ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

J. COULOMB

Sur les ondes de Rayleigh et sur certaines transcendantes généralisant celles de Bessel

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 23 (1931), p. 91-137

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1931_3_23__91_0>

SUR LES ONDES DE RAYLEIGH

ET

SUR CERTAINES TRANSCENDANTES GÉNÉRALISANT CELLES DE BESSEL

PAR J. COULOMB.

INTRODUCTION

Un progrès essentiel de la séismologie théorique a consisté en l'interprétation des ondes longues à l'aide des résultats obtenus par Lord Rayleigh dans un Mémoire célèbre de 1885(1). Pour étudier la propagation des ondes élastiques à la surface du solide terrestre, Rayleigh assimile cette surface à un plan, l'espace situé d'un des côtés (« au-dessous ») du plan étant rempli de matière homogène et isotrope. Il étudie alors les vibrations propres superficielles de ce corps. L'hypothèse de Rayleigh, que nous ferons à notre tour, est la plus simple et la seule approfondie jusqu'ici (si l'on excepte l'hypothèse de la couche mince superficielle, dont Love(2) a montré l'intérêt). Les fréquences propres dépendent en ce cas d'une équation du troisième degré dont une seule racine parut utilisable à Rayleigh.

Les résultats de Rayleigh attendirent assez longtemps avant d'être appréciés à leur valeur, plus encore avant d'être complétés. Jusqu'à une époque récente, les travaux sur cette question étaient fort peu nombreux. Citons d'abord un Mémoire de T. J. I' A. Bromwich(3), qui étudie surtout l'influence de la gravité, négligée par Rayleigh. Cette influence est faible, et la plupart des auteurs depuis Bromwich l'ont délibérément négligée. On trouve aussi dans ce Mémoire les formules relatives aux ondes de Rayleigh sphériques. Mais l'avantage obtenu en passant du plan à la sphère est assez illusoire et ne justifie guère l'accroissement de complexité des formules.

Par contre, le Mémoire de H. Lamb(4), paru en 1904 seulement, est fondamental. Il traite de la génération des ondes de Rayleigh par une percussion extérieure, et donne des indications sur quelques problèmes analogues. Malgré quelques obscurités

(1) *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 17, p. 4, 1885 ou *Sc. Papers*, vol. 2, p. 441.

(2) *Some problems of Geodynamics* (Camb., 1911), chap. XI.

(3) Proc. Lond. Math. Soc., vol. 30, p. 98 (1898) : « *On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid* ».

(4) *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 203, p. 1 (1904).

et un léger manque de rigueur dont nous parlerons(¹), ce Mémoire représente un énorme progrès; il a servi de modèle à un grand nombre de travaux.

Enfin, en trois notes parues en 1917 et 1918(²), Somigliana a cherché à interpréter les racines non utilisées de l'équation aux fréquences propres, ce qui ne va pas sans difficultés. Un point intéressant est qu'il évite le passage habituel par les vibrations harmoniques.

Depuis 1928 ont paru au Japon un grand nombre de travaux sur la question. Les principaux résultats sont l'étude des ondes de Rayleigh dépendant de l'azimut(³) et de leur génération par un multiplet quelconque(⁴). Les méthodes suivies sont celles de Lamb.

En somme, le problème type est celui de la percussion extérieure de Lamb. Ainsi que le signale celui-ci(⁵), ce problème est une généralisation du problème célèbre de Boussinesq : détermination des déformations statiques par pression en un point d'une surface plane limitant un solide. La solution de ce dernier problème fait intervenir le potentiel d'une densité uniforme de masses répartie sur la normale extérieure au point d'application de la force (ligne de sources). Or la solution de Lamb paraît n'avoir avec la précédente aucun rapport. M. Marcel Brillouin me signala l'intérêt qu'il y aurait à introduire la solution des équations dynamiques, analogue à celle de Boussinesq. les « sources » réparties sur la ligne engendrant, non plus le potentiel $\frac{1}{r}$, mais un potentiel généralisé de la forme classique $\frac{e^{-ihr}}{r}$.

Je montre dans la suite comment on peut rattacher à cette idée les ondes de Somigliana, et les ondes analogues dépendant de l'azimut. Les fonctions transcendantes de deux variables que l'on est conduit à introduire généralisent les fonctions de Bessel d'ordre zéro. On obtient assez facilement des fonctions analogues généralisant les fonctions de Bessel d'ordre quelconque. Ces fonctions jouissent de propriétés intéressantes, les rapprochant des transcendantes du type sinus et cosinus intégral. Elles fournissent des exemples de fonctions hémicylindriques, et de fonctions satisfaisant aux équations de récurrence de Nielsen. Les fonctions d'ordre demi-impair ont d'ailleurs été étudiées par Binet. Quant aux fonctions d'ordre entier, elles permettent d'obtenir *des développements en série intéressants pour le potentiel généralisé d'un segment avec répartition arbitraire des densités.*

Qu'il me soit permis de remercier ici M. Marcel Brillouin et M. Henri Villat pour les encouragements et les conseils si précieux qu'ils ont bien voulu me prodiguer au cours de ce travail.

(¹) Voir plus loin : Remarque sur le Mémoire de Lamb.

(²) *Rendiconti Lincei*, XXVI (1917), p. 369 et 472; *ibid.*, XXVII, p. 13.

(³) Citons K. Sezawa. *Proc. Imp. Ac.*, IV, 6, p. 267, et surtout H. Nakano : *Geophysical Magazine*, I, 6, p. 255.

(⁴) Citons K. Sezawa. *Bull. of the Earthquake Research Inst.*, vol. VI, mars 1929. — K. Sezawa et G. Nishimura. *Ibid.*, vol. VII, Part. I, juin 1929, p. 41.

(⁵) *Loc. cit.*, p. 33. Note.

PREMIÈRE PARTIE

Le problème élastique.

1] Pour l'étude des vibrations possédant une symétrie axiale, nous prendrons l'axe, supposé normal au sol et dirigé vers l'intérieur, pour axe des z, l'origine étant au sol. Nous appellerons ρ le rayon cylindrique, D la densité du sol. Les autres notations sont celles du Mémoire cité de Lamb. Les équations du mouvement sont alors du type :

$$\mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u,$$

λ, μ étant les constantes de Lamé, u, v, w le vecteur déplacement, Δ sa divergence, ∇^2 l'opérateur Laplacien.

Ces équations admettent la solution harmonique :

$$(1) \qquad \begin{cases} u = \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}\right] e^{ipt}, \\ v = \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z}\right] e^{ipt}, \\ w = \left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + k^2 \chi\right] e^{ipt}, \end{cases}$$

pourvu que les potentiels Φ, χ, satisfassent aux équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} (\nabla^2 + h^2)\Phi = 0, \\ (\nabla^2 + k^2)\chi = 0, \end{cases}$$

en posant :

$$h^2 = \frac{p^2 \mathrm{D}}{\lambda + 2\mu}, \qquad k^2 = \frac{p^2 \mathrm{D}}{\mu}.$$

Dans le cas de la symétrie axiale, nous aurons, en appelant q le déplacement radial et en omettant partout le facteur e^{ipt} :

$$(3) \qquad \begin{cases} q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial \rho \partial z}, \\ w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + k^2 \chi, \end{cases}$$

avec :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + h^2\Phi = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\chi}{\partial\rho} + \dfrac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + k^2\chi = 0. \end{cases}$$

Nous ajouterons ici les formules donnant les pressions, soit :

$$\frac{1}{\mu} p_{z\rho} = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho},$$

$$\frac{1}{\mu} p_{zz} = (2h^2 - k^2)\Phi + 2\frac{\partial w}{\partial z}.$$

2] Une solution fondamentale des équations (4) est :

$$\Phi = \frac{e^{-ihr}}{r}, \qquad \chi = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

avec :

$$r = \sqrt{\rho^2 + (\zeta_1 + z)^2}.$$

Φ et χ sont alors les potentiels généralisés d'une « source », que nous supposons placée sur la partie négative de l'axe des z, sa cote étant $-\zeta_1$. Par analogie avec la solution de Boussinesq(¹) pour le problème statique correspondant, nous combinerons ces sources par intégration en ζ_1, formant ainsi des « lignes de sources ». Autrement dit, nous chercherons à satisfaire aux conditions aux limites au moyen de solutions de la forme :

$$\Phi = \int_0^\infty M(\zeta_1)\,\omega\,d\zeta_1, \qquad \chi = \int_0^\infty N(\zeta_1)\,\varpi\,d\zeta_1$$

en posant pour abréger :

$$\omega(r) = \frac{e^{-ihr}}{r}, \qquad \varpi(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

On peut encore écrire, en posant : $\zeta_1 + z = \zeta$,

$$\Phi = \int_z^\infty M(\zeta - z)\,\omega\,d\zeta, \qquad \chi = \int_z^\infty N(\zeta - z)\,\varpi\,d\zeta;$$

et l'on a simplement :

$$r = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}.$$

(¹) Applications des Potentiels...

3] La plus simple de ces lignes de sources est celle dont la distribution est uniforme. Nous poserons :

$$\psi(h\rho, hz) = \int_z^{\infty} \omega \, d\zeta.$$

Cette fonction jouera dans la suite le rôle principal.

Remarquons de suite que :

$$\psi(h\rho, 0) = -D_0(h\rho),$$

en vertu de la formule connue :

$$D_0 = -\int_0^{\infty} e^{-i\zeta \operatorname{ch} u} \, du,$$

D_0 étant la fonction de Bessel de troisième espèce dans la notation de Rayleigh[1].

On a plus généralement :

$$\psi(h\rho, hz) + \psi(h\rho, -hz) = -2D_0(h\rho). \tag{5}$$

Ainsi la fonction ψ constitue une généralisation de la fonction D_0. Nous verrons qu'on peut obtenir des fonctions analogues généralisant les fonctions D_n d'ordre quelconque.

4] D'autres lignes de sources s'introduiront par la suite. Ce sont celles à distribution sinusoïdale, conduisant aux intégrales :

$$\int_z^{\infty} \omega \frac{\cos}{\sin} [m(\zeta - z)] \, d\zeta,$$

dans lesquelles on suppose m réel, positif, et inférieur à h. Ces intégrales se ramènent à la précédente. En effet, considérons d'abord :

$$I = \int_z^{\infty} \cos m\zeta \frac{\sin hr}{r} \, d\zeta,$$

et posons :

$$z = \rho \operatorname{sh} v, \qquad \zeta = \rho \operatorname{sh} u.$$

---

(1) $\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(z)$ dans la notation courante (Nielsen, Watson). Lamb emploie $\frac{2}{\pi} D_0(z)$ pour représenter la même fonction.

Il vient :

$$I = \int_{\nu}^{\infty} \cos(m\rho sh u) \sin(h\rho ch u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\infty} \{ \sin[\rho(hchu + mshu)] + \sin[\rho(hchu - mshu)] \}\, du.$$

Puisque on suppose $m < h$, on peut poser :

$$m = \xi sh\theta, \qquad h = \xi ch\theta, \qquad \text{avec} \qquad \xi = +\sqrt{h^2 - m^2}.$$

Il vient alors :

$$I = \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\infty} \sin[\xi\rho ch(\theta + u)]\, du + \frac{1}{2}\int_{\nu}^{\infty} \sin[\xi\rho ch(\theta - u)]\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\nu+\theta}^{\infty} \sin[\xi\rho ch v]\, dv + \frac{1}{2}\int_{\nu-\theta}^{\infty} \sin[\xi\rho ch v]\, dv.$$

Or on a (¹) :

$$\mathfrak{J}\psi(h\rho, h\rho sh\omega) = -\int_{\omega}^{\infty} \sin[h\rho ch v]\, dv.$$

Donc :

$$I = -\frac{1}{2}\mathfrak{J}\psi[\xi\rho, \xi\rho sh(\nu + \theta)] - \frac{1}{2}\mathfrak{J}\psi[\xi\rho, \xi\rho sh(\nu - \theta)],$$

ou, en posant (²) :

$$R = \rho ch\nu = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

$$I = -\frac{1}{2}\mathfrak{J}\psi[\xi\rho, hz + mR] - \frac{1}{2}\mathfrak{J}\psi[\xi\rho, hz - mR].$$

On obtiendrait de même une formule analogue en $\dfrac{\cos hr}{r}$.

En combinant les résultats, il vient alors :

$$\int_{z}^{\infty} \omega \cos m\zeta\, d\zeta = \frac{1}{2}\psi[\xi\rho, hz + mR] + \frac{1}{2}\psi[\xi\rho, hz - mR].$$

Pour $m = 0$, on retrouve la définition de ψ. Pour $m = h$, l'intégrale en $\dfrac{\cos hr}{r}$ ne converge plus (³), l'autre s'exprimerait au moyen du sinus-intégral.

(¹) $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{J}$, représenteront la partie réelle et le coefficient de i dans l'expression qui les suit.

(²) Cette notation sera conservée pour le rayon polaire.

(³) L'élément d'intégrale équivaut alors à $\dfrac{\cos^2 h\zeta}{\zeta}$ pour ζ grand.

La même méthode conduit, pour l'intégrale en $\sin mz$, avec toujours $m < h$, à l'expression :

$$\int_z^\infty \sin m\zeta\, d\zeta = \frac{i}{2}\psi[\xi\rho,\, hz + m\mathrm{R}] - \frac{i}{2}\psi[\xi\rho,\, hz - m\mathrm{R}].$$

Le potentiel de la distribution en $\cos m\zeta_1$ par exemple s'exprimera donc, au moyen de la fonction ψ, sous la forme :

$$\int_z^\infty \omega \cos[m(\zeta - z)]\, d\zeta = \frac{1}{2} e^{imz}\psi[\xi\rho,\, hz + m\mathrm{R}] + \frac{1}{2} e^{-imz}\psi[\xi\rho,\, hz - m\mathrm{R}].$$

Ce qui nous sera surtout utile, ce sera l'effet produit dans le plan $z = 0$ par les diverses lignes de sources. La formule que nous venons d'établir donne :

$$\int_0^\infty \omega \cos m\zeta\, d\zeta = -\mathrm{D}_0(\xi\rho), \tag{6}$$

et l'on doit, dans ce cas, supposer $\rho \neq 0$ [1].

5] Reprenons les équations du mouvement. Choisissons pour Φ et χ des potentiels de lignes de sources, soient :

$$\Phi = \int_z^\infty \omega \mathrm{M}(\zeta - z)\, d\zeta, \qquad \chi = \int_z^\infty \varpi \mathrm{N}(\zeta - z)\, d\zeta.$$

On peut alors mettre les pressions et les déplacements à la surface $(z = 0)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}(p_{z\rho})_0 = &-2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty \omega \mathrm{M}'(\zeta)\, d\zeta - 2\mathrm{M}(0)\,\omega'(\rho) \\
&+ \frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty \varpi[k^2\mathrm{N}(\zeta) + 2\mathrm{N}''(\zeta)]\, d\zeta + 2\mathrm{N}'(0)\,\varpi'(\rho),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}(p_{zz})_0 = &\int_0^\infty \omega[(2h^2 - k^2)\mathrm{M}(\zeta) + 2\mathrm{M}''(\zeta)] + 2\mathrm{M}'(0)\,\omega(\rho) \\
&- 2\int_0^\infty \varpi[k^2\mathrm{N}'(\zeta) + \mathrm{N}'''(\zeta)]\, d\zeta - 2[\mathrm{N}''(0) + k^2\mathrm{N}(0)]\,\varpi(\rho) - 2\mathrm{N}(0)\frac{\varpi'(\rho)}{\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_0 = &\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty \omega \mathrm{M}(\zeta)\, d\zeta \\
&- \frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty \varpi \mathrm{N}'(\zeta)\, d\zeta - \mathrm{N}(0)\,\varpi'(\rho),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_0 = &-\int_0^\infty \omega \mathrm{M}'(\zeta)\, d\zeta - \mathrm{M}(0)\,\omega(\rho) \\
&+ \int_0^\infty \varpi[k^2\mathrm{N}(\zeta) + \mathrm{N}''(\zeta)]\, d\zeta + \mathrm{N}'(0)\,\varpi(\rho).
\end{aligned}$$

---

[1] La formule obtenue en égalant les parties réelles est un cas très particulier d'une formule de Sonine (Cf. : Watson, *Theory of Bessel Functions*, Camb. 1922, p. 415, § 13-47, Formule I).

En annulant les pressions, on aurait des équations intégro-différentielles donnant les vibrations propres de la forme précédente. Nous allons, bien entendu, nous borner à chercher des solutions particulières, en prenant pour $M(\zeta)$ et $N(\zeta)$ des sinus ou cosinus. Mais seules les intégrales en cosinus, qui sont de forme simple comme nous venons de le voir, devront rester dans les formules finales, et cela va nous obliger à prendre deux sortes de lignes de sources.

6] Prenons d'abord :

$$M(\zeta) = A \cos \alpha\zeta,$$
$$N(\zeta) = iB \sin \beta\zeta,$$

α et β étant deux nombres réels et positifs tels que :

$$h^2 - \alpha^2 = k^2 - \beta^2.$$

Soit ξ^2 la valeur commune de ces expressions, ξ étant réel, positif, et inférieur à h, ou imaginaire à coefficient de i négatif. Les expressions précédentes et la formule (6) nous donnent [1] :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} q_0 &= [\xi A - i\xi\beta B]\, D_1(\xi\rho), \\ \frac{1}{\mu}(p_{zz})_0 &= -[(2\xi^2 - k^2)A - 2i\beta\xi^2 B]\, D_0(\xi\rho). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs correspondantes de w_0 et $(p_{z\rho})_0$ renfermeraient explicitement la fonction ψ. Nous ne les utiliserons pas.

Prenons maintenant :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} M(\zeta) &= iA \sin \alpha\zeta, \\ N(\zeta) &= B \cos \beta\zeta. \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= -[-i\alpha A + \xi^2 B]\, D_0(\xi\rho), \\ \frac{1}{\mu}(p_{z\rho})_0 &= \xi[-2i\alpha A + (2\xi^2 - k^2)B]\, D_1(\xi\rho). \end{aligned} \right.$$

Admettons pour un instant que les formules (7) et (9) réunies constituent une solution du problème. A ceci près que α est remplacé par $i\alpha$, β par $i\beta$, et les fonc-

---

(1) $D_1 = -D'_0$ est la fonction de Bessel de troisième espèce et d'ordre 1 de Rayleigh.

tions de Bessel de première espèce J_0, J_1 par D_0, D_1, ce qui n'est qu'une extension formelle, nous obtenons les expressions des déplacements et tensions fournies à Lamb par ses solutions fondamentales(1). Ainsi, en cherchant à étendre la méthode de Boussinesq pour le problème statique, on obtient de façon imprévue le point de départ de Lamb, qui en paraissait fort éloigné. La solution élémentaire de Lamb est obtenue, non pas au moyen d'une distribution linéaire de sources, mais de deux distributions fournissant, l'une q et p_{zz}, l'autre w et $p_{z\rho}$.

La substitution de α à $i\alpha$, β à $i\beta$, ne constitue d'ailleurs pas un simple changement de notation. Dans nos formules, α et β doivent être supposés réels, ce qui restreint la généralité. Si α devenait imaginaire pur, l'intégrale $\int_0^\infty \omega \cos \alpha\zeta d\zeta$ ne convergerait plus. On pourrait prendre un chemin d'intégration complexe, mais cet artifice ferait perdre à la notion de lignes de sources tout son sens physique.

7] Il reste à justifier la combinaison faite des deux systèmes de solutions. Soient, de façon générale,

$$\Phi^{\mathrm{I}},\ \chi^{\mathrm{I}},\ q^{\mathrm{I}},\ w^{\mathrm{I}},\ p_{zz}^{\mathrm{I}},\ p_{z\rho}^{\mathrm{I}},\qquad \text{et}\qquad \Phi^{\mathrm{II}},\ \chi^{\mathrm{II}},\ q^{\mathrm{II}},\ w^{\mathrm{II}},\ p_{zz}^{\mathrm{II}},\ p_{z\rho}^{\mathrm{II}},$$

deux systèmes de solutions des équations du mouvement.

Cherchons une solution $\Phi, \chi, q, w, p_{zz}, p_{z\rho}$, telle que l'on ait :

$$q = q_0^{\mathrm{I}},\quad (p_{zz})_0 = (p_{zz}^{\mathrm{I}})_0;\qquad w_0 = w_0^{\mathrm{II}},\quad (p_{z\rho})_0 = (p_{z\rho}^{\mathrm{II}})_0.$$

Puisque $\dfrac{1}{\mu} p_{z\rho} = \dfrac{\partial q}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial \rho}$, on aura $\left(\dfrac{\partial q}{\partial z}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial q^{\mathrm{II}}}{\partial z}\right)_0$;

et, comme : $\dfrac{\partial q}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial \rho} = -k^2 \dfrac{\partial \chi}{\partial \rho}$, on aura $\dfrac{\partial \chi_0}{\partial \rho} = \dfrac{\partial \chi_0^{\mathrm{II}}}{\partial \rho}$;

ou enfin, en intégrant :

$$\underline{\chi_0 = \chi_0^{\mathrm{II}}}.$$

(La constante d'intégration doit être nulle si on veut que χ_0 tende vers zéro pour ρ infini, χ_0^{II} étant supposé tendre lui-même vers zéro).

On a de même

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho \partial z} = q - \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = q + \frac{1}{h^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \rho};$$

(1) H. Lamb, *loc. cit.*, formules (120) et (121), p. 30.

or :

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta = p_{zz} + \frac{2\mu}{\rho}\,\frac{\partial(\rho q)}{\partial \rho}, \quad \text{d'où :} \quad \Delta_0 = \Delta_0^{\mathrm{I}};$$

on a donc :

$$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho\, \partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \chi^{\mathrm{I}}}{\partial \rho\, \partial z}\right)_0,$$

et en intégrant :

$$\underline{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial \chi^{\mathrm{I}}}{\partial z}\right)_0}.$$

Si nous supposons les données holomorphes au voisinage de $z = 0$, χ, qui est une intégrale de $(\nabla^2 + k^2)\,\chi = 0$, sera déterminé, également au voisinage de $z = 0$, par les valeurs précédentes de χ_0 et de $\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_0$.

On démontrerait de même les formules :

$$\underline{\Phi_0 = \Phi_0^{\mathrm{I}}} \quad \text{et} \quad \underline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi^{\mathrm{II}}}{\partial z}\right)_0}$$

et on déduirait la fonction Φ au voisinage de $z = 0$. Réciproquement on verrait que les fonctions Φ, χ ainsi trouvées remplissent les conditions superficielles exigées.

Dans les problèmes de recherche d'ondes superficielles, la détermination effective des fonctions Φ, χ, par intégration, ne sera pas indispensable. Il suffira de montrer, par exemple au moyen de majorantes, que ces fonctions satisferaient aux autres conditions du problème (Ici : être holomorphes pour $z > 0$ et $\rho \neq 0$, s'annuler à l'infini). Il semble donc que la méthode précédente, pour étrange qu'elle puisse paraître, pourra rendre des services.

Dans le cas qui nous occupe, l'intégration est immédiate. On obtient en effet :

$$\chi_0 = -\,\mathrm{B}\,\mathrm{D}_0(\zeta\rho), \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_0 = i\beta\,\mathrm{B}\,\mathrm{D}_0(\xi\rho),$$

d'où :

$$\chi = -\,\mathrm{B}\,e^{-i\beta z}\,\mathrm{D}_0(\xi\rho);$$

et de même :

$$\Phi_0 = -\,\mathrm{A}\,\mathrm{D}_0(\xi\rho), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 = i\alpha\,\mathrm{A}\,\mathrm{D}_0(\xi\rho),$$

d'où :

$$\Phi = -\,\mathrm{A}\,e^{-i\alpha z}\,\mathrm{D}_0(\xi\rho).$$

C'est la solution de Lamb. Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, nous avons introduit D_0 au lieu de J_0. Nous avons ainsi une singularité le long de oz, avec des ondes divergentes. Ce genre de singularités a parfois été considéré comme une représentation d'un foyer sismique. Le Mémoire très détaillé de H. Nakano, que nous avons cité, repose sur cette hypothèse. Mais il est entendu que les véritables vibrations propres s'obtiendraient en revenant à J_0.

8] Cherchons donc les vibrations propres. Nous devons satisfaire aux équations à la surface :

$$(p_{zz})_0 = (p_{z\rho})_0 = 0$$

ou :

$$\begin{cases} (2\xi^2 - k^2)\,A - 2i\beta\xi^2 B = 0, \\ -2i\alpha A + (2\xi^2 - k^2)\,B = 0. \end{cases}$$

Le déterminant : $F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 + 4\xi^2\alpha\beta$ ne peut s'annuler pour ξ réel, α et β positifs. C'est ce que constate Lamb. Ce déterminant n'a pas non plus de racine imaginaire pure. Posons en effet :

$$f(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\alpha\beta,$$

et formons l'équation de Rayleigh :

$$\begin{aligned} F(\xi)f(\xi) &= (2\xi^2 - k^2)^4 - 16\xi^4(h^2 - \xi^2)(k^2 - \xi^2) \\ &= -16(k^2 - h^2)\,\xi^6 + (24k^2 - 16h^2)\,k^2\xi^4 - 8k^6\xi^2 + k^8 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation du 3^e^ degré en ξ^2 a toujours une racine plus grande que k^2, la seule qui soit ordinairement utilisée. Les autres racines ne sont réelles, et alors comprises entre 0 et h^2, que si le coefficient de Poisson $\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ est inférieur à $\sigma_0 = 0{,}2637\ldots$ [1]. On sait que ce coefficient peut varier théoriquement entre -1 et $+\dfrac{1}{2}$; mais les valeurs négatives ne se rencontrent jamais dans les matériaux superficiels de l'écorce terrestre. La valeur universellement utilisée par les séismologistes est $+\dfrac{1}{4}$, moyenne des valeurs positives. Dans ce cas, les racines sont :

$$\xi^2 = \frac{1}{4}k^2, \qquad \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})\,k^2, \qquad \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3})\,k^2.$$

---

[1] La discussion est aisée. Voir si l'on veut Somigliana, *loc. cit.* (note III).

Certains auteurs ont considéré les cas $\sigma = \frac{1}{2}$ (Incompressibilité) où les deux racines envisagées sont complexes, et $\sigma = -\frac{1}{4}$ (Moyenne des valeurs théoriquement possibles) où elles sont encore réelles.

On voit qu'en aucun cas l'équation de Rayleigh n'admet de racine négative. Nous n'aurons donc pas plus de vibration propre correspondant à ξ imaginaire, qu'à ξ réel. Si l'on songe à la forme de l'oscillation, le contraire eût d'ailleurs été surprenant.

Ayant donc choisi nos lignes de sources de façon à obtenir la solution de Lamb, nous n'obtenons aucune vibration propre, à cause des limitations imposées à α et β.

9] Prenons maintenant, pour la seconde ligne de sources :

$$(8') \quad \begin{cases} M(\zeta) = -iA \sin \alpha\zeta, \\ N(\zeta) = B \cos \beta\zeta, \end{cases}$$

au lieu des expressions (8) du § 6. Nous obtiendrons :

$$(9') \quad \begin{cases} w_0 = -[i\alpha A + \xi^2 B]\, D_0(\xi\rho), \\ \frac{1}{\mu}(p_{z\rho})_0 = \xi[2i\alpha A + (2\xi^2 - k^2) B]\, D_1(\xi\rho). \end{cases}$$

Le déterminant des équations correspondantes est maintenant $f(\xi)$. Lorsque l'équation de Rayleigh admet trois racines réelles en ξ^2, et dans ce cas seulement, $f(\xi)$ admet deux racines en ξ réelles et inférieures à h, qui proviennent des deux plus petites racines de l'équation de Rayleigh. En effet, celles-ci ne peuvent fournir de racines de $F(\xi)$, nous l'avons vu. Quant à la racine supérieure à k^2, elle conduit à des valeurs imaginaires de α et β, que notre méthode ne nous permet pas d'utiliser.

10] Ainsi nous n'obtenons pas les ondes de Rayleigh, qui correspondent à la plus grande racine de l'équation, mais nous obtenons deux séries d'ondes correspondant aux plus petites. La possibilité de telles solutions n'a pas échappé à Lord Rayleigh, mais il les a rejetées. Par contre Lamb et ses successeurs les évitent sans paraître le vouloir (¹). Ils partent en effet des potentiels :

$$\Phi = e^{-\alpha z} J_0(\xi\rho),$$
$$\chi = e^{-\beta z} J_0(\xi\rho),$$

(¹) Exceptons H. NAKANO, qui dit (*loc. cit.*) : « This equation may, of course, have roots other than this. For the present, I confine my discussion to the case corresponding to the Rayleigh wave. »

où α et β « sont les quantités positives réelles, ou positives imaginaires définies par $\alpha^2 = \xi^2 - h^2$, $\beta^2 = \xi^2 - k^2$ ». Si α et β sont réels, ils doivent évidemment avoir le même signe, qui est $+$, sans quoi le déplacement deviendrait infini à l'infini. Mais rien d'analogue n'a lieu *a priori* pour α et β imaginaires, et la convention est plus restrictive qu'il ne semble.

Somigliana, dès sa première note, attire l'attention sur ces racines. Il reprend le problème original de Rayleigh, à deux dimensions, et montre qu'on peut en obtenir une solution en superposant deux ondes planes, l'une de dilatation, l'autre de distorsion, convenablement choisies (possédant notamment une même vitesse superficielle). Dans le cas qui nous occupe, ces ondes sont réelles. Dans le cas envisagé par Lord Rayleigh, elles sont imaginaires.

Bien entendu, pour passer des ondes ds Somigliana aux expressions que nous avons trouvées, il faut supposer les vibrations harmoniques (1), puis superposer de tels couples d'ondes planes répartis uniformément en azimut (2).

Inversement nous pourrions généraliser nos formules en substituant à $\frac{e^{-ihr}}{r}$ une fonction de la forme $\frac{1}{r} f\left(r - \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{D}}\, t\right)$, à $\frac{e^{-ikr}}{r}$ la fonction $\frac{1}{r} f\left(r - \sqrt{\frac{\mu}{D}}\, t\right)$.

11] Ces ondes sont loin d'avoir l'importance de celles de Rayleigh. Dans ces dernières, grâce au facteur exponentiel réel, la perturbation est limitée à une couche superficielle. Elles divergent dans deux dimensions seulement, selon l'expression de Lord Rayleigh. Elles finissent donc par prédominer à une distance suffisante du foyer séismique. Il n'en est pas de même des ondes de Somigliana.

Il semble qu'il y ait plus grave : la solution, telle qu'elle est trouvée, ne s'annule pas avec la profondeur. Comme les angles d'émergence des ondes planes de Somigliana sont connus dès que le corps est donné, il est impossible de superposer une infinité de tels systèmes de façon à assurer cette annulation avec la profondeur et à figurer par exemple les ondes issues d'un foyer séismique ponctuel (3). En fait, ces ondes exigent une hypothèse du genre de celle de H. Nakano, qui considère les séis-

---

(1) Exactement faire $\Psi(\zeta) = e^{i\xi\zeta}$ dans les équations (24) de Somigliana (rectifiées dans sa dernière note).

(2) Signalons une inexactitude dans la première note de Somigliana, non rectifiée aux suivantes : Il admet que les angles d'émergence θ_a, θ_b de ses ondes planes sont donnés par ses équations (20) : $\mathrm{tg}^2\, \theta_a = \dots$, $\mathrm{tg}^2\, \theta_b = \dots$, et par conséquent sont connus au signe près. En réalité l'équation (15) montre que $\mathrm{tg}\, \theta_a\, \mathrm{tg}\, \theta_b$ a le signe de $1 - \mathrm{tg}^2\, \theta_b$ qui est bien défini. On ne peut remplacer arbitrairement une onde par l'onde réfléchie, mais seulement le système des deux ondes par le système réfléchi.

(3) Dans le calcul effectif, on serait arrêté par la limitation de ξ, qui rend impossible l'utilisation de l'intégrale de Fourier ou d'un procédé analogue.

mes comme issus d'un foyer linéaire, le long de la normale intérieure à la surface. Dans ce cas plus rien n'impose l'annulation du mouvement avec la profondeur.

Peut-être cette idée est-elle applicable aux distances épicentrales assez faibles, sans aller cependant jusqu'au point où les accidents du sol et du sous-sol rendraient illusoire toute application de la théorie élastique. C'est dans ce sens que pourraient être utilisés les divers essais de comparaison à l'expérience, qu'on trouvera dans les notes II et III de Somigliana.

12] Les résultats obtenus s'étendent aux ondes dépourvues de symétrie axiale. Au lieu de considérer d'emblée ces dernières comme des combinaisons linéaires d'ondes périodiques en azimut, ce qui serait conforme à la pratique courante, il sera plus commode de chercher ce que l'on obtient en prenant pour source élémentaire de dilatation[1] :

$$\Omega = \frac{\partial^{m+n}\omega}{\partial x^m \partial \zeta_1^n},$$

et pour source de distorsion :

$$\Pi = \frac{\partial^{m+n}\varpi}{\partial x^m \partial \zeta_1^n}.$$

Nous reviendrons aux formules (1) du § 1 pour les déplacements, indépendantes de l'hypothèse de symétrie. Nous y porterons les expressions :

$$\Phi = \int_0^\infty \mathrm{M}(\zeta_1)\,\Omega\,d\zeta_1, \qquad \chi = \int_0^\infty \mathrm{N}(\zeta_1)\,\Pi\,d\zeta_1.$$

On obtient ainsi, pour les déplacements dans le plan $z = 0$, et les pressions sur ce plan[2] :

$$\left|\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix}\right. = \frac{\partial}{\partial \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{M}(\zeta) \frac{\partial^n \omega}{\partial \zeta^n} d\zeta - \int_0^\infty \mathrm{N}'(\zeta) \frac{\partial^n \varpi}{\partial \zeta^n} d\zeta - \mathrm{N}(0)\left(\frac{\partial^n \varpi}{\partial \zeta^n}\right)_0 \right\},$$

$$w_0 = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left\{ -\int_0^\infty \mathrm{M}'(\zeta) \frac{\partial^n \omega}{\partial \zeta^n} d\zeta - \mathrm{M}(0)\left(\frac{\partial^n \omega}{\partial \zeta^n}\right)_0 \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty [k^2\mathrm{N}(\zeta) + \mathrm{N}''(\zeta)] \frac{\partial^n \varpi}{\partial \zeta^n} d\zeta - \mathrm{N}(0)\left(\frac{\partial^{n+1}\varpi}{\partial \zeta^{n+1}}\right)_0 + \mathrm{N}'(0)\left(\frac{\partial^n \varpi}{\partial \zeta^n}\right)_0 \right\},$$

---

(1) Pour avoir la source de dilatation appelée parfois multiplet d'ordre n, il faudrait prendre $\Omega = \left(\cos a \frac{\partial}{\partial x} + \sin a \frac{\partial}{\partial z}\right)^n \omega$, l'angle a définissant la position dans le plan xoz de l'axe du multiplet; ceci reviendrait évidemment à une combinaison linéaire de nos sources.

(2) Nous condensons les formules en u et v, en p_{zx} et p_{zy}, de façon évidente.

$$\frac{1}{\mu}\left(p_{z\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left\{-2\int_0^\infty M'(\zeta)\frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}d\zeta - 2M(o)\left(\frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}\right)_0\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty [k^2N + 2N''(\zeta)]\frac{\partial^n\varpi}{\partial\zeta^n}d\zeta - 2N(o)\left(\frac{\partial^{n+1}\varpi}{\partial\zeta^{n+1}}\right)_0 + 2N'(o)\left(\frac{\partial^n\varpi}{\partial\zeta^n}\right)_0\right\},$$

$$\frac{1}{\mu}(p_{zz})_0 = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left\{\int_0^\infty [(2h^2-k^2)M(\zeta) + 2M''(\zeta)]\frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}d\zeta - 2M'(o)\left(\frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}\right)_0 - 2M(o)\left(\frac{\partial^{n+1}\varpi}{\partial\zeta^{n+1}}\right)_0\right.$$

$$\left. - 2\int_0^\infty [k^2N'(\zeta) + N'''(\zeta)]\frac{\partial^n\varpi}{\partial\zeta^n}d\zeta + 2N'(o)\left(\frac{\partial^{n+1}\varpi}{\partial\zeta^{n+1}}\right)_0 - 2N(o)\left(\frac{\partial^{n+2}\varpi}{\partial\zeta^{n+2}}\right)_0\right\}.$$

Pour $z = o$, les dérivées impaires de ω et ϖ sont nulles. On aura donc deux cas à considérer suivant la parité de n. Le cas de n pair ressemble au cas de la symétrie. Traitons le cas de *n impair*.

Nous prendrons, comme première solution devant nous donner u_0, v_0 $(p_{zz})_0$:

$$\begin{cases} M(\zeta) = A_1 \sin \alpha\zeta, \\ N(\zeta) = iB_1 \cos \beta\zeta, \end{cases}$$

α et β ayant la même signification que précédemment.

Nous aurons donc à calculer des intégrales[1] de la forme :

$$\int_0^\infty \frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}\sin\alpha\zeta\,d\zeta = \left[\frac{\partial^{n-1}\omega}{\partial\zeta^{n-1}}\sin\alpha\zeta\right]_0^\infty - \alpha\int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}\omega}{\partial\zeta^{n-1}}\cos\alpha\zeta\,d\zeta.$$

La partie toute intégrée est nulle. Reprenons l'intégration par parties :

$$\int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}\omega}{\partial\zeta^{n-1}}\cos\alpha\zeta\,d\zeta = \left[\frac{\partial^{n-2}\omega}{\partial\zeta^{n-1}}\cos\alpha\zeta\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}\omega}{\partial\zeta^{n-1}}\sin\alpha\zeta\,d\zeta.$$

La partie toute intégrée est encore nulle, cette fois parce que la dérivée impaire $\dfrac{\partial^{n-2}\omega}{\partial\zeta^{n-2}}$ est nulle pour $\zeta = o$.

On obtient ainsi en poursuivant :

$$\int_0^\infty \frac{\partial^n\omega}{\partial\zeta^n}\sin\alpha\zeta\,d\zeta = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty \omega\cos\alpha\zeta\,d\zeta = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\alpha^n D_0(\xi\rho).$$

Nous pouvons alors écrire notre solution partielle :

$$\left|\begin{matrix}u_0\\v_0\end{matrix}\right. = (-1)^{\frac{n+1}{2}}(\alpha^n A_1 - i\beta^{n+1}B_1)\frac{\partial}{\partial\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.}\frac{\partial^m}{\partial x^m}D_0(\xi\rho),$$

$$\frac{1}{\mu}(p_{zz})_0 = (-1)^{\frac{n+1}{2}}[(2\xi^2-k^2)\alpha^n A_1 - i\beta^{n+1}\xi^2 B_1]\frac{\partial^m}{\partial x^m}D_0(\xi\rho).$$

---

[1] Évidemment convergentes.

De même, en prenant :

$$\begin{cases} M(\zeta) = -iA\cos\alpha\zeta, \\ N(\zeta) = B\sin\beta\zeta, \end{cases}$$

nous aurons :

$$w_0 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} (i\alpha^{n+1}A_1 + \xi^2\beta^n B_1) \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_0(\xi\rho),$$

$$\frac{1}{\mu}\left(p_{z \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.}\right)_0 = (-1)^{\frac{n+1}{2}} [2i\alpha^{n+1}A_1 + (2\xi^2 - k^2)\beta^n B_1] \frac{\partial}{\partial \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right.} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_0(\xi\rho).$$

On voit que *les dérivations par rapport à z ne jouent aucun rôle.* Il suffit de poser :

$$\begin{cases} A = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \alpha^n A_1, \\ B = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \beta^n B_1 \end{cases}$$

pour voir disparaître n. Ce résultat peut paraître évident. En réalité il n'est vrai que *pour les valeurs superficielles.*

On démontre comme précédemment qu'il existe une solution des équations du mouvement correspondant à l'ensemble des valeurs superficielles trouvées. Elle correspond aux potentiels :

$$\Phi = -Ae^{-i\alpha z} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_0(\xi\rho),$$

$$\chi = -Be^{-i\beta z} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_0(\xi\rho).$$

L'équation de Rayleigh est la même que dans le cas symétrique. Tout ce que nous avons dit des ondes propres s'étend sans difficultés.

13| Si l'on veut avoir, au lieu des ondes que nous venons d'obtenir, des ondes périodiques en azimut, il suffit de se rendre compte que $S_p = D_p(\xi\rho)\cos p\theta$, θ étant l'azimut, est une fonction linéaire des solutions de la forme : $\frac{\partial^m}{\partial x^m} D_0(\xi\rho)$, avec $m \leqslant p$. Le fait est presque évident, mais on peut obtenir l'expression explicite de cette fonction linéaire :

Si on cherche d'abord $\frac{\partial S_p}{\partial x}$, on obtient aisément :

$$\frac{2}{\xi}\frac{\partial S_p}{\partial x} = S_{p-1} - S_{p+1} \qquad \text{pour} \quad p \neq 0$$

et :

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial S_0}{\partial x} = -S_1 \qquad [S_0 = D_0(\xi\rho)].$$

Ces relations expriment que S_p *est une fonction hémicylindrique* (¹) *de* ξx. Cette simple remarque permet d'écrire :

Pour n pair,

$$S_n = D_0(\xi\rho) + \frac{n^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}D_0(\xi\rho) + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}D_0(\xi\rho) + \ldots.$$

Pour n impair,

$$S_n = -\frac{n}{1!}\frac{\partial}{\partial x}D_0(\xi\rho) - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}D_0(\xi\rho) - \ldots.$$

La remarque précédente est susceptible d'autres applications. Par exemple, la formule d'addition des fonctions hémicylindriques donnerait immédiatement la formule de Graf (²) (généralisation du théorème d'addition de Neumann). Cette formule est ainsi rattachée à une théorie générale.

Remarque sur le Mémoire de Lamb.

Nous avons montré que les ondes correspondant aux racines de l'équation des fréquences propres autres que celle de Rayleigh ne pouvaient intervenir dans la solution des problèmes à foyer sismique ponctuel. La traduction mathématique de ce fait passe inaperçue dans le Mémoire de Lamb (et dans le Mémoire correspondant de K. Sezawa et G. Nishimura). L'auteur emploie, pour transformer l'expression des déplacements, des intégrales telles que :

$$\int \Phi(\zeta)\,d\zeta = \int \frac{\zeta(2\zeta^2-k^2)-2HK}{(2\zeta^2-k^2)^2-4HK\zeta^2}\,e^{i\zeta r}\,d\zeta,$$

avec (³) $H^2 = \zeta^2 - h^2$, $K^2 = \zeta^2 - k^2$.

Le dénominateur est alors, pour $\zeta = \xi$ réel, $F(\xi)$ ou $f(\xi)$ suivant les cas. *Lamb ne prend le résidu de l'intégrale que pour la racine de Rayleigh.*

(¹) Sonine, *Math. Ann.*, XVI, 1880, ou Watson, *loc. cit.*, § 10-8, p. 353.

(²) Cf. Watson, *loc. cit.*, § 11.3, p. 359.

(³) Lamb (66), § 7, p. 13. La notation H, K est employée par Lamb dans un autre sens, mais la confusion est impossible. Nous évitons la notation α, β réservée à ζ réel.

Il est assez facile de rendre son raisonnement rigoureux, et de montrer, dans le cas des figures (1) et (2) de Lamb, que c'est bien le seul pôle à considérer, dans le cas de la figure (3), qu'il peut s'introduire un terme accessoire, mais que celui-ci peut être négligé parce qu'on ne cherche qu'une expression asymptotique.

Nous traiterons le cas de la figure (1), pour exemple. Il faut d'abord préciser les déterminations de H et K dans $\Phi(\zeta)$. Posons :

$$H = m + im', \qquad K = n + in', \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

On a, pour H par exemple :

$$\left\{ \begin{aligned} m^2 - m'^2 &= \xi^2 - \eta^2 - h^2, \\ mm' &= \xi\eta. \end{aligned} \right.$$

Si η ne s'annule pas, m' *ne peut s'annuler*. Car on aurait $\xi = 0$ puis $m^2 = -\eta^2 - h^2$, ce qui est absurde. Or, si on suppose les racines autres que celles de Rayleigh imaginaires, on peut supposer le contour entier tel que η soit positif [1]. Le signe de m' permettra alors de séparer nettement les deux déterminations de H ; et de même pour K le signe de n'. Le cas contraire, où l'équation de Rayleigh a trois racines réelles, se traiterait directement sans difficultés.

Dans le cas de la figure (1), on devra prendre dans Φ les déterminations de H et K correspondant à $m' > 0$, $n' > 0$, puisque pour η tendant vers zéro et ξ vers $+\infty$, $m = \frac{\xi\eta}{m'}$ doit rester positif [2].

Il nous faut maintenant distinguer entre les racines de $(2\zeta^2 - k^2)^2 - 4HK\zeta^2$ et celles de $(2\zeta^2 - k^2)^2 + 4HK\zeta^2$, les premières convenant seules. On peut le faire en remarquant que la partie imaginaire de HK, soit :

$$mn' + m'n = \left(\frac{m'}{n'} + \frac{n'}{m'}\right)\xi\eta$$

a le signe de ξ. Une racine $\zeta = \xi + i\eta$ conviendra si la partie imaginaire de $\frac{(2\zeta^2 - k^2)^2}{4\zeta^2} = HK$ a le signe de ξ.

Posons : $\frac{\zeta^2}{k^2} = p + iq$. Cette partie imaginaire est : $\frac{4(p^2+q^2) - 1}{4(p^2+q^2)}\, q$. Admettons un instant l'inégalité :

$$4(p^2 + q^2) < 1.$$

---

(1) Tel qu'il est tracé par Lamb, on a $\eta \geqslant 0$. Mais on peut évidemment rester infiniment peu au-dessus de l'axe réel.

(2) Cf. note *, p. 14, du Mémoire de Lamb.

Alors $q = \frac{2\xi\eta}{k^2}$ a le signe de ξ, la partie imaginaire cherchée a le signe de $-\xi$, et les racines ne conviennent pas.

Pour montrer que l'on a bien : $4(p^2 + q^2) < 1$ pour une racine imaginaire de l'équation de Rayleigh $\left(\text{considérée toujours comme équation en } \frac{\zeta^2}{k^2}\right)$, appelons θ la racine réelle. Les relations entre coefficients et racines permettent d'obtenir l'expression :

$$p^2 + q^2 = \frac{\theta(\theta - 1)}{8\theta^2 - 8\theta + 1}.$$

Ceci est inférieur à $\frac{\theta(\theta - 1)}{8\theta(\theta - 1)} = \frac{1}{8}$, *a fortiori* à $\frac{1}{4}$. Le raisonnement est ainsi complet.

DEUXIÈME PARTIE

La fonction ψ.

1] Nous allons étudier maintenant la fonction ψ que nous avons introduite dans la première partie, en donner de nouvelles expressions. Nous généraliserons ensuite cette fonction, et nous donnerons quelques applications des fonctions ainsi généralisées.

Dans toute la suite, nous nous bornerons au domaine réel, c'est-à-dire à z réel et $\rho > 0$. L'extension aux variables complexes nécessiterait d'assez grandes précautions, et n'est pas essentielle pour les applications.

2] Nous rattacherons d'abord ψ aux solutions élémentaires de Lamb, savoir $e^{-\alpha z} J_0(\xi\rho)$, où $\alpha^2 = \xi^2 - h^2$. Il semblerait qu'il suffise pour cela d'intégrer par rapport à α la formule fondamentale(¹) de Lamb :

$$\frac{e^{-ihR}}{R} = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z} J_0(\xi\rho)}{\alpha} \xi d\xi,$$

mais il serait difficile de rendre cette méthode parfaitement rigoureuse. Nous opérerons directement.

Rappelons qu'une intégrale de l'équation $(\nabla^2 + h^2)\Phi = 0$, régulière pour $z > 0$, et possédant la symétrie axiale, est déterminée(²) par ses valeurs sur un segment quelconque de oz (situé dans la région positive). Il suffit alors d'obtenir la valeur de $\psi(0, hz)$ sous forme d'intégrale portant sur $e^{-\alpha z}$.

Or, si l'on suppose $z > 0$, on a :

$$\psi(0, hz) = \int_z^\infty \frac{e^{-ih\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_h^\infty \frac{e^{-i\zeta z}}{\zeta} d\zeta. \tag{1}$$

Posons $\alpha = i\zeta$. Il vient :

$$\psi = \int_{hi}^{\infty i} \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} d\alpha.$$

(¹) Formule (18), p. 5. Cette formule joue un grand rôle dans beaucoup de questions de Physique Mathématique.

(²) Pour le cas des fonctions harmoniques, cf. Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 498. L'extension naturelle au cas de h quelconque est donnée par Lamb, § 2, p. 4.

Intégrons alors le long du contour indiqué ci-dessous (*fig. 1*) du plan α.

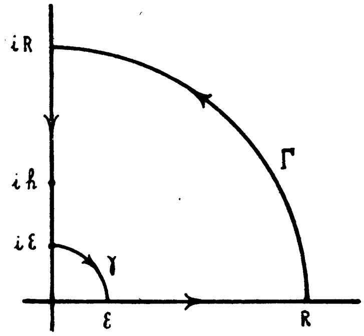

FIG. 1.

Il vient :

$$\int_{ih}^{iR} = \int_{ih}^{i\varepsilon} + \int_{\gamma} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{\Gamma},$$

γ et Γ étant des quarts de cercle de centre origine, de rayons ε et R. Si R augmente indéfiniment, l'intégrale le long de Γ tend vers zéro(1). Si ε tend vers zéro, l'intégrale le long du quart de cercle γ tend vers $-\frac{i\pi}{2}$, $\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}$ étant équivalent à $\frac{1}{\alpha}$. On peut enfin écrire :

$$\lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_{ih}^{i\varepsilon}\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}d\alpha + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}d\alpha\right\} = \mathfrak{L}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha z}}{\xi^2-h^2}\xi d\xi,$$

le signe $\mathfrak{L}$ représentant la partie principale de l'intégrale au sens de Cauchy, et ξ étant défini par $\xi^2 = \alpha^2 + h^2$, avec les conventions de Lamb pour le signe.

On a donc :

$$\psi(0, hz) = \mathfrak{L}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha z}}{\xi^2-h^2}\xi d\xi - \frac{i\pi}{2},$$

et par conséquent :

$$\psi(h\rho, hz) = \mathfrak{L}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha z}}{\xi^2-h^2}J_0(\xi\rho)\xi d\xi - \frac{i\pi}{2}J_0(h\rho). \tag{2}$$

3] La transformation (1) supposant essentiellement $z > 0$, la formule reste à démontrer pour $z = 0$, qui constitue d'ailleurs le cas le plus important. La convergence n'étant pas uniforme, nous l'étudierons directement(2).

(1) En vertu du « lemme de Jordan » appliqué au quart de cercle.
(2) Lamb n'examine jamais ce point essentiel.

Nous avons vu que :

$$\psi(h\rho, 0) = -D_0(h\rho) = -\frac{\pi}{2} Y_0(h\rho) - \frac{i\pi}{2} J_0(h\rho).$$

Il faut donc démontrer que :

$$-\frac{\pi}{2} Y_0(h\rho) = \mathfrak{L} \int_0^\infty \frac{J_0(\xi\rho)}{\xi^2 - h^2} \xi d\xi.$$

Calculons l'intégrale $\int \frac{H_0^{(1)}(\xi\rho)}{\xi^2 - h^2} \xi d\xi$, prise le long du contour ci-dessous (*fig.* 2) du plan ξ, comprenant un quart de cercle Γ de rayon R, et des arcs de cercle γ, γ_1 de rayons ε, ε_1 destinés à éviter les points singuliers o et h. Nous faisons tendre R vers ∞, ε et ε_1 vers zéro. Comme $H_0^{(1)}(z)$ est asymptotiquement équivalent à $\frac{e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi z}}$, l'intégrale le long de Γ tendra vers zéro.

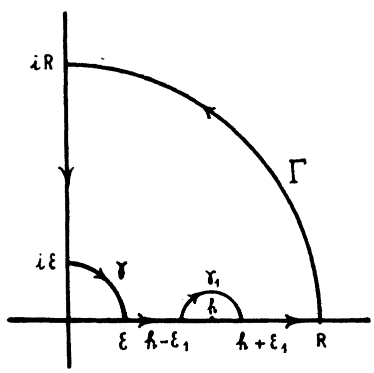

FIG. 2.

Sur l'axe imaginaire, on peut utiliser la notation de Basset :

$$K_0(z) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(iz).$$

Il vient ainsi :

$$\mathfrak{L} \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(\xi\rho)}{\xi^2 - h^2} \xi d\xi = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(h\rho) + \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta K_0(\eta\rho)}{\eta^2 + h^2} d\eta.$$

La partie réelle de cette formule fournit la relation cherchée. La partie imaginaire nous donne accessoirement :

$$\mathfrak{L} \int_0^\infty \frac{Y_0(\xi\rho)}{\xi^2 - h^2} \xi d\xi = \frac{\pi}{2} J_0(h\rho) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta K_0(\eta\rho)}{\eta^2 + h^2} d\eta.$$

4] A l'expression de ψ au moyen d'une intégrale, que nous venons d'obtenir, nous ajouterons quelques développements en série. L'idée la plus naturelle consiste à rechercher un développement en fonctions de Bessel de la variable ρ, développement que nous obtiendrons. On peut chercher aussi un développement analogue en R, mais le résultat n'est simple que pour la partie imaginaire de ψ (la plus importante, par suite de la continuité à l'origine), et nous nous y restreindrons. Nous chercherons enfin systématiquement les développements en série de Maclaurin par rapport à ρ, z, R.

5] Pour obtenir des développements en fonctions de Bessel, nous partirons des séries connues[1] :

$$\frac{\sin hr}{r} = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hz_1)}{\sqrt{z_1}} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hz_2)}{\sqrt{z_2}} P_m(\cos\varphi), \tag{3}$$

$$\frac{\cos hr}{r} = \pi \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{-m-\frac{1}{2}}(hz_1)}{\sqrt{z_1}} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hz_2)}{\sqrt{z_2}} P_m(\cos\varphi), \tag{4}$$

avec

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2\cos\varphi}.$$

Si on suppose $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, et φ réel, le premier développement est toujours valable, le second exige qu'on ait $z_2 < z_1$.

Nous prendrons d'abord $\cos\varphi = 0$, et par conséquent :

$$P_{2p+1}(\cos\varphi) = 0, \qquad P_{2p}(\cos\varphi) = (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}.$$

Dans le premier développement nous prendrons $z_1 = \rho$, $z_2 = \zeta$. Dans le second nous prendrons $z_1 = \rho$, $z_2 = \zeta$ pour $0 < \zeta < \rho$; $z_1 = \zeta$, $z_2 = \rho$ pour $\zeta > \rho$. Nous intégrerons alors en ζ, entre les limites 0 et z si $z < \rho$, z et ∞ si $\rho < z$. Nous obtiendrons dans le premier cas, non pas la fonction ψ elle-même, mais la fonction[1] :

$$\bar{\psi}(h\rho, hz) = \int_0^z \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta$$

qui s'y ramène aisément.

---

(1) WATSON, *loc. cit.*, § 11.4 et 11.41, p. 362.

(1) Nous retrouverons la notation $\bar{\psi}$.

Tout ceci suppose $z > 0$, mais la relation :

$$\psi(h\rho, hz) + \psi(h\rho, -hz) = -2D_0(h\rho)$$

ramène au précédent le cas de $z < 0$.

Les coefficients, si on exprime au moyen de l'exponentielle les fonctions de Bessel en ζ, se ramènent à des fonctions bien connues, qui généralisent l'exponentielle-intégrale. Nous poserons, avec Nielsen[1], pour $R(\nu) > 0$:

$$P(x, \nu) = \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1}\, dt, \qquad Q(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\nu-1}\, dt,$$

en sorte que : $$P(x, \nu) + Q(x, \nu) = \Gamma(\nu).$$

Pour $R(\nu) < 0$, $Q(x, \nu)$ a évidemment seul un sens. Nous retrouverons ces fonctions à plusieurs reprises.

Écrivons donc le développement obtenu, en supposant pour fixer les idées $\rho < z$. C'est :

$$\psi(h\rho, hz) = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)} \left(2m + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{2m+\frac{1}{2}}(h\rho)}{\sqrt{h\rho}} F_m(hz),$$

en posant :

$$F_m(hz) = (-1)^m \sqrt{h} \int_z^\infty \left[J_{-2m-\frac{1}{2}}(hz) - i J_{2m+\frac{1}{2}}(hz) \right] \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

ou encore :

$$F_m(hz) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{p=0}^{2m} \frac{(2m+p)!}{2^p p!(2m-p)!} Q(ihz, -p).$$

Cette fonction peut aussi s'exprimer au moyen des seules transcendantes exponentielle et logarithme-intégral.

Si l'on pose :

$$A_s = \sum_{p=s}^{2m} \left(-\frac{1}{2}\right)^p \frac{(2m+p)!}{(p!)^2(2m-p)!},$$

on parvient à l'écrire :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} F_m(hz) = A_0 li(e^{-ihz}) - e^{-ihz} \sum_{s=1}^{2m} A_s \frac{i^s(s-1)!}{(hz)^s}.$$

(1) Niels Nielsen. Theorie der Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, Teubner, Leipzig, 1906. Nous y renvoyons pour le sens à donner à ces expressions quand x est complexe.

L'intégration terme à terme des séries (3) et (4), avec une limite infinie, demande à vrai dire une justification. Nous en exposerons la méthode au paragraphe suivant, à propos du développement en R de la partie imaginaire de ψ.

6] Dans la série (3) nous supposerons maintenant que φ représente la colatitude du point ρ, z; on a donc $0 < \varphi < \pi$. Nous prendrons ensuite $z_1 = R$ et $z_2 = \zeta$, et nous intégrerons de *zéro* à $+\infty$. On peut écrire en effet :

$$\psi = \int_0^\infty \frac{e^{-ih\sqrt{R^2 - 2R\zeta_1\cos\varphi + \zeta_1^2}}}{\sqrt{R^2 - 2R\zeta_1\cos\varphi + \zeta_1^2}} d\zeta_1 .$$

Justifions ceci. La série (3) converge uniformément dans tout domaine borné du plan de la variable z_2(¹). Nous pouvons donc intégrer de 0 à M quelconque. Je dis qu'on peut faire augmenter M indéfiniment. Le terme général de la série intégrée est en effet :

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hR)}{\sqrt{R}}\left\{\int_0^M \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(h\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta\right\} P_m(\cos\varphi).$$

La série $\left|\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hR)}{\sqrt{R}}\right|$ converge; on sait aussi que $|P_m(\cos\varphi)| < 1$.

Il suffit donc pour assurer l'uniformité de convergence de borner l'intégrale par un nombre indépendant de m et M.

Partons pour cela de la formule (²) :

$$J_{m+\frac{1}{2}}(z) = (-i)^m \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{izt} P_m(t)\, dt .$$

Il vient :

$$\int_0^M \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(h\zeta)}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = (-i)^m \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \int_0^M d\zeta \int_{-1}^{+1} e^{ih\zeta t} P_m(t)\, dt$$

$$= (-i)^m \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \int_{-1}^{+1} P_m(t)\, dt \int_0^M e^{ih\zeta t} d\zeta = (-i)^m \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \int_{-1}^{+1} P_m(t) \left\{\frac{e^{iMht} - 1}{t}\right\} dt .$$

(¹) WATSON, *loc. cit.* Pour z fixe et ν très grand, rappelons que $J_\nu(z)$ est équivalent à $\dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}$.

(²) WATSON, *loc. cit.* (2), § 3.32, p. 50.

Cette transformation peut paraître artificielle. Mais elle peut être rattachée à des formules très générales [1]. La limitation cherchée en résulte aisément :

Si m est pair, on a :

$$\int_{-1}^{+1} P_m(t)\frac{e^{iMht}-1}{t}\,dt = 2\int_0^1 P_m(t)\frac{\sin Mht}{t}\,dt = 2P_m(t_0)\int_0^1 \frac{\sin Mht}{t}\,dt,$$

$$\text{avec} \quad 0 < t_0 < 1;$$

or dans ces conditions [2]

$$|P_m(t_0)| < 1, \quad \text{et} \quad \left|\int_0^1 \frac{\sin Mht}{t}\,dt\right| < \pi.$$

Si m est impair, on a :

$$\left|\int_{-1}^{+1} P_m(t)\frac{e^{iMht}-1}{t}\,dt\right| = \left|\int_{-1}^{+1} P_m(t)\frac{\cos Mht - 1}{t}\,dt\right|$$

$$= \left|2\int_{-1}^{+1} P_m(t)\frac{\sin^2\dfrac{Mht}{2}}{t}\,dt\right| < 2\left|\int_{-1}^{+1} P_m(t)\frac{\sin\dfrac{1}{2}Mht}{t}\,dt\right|,$$

et on est ainsi ramené au cas précédent.

C'est là la seule difficulté. On connaît la formule [3] :

$$\int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\,d\zeta = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+1\right)}.$$

Elle conduit immédiatement au résultat cherché :

$$-\mathfrak{J}\psi = \pi\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+1\right)} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(hR)}{\sqrt{R}} P_m(\cos\varphi).$$

La méthode exposée pour la limitation de l'intégrale, appliquée séparément aux parties réelle et imaginaire de l'intégrale correspondante du paragraphe précédent, apporte la justification qui manquait.

---

(1) Voir à ce sujet : « Expression des fonctions de Lommel au moyen des fonctions de Legendre », note à paraître en décembre 1930 au *Bull. des Sc. math.*

(2) Ce sont des propriétés connues des polynômes de Legendre et du sinus-intégral. Pour la seconde, cf. LOMMEL, *Math. Ann.*, XVI (1880), p. 207.

(3) WATSON, *loc. cit.*, § 13.24, p. 391.

7] Passons aux développements de Maclaurin de la fonction ψ. Exprimons d'abord celle-ci en fonction de R et ρ, soit :

$$\psi(h\rho, hz) = \int_{R}^{\infty} \frac{e^{-ihr}\, dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

On voit aisément que ψ est une fonction analytique de ρ pourvu que $\rho < R$, ce qui est vérifié partout sauf pour l'axe des ρ, qui est une ligne singulière ([1]). On peut alors obtenir les coefficients de la série de Maclaurin en dérivant sous le signe $\int$, ou, ce qui revient au même, à l'aide du développement du binôme :

$$\psi = \int_{R}^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr = \int_{R}^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)\frac{\rho^{2p}}{r^{2p}} dr$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)} \rho^{2p} \times \int_{R}^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r^{2p+1}} dr,$$

ou :

$$\psi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} (h\rho)^{2p} Q(ihR, -2p).$$

Comme précédemment, la fonction Q employée pourrait être exprimée au moyen du seul logarithme-intégral.

8] Revenons aux variables ρ et z. Nous supposons $z > 0$.

Cherchons alors le développement en z de ψ. On a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{e^{-ihR}}{R},$$

et cette fonction est développable en z pour $|z| < \rho$.

Cherchons ce développement. Il faut obtenir les dérivées paires de $\omega = \dfrac{e^{-ih\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$, prises pour $z = 0$.

Au lieu de répéter l'opération $\dfrac{\partial}{\partial z}$, répétons d'abord l'opération $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$. On a ([2]) :

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{K} \omega = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)^{K} \omega = (-1)^{K} \frac{h^{K}}{R^{K}} \frac{e^{-ihR}}{R} \sum_{p=0}^{K} \frac{(-i)^{p-K}(K+p)!}{p!(K-p)!(2hR)^p}.$$

([1]) Pour ces coordonnées.

([2]) Voir si l'on veut : WATSON, *loc. cit.*, § 3.4, p. 54.

Il faut passer de là à l'expression des dérivées. On a :

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = z\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\omega,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\omega + z^2\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\omega,$$

et de façon générale [1] :

$$\frac{\partial^{2K}\omega}{\partial z^{2K}} = a_0^K\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^K\omega + \dots + a_p^K z^{2p}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{K+p}\omega + \dots + z^{2K}\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{2K}\omega.$$

Il n'est pas indispensable de calculer tous les coefficients, puisque, pour $z = 0$ il reste seulement :

$$\frac{\partial^{2K}\omega}{\partial z^{2K}} = a_0^K\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^K\omega.$$

Pour avoir a_0^K, substituons à ω la fonction $e^{\frac{1}{2}z^2}$. On a pour $z = 0$:

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^K e^{\frac{1}{2}z^2} = e^{\frac{1}{2}z^2} = 1;$$

et le développement de Maclaurin fournit les dérivées :

$$\left[\frac{\partial^{2K}}{\partial z^{2K}} e^{\frac{1}{2}z^2}\right]_{z=0} = \frac{(2K)!}{2^K.K!}.$$

On en déduit :

$$a_0^K = \frac{(2K)!}{2^K.K!} = 1.3.5\dots(2K-1).$$

Finalement, comme R se réduit à ρ pour $z = 0$, nous obtenons pour les coefficients du développement de $\frac{\partial\psi}{\partial z}$:

$$\left[\frac{\partial^{2K}\omega}{\partial z^{2K}}\right]_{z=0} = \frac{(-1)^K(2K)!}{2^K.K!}\frac{h^K}{\rho^K}\frac{e^{-ih\rho}}{\rho}C_K\left(\frac{1}{h\rho}\right)$$

$C_K(u)$ étant un polynôme en u de degré k, soit :

$$C_K(u) = \sum_{p=0}^{K}\frac{(-i)^{p-K}(K+p)!}{p!(K-p)!}\left(\frac{u}{2}\right)^p.$$

---

[1] La formule se vérifie aisément en dérivant deux fois.

Pour avoir le développement de ψ, rappelons-nous que

$$\psi(h\rho, 0) = -D_0(h\rho),$$

et intégrons le développement déjà obtenu. Il vient :

$$\psi(h\rho, hz) = -D_0(h\rho) - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K+1)\,2^K K!} \frac{h^K z^{2K+1}}{\rho^K} \frac{e^{-ih\rho}}{\rho} C_K\left(\frac{1}{h\rho}\right).$$

9] Donnons enfin le développement de ψ en série de puissances de ρ, qui sera naturellement convergent pour $|z| > \rho$.

On a(¹) :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \int_z^{\infty} \frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ihr}}{r}\right) d\zeta = \rho \int_z^{\infty} \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{e^{-ihr}}{r}\right) d\zeta.$$

D'où, en intégrant par parties sous la dernière forme :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{1}{z}\frac{e^{-ihR}}{R} + \int_z^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r}\frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

La formule générale correspondante, soit :

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^K \psi = -\sum_{p=0}^{K-1} \frac{2p-1}{z^{2p+1}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{K-p-1} \frac{e^{-ihr}}{r} + (2K-1)\int_z^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r}\frac{d\zeta}{\zeta^{2K}},$$

s'obtient par récurrence à l'aide de la relation :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_z^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r}\frac{d\zeta}{\zeta^{K-1}} = -\frac{1}{z^K}\frac{e^{-ihR}}{R} + \int_z^{\infty} \frac{e^{-ihr}}{r}\frac{d\zeta}{\zeta^{K+1}}.$$

L'intégrale qui figure au second membre de la formule générale se réduit, pour $\rho = 0$, à $(-1)^K h^{2K} Q(ihz, -2K)$.

Nous avons obtenu au paragraphe précédent l'expression :

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^K \frac{e^{-ihr}}{r} = (-1)^K \frac{h^K}{R^K}\frac{e^{-ihR}}{R} C_K\left(\frac{1}{hR}\right).$$

(¹) $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ comme précédemment.

Enfin nous avons vu qu'on passait de $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{K}$ à $\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{2K}$, pris pour $\rho = 0$, en multipliant par $\frac{(2K)!}{2^{K}.K!}$.

Tout ceci nous permet d'écrire le développement cherché, qui est évidemment pair, sous la forme :

$$\psi(h\rho, hz) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^{K}(h\rho)^{2K}}{2^{K}.K!} \left\{ (2K-1)\,Q(ihz, -2K) - \sum_{p=0}^{K-1} (-1)^{p+1}(2p-1)\frac{e^{-ihz}}{(hz)^{K+p+1}} \right\}.$$

Nous bornerons là les développements de ψ. Tous ceux que nous avons donnés ne renferment que des fonctions aisément calculables. Il serait facile d'en donner d'autres, mais en nous affranchissant de cette condition. Nous passons alors aux généralisations annoncées.

TROISIÈME PARTIE

Les fonctions ψ_n.

1] Le problème qui consiste à trouver, par analogie avec la propriété fondamentale de la fonction ψ, une intégrale de l'équation : $(\nabla^2 + h^2)\Phi = 0$ de la forme $\psi_n(h\rho, hz)e^{in\theta}$, n étant réel ou complexe quelconque, θ étant l'azimut, et telle que l'on ait :

$$\psi_n(h\rho, 0) = -D_n(h\rho),$$

est évidemment indéterminé; mais il existe une généralisation naturelle de la fonction ψ. Elle apparaîtra plus naturelle encore si nous passons en coordonnées paraboliques.

Posons [1] :

$$\begin{cases} u = R + z, \\ v = R - z. \end{cases}$$

Les coordonnées paraboliques ainsi introduites sont les carrés de celles qui résultent d'une représentation conforme. Nous supposons toujours $\rho > 0$ et $z \geqslant 0$. [L'extension à $z < 0$, qui achèvera de définir notre fonction ψ_n dans l'espace réel, se fera à l'aide de la formule :

$$\psi_n(h\rho, -hz) + \psi_n(h\rho, hz) = -2D_n(h\rho)]. \tag{1}$$

Dans ces conditions, nous aurons $u \geqslant v > 0$. Remarquons enfin la relation $uv = \rho^2$.

Le changement de variable $t = r - \zeta$ dans l'expression de définition de ψ, soit :

$$\psi = \int_z^\infty \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta,$$

nous donne :

$$\psi = \int_0^v \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{uv}{t}\right)\right] dt,$$

---

(1) Il ne peut y avoir de confusion avec la notation employée pour les déplacements dans la première partie.

(en adoptant la notation commode $e^x = \exp x$), ou encore, en changeant t en $\frac{uv}{t}$:

$$\psi = \int_u^\infty \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{uv}{t}\right)\right] dt.$$

Remarquons en passant la formule importante (¹) :

$$-D_0(h\rho) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{\rho^2}{t}\right)\right] dt,$$

qu'on obtient pour $z = 0$, $u = v = \rho$.

Posons maintenant : $t = \lambda\rho i$. On déduit des expressions précédentes la formule :

$$\psi(h\rho, hz) = \frac{1}{2}\left\{\int_{0\exp-\frac{\pi}{2}i}^{-i\sqrt{\frac{v}{u}}} + \int_{-i\sqrt{\frac{u}{v}}}^{\infty\exp-\frac{\pi}{2}i}\right\}\exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Le cas particulier $u = v$ donne une formule connue (²), qui s'étend aux fonctions de Bessel d'ordre n quelconque en remplaçant l'élément différentiel $\frac{d\lambda}{\lambda}$ par $\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}$ (³), et en modifiant le chemin d'intégration de façon à conserver la convergence.

Nous ferons de même ici, en posant :

$$\psi_n(h\rho, hz) = \frac{1}{2}\left\{\int_A + \int_B\right\}\exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}},$$

le chemin A partant de l'origine, tangentiellement à la partie positive de l'axe réel, pour aboutir au point $-i\sqrt{\frac{v}{u}}$; le chemin B partant du point $-i\sqrt{\frac{u}{v}}$ pour s'éloigner à l'infini asymptotiquement à la partie négative de l'axe réel (⁴) (*fig. 3*).

(¹) Sonine, *Math. Ann.*, XVI, p. 12, Formule (43).

(²) Watson, *loc. cit.*, § 6.21, Formule 7, p. 179. Cette formule 7 est encore valable pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$ dans le cas particulier envisagé ($\nu = 0$, $z > 0$).

(³) Ici, et dans tout ce qui suit, nous adoptons la convention ordinaire : z^n, où n est complexe, signifie $\exp(n \log z)$, en donnant à $\log z$ sa valeur principale, qui correspond à $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

(⁴) Il est facile de généraliser : Cf. Watson, § 6.21, p. 179.

La condition $\psi_n(h\rho, o) = -D_n(h\rho)$ est ainsi remplie, ainsi que la condition $\psi_0 = \psi$.

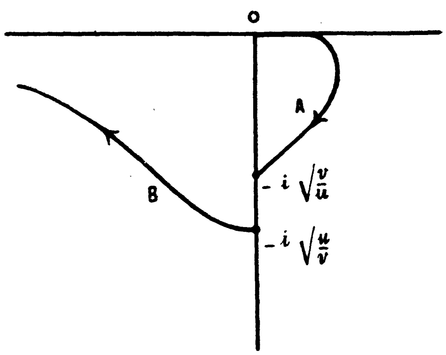

Fig. 3.

Si l'on suppose que les chemins A et B se déduisent l'un de l'autre par l'inversion suivie de symétrie $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$, et qu'on fasse cette transformation dans l'intégrale, on voit d'abord que :

$$\psi_{-n}(h\rho, hz) = e^{-ni\pi}\psi_n(h\rho, hz),$$

ce qui généralise la relation connue pour D_n. On peut ensuite exprimer ψ_n par une intégrale unique, le long du chemin A par exemple, ce qui donne :

$$\psi_n = \frac{1}{2}\int_A \left[\frac{1}{\lambda^n} + e^{-ni\pi}\lambda^n\right] \exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

En prenant pour A le segment d'axe réel de o à $\sqrt{\frac{v}{u}}$, suivi d'un quart de cercle de centre origine, on obtient une expression explicite relativement simple de ψ_n, savoir :

$$\psi_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{v}{\rho}} \left[\frac{1}{\lambda^n} + e^{-ni\pi}\lambda^n\right] \exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$- \frac{i e^{ni\frac{\pi}{2}}}{2\rho^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [u^n e^{in\varphi} + v^n e^{-in\varphi}] \exp\left[-\frac{ih}{2}(ue^{-i\varphi} + ve^{i\varphi})\right] d\varphi.$$

L'expression de D_n qui s'en déduit en faisant $u = v = \rho$ est naturellement équivalente à la généralisation obtenue par Schläfli pour l'intégrale de Bessel.

2] Revenons au chemin d'intégration qui nous a servi à définir ψ_n. On peut le compléter par le segment $-i\sqrt{\frac{v}{u}}, -i\sqrt{\frac{u}{v}}$, de façon à obtenir $-D_n(h\rho)$. Dans l'intégrale prise sur le segment, on peut revenir à l'axe réel; on obtient ainsi, en coordonnées paraboliques :

$$\psi_n(hu, hv) = -D_n\left(h\sqrt{uv}\right) - \frac{1}{2}(-uv)^{\frac{n}{2}} \int_v^u \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{uv}{t}\right)\right] \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Cette expression va nous permettre de montrer que $\Phi = \psi_n e^{in\theta}$ satisfait bien à l'équation :

$$(\nabla^2 + h^2)\Phi = 0. \tag{2}$$

Cette équation devient, avec les coordonnées choisies :

$$u\frac{\partial^2\psi_n}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2\psi_n}{\partial v^2} + \frac{\partial\psi_n}{\partial u} + \frac{\partial\psi_n}{\partial v} + \frac{u+v}{4}\left(h^2 - \frac{n^2}{uv}\right)\psi_n = 0.$$

$D_n\left(h\sqrt{uv}\right)$ y satisfait évidemment. Le second terme de l'expression de ψ_n y satisfera si la fonction :

$$\Phi_n = \int_v^u \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{uv}{t}\right)\right] \frac{dt}{t^{n+1}}$$

satisfait à l'équation transformée en $(-uv)^{-\frac{n}{2}}\psi_n$, qui est :

$$u\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial v^2} + (n+1)\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial u} + \frac{\partial\Phi_n}{\partial v}\right) + \frac{u+v}{4}h^2\Phi_n = 0.$$

Cette dernière vérification est aisée, si l'on se sert des relations de récurrence :

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial u} = \frac{1}{u^{n+1}} e^{-\frac{ih}{2}(u+v)} - \frac{ih}{2} v\Phi_{n+1},$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial v} = -\frac{1}{v^{n+1}} e^{-\frac{ih}{2}(u+v)} - \frac{ih}{2} u\Phi_{n+1},$$

$$n\Phi_n = -\frac{ih}{2}[\Phi_{n-1} - uv\Phi_{n+1}] - \left(\frac{1}{u^n} - \frac{1}{v^n}\right) e^{-\frac{ih}{2}(u+v)}.$$

La dernière de ces relations s'obtient par une intégration par parties, qui est valable seulement pour $n \neq 0$. Mais, pour $n = 0$, la relation se réduit à : $\Phi_{-1} = uv\Phi_1$, et sous cette forme sa démonstration est immédiate.

Ainsi nous avons bien en ψ_n une intégrale de l'équation (2). Nous obtenons du même coup les relations de récurrence entre les fonctions ψ_n. Ce sont :

$$2\frac{\partial\psi_n}{\partial u} = \frac{hv}{2\rho}(\psi_{n-1} - \psi_{n+1}) - e^{ni\frac{\pi}{2}}\frac{u^n + v^n}{2u\rho^n}e^{-\frac{ih}{2}(u+v)},$$

$$2\frac{\partial\psi_n}{\partial v} = \frac{hu}{2\rho}(\psi_{n-1} - \psi_{n+1}) + e^{ni\frac{\pi}{2}}\frac{u^n + v^n}{2v\rho^n}e^{-\frac{ih}{2}(u+v)},$$

$$\frac{n}{\rho}\psi_n = \frac{h}{2}(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) - e^{ni\frac{\pi}{2}}\frac{u^n - v^n}{2\rho^{n+1}}e^{-\frac{ih}{2}(u+v)}.$$

3] Revenons maintenant aux coordonnées cylindriques. La fonction Φ_n prendra l'une des formes :

$$\Phi_n = \int_{R-z}^{R+z}\exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{\rho^2}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^{n+1}} = \int_{-z}^{+z}\frac{e^{-ihr}}{r}\frac{d\zeta}{(r-\zeta)^n}$$
$$= \frac{1}{\rho^{2n}}\int_{-z}^{+z}\frac{e^{-ihr}}{r}(r+\zeta)^n d\zeta = \frac{1}{\rho^{2n}}\int_0^z\frac{e^{-ihr}}{r}[(r+\zeta)^n + (r-\zeta)^n]\,d\zeta.$$

Quant à ψ_n, on pourra l'écrire :

(3) $$\psi_n(h\rho, hz) = -\overline{\psi_n}(h\rho, hz) - D_n(h\rho),$$

en posant :

$$\overline{\psi_n}(h\rho, hz) = e^{ni\frac{\pi}{2}}\int_0^z\frac{e^{-ihr}}{r}\frac{(r+\zeta)^n + (r-\zeta)^n}{2\rho^n}d\zeta.$$

Ce n'est que pour $-1 < R(n) < +1$ qu'on pourrait exprimer ψ_n par la même intégrale, prise entre les limites z et ∞, comme dans la définition de ψ_0. Dans ce cas seulement ψ_n tend vers zéro lorsque z augmente indéfiniment.

Posons : $z = \rho sh\mu$. On peut écrire :

(4) $$\overline{\psi_n}(h\rho, h\rho sh\mu) = e^{ni\frac{\pi}{2}}\int_0^\mu e^{-ih\rho ch\mu}ch\,n\mu\,d\mu;$$

et on reconnaît la généralisation d'une des représentations de $D_n(h\rho)$. Pour $-1 < R(n) < 1$, cette représentation s'obtient simplement en faisant augmenter μ indéfiniment [1].

---

[1] WATSON, *loc. cit.*, § 6.21, Formule 11, p. 180.

En coordonnées cylindriques, les relations de récurrence deviennent :

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_n}{\partial z} &= -e^{ni\frac{\pi}{2}} \frac{(R+z)^n + (R-z)^n}{2R\rho^n} e^{-ihR}, \\
\frac{\partial \psi_n}{\partial \rho} &= \frac{h}{2}(\psi_{n-1} - \psi_{n+1}) + e^{ni\frac{\pi}{2}} \frac{(R+z)^n + (R-z)^n}{2\rho^{n+1}} \frac{z}{R} e^{-ihR}, \\
\frac{n}{\rho}\psi_n &= \frac{h}{2}(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) - e^{ni\frac{\pi}{2}} \frac{(R+z)^n - (R-z)^n}{2\rho^{n+1}} e^{-ihR}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $z = 0$, on retrouve naturellement les relations de récurrence des fonctions de Bessel.

Dans les formules (3) et (5), si nous faisons maintenant $z < 0$, il est clair que nous satisfaisons à la condition (1). Et la restriction $z \geqslant 0$ peut ainsi être levée.

Pour la comparaison entre cette généralisation des fonctions de Bessel, et celle fournie par les fonctions de Bessel de deux variables étudiées par Weierstrass, Appell, Pérès, etc., rappelons que ces dernières admettent comme relations de récurrence :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J_n}{\partial u} &= \frac{1}{2}[J_{n-1} - J_{n+1}], \\
\frac{\partial J_n}{\partial v} &= \frac{1}{2}[J_{n-2} - J_{n+2}], \\
n J_n &= \frac{1}{2}[u(J_{n-1} + J_{n+1}) + 2v(J_{n-2} + J_{n+2})].
\end{aligned}
$$

4] Revenons à la définition de ψ_n. On peut écrire :

$$
\psi_n = -D_n(h\rho) - \frac{1}{2}\int_{-i\sqrt{\frac{v}{u}}}^{-i\sqrt{\frac{u}{v}}} \exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}.
$$

Supposons $\frac{u}{v}$ constant, c'est-à-dire déplaçons-nous sur une droite passant par l'origine. Je dis que ψ_n *est alors une fonction hémicylindrique de* $h\rho$. Elle satisfait tout d'abord à la condition :

$$
\psi_{n-1} - \psi_{n+1} = \frac{2}{h}\frac{\partial \psi_n}{\partial \rho}.
$$

On peut montrer en effet (¹) qu'il en est ainsi de toute expression de la forme :

$$\int_a^b \exp\left[\frac{h\rho}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right] f(\lambda)\, d\lambda.$$

Il est ensuite facile de vérifier sur l'expression (4) de $\overline{\psi_n}$ la seconde condition :

$$\psi_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial \psi_0}{\partial \rho}.$$

Cette remarque permettrait d'exprimer ψ_n au moyen de ψ_0 et de ses dérivées partielles, par rapport à ρ, la colatitude étant constante. Elle permettrait encore d'appliquer à ψ_n le théorème d'addition des fonctions hémicylindriques.

Ces fonctions ψ_n prises sur une droite passant par l'origine se rencontrent dans certaines intégrales introduites par des lignes de sources.

5] Les équations de récurrence auxquelles satisfont les fonctions $\psi_n(h\rho, hz)$ sont, par rapport à ρ, du type de Nielsen (²).

La méthode de Watson (³) pour trouver les solutions des équations fonctionnelles de Nielsen va nous permettre d'obtenir une expression nouvelle de ψ_n. C'est même là, croyons-nous, sa première application.

Supposons, pour simplifier, n entier. L'équation fondamentale (2), à laquelle satisfait ψ_n, s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_n}{\partial\rho} + \left(h^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)\psi_n = -\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2}.$$

Posons :

$$\varpi_n(\rho, z) = -\rho\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2} = -\frac{i^n}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(\mathrm{R}+z)^n + (\mathrm{R}-z)^n}{2}\,\frac{e^{-ih\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right].$$

Intégrons alors l'équation précédente, par la méthode de variation des constantes, en considérant z comme un paramètre. Si nous tenons compte de la relation :

$$\mathrm{J}_n(h\rho)\frac{d\mathrm{Y}_n(h\rho)}{d\rho} - \mathrm{Y}_n(h\rho)\frac{d\mathrm{J}_n(h\rho)}{d\rho} = \frac{2}{\pi\rho},$$

(¹) Sonine, *Math. Ann.*, XVI (1880).

(²) Nielsen, *Ann. di Mat.* (3), VI (1901), p. 51 à 59 ou Watson, *loc. cit.*, § 10.82, p. 355.

(³) Watson, *Messenger*, XLVIII (1919), p. 49 à 53.

et de ce que, pour ρ infiniment grand, le terme principal dans ϖ_n se comporte comme $\dfrac{e^{-ih\rho}}{\rho}$, nous obtenons :

$$\psi_n(h\rho, hz) = \mathrm{J}_n(h\rho)\left[\pi_1(z) + \frac{\pi}{2}\int_\rho^\infty \mathrm{Y}_n(h\rho)\,\varpi_n(\rho_1, z)\,d\rho_1\right]$$
$$+ \mathrm{Y}_n(h\rho)\left[\pi_2(z) - \frac{\pi}{2}\int_\rho^\infty \mathrm{J}_n(h\rho)\,\varpi_n(\rho_1, z)\,d\rho_1\right].$$

Watson a montré que $\pi_1(z)$, $\pi_2(z)$ doivent être pris indépendants de n si l'on veut que ψ_n satisfasse aux équations de récurrence de Nielsen. Pour déterminer π_1 et π_2, faisons donc $n = 0$; on a d'abord

$$\varpi_0(\rho_1, z) = -\rho_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-ih\sqrt{\rho_1^2+z^2}}}{\sqrt{\rho_1^2+z^2}}.$$

Voyons ce qui se passe lorsque, z restant fixe positif, ρ augmente indéfiniment. Il est presque évident alors que ψ_0 est équivalent à $-\mathrm{D}_0(h\rho)$. Pour s'en convaincre, le plus simple est de suivre la méthode employée par Lord Rayleigh [1] pour obtenir l'expression asymptotique de $\mathrm{D}_0(h\rho)$. Écrivons :

$$\psi_0 = \int_z^\infty \frac{e^{-ihr}}{r}\,d\zeta = \int_\mathrm{R}^\infty \frac{e^{-ihr}}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\,dr = e^{-ih\rho}\int_{\mathrm{R}-\rho}^\infty \frac{e^{-ihy}\,dy}{\sqrt{y}\sqrt{2\rho+y}}.$$

Dans la dernière intégrale, à cause des oscillations de e^{-ihy}, ce sont les petites valeurs de y qui comptent. On peut négliger ces valeurs devant 2ρ, et écrire :

$$\psi_0 \backsim \frac{e^{-ih\rho}}{\sqrt{2\rho}}\int_{\mathrm{R}-\rho}^\infty \frac{e^{-ihy}\,dy}{\sqrt{y}}.$$

Si ρ augmente indéfiniment, $\mathrm{R}-\rho$ tend vers zéro. Comme :

$$\int_0^\infty {\cos \atop \sin}\, y \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

on obtient l'expression asymptotique :

$$\psi_0 \backsim -\sqrt{\frac{\pi}{2h\rho}}\,e^{-ih\rho - i\frac{\pi}{4}}.$$

C'est aussi l'expression asymptotique de $-\mathrm{D}_0(h\rho)$.

---

[1] *Phil. Mag.*, XLIII (1897), p. 259, ou *Sc. Pap.*, IV (1904), p. 290.

D'autre part, notre nouvelle expression de ψ_0 nous montre que :

$$\begin{aligned}\psi_0 &\backsim \pi_1(z)\,J_0(h\rho) + \pi_2(z)\,Y_0(h\rho),\\ &\backsim \sqrt{\frac{2}{\pi h\rho}}\left[\pi_1 \cos\left(h\rho - \frac{\pi}{4}\right) + \pi_2 \sin\left(h\rho - \frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

ce qui exige que $\pi_1(z) = -i\frac{\pi}{2}, \quad \pi_2(z) = -\frac{\pi}{2}.$

On a donc enfin (¹) :

$$\psi_n(h\rho, hz) = -D_n(h\rho) + \frac{\pi}{2}\int_\rho^\infty [J_n(h\rho)\,Y_n(h\rho_1) - Y_n(h\rho)\,J_n(h\rho_1)]\,\varpi_n(\rho_1, z)\,d\rho_1.$$

On trouve dans le Mémoire de Nielsen certaines propriétés des fonctions satisfaisant aux relations de récurrence qu'il envisage. On peut par exemple écrire la formule de récurrence très générale :

$$\begin{aligned}\psi_{\nu+n}(h\rho, hz) = {}& R_{n,\mu}(X)\,\psi_\nu(h\rho, hz) - R_{n-1}(X)\,\psi_{\nu-1}(h\rho, hz)\\ &- \frac{2}{X}\sum_{s=0}^{n-1} g_{\mu+s}\,R_{n-s-1,\,\mu+s+1}(X)\\ &+ 2\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\nu+s}{\rho} - \frac{\mu+s}{X}\right) R_{n-s-1,\,\mu+s+1}(X)\,\psi_{\nu+s}(h\rho, hz).\end{aligned}$$

Dans cette formule, n est entier, ν complexe quelconque, $R_{n,\mu}(X)$ est le polynôme de Lommel (²) de degré n en $\frac{1}{X}$; enfin on a posé :

$$g_\mu = e^{\mu i\frac{\pi}{2}}\,\frac{(R+z)^\mu - (R-z)^\mu}{2\rho^\mu}\,\frac{R}{\rho}\,\frac{e^{-ihR}}{R}.$$

En particulier, pour $\mu = \nu$, $X = \rho$, on obtient $\psi_{\nu+n}$ en fonction de ψ_ν et $\psi_{\nu-1}$. Pour X infini, on obtient $\psi_{\nu+n}$ en fonction linéaire de $\psi_{\nu-1}, \psi_\nu, \ldots, \psi_{\nu+n-1}$, sans intervention des fonctions g_μ.

(¹) Pour vérifier sur cette expression que $\psi_n(h\rho, 0) = -D_n(h\rho)$, il suffit de remarquer que ϖ_n est une fonction impaire de z.

(²) Dans la notation actuelle (Watson, *loc. cit*, § 9.6, p. 294), légèrement différente de celle de Nielsen.

6] Il se trouve que le cas des fonctions ψ_n d'ordre demi-impair a été été étudié dès 1841 par Binet (1). Dans une note (qui paraît d'ailleurs n'avoir pas eu de suite), il étudie l'intégrale (2) $\int_\alpha^y y^{2m} \exp\left[-\frac{p}{y^2} - qy^2\right] dy$, m étant entier, et particulièrement le cas $m = 0$.

Posant $$p = q\rho^2, \qquad x = y - \frac{\rho}{y}, \qquad u = y + \frac{\rho}{y},$$

Binet obtient la relation :

$$2\int_\alpha^y \exp\left[-q\left(y^2 + \frac{\rho^2}{y^2}\right)\right] dy = e^{2q\rho}\int_{\alpha+\frac{\rho}{\alpha}}^{y+\frac{\rho}{y}} e^{-qu^2}\,du + e^{-2q\rho}\int_{\alpha-\frac{\rho}{\alpha}}^{y-\frac{\rho}{y}} e^{-qx^2}\,dx.$$

La formule ainsi écrite n'est d'ailleurs pas toujours exacte. Elle suppose α et y choisis dans l'intervalle où la fonction $x(y)$ est croissante (3). Mais le résultat essentiel est que l'*intégrale s'exprime au moyen de la transcendante de Gauss* (4) $\int e^{-qx^2} dx$.

Binet indique encore qu'on obtiendrait l'intégrale d'ordre n par différentiation en p ou q, mais qu' « il existe des procédés plus simples ». Il applique enfin son résultat au calcul de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}(z)\, e^{-\alpha^2 z^2} \cos 2rz\, dz,$$

$\mathrm{R}(z)$ étant une fraction rationnelle en z sans pôle réel.

Il est facile d'établir le lien entre ces intégrales et les fonctions ψ_n, ou mieux encore Φ_n. Nous avons en effet (5) :

$$\Phi_n = \int_v^u \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(t + \frac{\rho^2}{t}\right)\right]\frac{dt}{t^{n+1}} = 2\int_{\sqrt{v}}^{\sqrt{u}} \exp\left[-\frac{ih}{2}\left(\theta^2 + \frac{\rho^2}{\theta^2}\right)\right]\frac{d\theta}{\theta^{2n+1}}.$$

On voit qu'il suffirait de poser $q = \frac{ih}{2}$, $m = -\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour obtenir la forme de Binet. Traitons directement notre intégrale. Il suffit d'effectuer la transformation :

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\omega + \sqrt{\omega^2 + 4\rho}\right),$$

(1) Binet, *Comptes Rendus*, XII (1841), p. 958.
(2) Nous conservons les notations mêmes de Binet.
(3) Nous supposons toujours $\rho > 0$.
(4) Ou encore de Kramp.
(5) Voir plus haut, Troisième Partie, § 2. Nous reprenons ici nos propres notations.

qui donne :

$$\omega = \theta - \frac{\rho}{\theta}, \qquad \text{et} \qquad \theta^2 + \frac{\rho^2}{\theta^2} = \omega^2 + 2\rho.$$

On obtient d'abord, pour $n = -\frac{1}{2}$:

$$\Phi_{-\frac{1}{2}} = \int_{-(\sqrt{u}-\sqrt{v})}^{+(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \exp\left[-\frac{ih}{2}(\omega^2+2\rho)\right] d\omega + \int_{-(\sqrt{u}-\sqrt{v})}^{+(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \exp\left[-\frac{ih}{2}(\omega^2+2\rho)\right] \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{\omega^2+4\rho}}.$$

La seconde intégrale est nulle par raison de symétrie.

Il reste donc la formule (¹) :

$$\Phi_{-\frac{1}{2}} = 2e^{-ih\rho} \int_0^{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \exp\left[-\frac{ih}{2}\omega^2\right] d\omega,$$

qui ramène le calcul de $\Phi_{-\frac{1}{2}}$ à celui des intégrales de Fresnel.

Étudions de même le cas général $n = -\left(m + \frac{1}{2}\right)$:

$$\Phi_{-\left(m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{-ih\rho}}{2^{2m}} \int_{-(\sqrt{u}-\sqrt{v})}^{+(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \frac{\left(\omega + \sqrt{\omega^2+4\rho}\right)^{2m+1}}{\sqrt{\omega^2+4\rho}} \exp\left[-\frac{ih}{2}\omega^2\right] d\omega.$$

Supposons m *entier positif*. On peut développer le binôme en termes finis. Les intégrales correspondant aux puissances impaires de ω seront nulles par raison de symétrie. Dans les autres, $\sqrt{\omega^2+4\rho}$ entrera, après division, à une puissance paire.

Finalement on aura $\Phi_{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}$ sous forme d'une somme d'intégrales telles que :

$$\int_{-(\sqrt{u}-\sqrt{v})}^{+(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \omega^{2K} \exp\left[-\frac{ih}{2}\omega^2\right] d\omega = \left(\frac{2}{h}\right)^{K+\frac{1}{2}} \exp\left[-i\left(K+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] P\left[\frac{ih\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2}{2}, K+\frac{1}{2}\right],$$

où K est un entier positif ou nul.

Nous sommes ainsi ramenés à des transcendantes connues. Les coefficients seraient faciles à obtenir explicitement, mais ne présentent pas un caractère de simplicité suffisant.

La même conclusion vaut pour m *entier négatif*, comme on le voit en remplaçant $\frac{1}{\omega + \sqrt{\omega^2+4\rho}}$ par $-\frac{1}{4\rho}\left(\omega - \sqrt{\omega^2+4\rho}\right)$, ou mieux en utilisant la formule :

$$\Phi_{-n} = \rho^{2n}\Phi_n.$$

(¹) Si l'on veut revenir aux coordonnées cylindriques, on remarquera que :

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} = \sqrt{u+v-2\rho} = \sqrt{2(R-\rho)}.$$

Signalons en particulier le cas $n = \frac{1}{2}$, où :

$$\Phi_{\frac{1}{2}} = 2 \frac{e^{-ih\rho}}{\rho} \int_0^{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \exp\left[-\frac{ih}{2} \omega^2 \right] d\omega .$$

7] Les méthodes employées dans la Première Partie (§ 4), sont susceptibles de généralisations pour un ordre n quelconque. Nous allons donner deux exemples des résultats que l'on peut ainsi obtenir.

Supposons, pour avoir un chemin d'intégration réel, $-1 < R(n) < 1$.

On arrive alors, pour $0 < m < h$, à la formule :

$$\int_0^\infty \cos m\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} \frac{(r+\zeta)^n + (r-\zeta)^n}{\rho^n} d\zeta = -e^{-ni\frac{\pi}{2}} \frac{(h+m)^n + (h-m)^n}{\xi^n} D_n(\xi\rho),$$

en posant comme précédemment $\xi = \sqrt{h^2 - m^2}$.

Une intégration par parties nous donne la relation élégante :

$$m \int_0^\infty \sin m\zeta \,.\, \psi_n(h\rho, h\zeta)\, d\zeta = \left[\frac{(h+m)^n + (h+m)^n}{2\xi^n} \right] D_n(\xi\rho) - D_n(h\rho).$$

On aurait pour $0 < h < m$ des formules analogues, mais où la partie imaginaire introduirait les fonctions d'Anger et Weber.

Le second exemple nous sera fourni par le cas limite $m = h$, en supposant cette fois les limites variables, ce qui n'oblige pas à introduire de transcendante nouvelle. On obtient en effet :

$$\frac{1}{\rho^n} \int_0^z \cos h\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} [(r+\zeta)^n + (r-\zeta)^n]\, d\zeta = \frac{1}{2} \int_{hu}^{hv} \left[\frac{\zeta^n}{h^n \rho^n} + \frac{h^n \rho^n}{\zeta^n} \right] \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} d\zeta .$$

Introduisons la transcendante Q de Nielsen et intégrons par parties. il vient :

$$\begin{aligned} 4h \int_0^z \sin h\zeta \,.\, \psi_n(h\rho, h\zeta)\, d\zeta &= -4 \cos hz \,.\, \psi_n(h\rho, hz) \\ &+ (h\rho)^{-n} [Q(ihv, n) - Q(ihu, n)] + (-h\rho)^n [Q(ihv, -n) - Q(ihu, -n)] . \end{aligned}$$

8] Appliquons maintenant les fonctions ψ_n, ou plutôt les fonctions $\overline{\psi}_n$, à la représentation de lignes de sources de densité variable $f(\zeta_1)$, $-\zeta_1$ étant toujours la cote de la source. Nous supposons ici qu'il s'agit d'un *segment fini*. On peut admettre pour commencer[1] que la fonction $f(\zeta - z)$ est développable en série entière en z sur tout le segment. Le potentiel généralisé s'exprime alors par une série d'intégrales de la forme $\int \zeta^n \frac{e^{-ihr}}{r}\, d\zeta$. On peut évidemment supposer que les limites sont 0 et z. Ce sont ces intégrales que nous allons d'abord évaluer.

Supposons n pair : $n = 2k$. Un calcul algébrique élémentaire permet d'écrire :

$$(6) \qquad \zeta^{2K} = (-1)^K \frac{(2K)!}{2^{2K+1}} \rho^{2K} \sum_{q=0}^{K} \frac{(-1)^q \varepsilon_q}{(K-q)!\,(K+q)!} \frac{(r+\zeta)^{2q} + (r-\zeta)^{2q}}{\rho^{2q}},$$

où ε_q représente le coefficient de Neumann, soit : 2 si $q \neq 0$, 1 si $q = 0$. On en déduit immédiatement :

$$\int_0^z \frac{\zeta^{2K}}{\rho^{2K}} \frac{e^{-ihr}}{r}\, d\zeta = \sum_{q=0}^{K} \frac{(-1)^K (2K)!\, \varepsilon_q}{2^{2K}(K-q)!\,(K+q)!} \overline{\psi}_{2q}(h\rho, hz).$$

Remarquons qu'une intégration par parties nous permettrait d'évaluer l'intégrale $\int_0^z \zeta^{2K-1} \psi_0(h\rho, h\zeta)\, d\zeta$.

Il est d'ailleurs facile de donner des formules plus générales, en partant de l'identité (6) et de la remarque évidente :

$$\begin{aligned}[(r+\zeta)^a + (r-\zeta)^a]\,[(r+\zeta)^b + (r-\zeta)^b] = {}& [(r+\zeta)^{a+b} + (r-\zeta)^{a+b}] \\ & + \rho^{2a}[(r+\zeta)^{b-a} + (r-\zeta)^{b-a}].\end{aligned}$$

On obtient ainsi, en étendant la somme de $-k$ à $+k$, si l'on veut éviter l'emploi du coefficient de Neumann :

$$\sum_{q=-K}^{+K} \frac{(-1)^K (2K)!}{2^{2K}(K-q)!\,(K+q)!} \overline{\psi}_{p+2q}(h\rho, hz)$$

$$= \frac{i^p}{2} \int_0^z \frac{\zeta^{2K}}{\rho^{2K}} \frac{(r+\zeta)^p + (r-\zeta)^p}{\rho^p} \frac{e^{ihr}}{r}\, d\zeta = -\left(\frac{z}{\rho}\right)^{2K} \overline{\psi}_p - 2K \int_0^z \frac{\zeta^{2K-1}}{\rho^{2K}} \overline{\psi}_p(h\rho, h\zeta)\, d\zeta.$$

Supposons maintenant n impair : $n = 2K + 1$. On a immédiatement :

$$\int_0^z \zeta^{2K+1} \frac{e^{-ihr}}{r}\, d\zeta = \int_\rho^R (r^2 - \rho^2)^K e^{-ihr}\, dr$$

$$= \sum_{q=0}^{K} \frac{(-1)^{K-q} K!}{q!\,(K-q)!} \rho^{2(K-q)} \int_\rho^R r^{2q} e^{-ihr}\, dr$$

$$= \sum_{q=0}^{K} \frac{(-1)^{K+1} i K!}{q!\,(K-q)!} \frac{\rho^{2(K-q)}}{h^{2q+1}} [P(ihR, 2q+1) - P(ih\rho, 2q+1)].$$

---

[1] On envisagera au paragraphe suivant une hypothèse moins restrictive.

Les fonctions P qui interviennent ici se réduisent aux transcendantes élémentaires. En vertu d'une formule due à Bessel, on peut enfin écrire :

$$\int_0^z \zeta^{2K+1} \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = \sum_{q=0}^{K} \frac{(-1)^K iK!}{q!(K-q)!} \frac{\rho^{2(K-q)}}{h^{2q+1}} \left[R^{2q+1} \frac{d^{2q}}{dR^{2q}} \frac{e^{-ihR}-1}{R} \right.$$
$$\left. - \rho^{2q+1} \frac{d\rho^{2q}}{d^{2q}} \frac{e^{-ih\rho}-1}{\rho} \right].$$

9] Appliquons les résultats précédents à la détermination des potentiels généralisés des lignes de sources en $\cos m\zeta$ et $\sin m\zeta$, déjà souvent considérés, mais sans nous restreindre dorénavant à $0 < m < h$.

On a, formellement :

$$\int_0^z \cos m\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = \int_0^z \left\{ \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K)!} m^{2K} \zeta^{2K} \right\} \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K)!} m^{2K} \int_0^z \zeta^{2K} \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{m\rho}{2}\right)^{2K} \sum_{q=0}^{K} \frac{\varepsilon_q \overline{\psi}_{2q}}{(K-q)!(K+q)!}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \overline{\psi}_{2q} \sum_{K=q}^{\infty} \frac{1}{(K-q)!(K+q)!} \left(\frac{m\rho}{2}\right)^{2K}$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \overline{\psi}_{2q} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+2q)!} \left(\frac{m\rho}{2}\right)^{2p+2q};$$

ou enfin :

$$\int_0^z \cos m\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \overline{\psi}_{2q} I_{2q}(m\rho),$$

$I_n(z)$ étant la fonction de Bessel d'argument imaginaire, dans sa notation habituelle.

Le résultat est très simple, mais il reste à justifier le calcul. L'échange des signes $\int_0^z$ et $\sum_{K=0}^{\infty}$ n'entraîne pas de difficultés. Montrons qu'on avait également le droit de réarranger la série double, qui est absolument convergente.

On a :

$$|\overline{\psi}_{2q}| = \frac{1}{2\rho^{2q}} \left| \int_{-z}^{+z} \frac{e^{-ihr}}{r} (r+\zeta)^{2q} d\zeta \right|$$

d'où :

$$|\overline{\psi}_{2q}| < \frac{1}{2\rho^{2q}} \int_{-z}^{z} \frac{(r+\zeta)^{2q}}{r} d\zeta.$$

Cette dernière intégrale se calcule aisément. C'est en effet :

$$\frac{1}{2} \int_{-\arg sh \frac{z}{\rho}}^{+\arg sh \frac{z}{\rho}} e^{2qu}\, du = \begin{cases} \arg sh \dfrac{z}{\rho} & \text{si} \quad q = 0, \\[2ex] \dfrac{z}{2q\rho} & \text{si} \quad q \neq 0. \end{cases}$$

On peut donc prendre, par exemple, pour borner $\overline{\psi}_{2q}$:

$$|\overline{\psi}_{2q}| < \frac{z}{(q+1)\rho}.$$

Une somme partielle quelconque de la série des modules est inférieure à

$$\sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q |\overline{\psi}_{2q}|\, |I_{2q}(m\rho)|.$$

En vertu de l'inégalité connue([1]),

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{2}\right|^n \exp \left|\frac{z}{2}\right|^2,$$

l'expression précédente est inférieure à :

$$\frac{z}{\rho} \exp \left|\frac{m\rho}{2}\right|^2 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left|\frac{m\rho}{2}\right|^{2q} = \frac{z}{\rho} \exp \frac{|m\rho|^2}{2},$$

ce qui démontre l'absolue convergence de la série double.

Si nous supposons $0 < m < h$, le résultat que nous venons d'obtenir, joint à ceux de la Première Partie, nous donne l'identité :

$$\overline{\psi}_0[\xi\rho, hz + mR] + \overline{\psi}_0[\xi\rho, hz - mR] = 2 \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \overline{\psi}_{2q}(h\rho, hz)\, I_{2q}(m\rho).$$

([1]) Watson, *loc. cit.*, § 2.11, p. 16, Formule 4.

Considérons maintenant la ligne de sources en $\sin m\zeta$. Il vient, en posant pour abréger [1]

$$P^*_{2q+1} = P(ihR, 2q+1) - P(ih\rho, 2q+1),$$

$$\int_0^z \sin m\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K m^{2K+1}}{(2K+1)!} \int_0^z \zeta^{2K+1} \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta$$

$$= -\frac{im}{h} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{K!}{(2K+1)!} (m\rho)^{2K} \sum_{q=0}^{K} \frac{1}{q!(K-q)!} \frac{P^*_{2q+1}}{(h\rho)^{2q}}$$

$$= -\frac{im}{h} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{P^*_{2q+1}}{(h\rho)^{2q}} \sum_{K=q}^{\infty} \frac{K!}{(2K+1)!(K-q)!} (m\rho)^{2K}$$

$$= -i \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left(\frac{m}{h}\right)^{2q+1} P^*_{2q+1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{(2p+2q+1)!\,p!} (m\rho)^{2p}.$$

On a d'ailleurs, en vertu de la formule de multiplication de la fonction Γ :

$$\Gamma(2p+2q+2) = \frac{2^{2p+2q+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p+q+1)\,\Gamma\left(p+q+\frac{3}{2}\right).$$

D'où il résulte que :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{(2p+2q+1)!\,p!} (m\rho)^{2p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q+1}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} m\rho\right)^{2p}}{\Gamma\left(p+q+\frac{3}{2}\right) p!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{q+\frac{1}{2}}} \frac{I_{q+\frac{1}{2}}(m\rho)}{(m\rho)^{q+\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent :

$$\int_0^z \sin m\zeta \frac{e^{-ihr}}{r} d\zeta = -i\sqrt{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!\,2^{q+\frac{1}{2}}} \left(\frac{m}{h}\right)^{2q+1} \frac{I_{q+\frac{1}{2}}(m\rho)}{(m\rho)^{q+\frac{1}{2}}} P^*_{2q+1}.$$

C'est encore la fonction de Bessel d'argument imaginaire qui intervient ici. Il resterait d'ailleurs à montrer l'absolue convergence de la série double, ce qui se fait

---

[1] L'astérisque permet d'éviter la confusion avec les fonctions de Legendre.

exactement comme dans le cas précédent, en s'appuyant sur les inégalités :

$$\left|I_{q+\frac{1}{2}}(z)\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}\left|\frac{z}{2}\right|^{q+\frac{1}{2}} \exp|\mathfrak{J}(z)|,$$

$$\left|P^{*}_{2q+1}\right| < h^{2q+1}\frac{R^{2q+1}-\rho^{2q+1}}{2q+1},$$

dont l'une est connue(¹), et dont l'autre s'établit immédiatement.

Les formules ainsi obtenues pour les lignes de sources en $\cos m\zeta$ et en $\sin m\zeta$ pourront être appliquées au calcul du potentiel généralisé d'un segment, la distribution des densités étant supposée seulement développable en série de Fourier, ce qui est toujours le cas dans la pratique. On obtiendra, sous restriction de convergence absolue pour les nouvelles séries doubles, des séries en $\overline{\psi_{2q}}$ ou en P^{*}_{2q+1}, dont les coefficients s'exprimeront sous forme de séries très analogues à celles de Schlömilch.

(¹) Watson, *loc. cit.*, § 3.31, p. 49.