Annales de la faculté des sciences de Toulouse

R. Marcolongo

Les transformations de Lorentz et les équations de l'électrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 4 (1912), p. 429-468
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1912_3_4__429_0>

LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

ET

LES ÉQUATIONS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

PAR R. MARCOLONGO.

(Naples.)

INTRODUCTION.

L'étude des transformations de LORENTZ et de leurs applications à l'électrodynamique, commencé par POINCARÉ[1], a atteint son plus grand développement dans un Mémoire célèbre de MINKOWSKI[2].

MINKOWSKI appelle en général *transformation de Lorentz* une transformation linéaire homogène à quatre variables

$$(1) \qquad x_r = \alpha_{r1} x'_1 + \alpha_{r2} x'_2 + \alpha_{r3} x'_3 + \alpha_{r4} x'_4 \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$$

de déterminant $+1$, telle que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4,$$

et où tous les coefficients sont réels à l'exception de $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ qui sont des imaginaires purs; α_{44} est réel et positif; x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point P, et $x_4 = t\sqrt{-1}$, t étant le temps.

(1) H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXI (1906), 129-176].

(2) H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern* [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse (1908), 53-111].

Un système quelconque de quatre quantités $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, qui dans une transformation de LORENTZ se transforme dans les quantités $\rho_1', \rho_2', \rho_3', \rho_4'$, liées aux premières par les équations (1), constitue pour MINKOWSKI un *vecteur à quatre dimensions de première espèce* (Raum-Zeit-Vektor I Art) ou *Vierervektor* suivant SOMMERFELD.

Si x_1, x_2, x_3, x_4; u_1, u_2, u_3, u_4 sont deux vecteurs à quatre dimensions de première espèce, le système de six quantités $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$, telles que dans une transformation de LORENTZ, l'expression bilinéaire

$$f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + \dots + f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + \dots$$

se transforme dans l'expression

$$f_{23}'(x_2' u_3' - x_3' u_2') + \dots + f_{14}'(x_1' u_4' - x_4' u_1') + \dots,$$

constitue un *vecteur à quatre dimensions de deuxième espèce* (Raum-Zeit-Vektor II Art) ou *Sechservektor*.

Le principe de relativité pour les équations fondamentales de l'électrodynamique peut alors s'énoncer ainsi :

Le système des équations de l'électrodynamique de Lorentz est covariant avec toute transformation de Lorentz; si ρ *désigne la densité électrique,* **v** *la vitesse des électrons,* **m** *la force magnétique,* **e** *la force électrique, alors*

> $\rho\mathbf{v}$, $i\rho$ (*c'est-à-dire* $\rho\mathbf{v}_x, \rho\mathbf{v}_y, \rho\mathbf{v}_z, i\rho$, $i=\sqrt{-1}$) *est un vecteur de première espèce,*
> $\mathbf{m}$, $-i\mathbf{e}$ *est un vecteur de deuxième espèce.*

C'est sur ce principe que MINKOWSKI s'est appuyé pour la recherche des équations de l'électrodynamique des corps en mouvement; ensuite la théorie des matrices et la considération d'un nouvel opérateur différentiel, *lor*, lui a permis de donner à ses équations une forme simple qui met bien en évidence sa covariance avec le groupe des transformations de LORENTZ. Ainsi un vecteur de première espèce sera représenté par une matrice à 1×4 lignes; un vecteur de deuxième espèce par une matrice alternée f à 4×4 lignes; et si l'on représente par A la matrice d'une transformation de LORENTZ, f sera transformé dans $A^{-1}fA$, etc.

Le principe de la méthode que MINKOWSKI a développé avec autant de profondeur que d'élégance et qui constitue certainement un progrès sur celle suivie par POINCARÉ, c'est-à-dire la considération directe des transformations (1), avait été déjà appliqué (qu'il nous soit permis de le rappeler) dans un Mémoire que nous avons publié en 1906 (3).

Le Mémoire de MINKOWSKI a été l'origine de nombreux travaux; il faut surtout signaler ceux de MM. ABRAHAM et SOMMERFELD.

(3) R. MARCOLONGO, *Sugli integrali delle equazioni dell' elettrodinamica* [Rend. R. Acc. Lincei, s. V, vol. 15 (1o sem. 1906), 344-349].

M. SOMMERFELD(4), dans deux Mémoires fort intéressants, a développé l'algèbre et l'analyse vectorielle à quatre dimensions. Au lieu de l'opérateur *lor* de MINKOWSKI, il a considéré quatre opérateurs différentiels (la divergence scalaire et vectorielle, le rotationnel et le gradient) qui sont, pour l'espace à quatre dimensions, les généralisations des opérateurs div, rot, grad de l'analyse vectorielle ordinaire. Les propriétés de ces opérateurs, aussi bien que leur définition géométrique indépendante de tout système de référence, permettent de donner aux équations du champ électromagnétique une forme qui en fait ressortir la covariance par rapport au groupe des transformations de LORENTZ.

Aux travaux de SOMMERFELD, on peut rapprocher ceux des géomètres américains qui suivent les méthodes de GIBBS(5) et des géomètres qui font usage des quaternions(6).

Malgré son élégance, l'analyse de MINKOWSKI et celle des auteurs qui l'ont suivi ne sait pas éviter les imaginaires ni peut se passer des coordonnées. Il est très naturel de se demander si on ne pourrait pas appliquer à ces nouvelles questions l'analyse vectorielle ordinaire.

D'autre part, le système minimum (que M. BURALI-FORTI et moi nous avons développé dans les *Éléments de calcul vectoriel*) est impuissant à traiter les nouveaux problèmes de MINKOWSKI, à moins qu'il ne s'agît des transformations particulières de LORENTZ (*Spezielle-Lorentz-Transformationen*). Dans ce cas, en effet, sans introduire les imaginaires et tout en conservant la forme classique aux équations de l'électrodynamique, on peut exposer toute la théorie de la transformation en faisant usage des méthodes usuelles de l'analyse vectorielle. C'est ce qu'a fait M. v. IGNATOWSKI dans un beau Mémoire, remarquable à plus d'un titre(7).

---

(4) A. SOMMERFELD, *Zur Relativitätstheorie*. I. *Vierdimensionale Vektoralgebra* [Annalen der Physik, IV Folge, Bd. 32 (1910), 749-776]. II. *Vierdimensionale Vektoranalysis* [Ibid., Bd. 33 (1910), 649-689].

(5) G.-N. LEWIS, *On four-dimensional vector-analysis, and its application in electrical theory* [Proceedings of the American Academy of Arts and Science, vol. 46, 162-181 (1910)].

E.-B. WILSON and G.-N. LEWIS, *The space-time manifold of relativity, the non-euclidean geometry of mechanics and electromagnetics* [Ibid., vol. 48, 387-507 (1912)].

(6) A.-W. CONWAY, *On the application of Quaternions to some recent developments of electrical theory* [Proceedings of the R. Irish Academy, vol. 29, Sect. A, nº 1 (1911)].

J.-B. SHAW, *Quaternion developments with applications* [Trans. of the American Mathematical Society, vol. 13, 279-292 (1912)].

L. SILBERNSTEIN, *Quaternionic Form of Relativity* [Philosophical Magazine, s. VI, vol. 23, 790-809 (1912)].

E. VAELSCH, *Quaternionen und binären Formen zu den Minkowski'schen Grundgleichungen für Elektrodynamik* [Sitzungsber. der K. Akademie der Wiss. in Wien. Mathem.-naturw. Klasse; Bd. 122, März und Juni 1913].

(7) W. v. IGNATOWSKI, *Das Relativitätsprinzip* [Archiv. der Mathematik und Physik, III Reihe, Bd. 17, 1-24; Bd. 18, 17-40 (1911)].

Dans quelques Mémoires parus en 1912 et 1913 ([8]), nous avons essayé de faire voir que les éléments de la théorie des homographies vectorielles permettent de traiter, dans toute la généralité possible, *et sans faire intervenir les imaginaires et les coordonnées*, les problèmes de MINKOWSKI. C'est, nous croyons, une des applications les plus simples et les plus élégantes des méthodes qui ont déjà reçu de nombreuses et importantes applications ([9]).

Ce Mémoire a pour but d'exposer ces recherches et de les compléter, dans l'espoir de fixer l'attention des lecteurs sur une théorie qui peut rendre beaucoup de services à la géométrie, à la mécanique et à la physique-mathématique.

Nous supposerons le lecteur familiarisé seulement avec les éléments de la théorie du calcul vectoriel et nous avons exposé (chap. I), dans ses traits les plus essentiels, la théorie des homographies vectorielles et démontré la plupart des formules qui seront appliquées dans ce Mémoire.

Dans un deuxième chapitre, nous avons étudié les transformations de LORENTZ sous leur forme vectorielle, leurs propriétés et quelques-unes de leurs applications. Après avoir exposé les formules pour la transformation (chap. III), nous développons dans un dernier chapitre le principe de relativité dans l'électrodynamique de LORENTZ et de MINKOWSKI. Les formules de ce chapitre nous paraissent intéressantes et nouvelles; elles donnent toujours les expressions explicites des éléments du système transformé en fonction des éléments du système primitif; et les applications que nous en avons faites montrent déjà leur utilité dans plusieurs recherches.

Ainsi, nous avons donné les formules générales pour la transformation de la force électro-magnétique de LORENTZ et des forces électriques et magnétiques de repos de MINKOWSKI, et nous avons montré les relations bien simples qui lient les invariants de l'homographie des tensions relatives de MAXWELL à la fonction de LAGRANGE et aux vecteurs fondamentaux de l'électrodynamique de MINKOWSKI.

([8]) R. MARCOLONGO, *Sulle equazioni dell' elettrodinamica* [Rend. R. Acc. Scienze fis. e matem. di Napoli, s. III, vol. 18, 118-135, 314 319 (1912)]. *Su alcune questioni relative alle trasformazioni di Lorentz in elettrodinamica* [Rend. R. Acc. dei Lincei, s. V, vol. 22, 349-354, 402-408 (2o sem. 1913)].

([9]) C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Omografie vettoriali, con applicazione alle derivate rispetto ad un punto ed alla fisica-matematica.* Torino, Petrini, 1909.

Analyse vectorielle générale. — I. Transformations linéaires. Pavie, Mattei, 1912. — II. *Applications à la mécanique et à la physique.* Pavie, Mattei, 1913.

Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique-mathématique, traduit de l'italien par S. LATTÈS. Paris, Hermann, 1910.

CHAPITRE PREMIER.

Propriétés fondamentales des homographies vectorielles.

[**1**] Les *homographies vectorielles*, ou, simplement, *homographies*, sont les opérateurs linéaires qui transforment des vecteurs en vecteurs. Si α est une homographie, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ des vecteurs, m un nombre réel, et si nous représentons par $\alpha\mathbf{u}$ le vecteur qui se déduit de $\mathbf{u}$ en lui appliquant l'opérateur linéaire α, nous aurons :

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}, \qquad \alpha(m\mathbf{u})=m\alpha\mathbf{u}. \tag{1}$$

Une homographie est dite *axiale* si elle est de la forme

$$\alpha=\mathbf{u}\wedge, \tag{2}$$

de sorte que si $\mathbf{x}$ est un vecteur arbitraire, on a

$$\alpha\mathbf{x}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{x},$$
$$\mathbf{x}\times\alpha\mathbf{x}=0;$$

une homographie est une *dilatation* si, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ étant des vecteurs arbitraires, on a :

$$\mathbf{x}\times\alpha\mathbf{y}=\mathbf{y}\times\alpha\mathbf{x}\ (^{10}). \tag{3}$$

Les homographies axiales et les dilatations forment des systèmes linéaires.

---

(10) Nous représentons par

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$$

le produit intérieur et le produit vectoriel des deux vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Deux propriétés seront dans la suite fréquemment appliquées, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w},$$
$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}.\mathbf{v}-\mathbf{w}\times\mathbf{v}.\mathbf{u}.$$

(Théorème sur le double produit vectoriel, *Éléments*, p. 36 [5]; p. 34 [2]).

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs et $\mathbf{x}$ un autre vecteur arbitraire, on a souvent à considérer, dans les applications, les vecteurs parallèles à $\mathbf{v}$ de la forme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{x} . \mathbf{v}.$$

Nous appellerons *dyade*, $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, l'homographie telle que, pour $\mathbf{x}$ arbitraire,

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \mathbf{v}. \tag{4}$$

Elle transforme les vecteurs en vecteurs parallèles à $\mathbf{v}$; c'est donc une homographie singulière; et puisque la somme de deux dyades n'est pas en général une dyade, les dyades ne forment pas un système linéaire.

La considération des homographies axiales et des dilatations est de la plus grande importance, car :

Une homographie quelconque peut toujours se réduire, et d'une seule manière, à la somme d'une dilatation avec une homographie [11].

Nous représenterons par $D\alpha$ la dilatation de α; alors

$$\alpha = D\alpha + \mathbf{u}\wedge;$$

$\mathbf{u}$ est le *vecteur* de α, que nous représentons par $V\alpha$, de manière que

$$\alpha = D\alpha + V\alpha\wedge. \tag{5}$$

L'homographie qui diffère de α pour le signe de $V\alpha$ est dite *conjuguée* de α. Nous la représentons par $K\alpha$; nous avons donc :

$$K\alpha = D\alpha - V\alpha\wedge, \tag{6}$$

$$KK\alpha = \alpha. \tag{7}$$

Si maintenant nous nous rappelons les propriétés élémentaires des produits mixtes et la propriété fondamentale (3) d'une dilatation, nous pouvons déduire deux autres équations très importantes :

$$2V\alpha \times \mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = \mathbf{y} \times \alpha\mathbf{x} - \mathbf{x} \times \alpha\mathbf{y}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x} \times \alpha\mathbf{y} = \mathbf{y} \times K\alpha\mathbf{x}. \tag{9}$$

Cette dernière équation exprime le *théorème de commutation*, d'un usage continuel.

---

[11] *Analyse vectorielle générale*, I, p. 25.

Nous avons encore ces autres théorèmes :

(10) $$\mathrm{KH}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathrm{H}(\mathbf{v},\mathbf{u}),$$

(11) $$\mathrm{VH}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},$$

(12) $$\mathrm{K}(\alpha\beta) = \mathrm{K}\beta.\mathrm{K}\alpha,$$

(13) $$\alpha.\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathrm{H}(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}),$$

(14) $$\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}).\alpha = \mathrm{H}(\mathrm{K}\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

(15) $$\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}).\mathrm{H}(\mathbf{u}',\mathbf{v}') = \mathbf{u}\times\mathbf{v}'.\mathrm{H}(\mathbf{u}',\mathbf{v}),$$

qui donnent respectivement la conjuguée et le vecteur d'une dyade; la conjuguée du produit de deux homographies α et β et les règles pour former les produits d'une homographie et d'une dyade ou de deux dyades.

Leur démonstration se fait toujours par la même méthode. Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs arbitraires, le théorème de commutation nous donne

$$\mathbf{x}\times\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{y} = \mathbf{y}\times\mathrm{KH}(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{x};$$

mais le premier membre peut s'écrire

$$\mathbf{u}\times\mathbf{y}.\mathbf{v}\times\mathbf{x} = \mathbf{y}\times\mathrm{H}(\mathbf{v},\mathbf{u})\mathbf{x};$$

et alors on déduit l'équation (10).

[**2**] Les invariants $\mathrm{I}_1\alpha$, $\mathrm{I}_2\alpha$, $\mathrm{I}_3\alpha$ d'une homographie α sont les nombres, fonctions seulement de α, qui satisfont aux conditions suivantes :

(16) $$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}.\mathrm{I}_1\alpha = \alpha\mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} + \alpha\mathbf{v}\times\mathbf{w}\wedge\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}\times\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},$$

(17) $$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}.\mathrm{I}_2\alpha = (\alpha\mathbf{v})\wedge\alpha\mathbf{w}\times\mathbf{u} + (\alpha\mathbf{w})\wedge\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{v} + (\alpha\mathbf{u})\wedge\alpha\mathbf{v}\times\mathbf{w},$$

(18) $$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}.\mathrm{I}_3\alpha = (\alpha\mathbf{u})\wedge(\alpha\mathbf{v})\times\alpha\mathbf{w},$$

avec $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vecteurs arbitraires non parallèles à un même plan.

Si $\mathrm{I}_3\alpha = 0$, l'homographie α est singulière; elle transforme en effet trois vecteurs arbitraires en des vecteurs parallèles à un même plan, car $(\alpha\mathbf{u})\wedge(\alpha\mathbf{v})\times\alpha\mathbf{w} = 0$.

Si α est un nombre réel m, on a :

(19) $$\mathrm{I}_1 m = 3m, \qquad \mathrm{I}_2 m = 3m^2, \qquad \mathrm{I}_3 m = m^3.$$

Des formules (16), (18) on déduit tout de suite :

(20) $$\mathrm{I}_1(\alpha+\beta) = \mathrm{I}_1\alpha + \mathrm{I}_1\beta, \qquad \mathrm{I}_3(\alpha\beta) = \mathrm{I}_3\alpha.\mathrm{I}_3\beta;$$

(21) $$\mathrm{I}_1\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \qquad \mathrm{I}_3\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0.$$

Pour démontrer en effet ces deux dernières, on observera que si nous représentons par α la dyade $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, le premier et le troisième terme du second membre de l'équation (16) sont nuls et le second terme est

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \times \alpha\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} . \mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{w};$$

par conséquent, on déduit la première des équations (21). La seconde se démontre immédiatement, puisque $\alpha\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{v} = 0$.

Entre les invariants d'une homographie α et ses puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ il y a la relation de Hamilton-Cayley (identité du troisième ordre) :

$$\alpha^3 - I_1\alpha . \alpha^2 + I_2\alpha . \alpha - I_3\alpha = 0. \tag{22}$$

Sa démonstration, que nous empruntons à un Mémoire de M. Rabinovitch [12], est bien simple. Remplaçons, dans l'équation (16), $\mathbf{w}$ par $\alpha^2\mathbf{w}$; dans (17), $\mathbf{w}$ par $\alpha\mathbf{w}$; nous aurons, en faisant une combinaison linéaire des équations obtenues et après réduction,

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \left\{ I_1\alpha . \alpha^2\mathbf{w} - I_2\alpha . \alpha\mathbf{w} + I_3\alpha . \mathbf{w} \right\} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \alpha^3\mathbf{w};$$

et puisque $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont arbitraires, l'équation (22) est démontrée.

Les applications de cette identité sont très nombreuses. On peut démontrer, en s'appuyant sur l'équation (22), que

$$I_r K\alpha = I_r\alpha, \tag{23}$$

$$I_r(\beta\alpha) = I_r(\alpha\beta). \qquad (r = 1, 2, 3.) \tag{24}$$

En effet, l'équation (22) pour l'homographie $K\alpha$, puisque $(K\alpha)^3 = K\alpha^3$ d'après l'équation (12), devient

$$K\alpha^3 - I_1K\alpha . K\alpha^2 + I_2K\alpha . K\alpha - I_3K\alpha = 0; \tag{22'}$$

en lui appliquant à gauche l'opérateur K, on trouve

$$\alpha^3 - I_1K\alpha . \alpha^2 + I_2K\alpha . \alpha - I_3K\alpha = 0,$$

d'où, par comparaison avec (22), on déduit les identités (23).

La même identité (22), appliquée aux deux produits $\beta\alpha$ et $\alpha\beta$, nous donne

$$\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - I_1(\beta\alpha) . \beta\alpha\beta\alpha + I_2(\beta\alpha) . \beta\alpha - I_3(\beta\alpha) = 0,$$
$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta - I_1(\alpha\beta) . \alpha\beta\alpha\beta + I_2(\alpha\beta) . \alpha\beta - I_3(\alpha\beta) = 0;$$

appliquons à la première l'opérateur α à gauche, et à la deuxième à droite; en comparant les deux identités, on prouve les relations (24).

---

[12] G. Rabinovitch, *Les invariants dans la théorie des homographies vectorielles* [Rend. Circolo matem. di Palermo, t. XXXVI (2° semestre 1913), 99-110].

[**3**] Pour les applications que nous ferons dans la suite, a une importance particulière l'opérateur R, déjà considéré par HAMILTON, pour une homographie α. Cet opérateur produit une homographie, fonction de α seulement et que nous représenterons par $R\alpha$, telle que, **x** et **y** étant deux vecteurs arbitraires, on a :

$$R\alpha(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x})\wedge\alpha\mathbf{y}. \tag{25}$$

Admettons l'existence de cet opérateur; nous pouvons aussitôt démontrer la relation fondamentale, qui tient lieu des relations entre les éléments d'un déterminant et ses mineurs :

$$K\alpha . R\alpha = I_3\alpha. \tag{26}$$

On a en effet, pour le théorème de commutation,

$$K\alpha . R\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\times\mathbf{w} = R\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\times\alpha\mathbf{w} = (\alpha\mathbf{u})\wedge(\alpha\mathbf{v})\times\alpha\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} . I_3\alpha;$$

mais **u, v, w** sont des vecteurs arbitraires; la relation (26) est démontrée.

C'est cette relation qui va nous permettre d'assigner la forme de $R\alpha$. A cause de l'identité (22'), l'équation (26) peut s'écrire ainsi :

$$K\alpha . R\alpha = K\alpha . (K\alpha^2 - I_1\alpha . K\alpha + I_2\alpha);$$

par conséquent :

$$R\alpha = K\alpha^2 - I_1\alpha . K\alpha + I_2\alpha. \tag{27}$$

On tire de là aisément ces deux autres propriétés :

$$RK\alpha = KR\alpha = \alpha^2 - I_1\alpha . \alpha + I_2\alpha, \tag{28}$$

$$R\alpha . K\alpha = K\alpha . R\alpha = RK\alpha . \alpha = \alpha . KR\alpha = I_3\alpha. \tag{29}$$

Si α est un nombre réel m, on a, à cause de l'équation de définition (25),

$$Rm = m^2. \tag{30}$$

La recherche des invariants de l'homographie $R\alpha$ se fait bien simplement; il suffit d'appliquer deux fois de suite $R\alpha$ à l'équation (27), en ayant égard à (28), (29), (30). On trouve

$$(R\alpha)^3 - I_2\alpha . (R\alpha)^2 + I_1\alpha . I_3\alpha . R\alpha - (I_3\alpha)^2 = 0;$$

et si l'on écrit l'identité (22) pour l'homographie $R\alpha$, on a aussitôt

$$I_1R\alpha = I_2\alpha, \qquad I_2R\alpha = I_1\alpha . I_3\alpha, \qquad I_3R\alpha = (I_3\alpha)^2, \tag{31}$$

qui expriment des propriétés bien connues des déterminants formés avec les mineurs d'un déterminant.

On a encore les propriétés suivantes :

$$\mathrm{RR}\alpha = \mathrm{I}_3\alpha . \alpha, \tag{32}$$

$$\mathrm{R}(\alpha\beta) = \mathrm{R}\alpha . \mathrm{R}\beta, \tag{33}$$

$$\mathrm{RH}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \tag{34}$$

En effet, si nous substituons dans l'équation (27) $\mathrm{R}\alpha$ à la place α, nous obtiendrons

$$\mathrm{RR}\alpha = (\mathrm{KR}\alpha)^2 - \mathrm{I}_1\mathrm{R}\alpha . \mathrm{KR}\alpha + \mathrm{I}_2\mathrm{R}\alpha = \mathrm{KR}\alpha . (\alpha^2 - \mathrm{I}_1\alpha . \alpha + \mathrm{I}_2\alpha) - \mathrm{I}_2\alpha . \mathrm{KR}\alpha + \mathrm{I}_1\alpha . \mathrm{I}_3\alpha$$

à cause des équations (28) et (31). Donc, si l'on tient compte de l'équation (29), nous aurons

$$\mathrm{RR}\alpha = \mathrm{KR}\alpha . \alpha^2 = \mathrm{KR}\alpha . \alpha . \alpha = \mathrm{I}_3\alpha . \alpha$$

qui est l'équation (32).

Les deux autres équations (33) et (34) se démontrent sans difficulté en appliquant l'équation de définition (25).

Il est utile d'écrire cette équation (25) sous une forme différente. Changeons α en $\mathrm{R}\alpha$, pour l'équation (32) nous avons :

$$\mathrm{I}_3\alpha . \alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\mathrm{R}\alpha\mathbf{x}) \wedge \mathrm{R}\alpha\mathbf{y}. \tag{35}$$

Enfin, il faut observer que l'opérateur R n'est pas linéaire, tandis que I_1, K, D, V sont linéaires.

Dans les applications se présente fréquemment le cas d'appliquer l'opérateur R à une homographie β qui est la somme d'une homographie α avec une dyade.

Nous allons démontrer que

$$\mathrm{R}\left\{ \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\} = \mathrm{R}\alpha - \mathbf{v}\wedge . \alpha . \mathbf{u}\wedge . \tag{36}$$

On a, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ étant deux vecteurs arbitraires :

$$\mathrm{R}\left\{ \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \left\{ \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\} \mathbf{x} \wedge \left\{ \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\} \mathbf{y}.$$

En développant le second membre, on trouve

$$(\alpha\mathbf{x}) \wedge \alpha\mathbf{y} + \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{y} - \mathbf{u} \times \mathbf{y} . \mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{x},$$

ou encore

$$\mathrm{R}\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbf{v} \wedge \left\{ \mathbf{u} \times \mathbf{y} . \alpha\mathbf{x} - \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \alpha\mathbf{y} \right\}$$

et puisque

$$\mathbf{u} \times \mathbf{y} . \alpha\mathbf{x} - \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{y} . \mathbf{x} - \mathbf{u} \times \mathbf{x} . \mathbf{y}) = \alpha \left\{ \mathbf{u} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \right\},$$

on déduit l'équation (36), puisque $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est arbitraire.

Nous ferons encore une application de l'opérateur R à la démonstration de ces deux formules

$$\mathrm{I}_3\{\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\} = \mathrm{I}_3\alpha + \mathbf{u} \times \mathrm{KR}\alpha\mathbf{v}, \tag{37}$$

$$\alpha\mathrm{V}(\beta\alpha) = \mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha.\beta). \tag{38}$$

Supposons que les vecteurs arbitraires $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ne soient pas parallèles à un même plan. Si dans l'équation (18) nous substituons $\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ à α et si nous changeons $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en développant les produits au second membre et en observant que

$$\mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{b}) \wedge \alpha\mathbf{c} = \mathbf{v} \times \mathrm{R}\alpha(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \times \mathrm{KR}\alpha\mathbf{v},$$

on trouvera :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.\mathrm{I}_3\{\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$$
$$= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.\mathrm{I}_3\alpha + \mathrm{RK}\alpha\mathbf{v} \times \{\mathbf{u} \times \mathbf{a}.\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{b}.\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{c}.\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\}.$$

L'identité, très facile à démontrer,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{a}.\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{b}.\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{u} \times \mathbf{c}.\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.\mathbf{u},$$

nous fera alors démontrer l'équation (37).

Pour démontrer l'équation (38), nous supposerons que $\mathrm{I}_3\alpha = m \neq 0$; l'équation (26) nous donne

$$\mathrm{K}\alpha.\mathrm{R}\alpha.\beta.\alpha = m\beta\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha.\mathrm{R}\alpha.\beta.\alpha) = m\mathrm{V}(\beta\alpha).$$

D'après l'équation (8), nous avons aussi

$$2\mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha.\mathrm{R}\alpha.\beta.\alpha) \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{y} \times \mathrm{K}\alpha.\mathrm{R}\alpha.\beta.\alpha\mathbf{x} - \mathbf{x} \times \mathrm{K}\alpha.\mathrm{R}\alpha.\beta.\alpha\mathbf{y},$$

et le second membre de cette équation se transforme successivement ainsi :

$$\alpha\mathbf{y} \times (\mathrm{R}\alpha.\beta)\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} \times (\mathrm{R}\alpha.\beta)\alpha\mathbf{y} = 2\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha.\beta) \times (\alpha\mathbf{x}) \wedge \alpha\mathbf{y}$$
$$= 2\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha.\beta) \times \mathrm{R}\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 2\mathrm{K}\,\mathrm{R}\alpha\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha.\beta) \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}.$$

Donc

$$m\mathrm{V}(\beta\alpha) = \mathrm{KR}\alpha\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha.\beta);$$

en appliquant maintenant à cette équation, à gauche, l'opérateur α, l'équation (29) nous fera déduire la (38).

Puisque $\mathrm{I}_3\alpha \neq 0$, α est réversible, c'est-à-dire qu'il existe une homographie α telle que

$$\alpha\alpha' = 1.$$

On représente, selon l'usage, cette homographie α' (inverse de α) par α^{-1}. On pourra alors écrire l'équation (38) sous la forme :

$$\mathrm{V}(\beta\alpha) = \alpha^{-1}\mathrm{V}(\mathrm{R}\alpha\,.\,\beta)\,. \tag{39}$$

[**4**] Si m est un nombre, $\mathbf{u}$ un vecteur fonctions d'un point variable P, *les dérivées de* m, $\mathbf{u}$, *par rapport à* P, sont les opérateurs linéaires qui, appliqués à la différentielle arbitraire δP de P, donnent les différentielles correspondantes δm, $\delta\mathbf{u}$; de sorte que si nous représentons ces opérateurs par la notation de Leibniz par $\frac{dm}{dP}$, $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$, nous avons par définition :

$$\frac{dm}{dP}\delta P = dm, \qquad \frac{d\mathbf{u}}{dP}\delta P = d\mathbf{u}\,. \tag{40}$$

On voit aussitôt que les dérivées de vecteurs par rapport à un point sont des homographies vectorielles et que les propriétés formelles de ces dérivées sont les mêmes que celles des dérivées ordinaires.

Si nous rappelons la définition du gradient d'un nombre, c'est-à-dire

$$\delta m = \operatorname{grad} m \times \delta P,$$

nous pouvons écrire la première des équations (40)

$$\frac{dm}{dP}\delta P = \operatorname{grad} m \times \delta P. \tag{41}$$

Considérons l'homographie $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$; le premier invariant et le double du vecteur de cette homographie sont, par définition, la divergence et le rotationnel de $\mathbf{u}$; et l'on écrit :

$$\operatorname{div}_P \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP}, \tag{42}$$

$$\operatorname{rot}_P \mathbf{u} = 2\mathrm{V}\frac{d\mathbf{u}}{dP}. \tag{43}$$

De ces définitions découlent les propriétés de ces nouveaux opérateurs. Nous voulons seulement rappeler et démontrer les deux formules suivantes, parce qu'elles nous seront très utiles.

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}, \tag{44}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = \left(\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)\mathbf{u} - \left(\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\mathbf{v}. \tag{45}$$

Partons en effet de l'équation

$$\frac{d(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})}{dP}=\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dP}-\mathbf{v}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

et appliquons l'opérateur I_1. Il nous faudra avant tout calculer $I_1\left(\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)$.

Posons, pour brièveté, $\frac{d\mathbf{v}}{dP}=\alpha$. Le numérateur de $I_1(\mathbf{u}\wedge\alpha)$, d'après la formule (16), est

$$\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\times\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{a}+\ldots=(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge\mathbf{u}\times\alpha\mathbf{a}+\ldots,$$

et, si on développe les doubles produits vectoriels, le second membre se transforme dans la somme de trois termes qui se déduisent, avec permutations, de

$$\mathbf{u}\times\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\alpha\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\alpha\mathbf{b})=-2\mathbf{u}\times\mathbf{a}\,.\,V\alpha\times\mathbf{b}\wedge\mathbf{c},$$

à cause de l'équation (8). Mais

$$2V\alpha=2V\left(\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)=\operatorname{rot}\mathbf{v};$$

ce numérateur donc est égal à

$$-2\{\mathbf{u}\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}+\mathbf{u}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}+\mathbf{u}\times\mathbf{c}\,.\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}\times V\alpha=-2V\alpha\times\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\wedge\mathbf{c};$$

et par conséquent

$$I_1\left(\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)=-\mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

et la formule (44) est démontrée.

Nous avons encore

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=2V\left(\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)-2V\left(\mathbf{v}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right);$$

et il nous faut calculer

$$2V\left(\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)=2V(\mathbf{u}\wedge\alpha).$$

La formule (8) nous donne

$$2V(\mathbf{u}\wedge\alpha)\times\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}=\mathbf{y}\wedge\mathbf{u}\times\alpha\mathbf{x}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}\times\alpha\mathbf{y};$$

mais

$$I_1\alpha\,.\,\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\times\mathbf{u}=\mathbf{y}\wedge\mathbf{u}\times\alpha\mathbf{x}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}\times\alpha\mathbf{y}+\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\times\alpha\mathbf{u},$$

et par suite

$$2V(\mathbf{u}\wedge\alpha)\times\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}=(I_1\alpha\,.\,\mathbf{u}-\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{x}\wedge\mathbf{y};$$

et pour l'arbitrariété de $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$ nous aurons

$$2V(\mathbf{u}\wedge\alpha)=(I_1\alpha-\alpha)\,\mathbf{u}=\left(\operatorname{div}\mathbf{u}-\frac{d\mathbf{v}}{dP}\right)\mathbf{u},$$

et la formule (45) est aussi démontrée.

CHAPITRE II.

Les transformations de Lorentz.

[**1**] A un point P et à une valeur quelconque du temps t d'un système S faisons correspondre un point P' et un temps t' d'un autre système S' par les formules [13]

$$(1) \qquad \begin{cases} P' - O = \alpha(P - O) + t\mathbf{a}, \\ t' = (P - O) \times \mathbf{b} + mt; \end{cases}$$

$$(2) \qquad (P' - O)^2 - t'^2 = (P - O)^2 - t^2;$$

α est une homographie constante non singulière, dont le troisième invariant est positif; O est un point fixe; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ deux vecteurs, m un nombre positif plus grand que l'unité. Ces formules définissent une *transformation de Lorentz,* que nous dirons simplement L.

Si nous substituons les équations (1) dans le premier membre de (2), nous avons

$$\begin{aligned} &\alpha(P - O) \times \alpha(P - O) - (P - O) \times \mathbf{b}.(P - O) \times \mathbf{b} \\ &\quad + 2t\left\{\alpha(P - O) \times \mathbf{a} - m(P - O) \times \mathbf{b}\right\} + t^2(\mathbf{a}^2 - m^2) \\ &\quad = (P - O) \times \left\{\mathrm{K}\alpha.\alpha(P - O) - \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{b})(P - O)\right\} \\ &\quad + 2t(P - O) \times (\mathrm{K}\alpha\mathbf{a} - m\mathbf{b}) + t^2(\mathbf{a}^2 - m^2) \end{aligned}$$

pour le théorème de commutation et la définition de dyade [form. (9), (4), ch. I].

Cette expression doit être égale au second membre de (2) quel que soit t et le vecteur $P - O$; nous déduirons les formules fondamentales :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{K}\alpha.\alpha = 1 + \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{b}), \\ \mathrm{K}\alpha\mathbf{a} = m\mathbf{b}, \\ \mathbf{a}^2 = m^2 - 1. \end{cases}$$

---

(13) M.-E. Hahn dans son Mémoire : *Grundlagen zu einer Theorie der Lorentztransformationen* [Archiv der Mathematik und Physik, dritte Reihe, 21 B., 1-42 (1913)], a fait aussi usage d'une représentation semblable à (1) et puis exclusivement de la théorie des matrices quaternaires.

Ces formules permettent aussitôt de résoudre les équations (1) par rapport à $(P-O)$ et t. Appliquant en effet l'opérateur $\mathrm{K}\alpha$ à la première des équations (1), nous aurons :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\alpha(P'-O) &= \mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha(P-O)+t\,.\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{a}\\ &= (P-O)+(P-O)\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{b}+mt\mathbf{b}\\ &= P-O+t'\mathbf{b},\end{aligned}$$

et cette équation nous permettra de trouver $P-O$.

Puis encore la première des équations (1) nous donne :

$$\begin{aligned}(P'-O)\times\mathbf{a} &= \alpha(P-O)\times\mathbf{a}+t\mathbf{a}^2\\ &= (P-O)\times\mathrm{K}\alpha\mathbf{a}+t(m^2-1)\\ &= m\{(P-O)\times\mathbf{b}+mt\}-t=mt'-t;\end{aligned}$$

nous avons donc les formules

$$(1')\qquad \begin{cases} P-O=\mathrm{K}\alpha(P'-O)-t'\mathbf{b},\\ \quad t=-(P'-O)\times\mathbf{a}+mt'.\end{cases}$$

Alors, par la même méthode, de l'équation (2) découlent les autres formules

$$(3')\qquad \begin{cases} \alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha = 1+\mathrm{H}(\mathbf{a},\mathbf{a}),\\ \alpha\mathbf{b}=m\mathbf{a},\\ \mathbf{b}^2=m^2-1.\end{cases}$$

On voit que (1′) et (3′) se déduisent de (1) et (3) en changeant α, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ respectivement en $\mathrm{K}\alpha$, $-\mathbf{b}$, $-\mathbf{a}$; et que les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont le même module.

Les deux homographies $\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha$ et $\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha$ sont des dilatations, car elles coïncident avec leurs conjuguées, puisque

$$\mathrm{K}(\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha)=\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{KK}\alpha=\mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha;$$

puis observons que

$$(4)\qquad \alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{a}=m^2\mathbf{a},$$

$$(4')\qquad \mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{b}=m^2\mathbf{b},$$

puisque

$$\alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathrm{H}(\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{a}=\mathbf{a}(1+\mathbf{a}^2)=m^2\mathbf{a};$$

et si $\mathbf{u}$ est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{a}$ ou à $\mathbf{b}$, on a aussi

$$(5)\qquad \alpha\,.\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{u}=\mathbf{u},\qquad \mathbf{u}\times\mathbf{a}=0;$$

$$(5')\qquad \mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{u}=\mathbf{u},\qquad \mathbf{u}\times\mathbf{b}=0.$$

Ces relations expriment que :

La dilatation $\alpha . K\alpha$ *a pour directions doubles la direction* $\mathbf{a}$ *et toutes les directions normales à* $\mathbf{a}$; *la dilatation* $K\alpha . \alpha$ *a pour directions doubles la direction* $\mathbf{b}$ *et toutes les directions normales à* $\mathbf{b}$.

Les autres propriétés des transformations L dont nous aurons à faire usage sont les suivantes :

$$I_3\alpha = m; \tag{6}$$

$$R\alpha\mathbf{b} = \mathbf{a}, \qquad RK\alpha\mathbf{a} = \mathbf{b}; \tag{7}$$

$$K\alpha = \alpha^{-1} + \frac{1}{m}H(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \qquad \alpha = K\alpha^{-1} + \frac{1}{m}H(\mathbf{b}, \mathbf{a}); \tag{8}$$

$$R\alpha = m\alpha - H(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \qquad RK\alpha = mK\alpha - H(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \tag{9}$$

$$R\alpha . RK\alpha = m^2 - H(\mathbf{a}, \mathbf{a}), \qquad RK\alpha . R\alpha = m^2 - H(\mathbf{b}, \mathbf{b}); \tag{10}$$

$$(\alpha\mathbf{u})\wedge\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{b}), \qquad (K\alpha\mathbf{u})\wedge\mathbf{b} = K\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{a}). \tag{11}$$

En effet, si $\mathbf{i}$ est un vecteur unitaire parallèle à $\mathbf{a}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ deux autres vecteurs unitaires normaux à $\mathbf{a}$ et entre eux, de manière que $\mathbf{i}\times\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = 1$, la formule (18) du chapitre I appliquée à l'homographie $\alpha . K\alpha$ nous donne

$$I_3(\alpha . K\alpha) = (\alpha . K\alpha\mathbf{i}) \times (\alpha . K\alpha\mathbf{j}) \wedge (\alpha . K\alpha\mathbf{k}) = I_3\alpha . I_3K\alpha = (I_3\alpha)^2,$$

et, à cause de (4) et (5), on aura

$$(I_3\alpha)^2 = m^2\mathbf{i}\times\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = m^2,$$

qui démontre l'équation (6), puisque $I_3\alpha$ et m sont positifs.

Appliquons l'opérateur $R\alpha$ à la deuxième des équations (3); on aura

$$R\alpha . K\alpha\mathbf{a} = mR\alpha\mathbf{b} = I_3\alpha . \mathbf{a},$$

pour l'équation (26) du chapitre I, c'est-à-dire la première des équations (7).

Des deux premières équations (3'), en leur appliquant l'opérateur α^{-1}, nous déduirons

$$K\alpha = \alpha^{-1} + \alpha^{-1} . H(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \alpha^{-1} + H(\mathbf{a}, \alpha^{-1}\mathbf{a})$$
$$\mathbf{b} = m\alpha^{-1}\mathbf{a};$$

de ces deux équations résulte la première des équations (8).

Cette même équation peut s'écrire

$$mK\alpha = m\alpha^{-1} + H(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

mais

$$m\alpha^{-1} = RK\alpha . \alpha . \alpha^{-1} = RK\alpha,$$

et ainsi se trouve démontrée la deuxième des équations (9). Même démonstration pour l'autre.

Les équations (10) peuvent se démontrer de deux manières différentes. Nous pouvons appliquer $R\alpha$ à la deuxième des équations (9) et nous aurons

$$R\alpha . RK\alpha = m . R\alpha . K\alpha - H(\mathbf{a}, R\alpha\mathbf{b}) = m^2 - H(\mathbf{a}, \mathbf{a}),$$

c'est-à-dire la première des équations (10).

Ou bien nous pouvons appliquer l'opérateur R à la première des équations (3'). Les équations (33), (36) du chapitre I nous donnent :

$$R(\alpha . K\alpha) = R\alpha . RK\alpha = 1 - \mathbf{a}\wedge . \mathbf{a}\wedge .$$

Disons σ l'homographie qui est le produit des deux homographies axiales $\mathbf{a}\wedge$, $\mathbf{a}\wedge$; pour $\mathbf{x}$ arbitraire, on a

$$\sigma\mathbf{x} = \mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{x}) = \mathbf{a}\times\mathbf{x} . \mathbf{a} - \mathbf{a}^2 . \mathbf{x} = H(\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{x} - \mathbf{a}^2 . \mathbf{x},$$

c'est-à-dire

$$\sigma = H(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}^2;$$

en se rappelant la troisième des équations (3), on déduira la première des équations (10).

Enfin, pour démontrer les équations (11), observons que

$$(\alpha\mathbf{u})\wedge\mathbf{a} = \frac{1}{m}(\alpha\mathbf{u})\wedge\alpha\mathbf{b} = \frac{1}{m}R\alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{b});$$

et que

$$R\alpha = m . K\alpha^{-1}, \qquad K\alpha^{-1}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{u}\wedge\mathbf{b})$$

à cause de la deuxième équation (8).

Si α est une dilatation, nous avons une *transformation particulière de Lorentz*.

Dans ce cas, puisque $K\alpha = \alpha$, les deux premières des équations (3), (3') nous donnent

$$H(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = H(\mathbf{b}, \mathbf{b});$$

de manière que si $\mathbf{x}$ est un vecteur arbitraire,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{x} . \mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{x} . \mathbf{b};$$

$\mathbf{a}$ est parallèle à $\mathbf{b}$; et puisque ces deux vecteurs ont le même module, nous pouvons toujours supposer

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Les équations (4) et (5) deviennent, dans ce cas :

$$\alpha^2\mathbf{a} = m^2\mathbf{a}, \qquad \alpha^2\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}\times\mathbf{a} = 0;$$

donc **a** et les directions normales à **a** sont doubles pour α^2 et par conséquent pour α, et l'on a

$$\alpha\mathbf{a} = m\mathbf{a}, \qquad \alpha\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{a} = 0.$$

La première de ces deux équations est la même que la deuxième des équations (3) ou (3'); pour que l'autre soit satisfaite, il faut que α soit de la forme

$$\alpha = 1 + h\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}),$$

h étant un nombre. En substituant dans la première, on a

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a} + h\mathbf{a}^2 . \mathbf{a} = m\mathbf{a},$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{1}{m+1}.$$

En définitive, la forme de α est

$$(12) \qquad \alpha = 1 + \frac{1}{m+1}\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

Appliquons l'opérateur α^{-1}; puisque

$$\alpha^{-1}\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{m}\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}),$$

nous aurons

$$(13) \qquad \alpha^{-1} = 1 - \frac{1}{m(m+1)}\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

Les formules suivantes sont aussi faciles à démontrer :

$$(14) \qquad \begin{cases} \alpha . \mathbf{a}\wedge = \mathbf{a}\wedge\alpha, \\ \alpha^{-1} . \alpha\wedge = \mathbf{a}\wedge\alpha^{-1}. \end{cases}$$

[**2**] Représentons par

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{dP'}{dt'}$$

les vitesses de deux points P, P' aux instants t, t'. La dérivation des équations (1), (1') nous donnera

$$(15) \qquad n\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v} + \mathbf{a},$$

$$(15') \qquad n'\mathbf{v} = \mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b},$$

n et n' étant deux nombres fonctions de P et de t et par conséquent de P' et de t', tels que

$$n = m + \mathbf{v} \times \mathbf{b}, \tag{16}$$

$$n' = m - \mathbf{v}' \times \mathbf{a}. \tag{16'}$$

On a la relation

$$nn' = 1. \tag{17}$$

Appliquons l'opérateur Kα à l'équation (15), multiplions (16) par $\mathbf{b}$; on trouve

$$n(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b}) = \mathrm{K}\alpha . \alpha\mathbf{v} + \mathrm{K}\alpha\mathbf{a} - m\mathbf{b} - \mathbf{v} \times \mathbf{b} . \mathbf{b} = \mathbf{v},$$

puisque

$$\mathrm{K}\alpha . \alpha\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{b} . \mathbf{b}$$

à cause de la première des équations (3). En comparant l'équation obtenue avec (15') nous démontrerons l'équation (17).

Les équations (15) et (16) ont la même forme des équations (1); il suffit de substituer $\mathbf{v}$ à $P - O$, l'unité à t, $n\mathbf{v}'$ à $P' - O$, n à t'; et les équations (15'), (16') ont la même forme des équations (1'). Alors on déduit aussitôt :

$$n^2(1 - \mathbf{v}'^2) = 1 - \mathbf{v}^2. \tag{18}$$

En appliquant l'opérateur RKα et Rα aux équations (15) et (15'), nous aurons :

$$n . \mathrm{RK}\alpha\mathbf{v}' = m\mathbf{v} + \mathbf{b}, \tag{19}$$

$$n' . \mathrm{R}\alpha\mathbf{v} = m\mathbf{v}' - \mathbf{a}. \tag{19'}$$

Nous considérerons maintenant deux autres homographies γ, γ' fonctions de P et de t (et par conséquent de P' et de t') et déduites de l'homographie constante α au moyen des formules

$$\gamma = \alpha + \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a}), \tag{20}$$

$$\gamma' = \mathrm{K}\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{b}). \tag{20'}$$

Nous démontrerons avant tout la relation fondamentale

$$\gamma\gamma' = 1. \tag{21}$$

Le produit des équations (20), (20') donne en effet

$$\begin{aligned}\gamma\gamma' &= \alpha . \mathrm{K}\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a}) . \mathrm{K}\alpha - \alpha . \mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{b}) - \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a}) , \mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{b}) \\ &= 1 + \mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + \mathrm{H}(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{a}) - \mathrm{H}(\mathbf{v}', \alpha\mathbf{b}) - \mathbf{v} \times \mathbf{b} . \mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{a})\end{aligned}$$

[équations (13), (14), (15) du chapitre I]. Mais, pour l'équation (15),

$$\mathrm{H}(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{a}) = n\mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{a}) - \mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{a}),$$

$$\mathrm{H}(\mathbf{v}', \alpha\mathbf{b}) + \mathbf{v}\times\mathbf{b}\,.\,\mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{a}) = (m + \mathbf{v}\times\mathbf{b})\mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{a}) = n\mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{a});$$

par conséquent, le second membre du produit $\gamma\gamma'$ se réduit effectivement à l'unité.

De la propriété que nous avons démontrée découlent deux conséquences intéressantes. On a, de (21),

$$\mathrm{I}_3\gamma\,.\,\mathrm{I}_3\gamma' = 1,$$

donc $\mathrm{I}_3\gamma$ et $\mathrm{I}_3\gamma'$ sont différents de zéro et les homographies γ et γ' sont propres.

Alors

$$\gamma' = \gamma^{-1}$$

et

$$\gamma'\gamma = \gamma^{-1}.\gamma = 1,$$

c'est-à-dire nous avons aussi

$$\gamma'\gamma = 1, \tag{21'}$$

que nous aurions pu obtenir aussi directement et par un calcul tout à fait semblable au précédent.

Les autres propriétés de ces homographies qui nous seront utiles dans la suite, sont les suivantes :

$$\mathrm{K}\gamma = \mathrm{K}\alpha + \mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{v}), \qquad \mathrm{K}\gamma' = \alpha - \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{v}'); \tag{22}$$

$$\mathrm{I}_3\gamma = n, \qquad \mathrm{I}_3\gamma' = n'; \tag{23}$$

$$\mathrm{R}\gamma = n\,.\,\mathrm{K}\gamma', \qquad \mathrm{R}\gamma' = n'.\,\mathrm{K}\gamma; \tag{24}$$

$$\mathrm{KR}\gamma = n\,.\,\gamma', \qquad \mathrm{KR}\gamma' = n'.\gamma. \tag{25}$$

A cause de la relation (21), il suffira évidemment de démontrer les premières de ces formules; les autres (à droite) en découlent tout de suite.

L'équation (22) est une conséquence immédiate de (20) et de l'équation (12) du chapitre I. Puis la relation (37) (ch. I), nous donne

$$\mathrm{I}_3\gamma = \mathrm{I}_3\alpha + \mathbf{v}\times\mathrm{RK}\alpha\mathbf{a} = m + \mathbf{v}\times\mathbf{b} = n,$$

ce qui démontre l'équation (23).

Puisque nous avons

$$\mathrm{K}\gamma\,.\,\mathrm{K}\gamma' = 1,$$

on pourra écrire la relation (26) du chapitre I

$$\mathrm{K}\gamma\,.\,\mathrm{R}\gamma = \mathrm{I}_3\gamma = n\mathrm{K}\gamma\,.\,\mathrm{K}\gamma'$$

ou bien

$$\mathrm{K}\gamma(\mathrm{R}\gamma - n\mathrm{K}\gamma') = 0;$$

mais γ et par suite $K\gamma$ est une homographie propre; si nous appliquons à cette équation, à gauche, l'opérateur $K\gamma^{-1}$, nous déduirons l'équation (24).

Pour démontrer enfin l'équation (25), il faut appliquer l'opérateur K à la (24).

On pourrait encore démontrer très facilement ces autres relations :

$$(26) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \gamma\mathbf{b} = n\mathbf{a}, & \gamma'\mathbf{a} = n'\mathbf{b}; \\ K\alpha.\gamma\mathbf{b} = mn\mathbf{b}, & \alpha.\gamma'\mathbf{a} = mn'\mathbf{a}; \\ RK\alpha.\gamma\mathbf{b} = n\mathbf{b}, & R\alpha.\gamma'\alpha = n'\mathbf{a}. \end{array}\right.$$

Nous démontrerons enfin ce théorème.

Si le vecteur $\mathbf{u}$, fonction de P et de t, pour la transformation L se transforme en $\mathbf{u}'$ tel que

$$(27) \qquad \mathbf{u}' = \gamma\mathbf{u},$$

nous aurons

$$(28) \qquad \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{b} + m\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

et encore inversement

$$(29) \qquad \mathbf{u} = \gamma'\mathbf{u}',$$

$$(30) \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{u}' \times \mathbf{a} + m\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'.$$

Multiplions l'équation (27) intérieurement par $\mathbf{v}'$; le théorème de commutation nous donnera

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{v}' \times \gamma\mathbf{u} = \mathbf{u} \times K\gamma\mathbf{v}',$$

et puisque

$$K\gamma\mathbf{v}' = K\alpha\mathbf{v}' + \mathbf{a} \times \mathbf{v}'.\mathbf{v} = n'\mathbf{v} + \mathbf{b} + (m - n')\mathbf{v} = \mathbf{b} + m\mathbf{v},$$

à cause des équations (22), (15'), (16'); la relation (28) est démontrée.

Les équations (29), (30) découlent immédiatement de (27) et (28).

[**3**] Voyons enfin quelques applications bien simples de ces propriétés.

a) Soient

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad \mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$$

les accélérations de deux points P, P' aux instants t, t' dans les systèmes S, S'.

On a les formules :

$$(31) \qquad \mathbf{w}' = \frac{1}{n^2} K\gamma'\mathbf{w},$$

$$(32') \qquad \mathbf{w} = \frac{1}{n'^2} K\gamma\mathbf{w}'.$$

On les démontre sans difficulté, si l'on observe que

$$\frac{dt}{dt'} = m - \mathbf{a} \times \mathbf{v}' = n'$$

et que de l'équation (15), on a

$$\mathbf{w}' = \frac{1}{n} \frac{(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b})\alpha\mathbf{w} - (\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a})\mathbf{b} \times \mathbf{w}}{(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b})^2},$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{w}' = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\alpha\mathbf{w} - n\mathbf{v}'.\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{w}}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left\{\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{v}')\right\}\mathbf{w};$$

c'est l'équation (31), si l'on tient compte de (22).

En appliquant $\mathrm{K}\gamma$ à l'équation (31) on déduira (31')

b) Posons

(32) $$\mathbf{w}_1 = \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \frac{(1 - \mathbf{v}^2)\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.\mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v}^2)^{3/2}},$$

(33) $$\mathbf{w}_1' = \frac{d}{dt'}\frac{\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - \mathbf{v}'^2}} = \frac{(1 - \mathbf{v}'^2)\mathbf{w}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{w}'.\mathbf{v}'}{(1 - \mathbf{v}'^2)^{3/2}}.$$

Nous démontrerons que

(34) $$\mathbf{w}_1' = \mathrm{KR}\gamma'\mathbf{w}_1,$$

(34') $$\mathbf{w}_1 = \mathrm{KR}\gamma\,\mathbf{w}_1'.$$

Nous avons successivement [équation (18)]

$$(1 - \mathbf{v}'^2) = n'^2(1 - \mathbf{v}^2),$$
$$(1 - \mathbf{v}'^2)\mathbf{w}' = n'^4(1 - \mathbf{v}^2)\mathrm{K}\gamma'\mathbf{w} = n'^4(1 - \mathbf{v}^2)(\alpha\mathbf{w} - \mathbf{b} \times \mathbf{w}.\mathbf{v}'),$$
$$\mathbf{v}' \times \mathbf{w}' = n'^2\mathbf{v}' \times \mathrm{K}\gamma'\mathbf{w} = n'^2\mathbf{w} \times \gamma'\mathbf{v}' = n'^2\mathbf{w} \times (\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{v}'^2.\mathbf{b}),$$

et cette dernière, à cause de l'équation (15'), peut encore s'écrire

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{w}' = n'^2\mathbf{w} \times \left\{n'\mathbf{v} + n'^2(1 - \mathbf{v}^2)\mathbf{b}\right\}.$$

Le numérateur de (33) est donc égal à

$$\begin{aligned} n'^4(1 - \mathbf{v}^2)\alpha\mathbf{w} + n'^3\mathbf{v} \times \mathbf{w}.\mathbf{v}' &= n'^4\left\{(1 - \mathbf{v}^2)\alpha\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a})\right\} \\ &= n'^4\left\{(1 - \mathbf{v}^2)(\alpha\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.\mathbf{a}) + \mathbf{v} \times \mathbf{w}(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{v}^2.\mathbf{a})\right\} \\ &= n'^4\gamma\left\{(1 - \mathbf{v}^2)\mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.\mathbf{v}\right\}; \end{aligned}$$

par conséquent

$$\mathbf{w}_1' = n'\gamma\mathbf{w}_1;$$

cette équation, d'après (25), est équivalente à la (34).

L'équation (34') se déduit de (34) en lui appliquant $\mathrm{KR}\gamma$.

c) Représentons par dP_0 un déplacement infiniment petit de P pour $t = \text{const.}$, et par dP'_0 le déplacement de P' pour $t' = \text{const.}$ Nous démontrerons que

$$dP'_0 = \mathrm{K}\gamma' dP_0, \tag{35}$$

$$dP_0 = \mathrm{K}\gamma dP'_0. \tag{35'}$$

Nous avons en effet

$$dP = dP_0 + \mathbf{v}dt; \tag{a}$$

puis les équations (1), pour $t' = \text{const.}$, nous donnent

$$dP'_0 = \alpha dP + \mathbf{a}dt, \tag{b}$$

$$0 = \mathbf{b} \times dP + m dt. \tag{c}$$

L'élimination de dt entre (a) et (c) donne

$$dP = dP_0 - \frac{\mathbf{b} \times dP}{m}\mathbf{v};$$

et, si nous multiplions intérieurement par $\mathbf{b}$,

$$\frac{1}{m}\mathbf{b} \times dP(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times dP_0.$$

Nous avons donc

$$-dt = \frac{1}{m}\mathbf{b} \times dP = n'\mathbf{b} \times dP_0;$$

et l'équation (b) devient

$$\begin{aligned} dP'_0 &= \alpha dP_0 + (\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a})dt = \alpha dP_0 - n\mathbf{v}'.n'\mathbf{b} \times dP_0 \\ &= \{\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{v}', \mathbf{b})\} dP_0, \end{aligned}$$

qui est l'équation (35).

Si nous représentons par $d\tau$, $d\tau'$ les éléments de volume de S et de S' pour $t = \text{const.}$ et $t' = \text{const.}$, on a aisément :

$$d\tau' = \mathrm{I}_3\gamma'.d\tau = n'd\tau. \tag{36}$$

Il suffit de considérer trois déplacements dP_{10}, dP_{20}, dP_{30} de P non parallèles à un même plan, et les déplacements dP'_{10}, ... de P'; alors

$$\begin{aligned} d\tau' &= P'_{10} \wedge dP'_{20} \times dP'_{30} = (\mathrm{K}\gamma' dP_{10}) \wedge (\mathrm{K}\gamma' dP_{20}) \times \mathrm{K}\gamma' dP_{30} \\ &= \mathrm{K}\mathrm{R}\gamma'(dP_{10} \wedge dP_{20}) \times \mathrm{K}\gamma' dP_{30} = dP_{10} \wedge dP_{20} \times \mathrm{R}\gamma'.\mathrm{K}\gamma' dP_{30} \\ &= \mathrm{I}_3\gamma'.d\tau \end{aligned}$$

[équation (26) du chapitre I].

Si l'on tient compte de l'équation (18) et de la valeur de $\frac{dt}{dt'} = n'$, nous pouvons écrire l'équation (36) sous ces deux autres formes :

$$\frac{d\tau'}{\sqrt{1 - \mathbf{v}'^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \tag{37}$$

$$d\tau' dt' = d\tau\, dt \text{ [14]}. \tag{38}$$

[14] En appliquant des méthodes connues, on pourra traduire les formules de ce chapitre et celles des chapitres suivants en coordonnées cartésiennes orthogonales. On aura des formules très compliquées : on en peut voir un exemple dans un ouvrage récent de M. Max Weinstein, *Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie*. Leipzig, A. Barth, 1913.

CHAPITRE III.

Formules de transformation.

Nous nous proposons de résoudre ce problème.

φ est un nombre, $\mathbf{u}$ un vecteur fonctions de P et de t, que l'on a assujettis à une transformation L; il s'agit d'exprimer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'}, \quad \mathrm{grad}_{P'}\,\varphi, \quad \mathrm{div}_{P'}\,\mathbf{u}, \quad \mathrm{rot}_{P'}\,\mathbf{u},$$

en fonction de φ et de $\mathbf{u}$.

Les formules de transformation que nous démontrerons sont les suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = m\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathrm{grad}_P\,\varphi \times \mathbf{b}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} = m\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathbf{b}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathrm{K}\alpha - \mathrm{H}\left(\mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right), \tag{3}$$

$$\mathrm{grad}_{P'}\,\varphi = \alpha\,\mathrm{grad}_P\,\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathbf{a}, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}_{P'}\,\mathbf{u} = \mathrm{div}_P\,\mathrm{K}\alpha\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{a}, \tag{5}$$

$$\mathrm{rot}_{P'}\,\mathbf{u} = \mathrm{R}\alpha\left\{\mathrm{rot}_P\,(\alpha^{-1}\mathbf{u})\right\} - \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \tag{6}$$

Les formules inverses sont :

$$(1') \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = m\frac{\partial \varphi}{\partial t'} + \mathrm{grad}_{P'}\, \varphi \times \mathbf{a},$$

$$(2') \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = m\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'}\mathbf{a},$$

$$(3') \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'}\alpha + \mathrm{H}\left(\mathbf{b}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'}\right),$$

$$(4') \qquad \mathrm{grad}_P\, \varphi = \mathrm{K}\alpha\, \mathrm{grad}_{P'}\, \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t'}\mathbf{b},$$

$$(5') \qquad \mathrm{div}_P\, \mathbf{u} = \mathrm{div}_{P'}\, \alpha\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} \times \mathbf{b},$$

$$(6') \qquad \mathrm{rot}_P\, \mathbf{u} = \mathrm{RK}\alpha \left\{ \mathrm{rot}_{P'}\, (\mathrm{K}\alpha^{-1}\mathbf{u}) \right\} + \mathbf{b} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'}.$$

Observons avant tout que si nous regardons P et t fonctions seulement de t' [équations (1′) du chapitre II], nous avons

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = m, \qquad \frac{\partial P}{\partial t'} = -\mathbf{b};$$

et si au contraire nous les regardons comme fonctions seulement de P', les mêmes équations nous donnent :

$$\frac{\partial P}{\partial P'} = \mathrm{K}\alpha, \qquad \frac{\partial t}{\partial P'}dP' = -\mathbf{a} \times dP'.$$

Alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial \varphi}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t'} = m\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial P}\mathbf{b}$$

et si nous rappelons l'équation (41) du chapitre I nous trouverons l'équation (1).

Par le même procédé, on démontrera l'équation (2).

Pour prouver (3), nous observons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'}dP' &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial P'}dP' + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial P'}dP' \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathrm{K}\alpha\, dP' - \mathbf{a} \times dP'\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P}\mathrm{K}\alpha - \mathrm{H}\left(\mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) \right\} dP'.\end{aligned}$$

et cette équation, puisque dP' est arbitraire, nous fait démontrer l'équation (3).

Nous avons encore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P'} dP' = \frac{\partial \varphi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial P'} dP' + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial P'} dP'$$

ou bien [équation (41), chapitre I] :

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{P'} \varphi \times dP' &= \operatorname{grad}_P \varphi \times \mathrm{K}\alpha\, dP' - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{a} \times dP' \\ &= (\alpha \operatorname{grad}_P \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{a}) \times dP'; \end{aligned}$$

mais dP' est arbitraire; l'équation (4) est démontrée.

Pour démontrer enfin les équations (5), (6), il suffira de calculer le premier invariant et le vecteur [équations (42), (43) du chapitre I] de l'homographie $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'}$.

D'après (3), nous avons

$$\operatorname{div}_{P'} \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'} = \mathrm{I}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} . \mathrm{K}\alpha \right) - \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

à cause aussi de l'équation (21) du chapitre I.

Mais pour les identités (24) du chapitre I, on a

$$\mathrm{I}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} . \mathrm{K}\alpha \right) = \mathrm{I}_1 \left(\mathrm{K}\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} \right) = \mathrm{I}_1 \left(\frac{\partial \mathrm{K}\alpha \mathbf{u}}{\partial P} \right) = \operatorname{div}_P \mathrm{K}\alpha \mathbf{u}$$

et l'équation (5) est démontrée.

En appliquant à l'équation (3) l'opérateur V, nous aurons [équation (11), chapitre I] :

$$2\mathrm{V} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P'} \right) = \operatorname{rot}_{P'} \mathbf{u} = 2\mathrm{V} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} . \mathrm{K}\alpha \right) - \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Ensuite, équation (39), chapitre I :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{V} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} . \mathrm{K}\alpha \right) &= 2\mathrm{K}\alpha^{-1} \mathrm{V} \left(\mathrm{KR}\alpha . \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} \right) = 2\mathrm{K}\alpha^{-1} \mathrm{V} \left(\frac{\partial \mathrm{KR}\alpha \mathbf{u}}{\partial P} \right) \\ &= \mathrm{K}\alpha^{-1} \left\{ \operatorname{rot}_P (\mathrm{KR}\alpha \mathbf{u}) \right\}; \end{aligned}$$

et si nous observons que

$$\mathrm{K}\alpha^{-1} = \frac{1}{m} \mathrm{R}\alpha, \qquad \mathrm{KR}\alpha = m\alpha^{-1},$$

nous obtiendrons l'équation (6).

On pourrait maintenant appliquer une méthode tout à fait semblable pour démontrer les équations (1'), ..., (6'). Mais on peut aussi les déduire directement.

La comparaison des formules (1) et (4) avec les équations (1) du chapitre II montre que ces équations deviennent respectivement (4) et (1) si nous changeons $P - O$ en $\text{grad}_P\,\varphi$; $P' - O$ en $\text{grad}_{P'}\,\varphi$; t en $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, t' en $-\frac{\partial\varphi}{\partial t'}$: alors de (1) et (4) découlent aussitôt les équations (1′) et (4′).

Si l'on change $\mathbf{u}$ en $\alpha\mathbf{u}$ dans l'équation (5), on a [équation (3), chapitre II] :

$$\begin{aligned}\text{div}_{P'}\,\alpha\mathbf{u} &= \text{div}_P\,(\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{b}) - \alpha\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{a}\\ &= \text{div}_P\,\mathbf{u} + \text{div}_P\,(\mathbf{u}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{b}) - \alpha\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\text{div}_P\,(\mathbf{u}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{b}) = \text{grad}_P\,(\mathbf{u}\times\mathbf{b})\times\mathbf{b} = (\mathrm{K}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial P}\,\mathbf{b})\times\mathbf{b} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial P}\,\mathbf{b}\times\mathbf{b} \quad (^{15}),$$

$$\alpha\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathrm{K}\alpha\mathbf{a} = m\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{b};$$

par conséquent

$$\text{div}_{P'}\,\alpha\mathbf{u} = \text{div}_P\,\mathbf{u} - \mathbf{b}\times(m\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial P}\,\mathbf{b}),$$

qui, pour l'équation (2), démontre l'équation (5′).

On pourrait aussi déduire, par la même méthode, l'équation (6′) en changeant dans l'équation (6) $\mathbf{u}$ en $\mathrm{K}\alpha^{-1}\mathbf{u}$.

Une autre forme des équations (6) et (6′) peut se déduire en appliquant l'opérateur $\mathrm{K}\alpha$ à la première et α à la deuxième; et nous trouverons

$$(7)\qquad \mathrm{K}\alpha\,\text{rot}_{P'}\,\mathbf{u} = m\,\text{rot}_P\,(\alpha^{-1}\mathbf{u}) - \mathrm{K}\alpha\left(\mathbf{a}\wedge\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right),$$

$$(7')\qquad \alpha\,\text{rot}_P\,\mathbf{u} = m\,\text{rot}_{P'}\,(\mathrm{K}\alpha^{-1}\mathbf{u}) + \alpha\left(\mathbf{b}\wedge\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t'}\right);$$

ou encore [équations (11), ch. II] :

$$(8)\qquad \mathrm{K}\alpha\,\text{rot}_{P'}\,\mathbf{u} = \text{rot}_P\,(\mathrm{RK}\alpha\mathbf{u}) - \mathbf{b}\wedge\frac{\partial\mathrm{K}\alpha\mathbf{u}}{\partial t},$$

$$(8')\qquad \alpha\,\text{rot}_P\,\mathbf{u} = \text{rot}_{P'}\,(\mathrm{R}\alpha\mathbf{u}) + \mathbf{a}\wedge\frac{\partial\alpha\mathbf{u}}{\partial t'}.$$

---

(15) Nous faisons usage de ces deux formules :

$\text{div}\,(m\mathbf{u}) = m\,\text{div}\,\mathbf{u} + \text{grad}\,m\times\mathbf{u}$ (*Éléments*, p. 73, [4]).

$\text{grad}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{v} + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{u}$ (*Analyse vect.*, , p. 81, [1]).

CHAPITRE IV.

Le principe de relativité.

[**1**] Les équations de l'électrodynamique de Lorentz ont la forme bien connue

$$\operatorname{rot}_p \mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \rho \mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}_p \mathbf{e} = \rho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}_p \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}_p \mathbf{m} = 0. \tag{4}$$

On a supposé la vitesse c de la lumière égale à l'unité; $\frac{\rho}{4\pi}$ est la densité électrique; $\mathbf{v}$ la vitesse des électrons par rapport à l'éther supposé immobile; $\mathbf{e}$, $\mathbf{m}$ sont les vecteurs électromagnétiques de la force électrique et magnétique.

Nous nous proposons avant tout de transformer le système des équations (1), ..., (4) lorsqu'on lui applique une transformation L et nous démontrerons que :

le système des équations (1), ..., (4) se transforme dans le système

$$\operatorname{rot}_{p'} \mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial t'} = \rho' \mathbf{v}', \tag{1'}$$

$$\operatorname{div}_{p'} \mathbf{e}' = \rho', \tag{2'}$$

$$\operatorname{rot}_{p'} \mathbf{e}' + \frac{\partial \mathbf{m}'}{\partial t'} = 0, \tag{3'}$$

$$\operatorname{div}_{p'} \mathbf{m}' = 0; \tag{4'}$$

ρ', $\mathbf{v}'$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{e}'$ sont liés à ρ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}$ par les relations

$$\rho' = \rho(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b}), \tag{5}$$

$$\rho'\mathbf{v}' = \rho(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a}), \tag{6}$$

$$\mathbf{m}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{e}, \tag{7}$$

$$\mathbf{e}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} - \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{m}; \tag{8}$$

réciproquement

$$\rho = \rho'(m - \mathbf{v}' \times \mathbf{a}), \tag{5'}$$

$$\rho\mathbf{v} = \rho'(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}' - \mathbf{b}), \tag{6'}$$

$$\mathbf{m} = \mathrm{RK}\alpha\mathbf{m}' - \mathbf{b} \wedge \mathrm{K}\alpha\mathbf{e}', \tag{7'}$$

$$\mathbf{e} = \mathrm{RK}\alpha\mathbf{e}' + \mathbf{b} \wedge \mathrm{K}\alpha\mathbf{m}'. \tag{8'}$$

Ce théorème a été appelé par Minkowski « théorème de relativité » ([16]).

Commençons par transformer les équations (1), (2); et pour cela multiplions la première intérieurement par $\mathbf{b}$, la deuxième par $m = \mathrm{I}_3\alpha$ et ajoutons membre à membre; on a

$$m\,\mathrm{div}_P\,\mathbf{e} + \mathbf{b} \times \mathrm{rot}_P\,\mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \times \mathbf{b} = \rho(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b}),$$

ou encore [équation (44), chapitre I] :

$$\mathrm{div}_P\,(m\mathbf{e} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{m}) - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \times \mathbf{b} = \rho(m + \mathbf{v} \times \mathbf{b}). \tag{a}$$

Nous définirons ensuite un nombre ρ', d'après l'équation (5) et un vecteur $\mathbf{e}'$ tel que

$$\mathrm{K}\alpha\mathbf{e}' = m\mathbf{e} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{m}. \tag{9}$$

De cette équation on déduit, en multipliant intérieurement par $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{b} \times \mathrm{K}\alpha\mathbf{e}' = m\mathbf{b} \times \mathbf{e}$$

ou bien, puisque le premier membre est égal à

$$\mathbf{e}' \times \alpha\mathbf{b} = m\mathbf{e}' \times \mathbf{a},$$

nous aurons

$$\mathbf{e} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}' \times \mathbf{a}. \tag{10}$$

([16]) Si on se rappelle les formules (9) du chapitre II, on pourra faire figurer dans les équations (7), (8), (7'), (8') l'homographie α et sa conjuguée $\mathrm{K}\alpha$; mais nous ne ferons pas usage de ces formules qui sont plus compliquées des formules (7), ..., (8').

L'équation (a) se transformera dans la suivante :

$$\operatorname{div}_P \mathrm{K}\alpha\mathbf{e}' - \frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial t} \times \mathbf{a} = \rho';$$

et puisque le premier membre [équation (5), chapitre III] exprime la $\operatorname{div}_{P'} \mathbf{e}'$, nous avons démontré l'équation (2').

Si nous appliquons à l'équation (9) l'opérateur $\mathrm{R}\alpha$, on aura

$$m\mathbf{e}' = m \,.\, \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} - (\alpha\mathbf{b}) \wedge \alpha\mathbf{m},$$

mais $\alpha\mathbf{b} = m\mathbf{a}$; et nous avons l'équation (8).

Maintenant appliquons l'opérateur α à l'équation (1), multiplions (2) par $\mathbf{a}$ et ajoutons membre à membre : on a :

$$(b) \qquad \alpha \operatorname{rot}_P \mathbf{m} - \frac{\partial \alpha\mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{a} \operatorname{div}_P \mathbf{e} = \rho(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a}).$$

Les formules de transformation (8'), (2'), (5') permettent d'écrire le premier membre comme il suit :

$$\operatorname{rot}_{P'} \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \alpha\mathbf{m}}{\partial t'} - m\frac{\partial \alpha\mathbf{e}}{\partial t'} - \frac{\partial \alpha\mathbf{e}}{\partial P'}\mathbf{a} + \mathbf{a}\left(\operatorname{div}_{P'} \alpha\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t'} \times \mathbf{b}\right);$$

puis observons que [équation (45), chapitre I]

$$\left(\operatorname{div}_{P'} \alpha\mathbf{e} - \frac{\partial \alpha\mathbf{e}}{\partial P'}\right)\mathbf{a} = \operatorname{rot}_{P'} (\mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{e});$$

$$m\frac{\partial \alpha\mathbf{e}}{\partial t'} - \mathbf{a} \wedge \frac{\partial \alpha\mathbf{m}}{\partial t'} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t'} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t'}(m\alpha\mathbf{e} - \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{m} - \mathbf{e} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial t'},$$

puisque

$$\begin{aligned} m\alpha\mathbf{e} - \mathbf{e} \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{a} - \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{m} &= m\alpha\mathbf{e} - \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{e} - \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{m} \\ &= \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} - \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{m} = \mathbf{e}' \end{aligned}$$

à cause de l'équation (9) du chapitre II et de l'équation (8) qui a été déjà démontrée.

L'équation (b) se transformera dans la suivante :

$$\operatorname{rot}_{P'} (\mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + \mathbf{a} \wedge \alpha\mathbf{e}) - \frac{\partial \mathbf{e}'}{\partial t'} = \rho(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a});$$

et si nous définissons les deux nouveaux vecteurs $\mathbf{m}'$, $\rho'\mathbf{v}'$ d'après les équations (6), (7), nous aurons l'équation (1').

Nous avons donc démontré les équations (5), ..., (8) et nous avons prouvé que les équations (1), (2) sont transformées dans (1'), (2').

Pour déduire les équations (3'), (4'), on pourrait suivre la même méthode; plus brièvement on observera que (3), (4) se déduisent de (1) et (2) en supposant $\rho = 0$ et en changeant $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}$ respectivement en $\mathbf{e}$, $-\mathbf{m}$; alors $\mathbf{m}'$ se changera en $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{e}'$ en $-\mathbf{m}'$, et des équations (1'), (2') on déduira (3'), (4').

Nous pouvons déduire naturellement deux équations semblables aux équations (9) et (10) :

$$\mathrm{K}\alpha\mathbf{m}' = m\mathbf{m} + \mathbf{b}\wedge\mathbf{e}, \tag{11}$$

$$\mathbf{m}\times\mathbf{b} = \mathbf{m}'\times\mathbf{a}. \tag{12}$$

Deux autres équations nous seront utiles :

$$\alpha\mathbf{m} = m\mathbf{m}' - \mathbf{a}\wedge\mathbf{e}', \tag{13}$$

$$\alpha\mathbf{e} = m\mathbf{e}' + \mathbf{a}\wedge\mathbf{m}'. \tag{14}$$

En effet [équation (11), chapitre II] :

$$\mathbf{b}\wedge\mathrm{K}\alpha\mathbf{e}' = \mathrm{K}\alpha(\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}'),$$

puis [équations (11), (9)] :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\alpha(m\mathbf{m}' - \mathbf{a}\wedge\mathbf{e}') &= m^2\mathbf{m} + m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e} - m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e} + \mathbf{b}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{m}) \\ &= m^2\mathbf{m} + \mathbf{b}\times\mathbf{m}\,.\,\mathbf{b} - \mathbf{b}^2.\,\mathbf{m} = \mathbf{m} + \mathbf{b}\times\mathbf{m}\,.\,\mathbf{b} \\ &= \{1 + \mathrm{H}(\mathbf{b},\mathbf{b})\}\,\mathbf{m} = \mathrm{K}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{m};\end{aligned}$$

on en déduit aussitôt l'équation (13). La même méthode s'applique pour démontrer (14).

Il est maintenant facile de déduire les équations (5'), ..., (8').

En comparant avant tout les équations (5), (6) avec les équations (1) du chapitre II, on démontrera les équations (5'), (6').

Appliquons l'opérateur $\mathrm{RK}\alpha$ à l'équation (13); on a

$$\mathrm{RK}\alpha\,.\,\alpha\mathbf{m} = m\,.\,\mathrm{RK}\alpha\mathbf{m}' - (\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})\wedge\mathrm{K}\alpha\mathbf{e}',$$

et puisque

$$\mathrm{RK}\alpha\,.\,\alpha = m, \qquad \mathrm{K}\alpha\mathbf{a} = m\mathbf{b},$$

l'équation (7') est démontrée. Par la même méthode, on démontre aussi (8'), et le théorème de relativité est complètement démontré.

En divisant membre à membre les équations (6) et (5) ou (6') et (5'), on trouve pour $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ les mêmes valeurs que nous avons trouvées au chapitre II [équations (15), (15')], c'est-à-dire que dans ce cas les nombres n et n' ont respectivement pour valeurs

$$\frac{\rho'}{\rho}, \quad \frac{\rho}{\rho'}.$$

Il faut encore noter les formules suivantes :

$$\rho' . \mathrm{RK}\alpha\mathbf{v}' = \rho(m\mathbf{v} + \mathbf{b}), \tag{15}$$

$$\rho . \mathrm{R}\alpha\mathbf{v} = \rho'(m\mathbf{v}' - \mathbf{a}); \tag{15'}$$

$$\mathrm{RK}\alpha\mathbf{m}' = m^2\mathbf{m} - \mathbf{b}\times\mathbf{m}.\mathbf{b} + m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e}, \tag{16}$$

$$\mathrm{RK}\alpha\mathbf{e}' = m^2\mathbf{e} - \mathbf{b}\times\mathbf{e}.\mathbf{b} - m\mathbf{b}\wedge\mathbf{m}; \tag{17}$$

$$\mathrm{R}\alpha\mathbf{m} = m^2\mathbf{m}' - \mathbf{a}\times\mathbf{m}'.\mathbf{a} - m\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}', \tag{16'}$$

$$\mathrm{R}\alpha\mathbf{e} = m^2\mathbf{e}' - \mathbf{a}\times\mathbf{e}'.\mathbf{a} + m\mathbf{a}\wedge\mathbf{m}'. \tag{17'}$$

L'équation (15) se démontre tout de suite en appliquant l'opérateur $\mathrm{RK}\alpha$ à l'équation (6) et en faisant usage de l'équation (7) du chapitre II.

Appliquons le même opérateur à l'équation (7); si nous observons que [équation (10), chapitre II]

$$\mathrm{RK}\alpha . \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} = m^2\mathbf{m} - \mathbf{b}\times\mathbf{m}.\mathbf{b}$$

et que

$$(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})\wedge\mathrm{K}\alpha.\alpha\mathbf{e} = m\mathbf{b}\wedge(\mathbf{e} + \mathbf{e}\times\mathbf{b}.\mathbf{b}) = m\mathbf{b}\wedge\mathbf{e},$$

nous démontrerons l'équation (16); on obtient les autres par la même méthode.

Les formules précédentes permettent aussi de démontrer sans difficulté la covariance, par rapport à L, des expressions

$$\mathbf{m}\times\mathbf{e}, \qquad \mathbf{m}^2 - \mathbf{e}^2; \tag{18}$$

la deuxième est la fonction de Lagrange.

[**2**] L'expression de la force électromagnétique de Lorentz, dans le système S, par unité de volume, est

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{e} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{m}), \tag{19}$$

et dans S'

$$\mathbf{F}' = \rho'(\mathbf{e}' + \mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}'). \tag{19'}$$

Nous voulons démontrer que la relation entre $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ est exprimée par les formules

$$\mathbf{F}' = \gamma\mathbf{F}, \tag{20}$$

$$\mathbf{F} = \gamma'\mathbf{F}', \tag{20'}$$

γ et γ' étant les homographies définies dans le chapitre II, équations (20), (20').

Appliquons l'opérateur α à l'équation (19); en tenant compte des équations (5′) et (14) et en développant les produits, on a

$$\rho\,.\,\alpha\mathbf{e} = \rho' \left\{ m^2\mathbf{e}' - m\mathbf{v}'\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{e}' + m\mathbf{a}\wedge\mathbf{m}' - \mathbf{v}'\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{m}' \right\};$$

puis la formule (35), chapitre I, c'est-à-dire

$$m\alpha(\mathbf{v}\wedge\mathbf{m}) = (\mathrm{R}\alpha\mathbf{v})\wedge\mathrm{R}\alpha\mathbf{m},$$

à cause des formules (15′), (16′), nous donne

$$\rho\,.\,\alpha(\mathbf{v}\wedge\mathbf{m}) = \rho' \left\{ m^2\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}' - m\mathbf{v}'\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}') - \mathbf{a}\times\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{v}'\wedge\mathbf{a} - m\mathbf{a}\wedge\mathbf{m}' + \mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}') \right\}.$$

Nous avons donc, en développant les doubles produits vectoriels,

$$\alpha\mathbf{F} = \rho' \left\{ \mathbf{e}' + m^2\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}' - m\mathbf{v}'\times\mathbf{e}'\,.\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{e}'\,.\,\mathbf{a} + \mathbf{w} \right\},$$

où l'on a posé

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\times\mathbf{v}'\,.\,\mathbf{m}'\wedge\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{v}'.$$

A cause d'une identité dont nous avons déjà fait usage,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{v}'\,.\,\mathbf{m}'\wedge\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{v}' + \mathbf{a}\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}' = \mathbf{a}\times\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{a},$$

le vecteur $\mathbf{w}$ est égal à

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\times\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}'\,.\,\mathbf{a} - \mathbf{a}^2\,.\,\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}';$$

et par conséquent

$$\alpha\mathbf{F} = \rho'(\mathbf{e}' + \mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}') + \rho'(\mathbf{a}\times\mathbf{v}'\wedge\mathbf{m}' - m\mathbf{v}'\times\mathbf{e}' + \mathbf{e}\times\mathbf{b})\mathbf{a}$$

à cause de l'équation (10).

Mais [équation (14)]

$$\begin{aligned}\rho'\left\{\mathbf{e}\times\mathbf{b} - \mathbf{v}'\times(m\mathbf{e}' + \mathbf{a}\wedge\mathbf{m}')\right\}\mathbf{a} &= \rho'(\mathbf{e}\times\mathbf{b} - \mathbf{v}'\times\alpha\mathbf{e})\mathbf{a}\\ &= \rho'(\mathbf{b} - \mathrm{K}\alpha\mathbf{v}')\times\mathbf{e}\,.\,\mathbf{a} = -\rho\mathbf{v}\times\mathbf{e}\,.\,\mathbf{a}\end{aligned}$$

[équation (6′)]. Et si enfin nous observons que de l'équation (19) on déduit

$$\mathbf{F}\times\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}\times\mathbf{e},$$

nous aurons

$$\alpha\mathbf{F} = \mathbf{F}' - \mathbf{F}\times\mathbf{v}\,.\,\mathbf{a}$$

ou bien

$$\mathbf{F}' = \left\{\alpha - \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a})\right\}\mathbf{F}$$

qui démontre l'équation (20).

En appliquant à l'équation (20) l'opérateur γ', on déduira (20′).

Pour un théorème démontré au chapitre II, nous pouvons alors déduire ces deux autres relations :

(21) $$\mathbf{F}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{F} \times \mathbf{b} + m\mathbf{F} \times \mathbf{v},$$

(21′) $$\mathbf{F} \times \mathbf{v} = -\mathbf{F}' \times \mathbf{a} + m\mathbf{F} \times \mathbf{v}'.$$

Si nous représentons par $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_1'$ les forces électromagnétiques pour unité de charge dans S et S', nous avons :

(22) $$\mathbf{F}_1' = \mathrm{KR}\gamma'\mathbf{F}_1,$$

(22′) $$\mathbf{F}_1 = \mathrm{KR}\gamma\mathbf{F}_1'.$$

On a, en effet,

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{F}_1, \qquad \mathbf{F}' = \rho'\mathbf{F}'$$

et l'équation (20), après substitution, devient

$$\rho'\mathbf{F}_1' = \rho \cdot \gamma\mathbf{F}$$

ou

$$\mathbf{F}_1' = \frac{\rho}{\rho'} \cdot \gamma\mathbf{F}_1 = n' \cdot \gamma\mathbf{F}_1;$$

et, si l'on tient compte de l'équation (25) du chapitre II, on démontre l'équation (22).

En appliquant à l'équation (22) l'opérateur $\mathrm{KR}\gamma$, on déduit (22′).

On remarquera sans doute l'analogie des équations (22), (22′) avec les équations (34), (34′) du chapitre II et qui a une grande importance dans les recherches de M. Planck.

[**3**] Les équations de l'électrodynamique des corps en mouvement de Minkowski sont :

(23) $$\mathrm{rot}\,\mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \mathbf{s},$$

(24) $$\mathrm{div}\,\mathbf{e} = \rho,$$

(25) $$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0,$$

(26) $$\mathrm{div}\,\mathbf{M} = 0.$$

Dans ces équations, qui ne contiennent pas la vitesse $\mathbf{v}$ de la matière, $\mathbf{E}$ est la force électrique, $\mathbf{m}$ la force magnétique, $\mathbf{e}$ l'excitation électrique, $\mathbf{M}$ l'excitation magnétique, $\mathbf{s}$ le vecteur du courant.

La vitesse $\mathbf{v}$ de la matière a son influence sur les relations complémentaires qui lient les vecteurs $\mathbf{E}$, $\mathbf{m}$, ... aux constantes ε, μ, σ de la matière. Ces relations sont :

$$\mathbf{e} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{m} = \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{M}), \tag{27}$$

$$\mathbf{M} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{E} = \mu(\mathbf{m} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{e}), \tag{28}$$

$$\mathbf{s} + m^2\mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{v})\mathbf{s} - m^2\rho\mathbf{v} = m\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{M})\text{[17]}. \tag{29}$$

Le système des équations (23), ..., (26) satisfait au *principe de relativité*, et si on lui applique la même méthode du paragraphe 1 de ce chapitre, on voit tout de suite que l'on aura les équations suivantes :

$$\rho' = \mathbf{s}\times\mathbf{b} + \rho m, \tag{30}$$

$$\mathbf{s}' = \alpha\mathbf{s} + \rho\mathbf{a}, \tag{31}$$

$$\mathbf{M}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{M} + \mathbf{a}\wedge\alpha\dot{\mathbf{E}}, \tag{32}$$

$$\mathbf{E}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{E} - \mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{M}, \tag{33}$$

$$\mathbf{m}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{m} + \mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{e}, \tag{34}$$

$$\mathbf{e}' = \mathrm{R}\alpha\mathbf{e} - \mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{m}. \tag{35}$$

Brièvement, on peut dire que

$\mathbf{M}'$, $\mathbf{E}'$ s'expriment en fonction de $\mathbf{M}$ et de $\mathbf{E}$; $\mathbf{m}'$, $\mathbf{e}'$ s'expriment en fonction de $\mathbf{m}$ et $\mathbf{e}$ par les mêmes formules (7) et (8) et réciproquement.

Nous aurons donc des formules tout à fait semblables aux formules du paragraphe 1 pour $\mathbf{M}'$, $\mathbf{E}'$, etc., et on déduira aussi la covariance par rapport à L des nombres

$$\mathbf{m}\times\mathbf{e}, \qquad \mathbf{M}\times\mathbf{E}, \tag{36}$$

et de la fonction de Lagrange

$$2\Phi = \mathbf{m}\times\mathbf{M} - \mathbf{e}\times\mathbf{E}. \tag{37}$$

La démonstration ne présentant pas de difficulté nous n'y insisterons pas.

Posons maintenant

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \rho\mathbf{v}, \tag{38}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{M}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \tag{39}$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{m} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{e}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}; \tag{40}$$

---

[17] MINKOWSKI, *l. c.*, § 8, form. (C), (D), (E).

Voir aussi ma note : *Sulle equazioni dell' elettrodinamica* [Rend. R. Acc. Scienze fis. e matem. di Napoli, s. III, vol. 18, 314-319 (1912)].

$\mathbf{s}_1$ est le vecteur du courant de conduction, $\mathbf{E}_1$ la force électrique de repos, $\mathbf{m}_1$ la force magnétique de repos dans S.

Nous démontrerons que dans S' on a :

$$\mathbf{s}'_1 = \mathrm{K}\gamma'\mathbf{s}_1 ; \tag{41}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \gamma\mathbf{E}_1, \qquad \mathbf{m}'_1 = \gamma\mathbf{m}_1 . \tag{42}$$

Démontrons l'équation (41). On a

$$\mathbf{s}'_1 = \mathbf{s}' - \rho'\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{s} + \rho\mathbf{a} - (\mathbf{s} \times \mathbf{b} + \rho m)\mathbf{v}'$$

à cause des équations (30), (31). L'élimination de $\mathbf{s}$ au moyen de l'équation (38) nous donne

$$\mathbf{s}'_1 = \alpha\mathbf{s}_1 + \rho(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{a}) - \mathbf{s}_1 \times \mathbf{b} \,.\, \mathbf{v}' - \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{b} + m)\mathbf{v}' ;$$

et puisque le coefficient de ρ [équations (15) et (16), chapitre II] est nul, on a :

$$\mathbf{s}'_1 = \left\{ \alpha - \mathrm{H}(\mathbf{b}, \mathbf{v}') \right\} \mathbf{s}_1 = \mathrm{K}\gamma'\mathbf{s}_1 .$$

Pour démontrer les équations (42), il suffit d'observer que $\mathbf{E}'$, $\mathbf{M}'$ s'expriment en fonction de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{M}$ à la même manière de $\mathbf{e}'$, $\mathbf{m}'$ en fonction de $\mathbf{e}$, $\mathbf{m}$; par conséquent, le numérateur du second membre de (42) se transforme comme $\mathbf{F}_1$ dans le paragraphe précédent ; donc

$$\mathbf{E}'_1 = \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}'^2}} \mathrm{KR}\gamma'\mathbf{E}_1 = n \,.\, \mathrm{KR}\gamma'\mathbf{E}_1 = nn' \,.\, \gamma\mathbf{E}_1 = \gamma\mathbf{E}_1$$

à cause des formules (18), (25), (17) du chapitre II. Par la même méthode, nous démontrerons la deuxième équation (42).

Des formules (41), (42), on déduit les deux invariants

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{s}_1, \qquad \mathbf{m}_1 \times \mathbf{s}_1 . \tag{43}$$

En effet,

$$\mathbf{E}'_1 \times \mathbf{s}'_1 = \gamma\mathbf{E}_1 \times \mathrm{K}\gamma'\mathbf{s}_1 = \gamma'\gamma\mathbf{E}_1 \times \mathbf{s}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{s}_1 .$$

Le premier de ces deux invariants a une interprétation importante. Si l'on réduit le système S' au repos, on a $\mathbf{v}' = 0$ et

$$\mathbf{s}'_1 = \mathbf{s}' = \sigma\mathbf{E}', \qquad \mathbf{E}'_1 = \mathbf{E}'$$

et par conséquent le produit $\mathbf{E}'_1 \times \mathbf{s}'_1$ se réduit à $\sigma\mathbf{E}'^2$ qui exprime la chaleur de JOULE par unité de temps et de volume.

[**4**] Considérons encore, dans le système S, le vecteur

$$\mathbf{N} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{s}\wedge\mathbf{M}. \tag{44}$$

Par un calcul assez facile, on peut démontrer que si $\mathbf{N}$ se transforme en $\mathbf{N}'$, on a

$$\mathbf{N}' = \alpha\mathbf{N} + \mathbf{s}\times\mathbf{E}.\mathbf{a}, \tag{45}$$

$$\mathbf{s}'\times\mathbf{E} = \mathbf{N}\times\mathbf{b} + m.\mathbf{s}\times\mathbf{E}. \tag{46}$$

En comparant ces formules avec les équations (1) du chapitre II, on peut déduire

$$\mathbf{N}'^2 - (\mathbf{s}'\times\mathbf{E}')^2 = \mathbf{N}^2 - (\mathbf{s}\times\mathbf{E})^2. \tag{47}$$

Nous allons maintenant trouver une expression fort remarquable du vecteur $\mathbf{N}$, et pour cela nous considérerons l'homographie des *tensions relatives* de Maxwell :

$$\beta = \mathrm{H}(\mathbf{M},\mathbf{m}) + \mathrm{H}(\mathbf{e},\mathbf{E}) - \frac{1}{2}(\mathbf{m}\times\mathbf{M} + \mathbf{e}\times\mathbf{E}). \tag{48}$$

Calculons le gradient de cette homographie [18] et observons que

$$\operatorname{grad}\left\{\mathrm{H}(\mathbf{M},\mathbf{m}) - \frac{1}{2}\mathbf{m}\times\mathbf{M}\right\} = \mathbf{m}\operatorname{div}\mathbf{M} + \frac{d\mathbf{m}}{dP}\mathbf{M} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{m}}{dP}\mathbf{M} + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{M}}{dP}\mathbf{m}\right)$$

$$= \mathbf{m}\operatorname{div}\mathbf{M} + (\operatorname{rot}\mathbf{m})\wedge\mathbf{M} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{m}}{dP}\mathbf{M} - \mathrm{K}\frac{d\mathbf{M}}{dP}\mathbf{m}\right) \text{ [19]},$$

par conséquent

$$\operatorname{grad}\beta = \mathbf{m}\operatorname{div}\mathbf{M} + (\operatorname{rot}\mathbf{m})\wedge\mathbf{M} + \mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{e} + (\operatorname{rot}\mathbf{E})\wedge\mathbf{e} + \mathbf{N}_1$$

et où l'on a posé :

$$2\mathbf{N}_1 = \mathrm{K}\frac{d\mathbf{m}}{dP}\mathbf{M} - \mathrm{K}\frac{d\mathbf{M}}{dP}\mathbf{m} + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{E}}{dP}\mathbf{e} - \mathrm{K}\frac{d\mathbf{e}}{dP}\mathbf{E}.$$

Si on tient compte des équations (23), ..., (26), on trouve

$$\operatorname{grad}\beta = \left(\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{s}\right)\wedge\mathbf{M} + \rho\mathbf{E} + \mathbf{e}\wedge\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{N}_1,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{N} = \operatorname{grad}\beta - \frac{\partial(\mathbf{e}\wedge\mathbf{M})}{\partial t} - \mathbf{N}_1; \tag{49}$$

c'est l'expression que nous voulions démontrer.

---

[18] *Analyse vectorielle*, I, p. 70 [3].
[19] *Analyse vectorielle*, I, p. 84 [3]; p. 78 [5].

Le calcul des invariants de β est aussi très intéressant.

Posons

$$-2l = \mathbf{m} \times \mathbf{M} + \mathbf{e} \times \mathbf{E}; \tag{50}$$

on trouve tout de suite [équations (19) et (21) du chap. I]

$$\mathrm{I}_1\beta = l. \tag{51}$$

Pour le calcul des deux autres invariants, nous nous appuyerons sur ces deux formules, dont la démonstration ne présente pas de difficulté :

$$\mathrm{I}_2 \{ \mathrm{H}(\mathbf{M}, \mathbf{m}) + \mathrm{H}(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \} = (\mathbf{M} \wedge \mathbf{e}) \times (\mathbf{m} \wedge \mathbf{E}),$$
$$\mathrm{I}_3 \{ \mathrm{H}(\mathbf{M}, \mathbf{m}) + \mathrm{H}(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \} = 0 \text{ (20)}.$$

Alors, puisque

$$\beta - l = \mathrm{H}(\mathbf{M}, \mathbf{m}) + \mathrm{H}(\mathbf{e}, \mathbf{E}),$$

on trouve

$$\mathrm{I}_2(\beta - l) = \mathrm{I}_2\beta + 3l^2 - 3l.\mathrm{I}_1\beta + l\mathrm{I}_1\beta = \mathrm{I}_2\beta + l^2 \text{ (21)}$$

ou bien

$$-\mathrm{I}_2\beta = \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{m} \times \mathbf{M} + \mathbf{e} \times \mathbf{E}) \right\}^2 - \mathbf{M} \times \mathbf{m} . \mathbf{E} \times \mathbf{e} + \mathbf{M} \times \mathbf{E} . \mathbf{m} \times \mathbf{e}$$
$$= \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{m} \times \mathbf{M} - \mathbf{e} \times \mathbf{E}) \right\}^2 + \mathbf{M} \times \mathbf{E} . \mathbf{m} \times \mathbf{e},$$

et en introduisant la fonction de Lagrange [équation (37)] :

$$-\mathrm{I}_2\beta = \Phi^2 + \mathbf{M} \times \mathbf{E} . \mathbf{m} \times \mathbf{e}. \tag{52}$$

Cette formule remarquable prouve la covariance de $\mathrm{I}_2\beta$ par rapport aux transformations L.

Il est aisé de se convaincre que le second membre est toujours positif, car dans le cas du repos $\mathbf{e} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{M} = \mu\mathbf{m}$, et, par conséquent,

$$\mathbf{M} \times \mathbf{E} . \mathbf{m} \times \mathbf{e} = \varepsilon\mu (\mathbf{m} \times \mathbf{e})^2 \geqslant 0.$$

---

(20) *Analyse vectorielle*, II, p. 136 [12].
(21) *Analyse vectorielle*, I, p. 46 [8].

Enfin, nous avons

$$I_3(\beta - l) = I_3\beta - l I_2\beta + l^2 I_1\beta - l^3 = 0$$

ou encore, à cause de l'équation (51),

$$I_3\beta = I_1\beta \, . \, I_2\beta \quad (53)$$ [22].

---

[22] Le second membre de l'équation (52) exprime la racine carrée du déterminant de la matrice S considérée par MINKOWSKI, *l. c.*, § 13, form. (76). On peut comparer les formules (49) et (52) avec celles données par MINKOWSKI, dans son Mémoire, §§ 13 et 14.