbures aux points de même représentation sphérique, s'obtiennent, comme nous l'avons dit au numéro précédent, en intégrant des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre de la forme (25).

C'est grâce à une circonstance tout à fait particulière, que l'on a pu intégrer l'équation $s^2 - rt = \frac{1}{\lambda^2}$, et obtenir la famille (à deux fonctions arbitraires) définie par les équations (29). En général, l'intégration ne pourra pas être effectuée. Aussi, nous semble-t-il intéressant de montrer, comment il est possible d'obtenir, autant de familles que l'on veut, de surfaces se correspondant comme il a été expliqué, chaque famille dépendant non pas de deux, mais d'une seule fonction arbitraire.

---

[1] J. Drach, *Sur deux classes remarquables de congruences W*. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. III, 1925.

La question est liée au procédé suivant de construction de congruences particulières à surface moyenne *développable.*

Donnons-nous arbitrairement une surface developpable (Δ), d'arête de rebroussement (C) (*fig.* 2). Soit (γ) une courbe quelconque tracée sur (Δ); (δ) la développable d'arête de rebroussement (γ).

D étant un rayon quelconque de (Δ) et M le point où il coupe (γ), envisageons

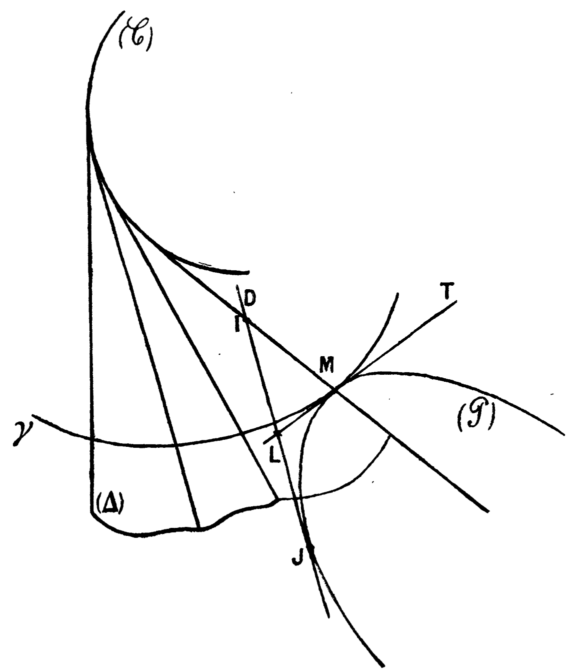

FIG. 2.

la tangente MT à (γ) [génératrice de (δ)], et construisons, dans le plan [D, MT] tangent à (Δ) le long de D, une parabole $(\mathcal{P})$ tangente en M à MT et admettant D pour diamètre.

Si le paramètre de la parabole $(\mathcal{P})$ relative à un rayon quelconque D de (Δ), est une fonction déterminée de la variable qui fixe le rayon D dans (Δ), l'ensemble des paraboles $(\mathcal{P})$ constitue une certaine surface (Σ).

Il est clair que la congruence (Γ), admettant pour nappes focales (Δ) et (Σ), admet pour enveloppée moyenne la développable (δ) lieu des tangentes à (γ).

L'une des familles de développables de (Γ), est en effet constituée par les plans tangents à (Δ), et les foyers d'un rayon de (Γ) situé dans le plan tangent le long de D, qui sont les points I et J où le rayon coupe D et touche $(\mathcal{P})$, sont évidemment équidistants du point L où le rayon envisagé coupe MT (propriété élémentaire de la parabole).

Les congruences admettant pour surface moyenne une développable donnée (δ) $\big($d'arête de rebroussement $(\gamma)\big)$, que l'on peut construire par le procédé qui vient d'être indiqué, dépendent de trois constantes arbitraires et de deux fonctions arbitraires d'un argument.

En effet, les développables (Δ) issues de (γ) dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument et de trois constantes arbitraires[1], et la surface lieu de la parabole $(\mathcal{P})$ dépend de la fonction arbitraire fixant la loi de variation du paramètre.

Si la courbe (γ) est plane, (δ) est un plan, et la construction ci-dessus exposée, donne toutes les congruences à surface moyenne plane dont l'une des nappes focales est une développable, congruences qui, comme on le voit, dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument et de trois constantes arbitraires.

10. — Familles de surfaces se correspondant par plans tangents parallèles, avec égalité des courbures.

Les résultats du numéro précédent, vont nous permettre, comme nous l'avions annoncé, d'obtenir une infinité de familles de surfaces, telles, que les surfaces de

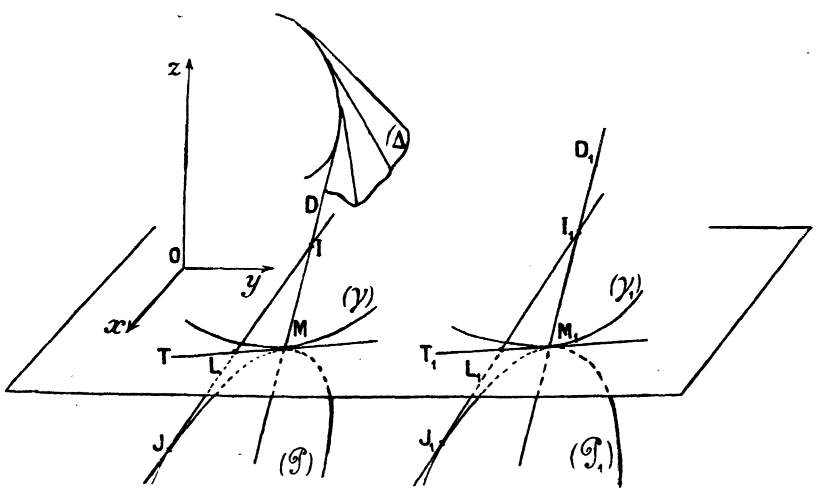

FIG. 3.

chaque famille (dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument), se correspondent, par plans tangents parallèles, et avec égalité des courbures.

Donnons-nous, dans le plan xOy, une courbe arbitraire (γ) (*fig. 3*).

---

[1] Voir C. GUICHARD, *Les courbes de l'espace à n dimensions*. Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. XIII. Ce fascicule contient de très intéressants développements sur les courbes et les développables assemblées.

Faisons sortir de (γ) une développable quelconque (Δ), et associons à chacun de ses rayons, D, une parabole $(\mathfrak{L})$, comme il a été expliqué au numéro précédent.

La congruence dont les nappes focales sont (Δ) et la surface (Σ) lieu de $(\mathfrak{L})$, admet pour surface moyenne le plan xOy.

Cela étant, envisageons les différentes courbes (γ_1) du plan xOy (dépendant d'une fonction arbitraire). Chacune d'elles fournit une développable (Δ_1) *parallèle* à (Δ). (Δ_1) peut donner naissance à une infinité (dépendant d'une fonction arbitraire) de congruences admettant pour plan moyen le plan xOy, chacune de ces congruences étant définie par un mode particulier d'association des paraboles $(\mathfrak{L})$.

Si la fonction définissant les paraboles $(\mathfrak{L})$ attachées à (Δ_1), est identique à celle qui définit les paraboles attachées à (Δ), les figures homologues $[(\mathfrak{L}), D]$ sont identiques dans (Δ) et dans toutes les congruences transformées et dérivent les unes des autres par des translations [variables avec la figure $(\mathfrak{L}, D)$ envisagée].

On déduit immédiatement de là, que les segments focaux homologues sont égaux, dans (Δ) et dans toutes ses transformées (Δ_1).

Si donc on considère la famille (à une fonction arbitraire d'un argument) constituée par toutes les congruences (Δ_1) associées à (Δ) comme il vient d'être expliqué, et si l'on construit leurs surfaces *génératrices* (voir n° 8), on obtient une famille de surfaces, ayant le même degré de généralité que les congruences (Δ_1) [dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument], telles qu'aux points de même représentation sphérique, les courbures soient égales.

En faisant varier la fonction qui fixe la variation du paramètre de la parabole $(\mathfrak{L})$, ainsi que la développable issue de (γ), on obtient une infinité (dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument) de familles de surfaces jouissant de la propriété de se correspondre par plans tangents parallèles et égalité des courbures.

11. — Exemples explicites.

En particularisant la développable (Δ) de la figure (3), et en choisissant une loi de variation pour le paramètre de la parabole $(\mathfrak{L})$ associée à chaque plan tangent, on peut donner des exemples explicites de familles (à une fonction arbitraire) de surfaces, se correspondant comme il a été expliqué.

Prenons pour (Δ) l'axe Oz du système $Oxyz$. Les plans tangents à (Δ), sont ici les différents plans passant par Oz. La parabole $(\mathfrak{L})$ située dans un plan tangent déterminé, de trace OX sur le plan xOy, est tangente en O à OX et a pour axe Oz (*fig. 4*). Le paramètre de $(\mathfrak{L})$ est une certaine fonction de l'angle α que fait OX avec Ox.

Donnons-nous l'équation de $(\mathfrak{L})$, dans le plan $\mathrm{XO}z$, sous la forme

$$4az + \mathrm{X}^2 = 0,$$
$$(a = \text{fonction donnée de } \alpha).$$

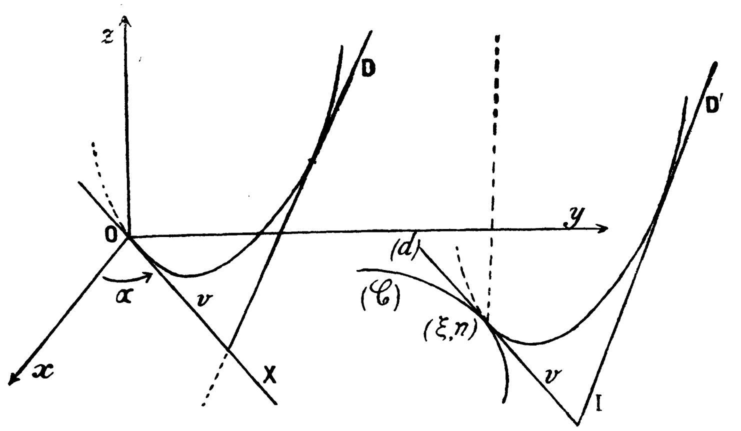

FIG. 4.

La congruence (Γ) attachée à (Δ), est ici formée par les tangentes aux différentes paraboles $(\mathfrak{L})$.

La tangente D à $(\mathfrak{L})$, issue du point de OX d'abscisse v, a pour équation dans le plan $\mathrm{XO}z$:

$$z = -\frac{v}{a}(\mathrm{X} - v).$$

Les cosinus directeurs de D, dans le plan $\mathrm{XO}z$, sont :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \qquad \frac{-v}{\sqrt{a^2 + v^2}}.$$

On en déduit les paramètres directeurs $(p,\ q,\ -1)$ de D, par rapport au trièdre des coordonnées $\mathrm{O}xyz$:

$$p = \frac{a \cos \alpha}{v}, \qquad q = \frac{a \sin \alpha}{v}, \qquad -1.$$

Les développables parallèles à (Δ), sont ici les cylindres de génératrices parallèles à $\mathrm{O}z$ et dont la section par $x\mathrm{O}y$ est une courbe arbitraire $(\mathcal{C})$.

Définissons $(\mathcal{C})$ comme l'enveloppe de la droite (d) [parallèle à OX] :

$$(d) \qquad x \sin \alpha - y \cos \alpha = h(\alpha),$$

où h est une fonction arbitrairement donnée de α.

Les coordonnées du point de contact de (d) et de $(\mathcal{C})$ sont :

$$\begin{cases} \xi = h \sin \alpha + h' \cos \alpha, \\ \eta = -h \cos \alpha + h' \sin \alpha, \end{cases}$$

l'accent indiquant une dérivation par rapport à α.

Les coordonnées du point I, où le rayon D_1, homologue de D, dans la congruence (Γ_1) transformée de (Γ), perce xOy, sont :

$$\begin{cases} \mathcal{X} = \xi + v \cos \alpha, \\ \mathcal{Y} = \eta + v \sin \alpha, \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \mathcal{X} = h \sin \alpha + (h' + v) \cos \alpha, \\ \mathcal{Y} = -h \cos \alpha + (h' + v) \sin \alpha; \end{cases}$$

et les paramètres directeurs de D_1, sont ceux de D

$$\left(p = \frac{a \cos \alpha}{v}, \qquad q = \frac{a \sin \alpha}{v}, \qquad -1\right).$$

Les équations des surfaces génératrices des congruences (Γ_1), sont, comme nous l'avons vu au numéro 8 :

$$\begin{cases} x = \mathcal{Y} = -h \cos \alpha + (h' + v) \sin \alpha, \\ y = -\mathcal{X} = -h \sin \alpha - (h' + v) \cos \alpha, \\ z = \displaystyle\int p dx + q dy. \end{cases}$$

En tenant compte des expressions de p et q, on trouve

$$p dx + q dy = a d\alpha,$$

d'où

$$z = \int a d\alpha.$$

Finalement, les équations de la famille des surfaces génératrices des congruences (Γ_1) sont

$$(30) \qquad \begin{cases} x = -h \cos \alpha + (h' + v) \sin \alpha, \\ y = h \sin \alpha + (h' + v) \cos \alpha, \\ z = \displaystyle\int a d\alpha, \end{cases}$$

(nous avons effectué une symétrie par rapport à xOy, ce qui ne modifie pas la famille).

Les surfaces (30) dépendent de deux fonctions arbitraires de α, h et a.

Si l'on laisse fixe la fonction a (ce qui, comme nous l'avons expliqué plus haut, revient à choisir les familles de paraboles associées situées dans les plans tangents aux différents cylindres de génératrices parallèles à Oz), la famille (à une fonction arbitraire h) de surfaces obtenues, jouit de la propriété, qu'aux points où les plans tangents sont parallèles, sur les différentes surfaces de la famille, les courbures totales sont les mêmes.

Les équations (30) définissent, comme on le voit sans peine, la famille complète des surfaces réglées à plan directeur (xOy).

Ce qui précède montre, qu'étant donnée une surface réglée quelconque à plan directeur (xOy) [a et h, fonctions données de α], *il existe une famille de surfaces de même définition, correspondant à la première, avec parallélisme des plans tangents et égalité des courbures totales.*

Il suffit d'ailleurs de se reporter à la façon dont on déduit la surface génératrice d'une congruence donnée de cette même congruence, pour constater que les différentes surfaces de la famille ci-dessus, se correspondent aussi *avec parallélisme des génératrices rectilignes.*

On obtient la famille en question, en conservant la fonction a et en remplaçant h par une fonction arbitraire de α.

Si, au lieu de partir, comme nous l'avons fait, d'une développable cylindrique, nous étions partis d'une développable *quelconque,* nous aurions obtenu, au lieu de la famille de surfaces réglées à plan directeur (30), la famille des surfaces réglées *les plus générales,* et nous aurions pu énoncer ce résultat.

(A). — *Étant donnée une surface réglée quelconque* (S), *il existe une famille, dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument, de surfaces analogues, correspondant à* (S) *avec parallélisme des plans tangents* (*et des génératrices rectilignes homologues*) *et égalité des courbures.*

La démonstration géométrique de ce dernier résultat est d'ailleurs aisée.

Soit (S) une surface réglée quelconque; G, l'une de ses génératrices rectilignes, G_1 sa projection sur le plan (xOy), (*fig.* 5), et g la droite déduite de G_1 par une rotation de 90° autour de Oz.

Les rayons de la congruence (Γ), dont (S) est la surface génératrice, issus des différents points de g, sont parallèles aux normales à (S) le long de G.

La droite g étant évidemment normale à G, les rayons (D) de (Γ) issus de g sont *coplanaires,* et dans un plan (π) normal à G.

Il résulte de là que l'une des nappes focales de (Γ), est la développable (Δ), enveloppe du plan (π).

L'enveloppe des rayons de (Γ), dans (π), est une parabole $(\mathfrak{L})$ complètement déterminée. La congruence (Γ) appartient donc au type défini au numéro précédent.

En transformant cette congruence comme il a été expliqué dans ce même

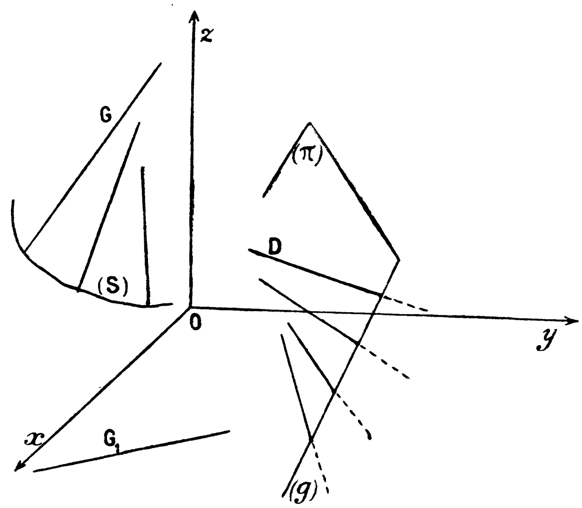

FIG. 5.

numéro [substituant à (Δ) une développable parallèle quelconque et conservant la loi de succession des paramètres des paraboles $(\mathfrak{P})$], on obtient une famille dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument de congruences (Γ') analogues à (Γ).

Les surfaces génératrices de ces congruences, constituent, comme on l'a expliqué, une famille (à une fonction arbitraire d'un argument) de surfaces se correspondant avec parallélisme des plans tangents et égalité des courbures totales.

Le parallélisme des génératrices rectilignes résulte, comme on l'a observé plus haut, de ce que les génératrices homologues sont perpendiculaires à une même direction de plan (π).

Nous ferons observer, que la proposition (A), étend aux surfaces *réglées quelconques*, la proposition bien connue suivant laquelle toute surface développable (courbure nulle) admet une infinité (dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument) de développables parallèles.

12. — Remarques sur les quadriques.

Les quadriques sont des surfaces doublement réglées. On peut donc leur appliquer (de deux façons différentes) les considérations développées au numéro précédent.

Pour avoir des résultats réels, nous n'envisagerons que des quadriques à génératrices réelles, bien qu'il n'y ait aucune difficulté à étendre les résultats au cas des quadriques à génératrices imaginaires.

Soit Q une quadrique à génératrices réelles, dont nous désignerons par (G_1) la famille des génératrices G_1 du premier système, et par (G_2) la famille des génératrices G_2 du second système.

Construisons la congruence à surface moyenne plane (xOy), admettant pour surface génératrice la demi-quadrique (G_1).

Elle admet, comme nous l'avons vu plus haut, pour nappes focales, une développable (Δ), et une surface (Σ) engendrée par des paraboles $(\mathfrak{L})$ situées dans les plans tangents à (Δ).

En remplaçant (Δ) par toutes les développables parallèles (ce qui introduit une fonction arbitraire d'un argument), et en prenant les paraboles situées dans les plans tangents à chaque (Δ_1) égales aux paraboles correspondantes attachées à (Δ), on obtient une famille (dépendant d'une fonction arbitraire) de congruences, admettant pour surfaces génératrices, des surfaces réglées, correspondant à la demi-quadrique (G_1) avec parallélisme des plans tangents et des génératrices, et égalité des courbures.

Nous désignerons par (Θ_1) la famille de congruences à surface moyenne plane dont il vient d'être question, et par (S_1) la famille des surfaces réglées correspondantes.

En envisageant la demi-quadrique (G_2), on obtient une nouvelle famille de surfaces (S_2), correspondant à (G_2) avec parallélisme des plans tangents et des génératrices et égalité des courbures.

Il est clair que la quadrique Q [ensemble de (G_1) et (G_2)], appartient aux deux familles (S_1) et (S_2).

Désignons par S_1, une surface quelconque de la famille (S_1), et par S_2 une surface quelconque de la famille (S_2). Aux deux points M_1 et M_2 de S_1 et S_2 correspondant au même point M de Q, les plans tangents sont parallèles puisque tous les deux parallèles au plan tangent en M à Q), et les courbures sont égales (égales à celles de Q); mais les génératrices rectilignes ne se correspondent plus.

Si M décrit la génératrice G_1 du premier système, sur Q, M_1 décrit une génératrice rectiligne de S_1, et M_2 décrit sur S_2 la courbe de contact du cylindre circonscrit de génératrices parallèles à G_1 (ligne d'ombre relative à la direction G_1).

On a des résultats analogues si M décrit G_2, de sorte que l'on peut énoncer la relation suivante entre une surface quelconque de la famille (S_1) et une surface quelconque de la famille (S_2).

Les deux surfaces se correspondent par plans tangents parallèles et égalité des courbures, et aux génératrices rectilignes de l'une quelconque des deux, correspondent, sur l'autre, les lignes d'ombre relatives à ces mêmes génératrices.

D'ailleurs toute surface de l'une des deux familles (S_1) ou (S_2) est égale à une symétrique de l'une des surfaces de l'autre famille.

Si l'on néglige toute distinction entre le réel et l'imaginaire, et si l'on applique les résultats qui précèdent à une sphère (quadrique à génératrices isotropes et à *courbure totale constante*), on est conduit, comme on le voit, par une méthode purement géométrique, à la démonstration de l'existence d'une famille de surfaces *réglées*, imaginaires, à *courbure totale constante* (dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument).

Nous n'insistons pas davantage sur ce point pour le moment.

L'existence de surfaces gauches applicables sur la sphère a été mise analytiquement en évidence, en 1848, par J.-A. Serret, dans une Note du *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 361, « *Sur une équation aux dérivées partielles* ».

Leur détermination complète a été faite par M.-B. Gambier, dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* « *Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces* », t. LVI, 1928, p. 224.