ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

Z. CARRIÈRE

# Sur les déformations de l'alliage eutectique plomb-étain et les métaux visqueux

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série*, tome 7, nº 3 (1905), p. 317-382

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1905_2_7_3_317_0>

# SUR LES DÉFORMATIONS

DE

# L'ALLIAGE EUTECTIQUE PLOMB-ÉTAIN

## ET LES MÉTAUX VISQUEUX,

PAR M. Z. CARRIÈRE.

1. L'alliage eutectique de plomb et d'étain contient 37,2 pour 100 de Pb et 62,8 pour 100 de Sn. Il fond à 183°.

J'étudierai, dans ce travail, les déformations grandes et petites de fils de cet alliage, soit par traction, soit par torsion.

Il s'agit principalement : 1° de déterminer l'influence de la *vitesse de déformation* sur la grandeur de la déformation; 2° d'étudier les modifications de la *matière* qui résultent de la déformation, ce que j'appellerai l'*écrouissage,* en donnant à ce terme le sens le plus général; 3° de chercher dans quelles limites les phénomènes d'*élasticité parfaite* et de *réactivité* subsistent dans un tel métal, type des métaux visqueux.

Ce travail a été fait sous la direction, avec les méthodes et, en majeure partie, avec les appareils de M. Bouasse qui s'est réservé la discussion théorique des résultats. Il me suffit de dire ici qu'ils conduisent à distinguer les métaux en deux groupes très tranchés : métaux *non visqueux* et métaux *visqueux.* La distinction repose :

1° Sur l'influence de la *vitesse de déformation,* énorme dans le cas que j'étudie, secondaire dans le cas des métaux non visqueux.

2° Sur l'application ou la non application du principe de Coulomb, à savoir qu'*un métal qui a supporté un effort est à peu près élastique jusqu'à cet effort.*

On peut encore appeler ces types, type *à accommodation* (métal non visqueux) et type *sans accommodation* (métal visqueux).

2. *Wertheim* (*Ann. de Chim. et de Phys.,* 3e série, t. XII) étudie certains

alliages de Pb et de Sn parmi lesquels l'eutectique. Il détermine leur coefficient d'élasticité, principalement par la méthode des vibrations longitudinales. Il indique (*Ibid.*, p. 605) une soi-disant limite d'élasticité. Je montrerai le peu de signification de ces résultats. D'ailleurs, dans ses expériences de traction, l'auteur déclare lui-même (*Ibid.*, p. 403) que « l'on ne saurait déterminer les longueurs *finales* que les verges peuvent atteindre sous l'action des charges ». Il fait la mesure « dès que l'allongement est devenu assez lent pour que la longueur ne change plus sensiblement pendant le temps nécessaire à la prendre ».

3. *Appareil pour la fabrication des fils.* — J'utilise l'alliage de Pb et de Sn sous la forme de fils de petit diamètre, soit $0^{mm},96$.

L'appareil qui sert à les fabriquer est représenté figure 1. Il est très analogue à l'appareil industriel pour la fabrication des tuyaux de plomb, mais de dimensions plus restreintes.

Un bloc d'acier C de $8^{cm}$ de diamètre est creusé suivant son axe d'un canal circulaire A bien alésé, de $2^{cm}$ de diamètre, dans lequel entre à frottement doux un piston plein P en acier. A l'autre extrémité, vissé dans l'épaisseur du bloc, un écrou F ferme le canal; il est percé d'un trou (filière) à travers lequel s'écoule le métal contenu dans le cylindre quand on exerce sur le piston une pression suffisante.

Le cylindre C est disposé, comme l'indique la figure 1, sous le sommier d'une presse hydraulique, sommier percé d'un trou en son milieu et d'un second plus petit au voisinage. Ce dernier correspond à une cavité B creusée dans le bloc, parallèlement à l'axe, sur un tiers environ de la longueur du cylindre. Elle est remplie de mercure et contient un thermomètre T qui indique la température du bloc pendant l'opération. Le chauffage s'effectue au moyen d'une triple couronne de becs de gaz, sous forme de serpentin, entourant le cylindre qu'un disque d'amiante isole du sommier. Une plaque de tôle recourbée DD protège l'ensemble contre les courants d'air.

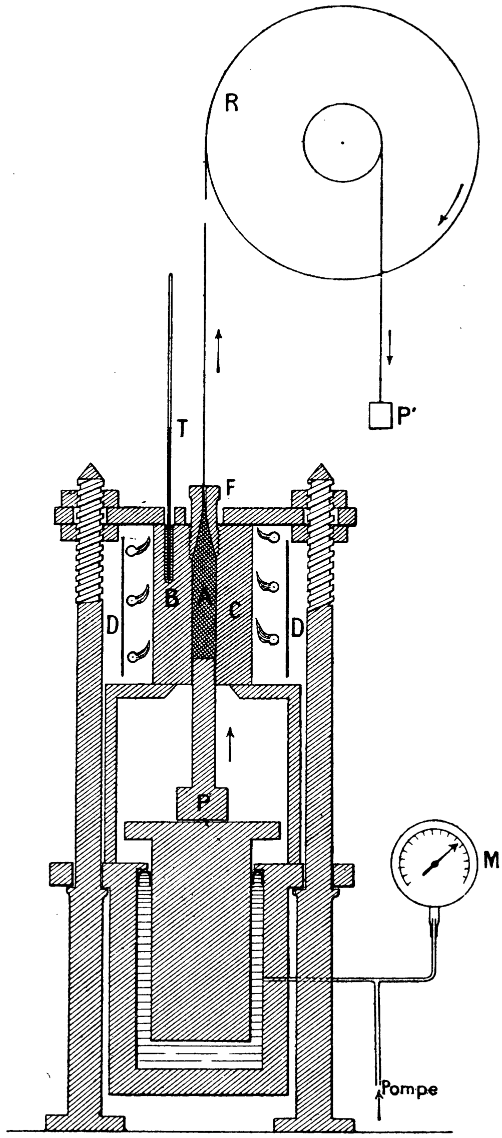
Le manomètre M indique à chaque instant la pression sous le piston de la presse et, à un facteur constant près, la pression transmise en A. Elle pouvait s'élever jusqu'à $3420^{kg}$ par centimètre carré. J'ai utilisé généralement une pression de $2850^{kg}$. J'obtenais ainsi une trentaine de mètres de fil par heure, à la condition de maintenir une température convenable.

A la sortie de la filière, le fil arrive verticalement, tangent à un tambour R sur lequel il s'enroule sous l'action du poids P'. Le tambour est formé par une feuille de zinc, large de $15^{cm}$; les rayons sont des liteaux de bois très légers. Il suffit, pour l'entraîner, d'un poids P' inférieur à $1^{kg}$, ce qui correspond, pour le fil, à une tension de $50^{g}$ environ, soit $70^{g}$ par millimètre carré. Le diamètre du tambour est égal à $70^{cm}$. Le fil est donc à peine fléchi pendant l'enroulement.

Pour introduire le métal à tréfiler dans le cylindre C, on retire celui-ci de dessous le sommier de la presse, et on le renverse la filière en bas. On verse alors dans le canal l'alliage en fusion préalablement agité pendant 2 minutes.

L'expérience montre que, sous une pression de $2850^{kg}$ par centimètre carré,

Fig. 1.




pour obtenir en 2 minutes $1^{m}$ de fil, il faut élever la température à $175^{o}$, c'est-à-dire assez près du point de fusion. Il s'agit de déterminer si et comment varient les propriétés avec la température de fabrication. Voici, pour une charge

$P = 1360^g$ imposée sous débit constant, les allongements pour 100 A, de fils obtenus aux températures $t$, sous une même pression $2850^{kg}$ par centimètre carré :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$. | 142. | | 173. | | 178. | | 181. |
| A............. | 11,69 | | 13,87 | | 14,87 | | 18,10 |
| $\frac{\Delta A}{\Delta t}$........... | | 0,07 | | 0,20 | | 1,08 | |

Cette expérience montre que l'eutectique jouit de propriétés essentiellement variables avec la température de fabrication. Le taux de variation $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ croît beaucoup au voisinage de 180°. Une variation de 1° dans la température de fabrication produit alors, *dans les conditions de l'expérience,* une variation d'allongement de 1 pour 100. Entre 142° et 173° la variation est seulement de 0,07 pour 100. Il y a donc intérêt, pour avoir du fil de propriétés à peu près invariables, à opérer à la température la plus basse possible. On est limité dans cette voie par la durée de l'opération. J'ai choisi la température de 175° au voisinage de laquelle $\frac{\Delta A}{\Delta t} = 0,2$ pour 100. Un régulateur de pression installé sur la canalisation du gaz permet de maintenir celle-ci constante à 1° près.

Cette température n'est qu'approximativement celle du métal contenu en A. Elle n'est sûrement pas celle du métal au sortir de la filière. Cela importe peu, le thermomètre servant surtout de *témoin* de température uniforme au *voisinage de la filière,* soit pendant une même expérience, soit d'une expérience à l'autre. Je ne saurais trop insister sur la nature des résultats. Il ne s'agit pas, en effet, de déterminer des constantes numériques, mais d'*étudier l'allure des phénomènes.*

Pour faciliter le réglage, il est avantageux de maintenir une pression de $2000^{kg}$ environ par centimètre carré *pendant* qu'on élève la température, celle-ci tendant *asymptotiquement* vers 175°. Les contacts métalliques et les transmissions de chaleur par conductibilité sont ainsi à peu près les mêmes avant et pendant le tréfilage. Sous cette pression, $2000^{kg}$ par centimètre carré, le fil ne passe que vers 150° et avec une vitesse assez faible. Quand on atteint 175°, on manœuvre la pompe pour élever la pression à $2850^{kg}$, et on l'y maintient jusqu'à écoulement complet, à $50^{kg}$ près.

J'aurais pu choisir une pression moindre ou plus forte sans que les phénomènes que j'étudierai soient *qualitativement* modifiés. J'ai préféré celle-ci pour obtenir une vitesse de passage du fil ni trop grande ni trop faible, soit $1^m$ en 2 minutes environ.

Le fil est *régulier, homogène* et *identique à lui-même* sur toute sa longueur. On en connaît l'histoire à partir de l'alliage fondu.

L'alliage a été obtenu une fois pour toutes à partir des éléments constituants

Pb et Sn *purs du commerce*. J'ai préalablement vérifié que l'alliage obtenu à partir du plomb et de l'étain chimiquement purs donnent qualitativement les mêmes résultats.

ALLONGEMENTS PAR TRACTION.

4. *Essai de traction.* — Un fil vertical de longueur initiale $L_0$ est chargé de poids P croissant *proportionnellement au temps* jusqu'à la rupture.

On produit un écoulement d'eau à *débit constant* D, dans un seau attaché à l'extrémité inférieure du fil (*Cf.* H. Bouasse, *Ann. Fac. Sc. Toul.*, t. I, 1899, p. 332; t. IV, 1902, p. 359). On lit les allongements avec une lunette, sur une règle verticale solidaire du seau de charge, à $\frac{1}{10}$ de millimètre près, soit avec une approximation de $\frac{1}{8000}$ pour $L_0 = 80^{cm}$, longueur prise ordinairement.

Une enceinte verticale, autour de laquelle circule un courant d'eau, permet de maintenir constante la température du fil placé dans son axe (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, t. V, 1903, p. 259). Toutes les expériences sont faites à la température ordinaire.

A ses extrémités, le fil est attaché à des tiges de connexion par une soudure à la cire golaz. La charge maxima par millimètre carré que doit supporter le fil étant en général inférieure à $3^{kg}$, cette soudure est toujours suffisante. Elle a cet avantage que, pour son application, il suffit d'une température à peine supérieure à 100°. Le fil n'est donc pas détérioré aux points d'attache. Effectivement, sauf les exceptions que j'aurai à signaler (n° 20), la rupture ne se produit pas en ces points, *jamais* elle ne s'est produite au point d'attache inférieur.

5. *Courbe de traction.* — Elle est donnée figure 2, courbe I, pour $L_0 = 80^{cm}$, $D = 77^g$ par minute

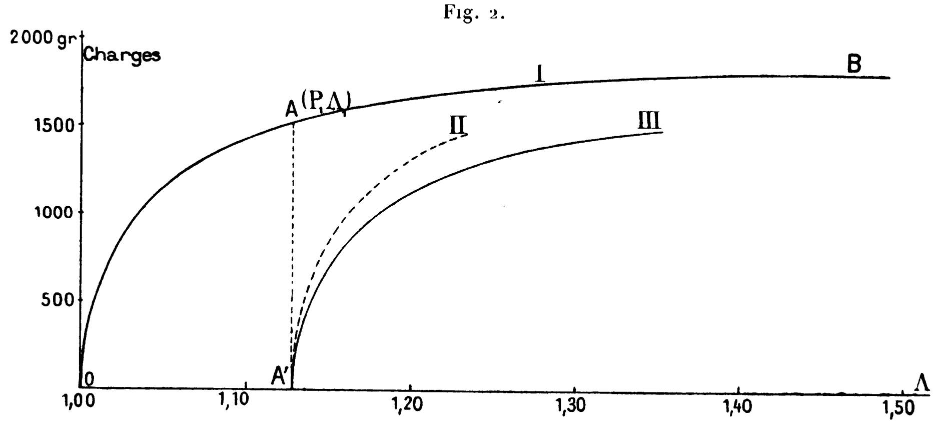
$$\Lambda = \frac{L}{L_0},$$

L étant la longueur du fil sous la charge P.

1° Une *limite d'élasticité parfaite* n'existe pas pour l'eutectique, quelque large que soit le sens attaché à ce mot. Qui dit *élasticité parfaite* dit *allongement proportionnel à l'effort*. Les courbes des métaux tels que le cuivre étiré ayant un certain champ d'élasticité parfaite ont, au début, une portion rectiligne. Ici, il est impossible de délimiter un segment rectiligne même très court à partir de l'origine. La courbure n'est pas nulle dès les plus faibles charges. Je reviendrai plus loin (n° 21) par une méthode plus précise sur les déformations très petites.

2° Le fil d'eutectique ne casse, *pour ce débit,* qu'après un allongement énorme : exactement 49 pour 100. La vitesse d'allongement mesurée par $\frac{d\Lambda}{dP}$ est alors infinie. Mais, comme le montre la figure, de $\Lambda = 1,20$ par exemple à $\Lambda = 1,49$, sa valeur quoique finie est très grande. C'est précisément grâce à cette vitesse très grande que le fil peut supporter quelques minutes une tension qui est *relativement*

Fig. 2.




*considérable,* surtout eu égard à la diminution de section résultant de l'allongement. Pour les métaux tels que le cuivre, l'allongement *permanent* sous la charge $P_1$ produit une modification dans la *nature du fil* qui rend celui-ci à peu près élastique pour les charges inférieures à $P_1$, capable par conséquent de les supporter sans allongement *permanent* sensible.

Or, pour l'eutectique, le principe de Coulomb ne s'applique pas (n° 7). Il ne supporte *aucune charge* sans s'allonger (n° 18); la vitesse d'allongement doit croître avec la charge à supporter jusqu'à ce que la diminution de section consécutive à l'allongement change peu à peu les conditions de l'expérience et amène la rupture.

Cette conclusion appelle naturellement l'expérience suivante :

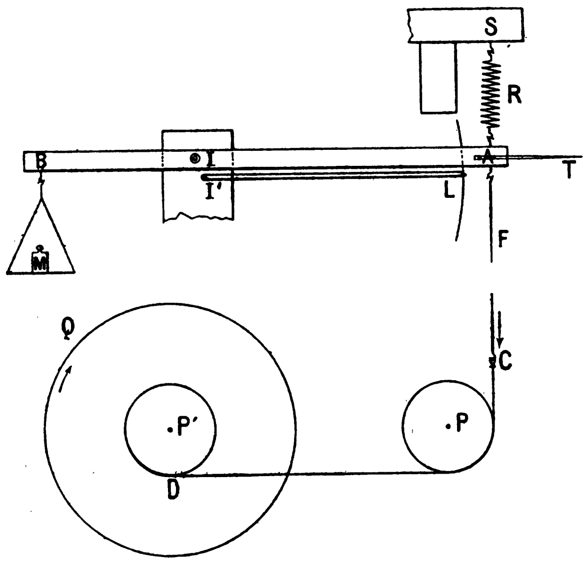
6. *Essai à vitesse constante.* — Au lieu de faire croître la charge P, faisons croître la longueur Λ *proportionnellement au temps.* $\frac{d\Lambda}{dt} = V =$ const. pour un même fil. D'un fil à l'autre faisons varier V. L'expérience consiste à déterminer les tensions P du fil au moyen d'un dynamomètre.

On sait que cette tension croît avec Λ jusqu'à un maximum, puis décroît très rapidement au voisinage de la rupture. Je me suis contenté de déterminer les tensions maxima correspondant à une vitesse donnée.

A cet effet, un ressort R (*fig.* 3) d'une force de $2^{kg}$ est fixé verticalement d'une part à une poutre solide S, d'autre part à l'extrémité A d'un levier AIB mobile autour d'un axe horizontal I. Le fil en expérience F est attaché lui aussi en A, dans le prolongement du ressort. Il est tiré verticalement, en bas, par une corde CD qui passe sur une poulie de renvoi P, et s'enroule sur un treuil P'.

Le treuil est monté sur l'axe d'une forte roue en fonte Q qu'on peut faire tourner d'un mouvement uniforme, dont la vitesse est déterminée au moyen d'un

Fig. 3.




métronome. Les vitesses imposées étant considérables, j'ai négligé dans leur calcul le déplacement de l'extrémité inférieure du ressort.

Un style T attaché au levier peut enregistrer les tensions à chaque instant. Me proposant de déterminer seulement les tensions maxima, j'ai simplement disposé, tournant à frottement doux autour d'un axe I' indépendant, parallèle à celui du levier I et tout proche, une aiguille légère I'L. Quand on tire la corde CD, elle est écartée par le levier de sa position première jusqu'à une déviation maxima à laquelle elle reste après la rupture du fil. La tension correspondante est déterminée après chaque expérience au moyen de poids marqués appliqués en A. La sensibilité de l'appareil est de $100^g$, précision suffisante pour le but à atteindre. Lorsque la tension doit dépasser $2^{kg}$, on place à l'extrémité B du levier des poids M convenables.

Voici, avec les vitesses imposées et les allongements pour 100 réalisés *à la rupture,* les tensions maxima correspondantes. Les vitesses sont exprimées en centimètres par seconde pour $L_0 = 1^m$. $V = \infty$ correspond à l'allongement très brusque à la main. Les tensions sont exprimées en grammes pour la *section initiale* $s_0 = 0^{mm^2},72$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vitesses | $\infty$ | 140 | 70 | 35 | 25 | 20 | 18 | 9 |
| Allongements pour 100 | 20 | 54 | 55 | 52 | » | » | 43 | 45 |
| Tensions | 4250 | 3700 | 3600 | 3500 | 3300 | 3200 | 3100 | 3100 |

Je ne donne les allongements à la rupture que pour fixer les idées : ils dépendent des défauts du fil, principalement pour les grandes vitesses. Il ne faudrait pas croire qu'il existe un maximum correspondant à la vitesse 70. Nous allons voir, au contraire, que l'allongement réalisable croît généralement à mesure que la vitesse diminue.

Je peux, en effet, compléter ces résultats par ceux que donnent les essais à charge constante. La tension s'abaisse au-dessous de $2000^g$ pour une vitesse d'allongement égale, *au voisinage de la rupture,* à $0^{cm},2$ par seconde : l'allongement est alors de 70 pour 100 environ. Le même fil casse sous une charge *constante* de $40^g$, par conséquent sous une tension inférieure à $40^g$, après un allongement de 352 pour 100 obtenu en trois mois environ. Pour une vitesse extrêmement faible, le fil peut supporter des allongements véritablement extraordinaires (*voir* n° 19). La section est alors évidemment très différente de la section initiale $s_0$.

Quoi qu'il en soit, le fil d'eutectique peut supporter des tensions qui croissent énormément avec la vitesse d'allongement (et moins vite qu'elle), soit d'une centaine de grammes à $5^{kg}$ environ par millimètre carré. Cette variation énorme est la première des caractéristiques des métaux visqueux. En voici une seconde :

7. *Non-application du principe de Coulomb.* — La technique employée consiste à décrire la courbe de traction jusqu'au point $A(P_1, \Lambda_1)$ (*fig.* 2), décharger totalement et brusquement [ce qui s'opère aisément et sans secousse au moyen d'une corde passant sur une poulie de renvoi et relevant le seau de charge, ou mieux le levier qui en est solidaire (*Ann. Fac. de Toul.,* 2e série, t. IV, p. 359)], puis, après avoir vidé le seau, sans rien changer au fil, à rétablir l'écoulement, c'est-à-dire décrire une nouvelle courbe de traction à partir du point $A'(0, \Lambda_1)$. Pour le cuivre, la nouvelle courbe de traction est sensiblement la droite $A'A$. Pour l'eutectique, on obtient la courbe III. Sur cette nouvelle courbe comme sur la première, il est impossible de distinguer une portion rectiligne. Le fil *déformé par la charge* $P_1$ *est aussi incapable qu'au début de supporter sans allongement permanent une charge même très inférieure à* $P_1$.

Comparons I et III et, pour cela, donnons à I $A'$ pour origine. Elle vient en II. Cela ne suffit pas. La courbe III est décrite sur un fil plus long et partant de section plus petite. La charge *par unité de section* est donc sur une même horizontale plus grande sur III que sur II, et inversement l'allongement *pour l'unité de longueur* plus petit sur une verticale. Il y a donc une double correction à faire : 1° contracter les abscisses de III dans le rapport $\frac{\Lambda_1}{1}$, 2° dilater ses ordonnées dans le rapport $\frac{1}{\Lambda_1}$. La correction est légitime, puisqu'il s'agit de longueur et de section *initiales,* et que, la densité variant peu, pour des $\Lambda_1$ pas trop grands, on a approximativement

$$s_0 = s_1 \Lambda_1.$$

Ces corrections faites, la courbe III se confond à peu près avec II. On peut donc conclure que le fil allongé de 1 à $\Lambda$ reste à peu près identique à lui-même *comme matière;* il ne *s'écrouit pas sensiblement.*

On peut, d'après la même technique, charger et décharger plusieurs fois. Voici, pour $L_0 = 80^{cm}$, $P_1 = 1300^g$ imposé sous débit $D = 78^g$ par minute, les $\Lambda_1$ à la charge et les $\Delta\Lambda_1$ représentant l'allongement pour 100 brut pendant la charge :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda_1$.......... | 1,000 | | 1,052 | | 1,121 | | 1,198 | | 1,306 | | 1,475 |
| $\Delta\Lambda_1$......... | | 5,2 | | 6,9 | | 7,7 | | 10,8 | | 16,9 | |

Les $\Delta\Lambda_1$ croissent pour la raison déjà donnée. Il serait illusoire de faire ici les corrections dont je parlais tout à l'heure; car, dès que l'allongement devient un peu grand, la relation $s_0 = s\Lambda$ n'est plus vérifiée, le fil *ne restant pas cylindrique* (*voir* n° 20).

En réalité, quand on décharge brusquement de $P_1$ à o, il y a toujours un raccourcissement; mais il est très faible, de l'ordre de $\frac{1}{5000}$, toujours $< \frac{1}{2000}$.

8. *Influence de la vitesse de recharge.* — J'ai supposé, dans l'expérience précédente, le débit D identique à la charge et à la recharge. J'en avais le droit, puisque le principe de Coulomb suppose le métal déformé par la charge $P_1$ devenu à peu près élastique pour les charges inférieures à $P_1$. Les allongements *élastiques ne dépendent pas de la durée d'action de la charge,* ni, par conséquent, de la vitesse de charge.

Prenons maintenant deux débits différents : D à la charge, $D_1$ à la recharge.

L'expérience montre que, toutes choses égales d'ailleurs :

Si $D_1 < D$, la courbe de recharge est au-dessous de III (*fig.* 2) et ne peut, par conséquent, par des corrections, être amenée à se confondre avec II. Elle reste d'autant plus au-dessous que $D_1$ est plus inférieur à D.

Si $D_1 > D$, la courbe de recharge est *au-dessus* de III; les corrections relatives à la longueur et à la section la ramènent au-dessus de II, à une distance d'autant plus grande de celle-ci que $D_1$ surpasse davantage D.

*En général* (*soit à la charge, soit à la recharge*), *les courbes de traction se disposent l'une au-dessus de l'autre dans l'ordre des débits croissants.*

Le cas limite $D_1 = \infty$ correspond à une réimposition brusque de $P_1$, la charge continuant à croître à partir de cet instant sous le débit D de charge. Autrement dit, le débit restant toujours identique, on interrompt en A la courbe de traction en relevant brusquement le seau et arrêtant l'écoulement. Après un arrêt (dont la durée semble d'ailleurs sans importance), on abaisse à nouveau le seau *non vidé* et l'on rétablit en même temps l'écoulement. L'expérience montre qu'alors la courbe de recharge se confond très sensiblement avec la droite A'A raccordée par une courbure très brusque à la branche AB avec laquelle elle se confond ensuite. Le principe de Coulomb, pour une *vitesse de charge infinie,* est approximativement vérifié. Il l'est d'autant moins que la vitesse de recharge surpasse moins la vitesse de charge; pour $D \leqq D_1$ il ne l'est pas du tout. Les conditions de débit imposées montrent qu'il ne s'agit pas ici du principe de Coulomb relatif à l'extension du champ d'*élasticité parfaite.* Elles montrent simplement l'influence énorme de la vitesse de charge, caractéristique des métaux visqueux.

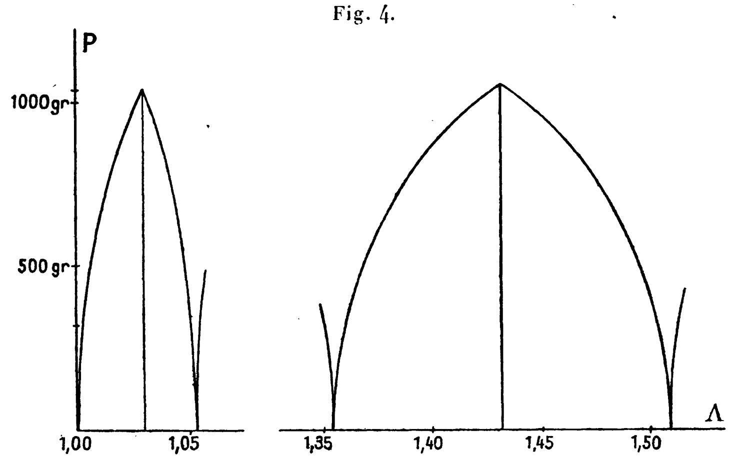
9. *Cycles de traction.* — 1° Pour décrire un cycle de traction, je fais varier la charge de o à $P_1$, puis de $P_1$ à o, *proportionnellement au temps.* L'écoulement d'eau ne pouvant plus servir, je déroule une chaînette de laiton tombant dans le seau de charge, puis je l'enroule, d'un mouvement uniforme. Le dispositif est décrit (*Ann. Fac. Sc. de Toul.,* 2e série, t. V, p. 258).

La courbe $P = f(\Lambda)$ a un point anguleux correspondant à l'inversion du débit séparant les deux branches de charge et de décharge (*fig.* 4).

Si nous admettons que les propriétés du fil ne dépendent pas des parcours antérieurs, et que la charge, pour une section donnée, ne dépend que du diamètre et par conséquent du $\Lambda$ actuel, la branche de décharge doit être symétrique de celle de charge par rapport à la verticale du point d'inversion du débit. Plus exactement, en ce point, le fil s'étant allongé de 1 à $\Lambda_1$ et ayant diminué de section, la courbe de décharge doit être un peu plus éloignée de la verticale.

L'expérience montre que cette hypothèse n'est pas assez générale. La figure 4

Fig. 4.




donne le 1er et le 6e cycles effectués sur un fil unique sous $D = 105^g$ par minute jusqu'à $P_1 = 1050^g$, $L_0 = 80^{cm}$. Voici, en unités arbitraires, les allongements pendant les charges et les décharges successives, et les $\Lambda$ *au début* de chaque cycle :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Λ | 1,00 | | 1,05 | | 1,11 | | 1,17 | | 1,25 | | 1,36 | |
| Allongements pendant la charge | 172 | | 177 | | 213 | | 266 | | 331 | | 470 | |
| » » décharge | | 130 | | 146 | | 179 | | 249 | | 319 | | 486 |

C'est seulement après le 5ᵉ cycle et pour $\Lambda = 1,36$ que l'allongement pendant la décharge surpasse l'allongement pendant la charge, $486 > 470$.

Pour un cycle de $1260^g$, c'est-à-dire pour une charge maxima très voisine de celle utilisée dans la technique du nº 7, on a obtenu :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Λ | 1,00 | | 1,08 | |
| Allongements pendant la charge | 271 | | 387 | |
| » » décharge | | 240 | | 476 |

et, pour un cycle de $1800^g$,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Λ | 1,00 | | 1,18 | |
| Allongements pendant la charge | 541 | | 866 | |
| » » décharge | | 591 | | 1392 |

Si, pour de fortes charges, l'allongement pendant la décharge est, dès les premiers cycles, plus grand que l'allongement pendant la charge; par contre, pour un cycle de $300^g$, même après le 30ᵉ cycle, l'allongement est plus faible à la décharge. Il est même négatif pour les premiers cycles.

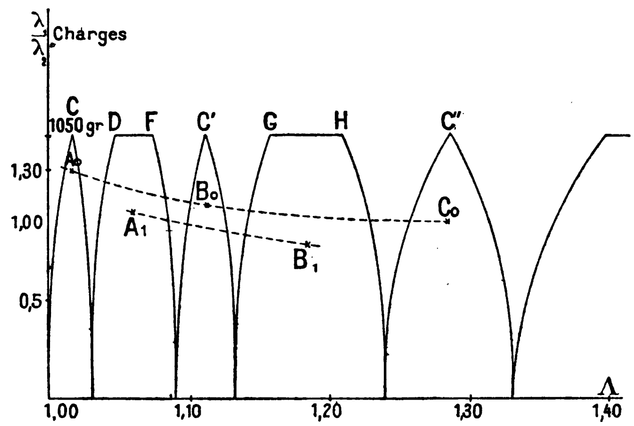
Nous sommes donc amenés à généraliser les conclusions précédentes. On ne peut admettre que le métal ne subisse pas une modification plus ou moins stable du fait de la déformation. *Quand le métal vient d'être allongé par charges croissantes, il a tendance à s'allonger moins par charges décroissantes.* Le phénomène est bien différent de celui qui caractérise les métaux obéissant au principe de Coulomb. La modification se manifeste ici par une diminution de la vitesse d'allongement qui correspond à une charge donnée.

Il y a *hystérésis* en ce sens que la courbe de retour ne se superpose pas à la courbe d'aller; il n'y a pas *accommodation,* en ce sens que les cycles successifs ne tendent pas à se fermer. Nous pouvons appeler les *métaux* dont l'eutectique est le type *métaux visqueux* ou métaux sans accommodation.

2° On peut imposer, dans un cycle, un arrêt T à la charge *maxima* $P_1$. En croisant les cycles à arrêt nul (cycles précédents continus) et les cycles à arrêt T, on obtient les courbes de la figure 5 : $L_0 = 80^{cm}$, $P_1 = 1050^g$, $D = 105^g$ par minute, $T = 5^m$.

Soient $\lambda_1$ l'allongement pendant la charge, $\lambda_2$ l'allongement pendant la décharge, pour les deux branches d'un même cycle. Évaluons le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et portons sa valeur, en ordonnées, aux abscisses qui correspondent au $\Lambda$ moyen du cycle. Les points ainsi obtenus $A_0, B_0, C_0$ pour les cycles sans arrêt se placent sur une courbe unique (*fig.* 5); les points $A_1, B_1$ correspondant aux cycles à arrêt T

Fig. 5.




se placent sur une courbe différente, presque parallèle à la première, mais très sensiblement au-dessous d'elle.

En $A_1$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est à peine supérieur à l'unité; il est égal à 0,87 en $B_1$, alors que, en $C_0$, il est encore un peu supérieur à un. Ce résultat indique une modification du fil par l'*allongement à charge constante,* modification que nous appellerons *désagrégation* et dont nous allons nous occuper dans les numéros qui suivent. Elle tend à augmenter la vitesse d'allongement pour une charge par unité de section donnée. Elle l'augmente d'autant plus que l'allongement à *charge constante* est plus grand. En effet, les courbes $A_0C_0$ et $A_1B_1$ divergent vers la droite où l'on a $\overline{GH} > \overline{DF}$.

3° On peut opérer un nouvel arrêt T d'égale durée en C, C', C'' (*fig.* 5), *sans allongement,* à condition de décharger brusquement en ce point, laisser le fil au repos sous charge nulle pendant le temps T, puis réimposer brusquement la charge maxima $P_1$ qu'on fait immédiatement décroître proportionnellement au temps. Le schéma de l'expérience comprend, outre les cycles de la figure 5, les verticales des points C, C', C'' décrites deux fois en sens inverse. L'expérience montre que les rapports $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ se placent encore sur les deux mêmes courbes.

La modification signalée pour les charges croissantes subsiste même après interruption de cette croissance, pourvu que l'allongement soit aussi interrompu. A moins, ce qui nous paraît peu probable, que la recharge brusque ne rétablisse le fil dans l'état modifié où il se trouvait avant la décharge, et qu'il aurait abandonné au repos.

4° On peut enfin opérer l'arrêt T à la charge $\frac{1}{2}P_1$ sur l'une et l'autre branche. Le cycle se compose de deux branches avec paliers. On croise les cycles avec palier avec les cycles continus.

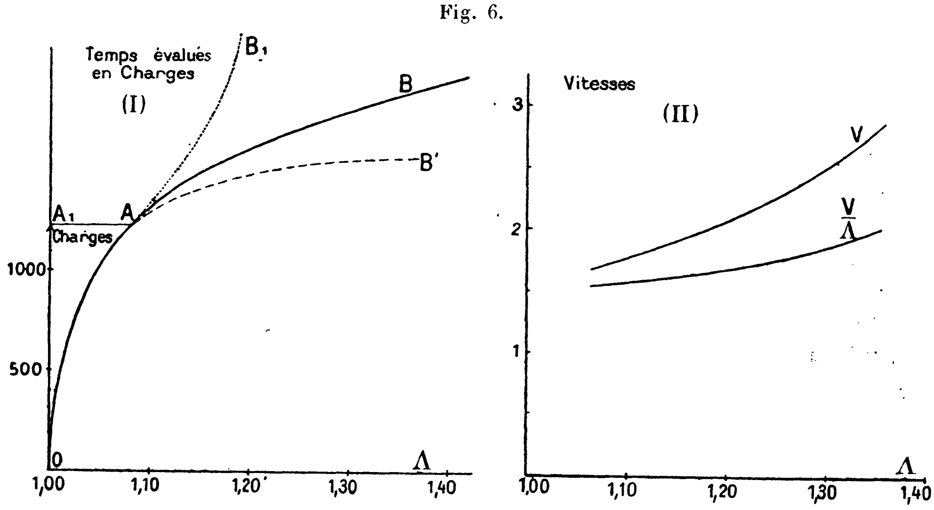
En fonction de $\Lambda$, les vitesses moyennes d'allongement pendant l'intervalle T sous la charge $\frac{1}{2}P_1$ se placent sensiblement sur une courbe unique. L'allongement sous charge *constante* ne dépend pas du signe du débit antérieur.

En fonction de $\Lambda$, les $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ($\lambda_1$ et $\lambda_2$ ne comprenant pas les allongements pendant l'arrêt) se placent sur une courbe *unique*, soit pour les cycles à arrêt T, soit pour les cycles à arrêt nul. En réalité, d'après les résultats trouvés, il doit y avoir une influence de l'arrêt T pendant la décharge de $\frac{1}{2}P_1$ à o. Elle n'est pas apparente, parce que l'allongement pour cet intervalle est toujours petit par rapport à celui réalisé entre $P_1$ et $\frac{1}{2}P_1$.

Bien plus, comme l'indique en particulier la figure 5, une partie de l'allongement pour cet intervalle $\frac{1}{2}P_1 \twoheadrightarrow$ o est négatif, conformément aux résultats signalés à la fin du n° 7.

10. *Allongements à charge constante.* — Si l'on arrête le débit au point A (*fig.* 6, I) de la courbe de traction, le fil continue à s'allonger sous la

Fig. 6.




charge $\overline{OA_1}$. La courbe OA représentant les $\Lambda$ en fonction de la charge se continue par une branche AB représentant les $\Lambda$ en fonction du temps. Les temps sont alors évalués en charges, c'est-à-dire représentés par la charge qui *aurait été* imposée pendant le même temps si l'on avait maintenu l'écoulement à débit constant.

Pour le cuivre et les métaux du même type, la branche à charge constante a la forme $AB_1$ ; elle tend asymptotiquement vers une verticale. L'allongement sous charge constante pas trop considérable conduit à l'équilibre pour une longueur limite. Pour l'eutectique, au contraire, la branche AB tend à devenir horizontale, et l'allongement réalisé amène *toujours* la rupture, quelle que soit la charge $\overline{OA_1}$. La courbe OAB′ est la courbe de traction à débit constant décrite jusqu'à la rupture avec un second fil aussi identique que possible. La distance relativement faible des branches AB et AB′ montre que l'allongement de l'eutectique est fonction *principalement de la durée d'action de la charge* et non plus fonction principalement de la charge elle-même, comme celui des métaux non visqueux.

11. *Allongements sous charge constante par unité de section actuelle.* — Dans l'hypothèse d'un fil restant toujours identique à lui-même, si la section restait constante, la branche AB devrait être une *droite* tangente en A à la courbe OA. On peut se demander si l'incurvation vers l'axe des $\Lambda$ ne provient pas : 1° du fait que la section *actuelle* diminue quand $\Lambda$ croît; 2° du fait que, à chaque instant, l'allongement s'opère sur un fil de longueur croissante.

Représentons (*fig.* 6, II) en fonction de $\Lambda$ la courbe des vitesses d'allongement V. La deuxième correction consiste à prendre à chaque instant $\frac{V}{\Lambda}$, V étant la vitesse brute d'allongement et $\Lambda$ la longueur actuelle ramenée à l'unité de longueur initiale.

On ne peut tenir compte par le calcul de la diminution de section que d'une manière très arbitraire. Il est préférable de maintenir à chaque instant la charge réelle P pour la section actuelle $s$, telle que

$$\frac{P}{s} = \frac{P_0}{s_0} = \text{const.}$$

A mesure que le fil s'allonge, on prélève de temps en temps une portion de la charge convenablement calculée. Pratiquement, il suffit d'opérer ce prélèvement aux $\Lambda$ : 1,01, 1,02, 1,03, .... On le calcule, en admettant que la densité ne change pas et que le fil reste cylindrique, en posant

$$s\Lambda = s_0,$$

d'où

$$\frac{P}{s} = \frac{P}{s_0}\Lambda = \frac{P_0}{s_0}$$

et

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = 1 - \frac{1}{\Lambda}.$$

On détermine à l'avance pour les $\Lambda$, 1,01, 1,02, ..., la fraction $\frac{P_0 - P}{P_0}$ de la charge initiale. A l'instant voulu on opère le prélèvement. Il est réalisé très facilement et sans secousse en aspirant, au moyen d'une pipette graduée, dans le seau de charge, la quantité d'eau correspondante.

La figure 6, II donne les courbes $V = f_1(\Lambda)$ et $\frac{V}{\Lambda} = f_2(\Lambda)$ obtenues d'après cette technique. $P_0 = 1500^g$, soit $2083^g$ par millimètre carré. Les vitesses sont exprimées en allongements pour 100 par minute. Même pour une charge *constante par unité de section actuelle,* non seulement la vitesse brute V, mais encore la vitesse $\frac{V}{\Lambda}$ croît avec la longueur $\Lambda$ et plus vite qu'elle.

L'hypothèse que la matière du fil ne se transforme pas est donc incomplète. Il faut admettre ou bien un écrouissage qui se traduirait ici par une diminution de la viscosité, ou bien une modification d'un autre ordre que nous appellerons *désagrégation,* sans spécifier d'ailleurs si elle est purement géométrique (le fil ne reste pas cylindrique) ou d'un ordre plus intime et intra-moléculaire.

**12.** *Appareil pour imposer brusquement une charge constante ou une vitesse d'allongement constante.* — J'ai vérifié que la courbe $V = f(\Lambda)$ obtenue sous la charge constante $P_0$ a la même forme générale, que $P_0$ soit imposé brusquement ou sous débit constant à partir de la charge nulle. Les expériences du n° 9 (4°) et celles des n° 16 et 17 montrent d'ailleurs que, au moins après quelques instants à partir de l'imposition brusque, l'allongement sous $P_0$ ne dépend pas des charges préalablement supportées, mais seulement du $\Lambda$ actuel. Dans l'étude de la désagrégation, je puis donc remplacer l'imposition sous débit constant par l'imposition brusque et instantanée.

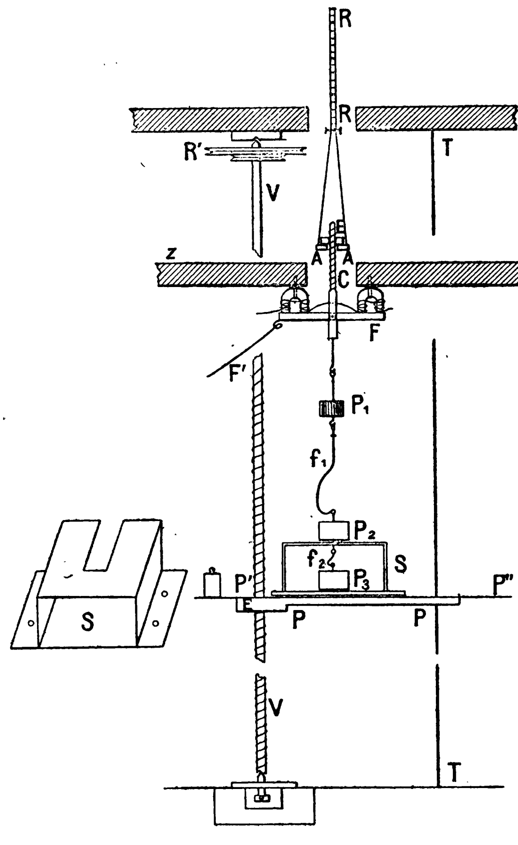
L'appareil qui sert à la réaliser (décrit dans les *Ann. Fac. Sc. Toul.,* t. V, 1903, p. 290) est complété comme il suit (*fig.* 7) :

Une planche fixe horizontale *zz* est percée d'un trou dans la verticale du fil en expérience. De chaque côté du trou sont vissés deux électro-aimants montés en série. Une tige de laiton C porte transversalement un barreau de fer doux F; à son extrémité inférieure est un crochet auquel on peut attacher des poids; sur son extrémité supérieure filetée se déplace un écrou E. Un anneau A est relié directement par une suspension en fil d'acier à une règle légère R accrochée directement au fil d'eutectique en expérience (non représenté dans la figure).

Pour la mise en charge, les électros étant excités, on approche le barreau de fer doux qui vient se coller contre. On suspend au crochet le poids voulu; on attache l'anneau A à la règle supposée déjà dans l'appareil et on l'abaisse, au moyen de l'écrou, jusqu'à ce que le fil d'eutectique soit légèrement tendu. Un interrupteur placé sur le circuit des électros permet la mise en charge instantanée. Pour les charges faibles, on supprime le magnétisme rémanent en séparant les électros du barreau par une mince feuille de papier à cigarette.

La lecture des allongements se fait sur la règle R. Un chronographe enregistreur

Fig. 7.




permet l'observation des allongements rapides, l'expérimentateur inscrivant un signal, par exemple quand les centimètres de la règle R passent devant le réticule de la lunette.

Le support S permet d'imposer successivement et brusquement à un même fil, après la charge $P_1$, les charges $P_1 + P_2$, $P_1 + P_2 + P_3$ ; il suffit, en faisant tourner la poulie R', d'abaisser la plate-forme PP et de la maintenir pendant l'allongement à une distance telle que l'un des fils $f_1$ ou les deux ensemble, $f_1$ et $f_2$, soient tendus et les poids qu'ils supportent libres.

L'appareil doit servir aussi à allonger un fil avec une vitesse déterminée. A cet effet, le support S est *vissé* sur la plate-forme P; on remplace $P_3$ par une planchette de mêmes dimensions. La poulie R' étant entraînée par un moteur réglé, la plate-forme descend d'un mouvement uniforme et le fil s'allonge avec la vitesse de déplacement de cette dernière.

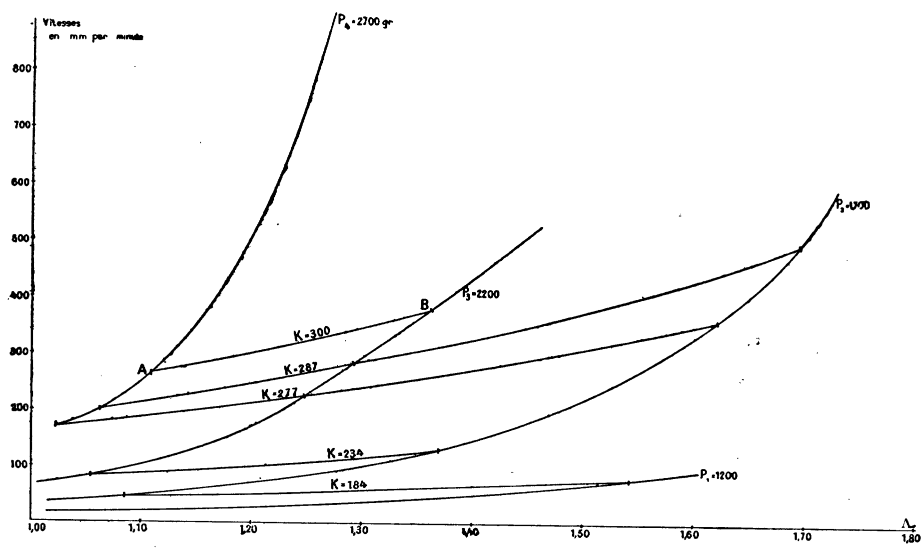
Pour éviter les grippements contre la tige guide TT, on place en P′ un poids qui équilibre le poids de la plate-forme pendant l'allongement à charge constante : on le place en P″ pendant l'allongement à vitesse constante, la plate-forme étant alors tirée vers le haut par le fil d'eutectique.

Pour empêcher la torsion de ce dernier pendant l'allongement à charge constante, il suffit d'attacher un long fil à coudre F′, d'une part, à une extrémité du barreau F, d'autre part à un crochet assez éloigné dans la direction du barreau. Ce fil doit être tendu uniquement par son propre poids.

Pour étudier les allongements sous charge constante faible qui sont très lents, j'ai simplement accroché les fils aux poutres d'une cave du laboratoire où la température restait constante, à 1° près, pendant 15 jours. La lecture des allongements se fait au $\frac{1}{10}$ de millimètre au moyen d'un cathétomètre par comparaison avec une règle verticale disposée à côté des fils. Les charges (constantes) étaient alors imposées à la main, ce qui est sans inconvénient, vu la petitesse des charges et la durée de l'expérience qui peut se poursuivre pendant plusieurs mois.

**13.** *Vitesses d'allongement à charge constante.* — La figure 8 donne, en

Fig. 8.




millimètres par minute pour $L_0 = 80^{cm}$ et pour les charges constantes indiquées, les vitesses brutes d'allongement V en fonction de la longueur Λ.

1° Il s'agit de répondre aux questions déjà posées. La même *charge par unité* *de section* donne-t-elle la même vitesse V? Sinon, quel est le sens de variation?

Soient $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ les charges employées. Il y a, pour chaque valeur de la constante K et pour chacun des fils 1, 2, 3, 4, une valeur de $\Lambda$ satisfaisant à la relation

$$P_1\Lambda_1 = P_2\Lambda_2 = P_3\Lambda_3 = P_4\Lambda_4 = K.$$

*Si l'on admet la relation* $s\Lambda = s_0$, aux points des courbes $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ correspondant aux abscisses $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, ..., la charge est la même par unité de section. Relions entre eux ces points. On a les courbes de la figure 8 caractérisées par leur cote K. Elles montrent que la vitesse *brute* d'allongement, pour une *charge constante par unité de section* croît quand la longueur augmente.

Cherchons ce que sont les vitesses rapportées à la longueur initiale, c'est-à-dire les quotients $\frac{V}{\Lambda}$. Elles croissent aussi avec $\Lambda$ comme l'indique le Tableau suivant :

$$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3 > \Lambda_4.$$

| K. | $\frac{V_1}{\Lambda_1}$. | $\frac{V_2}{\Lambda_2}$. | $\frac{V_3}{\Lambda_3}$. | $\frac{V_4}{\Lambda_4}$. |
|---|---|---|---|---|
| 300 | » | » | 269 | 238 |
| 287 | » | 267 | 215 | 188 |
| 277 | » | 210 | 182 | 167 |
| 234 | » | 95 | 75 | » |
| 184 | 45 | 41 | » | » |

Ces résultats sont conformes à ceux du n° 11.

2° Il résulte de ce qui précède qu'il est impossible de poser

$$V = \Lambda\,\varphi(P\Lambda)$$

qui impliquerait une vitesse d'allongement par unité de longueur actuelle, fonction seulement de la charge actuelle par unité de section. Il faut généraliser cette expression et écrire au moins

$$V = \Phi(\Lambda)\,\varphi(P\Lambda),$$

$\Phi(\Lambda)$ étant une fonction de $\Lambda$ plus rapidement croissante que la première puissance de $\Lambda$.

Il serait très intéressant de connaître la forme de la fonction $\varphi$. On peut démontrer en particulier que, certainement, dans l'hypothèse générale précédente, elle ne se réduit pas à une expression de la forme $P^n\Lambda^n$. On aurait, en effet, pour un

$\Lambda$ donné,

$$V_1 = \Phi(\Lambda)\varphi P_1^n \Lambda^n,$$

$$V_2 = \Phi(\Lambda)\varphi P_2^n \Lambda^n$$

et

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^n.$$

Le rapport des vitesses serait indépendant de $\Lambda$.

Or, l'expérience montre qu'il croît avec $\Lambda$, comme l'indique le Tableau suivant, se rapportant aux courbes de la figure 8 :

$P_2 = 1700^g$, $P_3 = 2200^g$, $P_4 = 2700^g$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$......... | 1,040 | 1,125 | 1,200 | 1,300 | 1,375 |
| $\frac{V_4}{V_3}$....... | 2,34 | 2,58 | 2,90 | 3,16 | » |
| $\frac{V_3}{V_2}$....... | 2,38 | 2,40 | 2,59 | 2,92 | 3,16 |

14. *Expériences croisées sur un fil unique.* — Sur un fil unique, on impose (appareil décrit) *instantanément et alternativement* deux charges $P_1$, $P_2$, $P_1$, ... pendant une durée uniforme, au moins pour le même cycle $P_1$, $P_2$. On note sous chacune de ces charges les vitesses moyennes qu'on porte en ordonnées au $\Lambda$ moyen correspondant. On relie par une première courbe tous les points correspondant aux vitesses sous $P_1$ et, par une deuxième, tous ceux correspondant aux vitesses sous $P_2$. On calcule le rapport des ordonnées des deux courbes aux divers $\Lambda$. La comparaison des vitesses est alors rigoureuse, puisque la *désagrégation moyenne* est la même sur les deux courbes et le fil identique.

Voici les rapports trouvés pour $\frac{V_2}{V_1}$, $P_2 > P_1$ :

*Première expérience.* — $P_1 = 536^g$, $P_2 = 1072^g = 2P_1$, $\frac{P_1 + P_2}{2} = 804^g$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$.................. | 1,000 | 1,125 | 1,250 | 1,375 |
| $\frac{V_2}{V_1}$................ | 3,0 | 3,7 | 4,1 | 4,4 |

*Deuxième expérience.* — $P_1 = 536^g$, $P_2 = 1608^g = 3P_1$, $\frac{P_1 + P_2}{2} = 1072^g$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$......... | 1,000 | 1,125 | 1,250 | 1,375 | 1,625 |
| $\frac{V_2}{V_1}$....... | 10 | 13 | 17 | 19 | 33 |

*Troisième expérience.* — $P_1 = 536^g$, $P_2 = 2144^g = 4P_1$, $\frac{P_1+P_2}{2} = 1340^g$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Lambda$ | 1,000 | 1,100 | 1,220 |
| $\frac{V_2}{V_1}$ | » | 33 | 56 |

*Quatrième expérience.* — $P_1 = 206^g$, $P_2 = 1236^g = 6P_1$, $\frac{P_1+P_2}{2} = 721^g$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$ | 1,000 | 1,050 | 1,100 | 1,150 | 1,200 | 1,250 |
| $\frac{V_2}{V_1}$ | 23 | 25 | 26 | 26 | 27 | 29 |

Qualitativement et quantitativement, ces résultats sont conformes aux précédents et conduisent aux mêmes conclusions.

On trouvera (H. Bouasse, *Ann. Fac. Sc. Toul.*, 2e série, 1905) la discussion, d'après ces résultats, de la loi $V = \Lambda\,\varphi(P\Lambda)$.

*Cinquième expérience.* — On impose alternativement trois charges dans l'ordre $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_2$, $P_1$, .... On obtient pour les vitesses sous $P_2$ une courbe unique, résultat conforme à celui du n° 9, 4°.

**15.** *Vitesses initiales en fonction de la charge constante.* — Voici le Tableau des vitesses initiales ($\Lambda = 1$) sous différents $P_0$. Elles sont données par l'expérience avec quelque incertitude, la mise en charge comportant toujours au début un léger choc. Il est préférable de les calculer par extrapolation sur les courbes telles que celles de la figure 8. Les voici, ainsi calculées, en millièmes de millimètre par seconde pour $L_0 = 80^{cm}$. Elles vérifient assez approximativement la loi $\frac{V_0}{P_0^2} = \text{const.}$

| $P_0$. | 100g. | 200g. | 400g. | 700g. | 1200g. | 1700g. | 2200g. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_0$ | 2 | 9 | 33 | 89 | 250 | 514 | 1130 | |
| $\frac{V_0}{P_0^2}$ | 200 | 225 | 208 | 182 | 173 | 179 | 233 | Moyenne 200 |
| Différence avec la moyenne. | 0 | +25 | +8 | −18 | −27 | −21 | +33 | |

**16.** *Désagrégation.* — J'ai admis que l'on peut poser

$$V = \Phi(\Lambda)\,\varphi(P\Lambda).$$

Voici les expériences qui sont d'accord avec cette hypothèse. Elles prouvent que l'hypothèse convient, au moins en gros et en négligeant des phénomènes accessoires.

1° On allonge jusqu'à $\Lambda_1$ différents fils sous différentes charges, soit plus grandes, soit plus petites que $700^g$. Quand la longueur est $\Lambda_1$, on impose à tous les fils $P_0 = 700^g$. On observe les vitesses sous $P_0$. Voici, pour $\Lambda_1 = 1,15$, les vitesses au début de la mise en charge sous $P_0$ (unités arbitraires) :

| Charges préalables. | 100g. | 200g. | 300g. | 700g. | 800g. | 1200g. | 1700g. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vitesses | 500 | 510 | 530 | 505 | 490 | 530 | 510 | Moyenne : 511 |
| Différence avec la moyenne | −11 | −1 | +19 | −6 | −21 | +19 | −1 | |

Les nombres du Tableau diffèrent peu et non systématiquement de la moyenne qui est très approximativement la vitesse sous $P_0$ constant dès le début (charge préalable $700^g$). La vitesse sous $P_0$ a, pour un $\Lambda$ déterminé, la même valeur quelle que soit la charge préalablement imposée. La désagrégation est donc la même pour tous les fils. Donc, elle est fonction de $\Lambda$ seulement, et non pas de la charge subie. D'ailleurs, à partir de $\Lambda_1$, toutes les courbes $V = f(\Lambda)$ sous charge $P_0$ sont ou confondues ou parallèles et très voisines, indépendantes par conséquent des charges et des vitesses avec lesquelles on a amené le fil à la longueur $\Lambda_1$.

2° Sur des fils différents, on observe les vitesses sous $P_0 = 700^g$ après allongement sous $P' = 1200^g$ jusqu'à des $\Lambda$ variables d'un fil à l'autre. Aux erreurs d'expérience près dues à la non-identité absolue des fils, les *portions de courbe* obtenues pour la vitesse sous $P_0$, se confondent toutes avec celle décrite sous $P_0$ à partir du début.

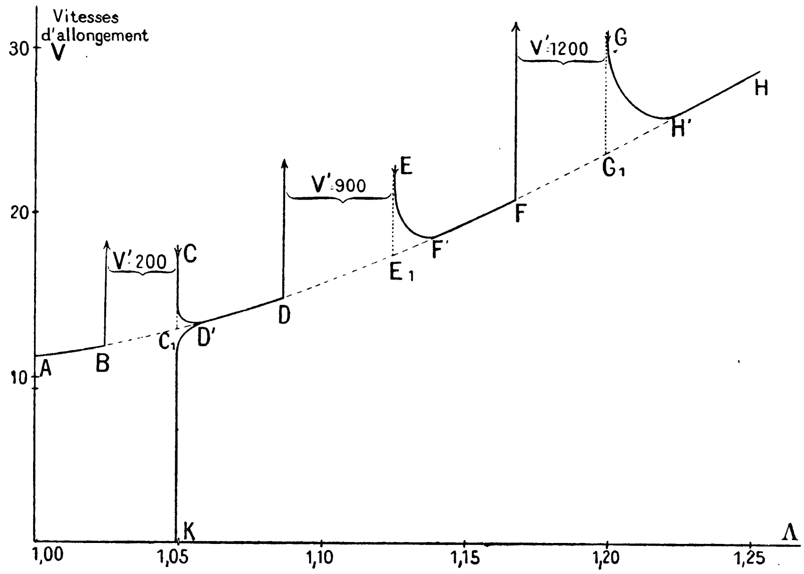
3° Les résultats du 1° et du 2° ne changent pas si l'allongement préalable est effectué, non plus à charge constante, mais à vitesse constante.

17. *Influence de la vitesse antérieure.* — D'après les résultats du numéro précédent, il semble que la vitesse d'allongement sous $P_0$ ne dépende que du $\Lambda$ actuel. Le phénomène est plus compliqué.

Après avoir décrit la portion de courbe AB (*fig.* 9) sous $P_0 = 500^g$, d'où résulte une vitesse $V = 12$ environ (en dixièmes de millimètre par minute pour $L_0 = 80^{cm}$), passons brusquement à la vitesse $V'$ [imposée au moyen de l'appareil (*fig.* 7)]. Nous décrivons entre les longueurs 1,025 et 1,050 une horizontale qui se trouverait très haut dans la figure. A $\Lambda = 1,050$, réimposons la charge $P_0$. La courbe se compose d'une portion descendante très brusque à peu près verticale qui se raccorde à la portion représentée CD'D. Recommençons l'expérience avec $V' = 900$ entre les longueurs 1,088 et 1,125, puis avec $V' = 1200$ entre les longueurs 1,170 et 1,200. Nous obtenons les portions de courbe EF'F et GH'H qui, comme CD′D, se raccordent à une courbe unique ABH, courbe qui serait la courbe des vitesses sous $P_0$ maintenue constante à partir du début.

On ne pouvait espérer obtenir, au lieu de CD′D, EF′F, GH′H, les parcours $CC_1D$, $EE_1F$, $GG_1H$, avec points anguleux en $C_1$, $E_1$, $G_1$. Ce que prouve l'expé-

Fig. 9.




rience, c'est la lenteur relative avec laquelle on revient à la courbe continue ABH. Compté à partir de la longueur à laquelle on a réimposé $P_0$ après V′, l'*allongement* sous $P_0$ nécessaire pour que les deux courbes soient confondues vaut 1,25 pour 100 en D′, 1,87 pour 100 en F′ et 2,50 pour 100 en H′. Il croît avec la vitesse V′ imposée, ou plutôt avec le rapport $\frac{V'}{V}$, V étant la vitesse sous $P_0$. Cela ne veut pas dire que le *temps* nécessaire pour obtenir le raccordement croît avec $\frac{V'}{V}$. Ce temps dépend en effet de la vitesse V sous $P_0$.

Si $P_0$ est faible, soit $25^g$, le rapport $\frac{V'}{V}$ est toujours grand, l'allongement nécessaire peut atteindre 4 pour 100, allongement qui ne nécessite pas moins de 10 jours.

Si V′ est peu supérieur à V, le raccordement se fait très près des points $C_1$, $E_1$, $G_1$; on a alors assez sensiblement les portions de courbe $CC_1D$, $EE_1F$ et $GG_1H$. C'est le cas des expériences du numéro précédent, 1° et 2°, qui peuvent être assimilées à celle-ci et où V′, résultant d'une charge $P' > P_0$, est toujours de même ordre que V.

Enfin, si $V' < V$, en particulier si $V' = 0$, la continuité appelle un raccordement tel que celui représenté en KD'. C'est ce que vérifie l'expérience, pourvu que la mise en charge de $P_0$ s'opère sans aucun choc.

Il n'y a pas lieu de faire intervenir l'élasticité parfaite du fil. Quand la tension décroît brusquement, il doit en résulter un raccourcissement, d'ailleurs très petit (n° 7), et, par conséquent, une diminution de la vitesse d'allongement, au lieu d'une augmentation.

L'expérience présente prouve que la vitesse V' d'un parcours antérieur influe, au moins pendant quelque temps, sur la vitesse V du parcours actuel. La *discontinuité de tension ne produit pas de discontinuité dans la vitesse.*

Les conclusions du numéro précédent doivent donc s'entendre, dans leur sens le plus général, de la vitesse d'allongement sous $P_0$ *après un certain intervalle de temps,* intervalle qui, compté à partir de chaque mise en charge de $P_0$, dépend des conditions de l'expérience.

18. *Allongements à charge constante faible.* — Dans le Tableau qui suit, j'indique en millièmes de millimètre par minute pour $L_0 = 60^{cm}$ les vitesses moyennes d'allongement successives et l'allongement final de fils soumis à l'action de charges faibles. Ces vitesses sont la moyenne de deux lectures faites toutes les 15 minutes pour $P_0 = 200^g$, toutes les 30 minutes pour $P_0 = 100^g$, toutes les 24 heures pour $P_0 = 50^g$ et toutes les 48 heures pour $P_0 = 25^g$.

| | Charges. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 200g. | 100g. | 50g. | 25g. |
| Vitesses | 408 | 120 | 12 | 1,04 |
| | 411 | 89 | 13 | 0,89 |
| | 411 | Après 7 heures | 15 | 0,78 |
| | 436 | 121 | 16 | 0,71 |
| | 439 | Après 18 heures | 20 | 0,71 |
| | 440 | 232 | 27 | 0,64 |
| | 450 | 247 | 31 | 0,56 |
| | 450 | 252 | 45 | 0,59 |
| | 450 | 258 | 62 | 0,67 |
| | 483 | 275 | 96 | 0,60 |
| | 516 | 294 | | 0,72 |
| | 513 | Après 19 heures | | 0,67 |
| | | 624 | | 0,63 |
| | | 647 | | 0,75 |
| | | 662 | | |
| | | 765 | | |
| | | 812 | | |
| Λ final après la dernière mesure | 1,175 | 2,604 | 2,344 | 1,102 |
| Λ de rupture | 2,350 | 3,190 | 3,430 | |

De ce Tableau il résulte que, sauf pour $P_0 = 200^g$, la vitesse passe par un *minimum*. Il n'est pas apparent pour $P_0 = 50^g$ à cause de l'unité de temps choisie et parce que je n'ai pas mentionné la vitesse pendant l'intervalle de temps compris entre les deux premières mesures, période où intervient le mode de mise en charge. Ce minimum est indiscutable. Par exemple, pour le dernier fil, le mode de mise en charge, sans *allongement préalable*, ne peut influer pendant 15 jours. La température variait de 1° en 15 jours; mais on ne peut lui attribuer le phénomène, car elle a été toujours *croissante* (mai à juillet). Il a lieu pour :

| $P_0$. | $100^g$. | $50^g$. | $25^g$. |
|---|---|---|---|
| A. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1,02 | 1,05 | 1,06 |

Il dépend donc et de la charge et de l'allongement.

On peut donner à ces faits deux interprétations. On peut supposer d'abord que, pour allonger le fil d'une manière permanente, il faut un effort supérieur à une certaine limite qu'on représenterait par un frottement solide. Ce frottement solide nécessaire pour la représentation des phénomènes dans les métaux du type cuivre (*voir* H. Bouasse, *Introduction à l'étude des déformations permanentes*) pourrait exister aussi dans les métaux visqueux pour des charges extrêmement faibles.

Mais il y a une autre interprétation. On peut admettre un *écrouissage* consistant dans une augmentation de la viscosité, au moins pour les petites déformations; d'où le minimum de vitesse. Le frottement croît avec l'allongement jusqu'à une certaine valeur limite, à partir de laquelle tout se passe comme il a été dit aux numéros précédents. La désagrégation intervient et la vitesse croît jusqu'à la rupture. L'intérêt des charges faibles est précisément de montrer l'existence de cette modification ou écrouissage, et surtout sa petitesse. La valeur limite du frottement est très voisine de la valeur initiale. J'indiquerai d'autres résultats confirmant les précédents.

**19.** *Allongements totaux sous charge constante.* — Voici, avec les charges $P_0$ imposées, les $A_m$ de rupture et la durée T de la traction qui a produit cet allongement :

| $P_0$. | $2900^g$. | $2200^g$. | $1700^g$. | $1200^g$. | $1000^g$. | $500^g$. | $200^g$. | $100^g$. | $50^g$. | $40^g$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_m$. . . . | 1,53 | 1,75 | 1,80 | 1,90 | 2,13 | 3,53 | 6,17 | 5,92 | 3,75 | 4,52 |
| T. . . . . | $45^s$ | $150^s$ | $390^s$ | $17^m$ | $33^m$ | $166^m$ | $20^h$ | $6^j$ | $22^j$ | Plus de 3 mois |

Ce Tableau complète celui du n° 6. Le maximum apparent de $A_m$ pour $P_0 = 200^g$ semble devoir être attribué à la non-identité des fils. Pour des allongements aussi considérables, les défauts du fil doivent influer beaucoup sur la longueur stable avant la rupture.

L'allongement énorme de 517 pour 100 sous $P_0 = 200^g$ est particulièrement remarquable. Nous donnons au numéro suivant la variation du diamètre final le long de ce fil. Tout ceci confirme la *mollesse initiale et permanente malgré l'allongement* du fil d'eutectique. Aucun métal ne subit un allongement aussi considérable sous l'action d'une charge constante, quand on n'utilise pas une pression transversale comme avec la filière.

20. *Déformation géométrique du fil.* — Ce que j'ai appelé *désagrégation* doit provenir au moins en partie d'une déformation purement géométrique. L'expérience prouve que le fil, en s'allongeant, *ne reste pas cylindrique;* il devient nettement *conique;* la *striction* s'opère sur toute la longueur du fil.

La variation de diamètre est visible à l'œil nu. Le plus petit diamètre est voisin du point d'attache *supérieur*. En définitive, un fil cylindrique se transforme, en s'allongeant, en deux troncs de cône dont la petite base commune est à une faible distance du point d'attache supérieur ($1^{cm}$ pour $L_0 = 80^{cm}$). La rupture se fait naturellement dans la section de la petite base commune. Le bout inférieur représente alors sensiblement la longueur du fil allongé. Soit L cette longueur finale comptée à partir du point d'attache inférieur. Voici, observés au microscope, pour les longueurs o, $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$, $\frac{3L}{4}$, L, les diamètres, en unités arbitraires, de deux fils allongés jusqu'à la rupture sous les charges constantes $500^g$ et $200^g$.

| Charges. | | 0. | $\frac{L}{4}$. | $\frac{L}{2}$. | $\frac{3L}{4}$. | L. | Λ final. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | Diamètre. | 31,5 | 31,0 | 31,0 | 30,0 | 29,5 | 3,53 |
| 200 | | 21,5 | 20,0 | 18,4 | 17,5 | 17,0 | 6,17 |

La variation est continue de o à L. Elle est de $\frac{1}{15}$ pour $\Lambda = 3,53$ et de $\frac{1}{4,2}$ pour $\Lambda = 6,17$, ce qui est conforme au n° 13, 2°; la désagrégation croît avec Λ.

Je donne les variations pour des charges et des vitesses relativement faibles, car elles sont particulièrement caractérisées. Pour de plus fortes charges et des vitesses plus considérables, la variation est de même sens, mais moindre, puisque le Λ de rupture est plus petit.

### DÉFORMATIONS DE FLEXION.

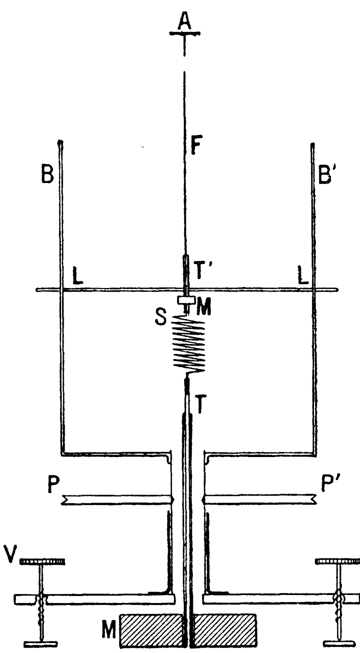
21. *Essai d'un ressort spiral.* — Nous sommes conduits à étudier les phénomènes pour de très petites déformations. Il s'agit de savoir s'il existe un *champ d'élasticité parfaite* ou à peu près telle, ou si la *viscosité se superpose toujours*

à l'élasticité parfaite, si petites que soient les déformations. Pour diminuer les effets de la viscosité, dont l'influence croît avec l'effort, nous opérerons au voisinage de l'effort nul.

Les cycles de déformation d'amplitude très petite que permet de décrire un *spiral cylindrique* (ressort à boudin) auquel on imprime une torsion autour de son axe, recommandent ici son emploi. Quelles que soient les objections qu'on peut faire à cette méthode (*Cf.* H. Bouasse, *Ann. Fac. Sc. Toul.,* 2e série, t. I, p. 194), elles n'ont aucune portée dans le cas que nous étudions et *pour le but particulier* que nous poursuivons.

L'appareil utilisé est représenté figure 10. Il sert pour l'essai statique (torsion imposée) et pour l'essai dynamique (oscillations).

Fig. 10.




On obtient facilement un spiral cylindrique en enroulant à la main, sur un tube de verre, le fil à étudier. Les courbes limites sont simplement des rayons.

L'une des extrémités du spiral S est fixée verticalement, au moyen d'une couche de golaz, dans un tube de laiton T, qui entre à frottement dur dans un second tube fixé lui-même invariablement dans un bloc de plomb M. Un troisième tube, concentrique aux premiers et plus large, peut tourner sans frottement autour de l'axe commun, entraîné par la poulie PP'. Il porte diamétralement opposés les bras verticaux BB'.

Dans l'*essai statique,* on tord ou l'on détord le spiral avec une vitesse *constante* et l'on détermine les déformations permanentes qui résultent de ces torsions et détorsions. On fixe à l'extrémité supérieure du spiral une paille transversale LL′ et l'on donne à la poulie PP′ un mouvement de rotation uniforme. Pour que le spiral reste bien vertical, on le tend légèrement au moyen d'un fil de cocon F dirigé suivant l'axe de l'appareil.

Pour l'*essai dynamique,* on remplace le fil de cocon par un fil d'acier de $1^{m}$ de long, et la paille LL′ par une barre transversale sur laquelle on peut disposer des poids. Le système oscille sous l'influence soit du fil d'acier seul (l'extrémité inférieure du spiral est libre), soit du fil d'acier et du spiral (l'extrémité inférieure est fixée).

Avec le spiral, le système lancé n'effectue pas plus de trois à quatre oscillations; l'amortissement est énorme. Il faut entretenir les oscillations. Le dispositif adopté consiste en un aimant prismatique horizontal fixé transversalement sur la tige T′, autour duquel est placée une bobine plate rectangulaire dont l'axe est perpendiculaire à celui de l'aimant au repos et dans son plan. Les deux bornes de la bobine sont reliées aux bornes de l'un des noyaux d'un électro-aimant de Faraday (circuit secondaire). Le courant d'une batterie d'accumulateurs passe dans le circuit du second noyau (circuit primaire). L'opérateur rompt ou ferme le primaire à chaque passage de l'oscillateur par la position d'équilibre. Il en résulte dans le secondaire un courant induit instantané alternativement de sens contraires, et, pour l'oscillateur, *à chaque passage par la position d'équilibre,* une impulsion dans le sens du mouvement, identique en intensité pour chaque demi-période.

Les rotations sont évaluées par la méthode de Poggendorf au moyen d'un miroir M fixé à l'extrémité supérieure du spiral. Les spires étant aussi rapprochées que possible, sans se toucher, la torsion du spiral se réduit à une *flexion* du fil; la fibre centrale restant non tendue, il y a allongement de la fibre extérieure et raccourcissement de la fibre intérieure. En appelant $r$ le rayon, L la longueur du fil, $n$ le nombre de spires, cet allongement a pour expression

$$\frac{dL}{L} = \frac{2\pi r\, dn}{L}$$

et, avec la condition

$$dn = \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{2\pi}, \qquad \frac{dL}{L} = \frac{1}{2}\frac{r}{L}\,d\alpha,$$

$\alpha$ mesurant en radians la rotation lue *sur la règle.*

Pour $r = 0^{mm},48$, $L = 35^{cm}$,

$$\frac{1}{2}\frac{r}{L} = 6,85.10^{-4}.$$

Sur la règle, à $1^{m}$, une déviation de $0^{mm},1$, soit $d\alpha = 10^{-4}$, donne donc un allongement relatif de $6{,}85 . 10^{-8}$. On apprécie donc le $\frac{1}{20\,000\,000}$ d'allongement des fibres extérieures. La méthode est donc très sensible et permet l'étude du champ d'élasticité au voisinage de l'allongement nul.

Il serait facile d'augmenter la sensibilité en augmentant L. Mais, si le nombre des spires devient un peu grand, le poids des spires inférieures suffit à déformer notablement les supérieures; les premières se tassent et se touchent; la longueur *utile* du spiral diminue; l'expérience n'a plus de sens.

Le courant d'entretien des oscillations ne peut donner que de très vagues indications pour la mesure de l'énergie absorbée par une oscillation. Soit $i$ le courant primaire; *admettons* que la quantité d'électricité induite dans le secondaire lui soit proportionnelle. L'impulsion $\mathfrak{J}$ donnée au système oscillant de moment d'inertie $\mathfrak{M}$ donne un accroissement de vitesse angulaire $\Delta v$ tel que

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{M}\,\Delta v = G i.$$

L'énergie du système

$$w = \mathfrak{M}\frac{v^2}{2}$$

reçoit un accroissement

$$\Delta w = \mathfrak{M}\,v\,\Delta v = \mathfrak{J}\,v.$$

Cet accroissement est donné *au passage par la position d'équilibre.* Si l'on *admet l'oscillation de forme sinusoïdale*

$$v = \frac{2\pi}{T}A,$$

A étant l'amplitude, T la période du mouvement

$$\Delta w = 2\pi G\frac{A i}{T}.$$

Mais, outre que nous n'avons pris aucune précaution pour rendre calculable ou négligeable le frottement de l'air, l'hypothèse même que la quantité d'électricité induite est proportionnelle à l'intensité du courant inducteur suppose que l'aimantation du noyau de fer doux est proportionnelle au courant primaire, ce qui est certainement erroné. Aussi, nous ne donnerons pas les valeurs du courant d'entretien. Nous verrons plus loin (nos 41 et suiv.), pour la torsion d'un fil, par une méthode plus précise et reposant sur une oscillation de *forme rigoureusement sinusoïdale,* d'*amplitude et de période rigoureusement constantes,* quelle est l'énergie absorbée.

22. *Méthode dynamique. Oscillations d'un spiral. Moments d'inertie variables.* — Je détermine les durées d'oscillation T′ et T du système de moment

d'inertie $\mathfrak{M}$, sans le spiral, c'est-à-dire sous l'action du fil d'acier seul (on rend libre l'extrémité inférieure du spiral), et avec le spiral.

Dans le premier cas, je peux poser très approximativement

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C'}}$$

où $C'$ est le couple par unité d'angle de torsion du fil d'acier. Il y a alors proportionnalité entre le couple et la torsion, $T'$ est indépendant de l'amplitude.

Dans le second cas, je pose *arbitrairement*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C + C'}}.$$

Je me propose de déterminer la valeur expérimentale de C en fonction de l'amplitude A et de la durée T. On fait varier T en modifiant $\mathfrak{M}$; on fait varier A en modifiant le courant d'entretien.

Voici l'expérience réalisée à amplitude constante égale à $0^\circ,37$ correspondant pour $L_0 = 0^m,35$ à un allongement et un raccourcissement maximum de 9 millionièmes. A cause des incertitudes qu'entraîne la déformation du spiral, soit par l'action de la pesanteur seule, soit par de multiples changements de moments d'inertie, j'ai utilisé deux $\mathfrak{M}$ seulement : $\mathfrak{M}_1 = 6500$ C.G.S. et $\mathfrak{M}_2 = 51,8\,\mathfrak{M}_1$. J'ai croisé les expériences, effectuant successivement et alternativement sous $\mathfrak{M}_1$ et sous $\mathfrak{M}_2$ 25 oscillations (avec le spiral). $T'$ est déterminé par une expérience unique portant sur 50 oscillations.

Voici, dans l'ordre où elles ont été obtenues, les durées $T'$ et $T$ en secondes.

On a

$$\frac{C}{C'} = \frac{T'^2}{T^2} - 1.$$

| | T'. | T. | | | | | | | | | | | | Moyenne des T. | $\frac{C}{C'}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sous $M_1$... | 11,83 s | 3,53 | | 3,48 | | 3,50 | | 3,45 | | 3,42 | | 3,48 | | 3,49 | 9,96 |
| Sous $M_2$... | 85,25 | | 29,24 | | » | | 28,50 | | 28,30 | | 28,29 | | 28,28 | 28,52 | 7,94 |

La première conclusion à tirer de ces nombres est que l'on ne peut admettre pour l'eutectique l'existence d'un couple proportionnel à la torsion et indépendant de la période. Ce résultat ne prouve en aucune manière l'existence ou la non-existence d'un module de traction ; il montre seulement qu'aux phénomènes d'élasticité parfaite, *s'il en existe,* se superposent d'autres phénomènes qui en modifient l'allure. Quand le moment d'inertie $\mathfrak{M}$ varie de 1 à 52, la période T de la déformation du spiral de 3,49 à 28,52, c'est-à-dire la vitesse moyenne de déformation mesurée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de 8 à 1, le rapport $\frac{C}{C'}$ passe de 9,96 à 7,94, soit une variation de plus de $\frac{1}{5}$. Cependant la déformation est de l'ordre de $\frac{1}{100\,000}$, exactement 9 millionièmes.

L'oscillateur est soumis à un couple qui, pour un même azimut, dépend de la période et croît quand la période diminue. Si l'expérience permettait de figurer les courbes représentant les couples (ordonnées) en fonction de l'azimut (abscisses), on obtiendrait des cycles dont le diamètre des cordes verticales (couple moyen pour le même azimut) se redresserait à mesure que la période décroît (*voir* n° **42**).

Les résultats du n° **6** sont analogues et de même ordre. Nous avons trouvé que, la vitesse de déformation passant de 140 à 18, soit de 8 à 1 environ, la tension supportée par le fil s'abaisse de 3700 à 3100, variation voisine de $\frac{1}{6}$. Donc, les courbes de traction à vitesse constante pour un même fil, variable d'un fil à l'autre, sont distinctes dès les plus faibles allongements.

Les T décroissent légèrement avec le numéro d'ordre de la série à laquelle ils correspondent. $\mathfrak{M}$ et C′ étant invariables, il y a donc croissance de C avec le numéro d'ordre de l'oscillation. Le seul fait de répéter un certain nombre de fois une oscillation d'amplitude constante redresse le diamètre des cordes verticales. Il y a écrouissage en ce sens que les oscillations antérieures constituent le fil dans un état plus résistant pour la déformation actuelle. Comparer au n° **18**, où, à tension constante, l'écrouissage se traduit par une diminution de la vitesse d'allongement. Si la vitesse est constante, la tension doit croître; *a fortiori* dans le cas actuel où elle est croissante avec le numéro d'ordre de l'oscillation.

**23.** *Oscillations à période constante et amplitude variable.* — Le moment d'inertie reste le même pendant toute la durée de l'expérience. La période devrait être identique si la quantité C ne dépendait pas de l'amplitude. En fait, elle varie. Voici, pour les amplitudes A exprimées en millionièmes d'allongement, les périodes T en secondes :

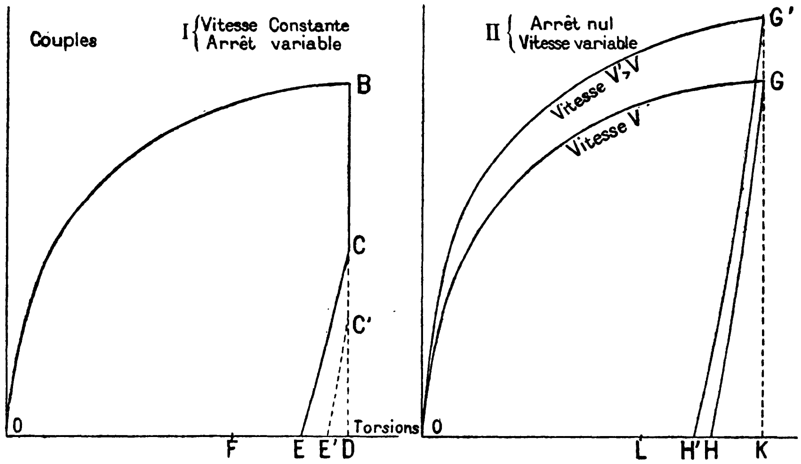
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. | 4,9. | 9,4. | 16,5. | 21,5. | 26,8. | 38,0. |
| T........... | 6,64 | 6,82 | 6,85 | 6,89 | 6,94 | 6,99 |

T croît avec A. Comme une augmentation de T correspond à une diminution de C, l'inclinaison moyenne du diamètre des cordes verticales de la courbe couples-torsions diminue à mesure que l'amplitude augmente. C'est la confirmation du n° **5**, que la courbure de la courbe de traction a une valeur non nulle dès les plus faibles charges, et que celle-ci s'abaisse vers l'axe des A à partir du début.

24. *Méthode statique.* — La méthode statique confirme les résultats précédents.

Les déformations dues à l'*élasticité parfaite ne présentent pas d'hystérésis.* Si, au contraire, l'élasticité n'est pas parfaite, une torsion suivie de détorsion (vitesse constante) se traduit par une courbe OGHL (*fig.* 11, II). On peut

Fig. 11.




mesurer la déformation imposée $\overline{OK} = A$ et la déformation $\overline{OL}$ qui subsiste un certain temps après le retour au couple nul. Il revient au même de considérer $\overline{LK}$. On peut, à l'extrémité du parcours, opérer un arrêt plus ou moins long en maintenant constant l'azimut D (I). Le couple décroît suivant BC. On peut enfin étudier la manière suivant laquelle l'azimut varie au couple nul suivant HL ou EF.

La méthode est sensible. La lecture des allongements (torsions du spiral) se faisant d'après la méthode de Poggendorf, on peut en considérer de très petits. Seule, la détermination des points E ou H présente quelque incertitude à cause de la difficulté d'apprécier l'instant où la paille quitte les butoirs. On évalue toujours par excès les valeurs données ci-après de $\overline{KH}$ ou $\overline{ED} = A'$.

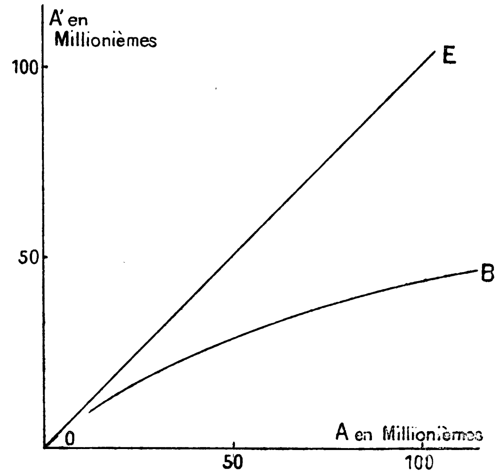
1° *Spiral unique.* — On tord et l'on détord avec une vitesse constante. L'arrêt est nul à l'extrémité des cycles. D'un cycle à l'autre, on fait croître $A = \overline{OK}$. On a toujours $\frac{A'}{A} < 1$. Si l'on porte en ordonnées les A', en abscisses les A, la courbe obtenue est représentée (*fig.* 12). La bissectrice des axes OE correspondrait à l'élasticité parfaite. La courbe réelle OB pour l'eutectique est toujours au-dessous.

2° Pour un même A imposé, quand on répète un certain nombre de fois l'expérience sur un même spiral, toujours dans le même sens, les A' croissent avec le numéro d'ordre du parcours jusqu'à une limite qui reste inférieure à A. On obtient, par exemple, pour A′ les nombres successifs suivants (unités arbitraires) $A = 1000$ en les mêmes unités

420 492 453 490 508 525 540 536 542 588 600 608 614 613

3° Sur un même spiral, on impose le même allongement $A = 1000$ (34 millioniėmes) avec les vitesses 1, 2, 4 (0,7, 1,4 et 2,8 millioniėmes par seconde) succes-

Fig. 12.




sivement et alternativement. On obtient pour les parcours successifs les valeurs suivantes de A′, limites des valeurs obtenues dans 8 expériences ainsi croisées sur un fil unique :

| Vitesses. | 1. | 2. | 4. |
|---|---|---|---|
| A′.................. | 411 | 484 | 533 |

Il s'agit de la vitesse à la *torsion,* la vitesse à la détorsion étant la même pour les trois séries. Les résultats précédents sont exagérés si l'on prend la vitesse de détorsion égale à la vitesse de torsion. Ces résultats étaient à prévoir d'après la figure 11, II.

25. *Méthode statique. Influence d'un arrêt* $\mathfrak{T}$ *à la torsion maxima.* — La méthode statique permet un arrêt $\mathfrak{T}$ plus ou moins prolongé à l'extrémité du parcours. Le couple diminue suivant BC (*fig.* 11, I) pendant l'arrêt, et les $A' = \overline{ED}$ de retour au couple nul se trouvent nécessairement diminués.

Voici le Tableau d'expériences effectuées avec les arrêts $\mathfrak{T}$, séparées par une expérience à arrêt nul :

| | | | | A = 1000 (34 millionièmes). | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arrêts $\mathfrak{T}$ (minutes). | | | | 0,5. | | 1. | | 2. | | 4. | | 8. | | 28. | |
| A' pour l'arrêt $\mathfrak{T}$..... | | | | 312 | | 260 | | 195 | | 150 | | 115 | | 67 | |
| A' pour l'arrêt nul.... | 440 | 462 | 460 | | 467 | | 522 | | 515 | | » | | 498 | | 555 |

Les A' décroissent très rapidement quand l'arrêt croît. A mesure que C se déplace en C' sur une verticale, E se déplace en E' sur l'axe des torsions, vers le point D (*fig.* 11, I). L'expérience est probante puisque les A' pour l'arrêt nul sont, au contraire, croissants pour la raison donnée au numéro précédent.

26. *Réactivité d'un spiral.* — Il s'agit des détorsions spontanées au couple nul suivant HL (*fig.* 11, II). On tord le spiral d'un nombre de millionièmes déterminé avec une vitesse déterminée. On détord avec la même vitesse. On observe, à l'instant où la paille quitte les butoirs, l'azimut du couple nul $\overline{\text{OH}}$; puis, à partir de cette origine, les azimuts successifs en fonction du temps. Pour les époques des observations j'ai choisi celles indiquées par M. Bouasse (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, 2e série, t. II, p. 458), c'est-à-dire celles qui délimitent des intervalles de temps formant une progression géométrique de raison 2, soit les époques 0, 0,5, 1, 2, 4, 8, 16, ... minutes.

La loi générale de la réactivité (*ibid.*) consiste en ce que les détorsions spontanées $\Delta p$ pendant ces intervalles successifs sont sensiblement égales, en tout cas, toujours du même ordre de grandeur.

Voici, pour deux spiraux ($L_0 = 0^m,35$) aussi identiques que possible, les $\Delta p$ successifs, pour une torsion imposée A = 1000 environ (34 millionièmes) :

| | Époques des observations. | $\Delta p$. | Spiral I. | Spiral II. | Moyennes. |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | | 1008 | 1003 | 1005 |
| A' | | | 323 | 351 | 337 |
| | 0........... | | | | |
| | | $\Delta p_1$ | 144 | 171 | 157,5 |
| | 0,5......... | | | | |
| | | $\Delta p_2$ | 35 | 39 | 37,0 |
| | 1........... | | | | |
| | | $\Delta p_3$ | 36 | 34 | 35,0 |
| | 2........... | | | | |
| | | $\Delta p_4$ | 30 | 33 | 31,5 |
| | 4........... | | | | |
| | | $\Delta p_5$ | 28 | 33 | 30,5 |
| | 8........... | | | | |
| | | $\Delta p_6$ | 21 | 40 | 30,5 |
| | 16.......... | | | | |
| | | $\Delta p_7$ | 10 | 52 | 31,0 |
| | 32.......... | | | | |
| | | $\Delta p_8$ | 0 | 87 | 43,5 |
| | 64.......... | | | | |

Il y a, pour un spiral cylindrique, deux sens de torsion possibles. L'un tend à augmenter le nombre des spires, l'autre à le diminuer.

Les spiraux I et II ont été essayés chacun avec une torsion de sens différent. Le Tableau montre que la loi de succession des $\Delta p$ dépend de ce sens. Si la torsion imposée *tend à augmenter le nombre de spires* (spiral I), les réactivités $\Delta p$ sont d'abord décroissantes jusqu'à zéro, puis négatives pour des intervalles de temps assez grands. Si la torsion initiale *tend à diminuer le nombre de spires* (spiral II), les réactivités sont toujours de même sens et indéfiniment croissantes. Les valeurs moyennes des deux réactivités correspondant aux mêmes intervalles de temps, pour les deux sens, obéissent sensiblement à la loi énoncée par M. Bouasse.

La dissymétrie constatée s'explique par l'action de la pesanteur sur les spires. Quand le spiral a son extrémité inférieure libre, la pesanteur tend à l'allonger suivant son axe, en même temps qu'il se produit une torsion autour de cet axe et une variation du nombre de spires. Avec l'appareil employé, l'extrémité inférieure étant fixe, l'allongement est remplacé par un tassement des spires inférieures; le mouvement autour de l'axe n'est pas gêné; il se produit du chef de ce *tassement* une rotation du miroir qui s'ajoute à celle due à la déformation imposée ou s'en retranche.

D'après le Tableau, c'est dans le cas d'une torsion préliminaire du spiral correspondant à une augmentation du nombre de spires que les détorsions spontanées décroissent et sont finalement remplacées par une retorsion. Ce résultat est conforme à cet autre qu'un spiral cylindrique d'eutectique *se tord d'abord* sous l'action de poids appliqués à son extrémité inférieure. Ainsi, un spiral de 20 spires ($L_0 = 0^m,70$), soit deux fois plus long que ceux ici étudiés, tendu verticalement par une charge faible (une trentaine de grammes) se tord en 15 minutes de 4 tours et demi environ; le nombre de spires passe de 20 à 24,5. Naturellement, les hélices se déforment et le diamètre du cylindre générateur diminue. Cette torsion atteinte, il y a arrêt, puis détorsion jusqu'à la rupture du fil *rectifié;* cette dernière détorsion est d'ailleurs très lente; la rupture arrive avant que le nombre de spires soit redevenu le nombre primitif. C'est la première phase du phénomène qui intervient dans l'étude de la réactivité.

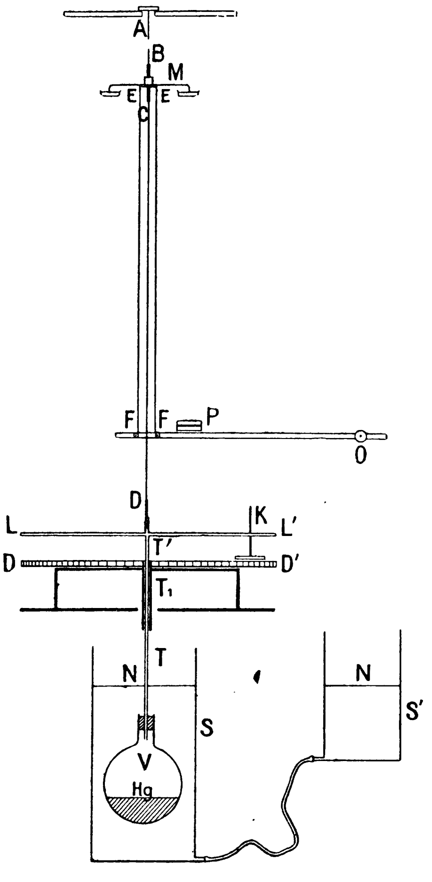
## DÉFORMATIONS PAR TORSION.

27. *Essai de torsion. Appareil.* — Généralement, dans les expériences de traction, j'ai imposé la charge et mesuré l'allongement. La charge était la variable indépendante (*Cf.* Bouasse, *Introduction à l'étude des déformations permanentes*). Pour la torsion, il est difficile de conserver la variable mécanique (couple) comme variable indépendante. Je prendrai comme telle la variable géométrique (torsion, azimut).

On tord par une de ses extrémités, avec une vitesse angulaire déterminée et constante, un fil d'eutectique dont l'autre extrémité à peu près fixe imprime à un dynamomètre une déformation mesurant à chaque instant le couple de torsion.

L'appareil utilisé est celui décrit par M. Bouasse (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, 2e série, t. II, 1900, p. 435), sauf les modifications suivantes. Le fil d'eutectique de $0^{mm},96$ de diamètre s'allonge d'une façon permanente sous des charges faibles. L'essai de torsion devant être effectué à longueur constante $L_0$, il faut imposer au fil une charge juste suffisante pour le tendre. La figure 13 montre le dispositif

Fig. 13.




employé. Au moyen d'une pince (non représentée), le fil en expérience CD est fixé dans l'axe du tube TT'. Ce tube passe, à l'autre extrémité, à travers un bouchon fermant hermétiquement un ballon de verre U qui plonge dans un seau S plein d'eau. Le ballon V est lesté avec du mercure, de façon que, le niveau de l'eau étant en N, le fil CD subisse une tension de quelques grammes, $10^g$ environ. On peut faire varier le niveau au moyen d'un seau auxiliaire S' : la tension croît quand le niveau baisse et inversement; mais, le tube TT' ayant un diamètre de $0^{cm},5$, à une grande variation de niveau correspond une petite variation de tension.

Avec une tension aussi faible, il est nécessaire de maintenir le fil dans l'axe de l'appareil pendant la torsion. Un tube $T_1$ fixé normalement au centre du disque DD' et dans lequel le tube TT' passe à frottement doux réalise cette condition. Le disque DD' est entraîné par une molette que commande un train d'engrenages mû par un moteur réglé. Il produit la torsion du fil CD par l'intermédiaire du doigt K et de la paille LL'. ABFF est un bifilaire servant de dynamomètre. On lit ses indications dans le miroir M par la méthode de Poggendorf.

Quant aux rotations imposées à l'extrémité du fil, au lieu de les lire sur le disque DD', il est plus commode de les évaluer en temps, étant donnée la vitesse angulaire du disque déterminée à l'avance. L'approximation peut paraître grossière; il faut admettre que le mouvement de rotation est uniforme. Il ne l'est pas absolument. Le moteur, muni d'un volant, est réglé par un régulateur de Watt, mettant automatiquement dans le circuit de l'induit une résistance convenable quand le mouvement s'accélère. Mais, la période de régulation est de l'ordre de 30 secondes; si, comme je l'ai fait généralement, on fait la lecture des rotations toutes les minutes, tout se passe comme si le mouvement était uniforme. Aussi bien, l'expérience montre que, pour un azimut donné, la valeur du couple dépend énormément de la vitesse de torsion; on n'aurait pas une approximation plus grande en lisant les azimuts eux-mêmes.

La déformation du fil dépend de sa longueur L et de son rayon $r$. Elle a pour expression $\frac{r\alpha}{L}$, $r$ et L étant évalués en les mêmes unités, $\alpha$ étant la torsion en radians. Il est nécessaire de prendre comme variable $\frac{r}{L}\alpha$ au lieu de $\alpha$ quand on veut se rendre compte de la *valeur absolue des déformations*. Pour $r = 0^{mm},48$, $L = 1^{m}$, une torsion de $1^{\circ}$ vaut 8,38 millionièmes; une torsion de 1 tour vaut 3016 millionièmes.

**28.** *Courbe de première torsion.* — $L_0 = 1^{m}$, vitesse de torsion 1 tour en 81 secondes, soit $266^{\circ}$ par minute. — La figure 15 donne en I une courbe de première torsion jusqu'à 7,4 tours, soit 22 318 millionièmes. A ce moment, le *couple limite* est à peu près atteint. On remarquera la petitesse de ce couple (pour la vitesse indiquée), malgré le diamètre relativement considérable du fil. Avec le cuivre, pour un fil de mêmes dimensions, le même couple est obtenu après une torsion de $6^{\circ}$ environ.

Après 1 tour, on a déjà (toujours pour la même vitesse) les $\frac{5}{6}$ du couple final. La courbe monte très rapidement au début, puis s'infléchit assez brusquement. Il est dificile d'étudier la courbe au voisinage de l'origine. Quelle que soit la vitesse adoptée, le couple croît très rapidement dès le premier ébranlement. Toutefois, en prenant des intervalles assez petits, on peut montrer qu'il existe une courbure non nulle au voisinage de l'origine.

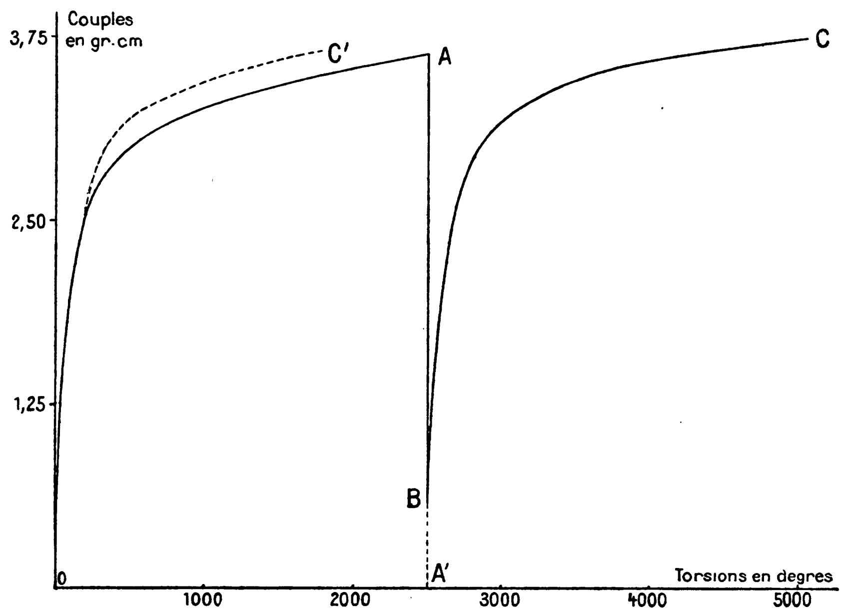
Voici, en unités arbitraires, pour la courbe III (*fig.* 15) les gains de couple de 18° en 18° à partir du début :

1150 270 150 100

Il n'y a donc pas de portion rectiligne au début de la courbe de torsion; le champ d'*élasticité parfaite pour la torsion* est nul, comme pour la traction. Au n° 40, 2°, cette conclusion est confirmée par une méthode plus précise.

**29.** *Courbe de retorsion.* — Grâce à la perte de couple très rapide à azimut constant dont nous aurons à parler au n° 39, on peut réaliser en quelque sorte, pour la torsion, la technique du n° 7 pour la traction. Ayant tordu le fil jusqu'à $\alpha_0 = \overline{\mathrm{OA}'}$ (*fig.* 14), on laisse le couple tomber à zéro, à azimut constant. Il fau-

Fig. 14.

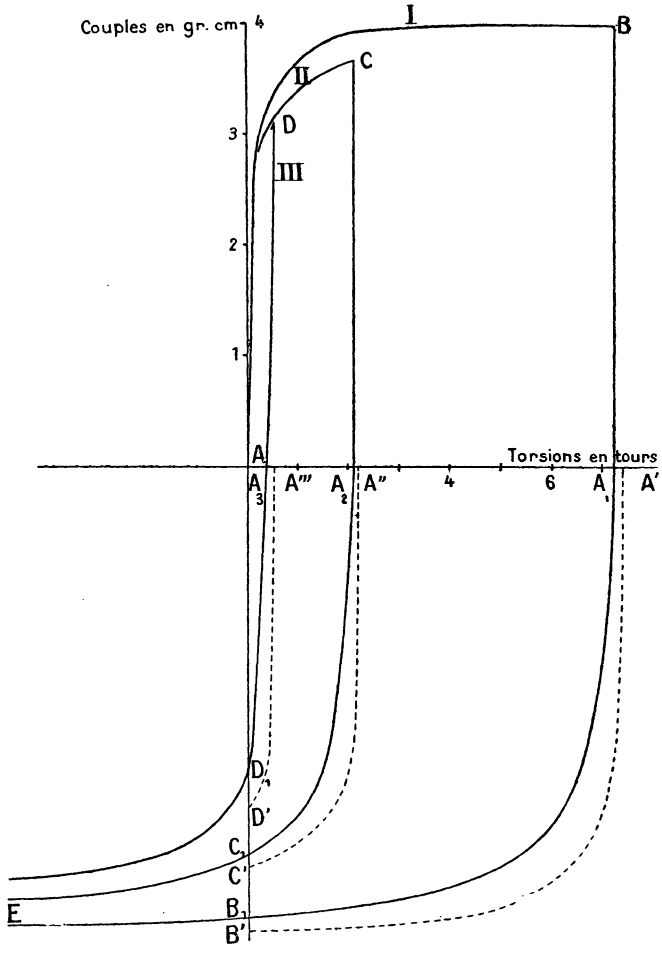



drait un temps assez long pour réaliser le couple rigoureusement nul. Pratiquement, il suffit que le couple soit réduit à quelques centièmes de sa valeur. On tord alors de nouveau dans le sens primitif.

La figure 14 donne le résultat de l'expérience pour $L_0 = 110^{\mathrm{cm}}$ et une vitesse de torsion de 125° par minute. OA est la courbe de première torsion, $\overline{\mathrm{AB}}$ est la perte de couple à azimut constant (86 pour 100 en 32 minutes); BC est la courbe de retorsion après cet arrêt. Transportée parallèlement à elle-même vers la gauche de la quantité $\overline{OA'}$, elle vient en OC', légèrement au-dessus de OA. Il n'y a aucune correction à faire, la longueur et le rayon restant identiques pour les deux courbes. La position respective de OA et OC' indique que le fil a été légèrement modifié par le premier parcours OA. Toutefois, il faut tenir compte du couple rémanent $\overline{A'B}$ existant au début de la branche BC. Il produit une avance du couple sur l'azimut qui peut expliquer en partie la position respective de OA et de OC'. Nous admettrons que la modification, ou *écrouissage*, si elle existe, est très faible.

30. *Courbe de première détorsion.* — $L_0 = 1^m$, vitesse de torsion 1 tour en

Fig. 15.




81 secondes, soit à la torsion, soit à la détorsion. — On tord trois fils différents d'un angle $\alpha_0$ variable d'un fil à l'autre. Soient $\overline{AA'}$, $\overline{AA''}$, $\overline{AA'''}$ (*fig.* 15) ces

angles; on obtient les courbes de première torsion I, II et III. Elles devraient être confondues si les fils étaient identiques.

A partir de l'azimut $\alpha_0$, sans arrêt, on change brusquement le sens de rotation; on obtient les branches $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$. Elles sont très peu inclinées dans les intervalles $BA_1$, $CA_2$, $DA_3$; le couple produit par une torsion $\alpha_0$ est annulé par une détorsion égale à une très petite fraction de $\alpha_0$. Nous pouvons dès maintenant prévoir que les pertes de couple à azimut constant seront très rapides.

La courbe de détorsion, à partir du changement de vitesse, n'est pas une verticale; elle n'est pas même une droite. Voici, pour le même fil III, les pertes de couple, en unités arbitraires, de 10 en 10 secondes, à partir de l'instant où a été opéré le changement du sens de rotation,

2770 375 190 120

Le couple a changé de signe après les 10 premières secondes.

On a tracé vers le bas, en traits discontinus, en $A'B'$, $A''C'$, $A'''D'$, les courbes de première torsion en prenant comme origine l'abscisse $\alpha_0$. Elles diffèrent assez peu de la courbe expérimentale de détorsion. Autrement dit, pour revenir de la torsion $\alpha_0$ à la *torsion* nulle, le couple à exercer, de signe contraire, passe à peu près par les valeurs qui correspondent à la torsion première. Les courbes $A_1B_1$ et $A'B'$, $A_2C_1$ et $A''C'$, $A_3D_1$ et $A'''D'$ tendent asymptotiquement et respectivement l'une vers l'autre. La différence, pour la torsion nulle, est d'autant plus petite que la torsion $\alpha_0$ est plus grande, comme le montre nettement, en particulier, la courbe III.

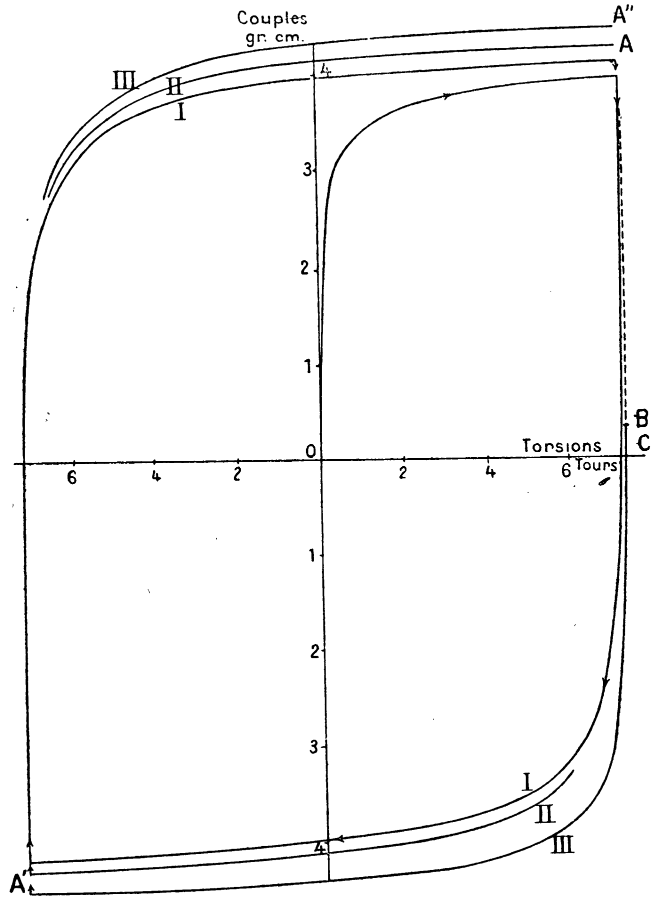
Il est difficile de déterminer avec précision le couple limite de détorsion. Il est sensiblement égal, *en valeur absolue,* au couple de torsion. C'est ce qu'on vérifie sur la courbe I. Pour II et III, le couple limite de torsion n'étant pas atteint, la comparaison est impossible. En définitive, on peut encore admettre comme résultat de cette autre expérience que l'écrouissage par torsion est, sinon nul, du moins faible.

31. *Cycles de torsion à vitesse constante.* — $L_0 = 1^m$, vitesse de torsion 1 tour en 81 secondes. — La figure 16 représente, numérotés dans l'ordre où ils ont été décrits, trois cycles de torsion de 7,4 tours d'amplitude. Les deux premiers (I et II) sont effectués sans arrêt aux extrémités; le troisième (III) après arrêt de 54 minutes à la torsion maxima. La perte de couple pendant ces 54 minutes est représentée par $\overline{AB}$. Elle est de 92 pour 100.

Les cycles sont presque fermés dès le premier; ils ont *un centre à l'origine.* Ce résultat ne prouve pas que l'eutectique est un métal *à accommodation*; il s'agit ici, en effet, de déformations égales et de signes contraires, les couples sont à cheval sur le couple nul. Il ressort seulement de l'expérience que le parcours torsion, détorsion, retorsion s'effectue sans modification *notable* de la matière du fil. En fait, il en existe une légère. Les cycles se dilatent dans le sens des ordonnées (couples). A un même azimut correspond un couple d'autant plus grand que le numéro d'ordre du cycle est lui-même plus grand. La torsion, même alternativement changée de signe, d'un fil d'eutectique produit un léger *écrouissage qui se traduit par une augmentation avec le numéro d'ordre du parcours de l'effort nécessaire pour le tordre d'un angle donné.*

Le cycle III est effectué (toujours sur le même fil) après un arrêt de 54 minutes à l'azimut $\overline{OC}$. Le couple $\overline{BC}$ au début de la détorsion vaut 0,08 $\overline{AC}$. La

Fig. 16.

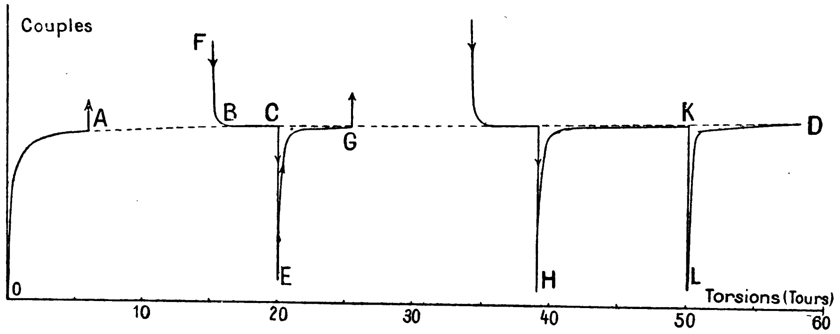



branche CA′ est décrite sensiblement à partir du couple nul atteint à azimut constant; elle diffère de la courbe II plus que celle-ci ne diffère de I. Sur la figure 15, les courbes $A_1B_1$ et $A'B'$ tendent à se confondre. Ici, l'écartement plus grand se maintient en A′, mais non pas sur la branche de retour A′A″. L'arrêt sous couple paraît donc avoir une influence sur les courbes décrites immédiatement après; mais la modification obtenue disparaît sous l'influence de parcours subséquents étendus.

32. *Influence de la vitesse de torsion.* — Le disque DD′ (*fig.* 13), qui sert à tordre le fil, peut être entraîné par friction par deux molettes diamétralement opposées. La corde qui transmet le mouvement les fait tourner toutes deux. Un levier permet d'appliquer l'une des deux contre le disque et d'écarter la seconde instantanément. Les deux molettes, de même diamètre, tournent avec des vitesses angulaires différentes. On peut, de plus, en désembrayant, arrêter le mouvement général. On peut donc, *brusquement et sans arrêt,* le long d'une courbe de torsion à vitesse $V_1$, substituer soit $V_2 > V_1$, soit $V_0 = 0$. C'est, pour la torsion, la technique employée au n° 17 pour la traction.

La figure 17 donne la courbe pour $V_1 =$ 1 tour en 150 secondes, remplacée

Fig. 17.




alternativement par $V_2 =$ 1 tour en 13 secondes et $V_0 = 0$. On n'a pas représenté les parcours sous $V_2$.

Les portions de courbe sous $V_1$ décrites soit après $V_0 = 0$, soit après $V_2 > V_1$, tendent à se placer sur une *courbe unique* BD, à la seule condition que les segments considérés aient un développement suffisant; autrement dit, à condition qu'on ne passe d'une vitesse à une autre que lorsque le couple garde une valeur à peu près invariable, aussi bien suivant FBC que suivant EG.

La figure montre que les portions décrites après $V_2$ arrivent très rapidement à partir du changement de vitesse à se confondre avec OAD. La perte de couple étant extrêmement rapide le long de FB, il faut un temps et par conséquent une torsion, relativement petits, pour atteindre la valeur correspondante de la courbe OAD. Au contraire, quand on part de $V_0 = 0$ sur la branche EG, le couple doit repasser à peu près par les mêmes valeurs successives que sur la branche de première torsion OA. Les branches ainsi décrites successivement, EG, HK, LD, ne se raccordent à la courbe OAD qu'après un parcours assez étendu.

Conformément au n° 29, ces mêmes branches EG, HK, LD, transportées à une origine commune, se disposent l'une au-dessus de l'autre dans l'ordre où elles ont été décrites : EG au-dessus de OA, HK au-dessus de EG, etc., l'écart diminuant rapidement des deux premières aux deux dernières.

La courbe BCGKD est très sensiblement sur le prolongement de la branche OA de première torsion. Nous pouvons admettre que OAD représente la courbe de première torsion ininterrompue sous $V_1$. Les segments correspondant à la torsion sous $V_2$ (non représentés dans la figure, de même forme que EG, HK, LD) donnent une seconde courbe analogue et à peu près parallèle à ABD, qui est la prolongation de la courbe de première torsion sous $V_2$, pourvu que, pour chaque segment, la torsion soit poussée assez loin. L'expérience montre d'ailleurs qu'il faut la pousser d'autant plus que $V_2$ est plus grand.

Le graphique complet se compose donc de deux courbes telles que OAD dont le rapport des ordonnées, à peu près constant, représente le rapport des couples limites réalisés avec les vitesses $V_2$ et $V_1$, sur *un fil unique*. On peut, au système $V_2$, $V_1$, en substituer un second $V'_2$, $V'_1$, puis un troisième $V''_2$, $V''_1$, et étudier ainsi, *sur un fil unique,* la variation des couples limites en fonction de la vitesse de torsion.

33. *Couples limites en fonction de la vitesse de déformation.* — On prend $\frac{V_2}{V_1} = 33,9$; on utilise les deux molettes et la plus grande des deux gorges de la poulie montée sur l'axe de chacune d'elles. *Sur le même fil,* en tordant toujours dans le même sens, on continue l'expérience avec deux autres vitesses

$$V'_2 \quad \text{et} \quad V'_1, \qquad V'_2 : V'_1 = 30,3$$

(on utilise la petite gorge des poulies); puis avec deux autres vitesses

$$V''_2 \quad \text{et} \quad V''_1, \qquad V''_2 : V''_1 = 30,3$$

(on augmente la vitesse de la corde d'entraînement par des engrenages convenables).

Pour la raison indiquée au numéro précédent, la première série se compose de torsions alternées de 4 tours, la deuxième série ($V'_2$ et $V'_1$) de torsions de 7 tours, la troisième série ($V''_2$ et $V''_1$) de torsions de 12 tours.

Dans une même série, le changement de vitesse se fait brusquement et sans arrêt, comme au numéro précédent. Un arrêt de 2 minutes marque le passage d'une série à la suivante.

Voici d'abord, pour les valeurs de $V_2 : V_1$, les valeurs successives de $C_2 : C_1$, $C_2$ et $C_1$ étant les couples limites pour les vitesses de même indice :

| | | |
|---|---|---|
| $V_2 : V_1 = 33,9$ | $V'_2 : V'_1 = 30,3$ | $V''_2 : V''_1 = 30,3$ |
| $V_2 = 1$ tour en 10 secondes | $V'_2 = 1$ tour en $5^s,38$ | $V''_2 = 1$ tour en $2^s,63$ |
| $C_2 : C_1 = 6,04$ | 5,57 | 5,49 |
| Torsion en tours réalisée sous ces vitesses : 0-32 | 32-88 | 88-160 |

Pour le même rapport des vitesses, 30,3, le rapport $C_2 : C_1$ diminue quand la vitesse croît. Cela veut dire que le couple limite croît moins vite que la vitesse.

Exprimons les vitesses de *déformation* en millionièmes par seconde, afin de comparer les résultats actuels et ceux relatifs soit aux tensions maxima pour les allongements à vitesse constante, n° 6, soit aux *vitesses initiales* d'allongement sous charge constante, n° 15. Le premier cas est, *mutatis mutandis,* identique à celui que nous étudions; le deuxième n'en diffère que par la technique, puisqu'il s'agit de vitesses de déformation correspondant à un effort donné.

Voici le Tableau comparatif des trois séries d'expériences. Les vitesses sont toutes exprimées en millionièmes-seconde.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Torsion | Vitesse imposée | Vitesses | 8,90 | 18,60 | 37,71 | 301,60 | 560,00 | 1147,00 | |
| | | Couples en grammes millim. | 28 | 47 | 68 | 171 | 263 | 372 | |
| Traction | Charge imposée | Vitesses | 2,50 | 11,25 | 41,25 | 111,25 | 312,50 | 642,50 | 1412,50 |
| | | Tension en grammes par millim. carré. | 139 | 278 | 554 | 972 | 1666 | 2361 | 2916 |
| | Vitesse imposée | Vitesses | 90000 | 180000 | 200000 | 350000 | 700000 | 1400000 | |
| | | Tension en grammes par millim. carré. | 4305 | 4305 | 4444 | 4864 | 5000 | 5139 | |

Ce Tableau montre que, pour l'eutectique, quelle que soit la déformation, traction ou torsion, quelle que soit la technique adoptée, déformation imposée ou effort imposé, la variable mécanique *effort dépend énormément de la vitesse de déformation.* L'effort croît avec la vitesse, mais moins rapidement qu'elle.

Les nombres qui correspondent pour la traction et pour la torsion à la même déformation sont du même ordre de grandeur; il n'y a aucune raison pour qu'il existe une relation numérique entre les efforts d'allongement et de torsion correspondant à la même vitesse. L'expression de la torsion en millionièmes consiste à rapporter les torsions au *cylindre élémentaire extérieur;* tous les autres cylindres constituant le fil sont *moins tendus* que celui-ci; on peut donc prévoir que les nombres absolus, tout en étant du même ordre de grandeur, seront, pour une vitesse donnée, plus petits pour la torsion que pour la traction.

34. *Réactivité de torsion.* — La technique est la même que celle des nos 24 et 26. Toutefois, comme il s'agit d'un fil rectiligne, de forme géométrique invariable, il n'est plus nécessaire de se limiter aux petites déformations. Un couple très petit produisant une torsion permanente appréciable, il est impossible que le fil ne soit pas déformé *pendant la mise en expérience*. Effectivement, laissé au repos après la mise en place, son extrémité libre change d'azimut. Nous imposerons donc des torsions de l'ordre de 1 tour-mètre. Les réactivités étant du même ordre, la méthode de Poggendorff est inapplicable.

Le fil vertical de longueur $2L_0$ ($1^{m},23$ en général) est pris dans une pince à son extrémité supérieure; l'extrémité inférieure est soudée à la cire golaz à une tige en forme de T renversé, sur les branches horizontales de laquelle s'appuie un levier fourchu, tournant autour d'un axe horizontal. On peut, en chargeant le levier, tendre convenablement le fil (la tension était de $10^{g}$ en général). Au *milieu du fil* est collée une paille horizontale par le moyen de laquelle on tord en sens inverse les deux moitiés du fil (l'appareil de torsion est représenté figure 10). On opère donc environ sur $61^{cm},5$ de fil; une torsion de 1 tour vaut 4904 millionièmes.

La lecture des torsions se fait au moyen d'un disque de $138^{cm},8$ de pourtour posé sur la poulie PP′ (*fig.* 10). Un degré vaut $0^{cm},38$; on apprécie le demi-millimètre, soit le $\frac{1}{7}$ de degré. La lecture des détorsions spontanées se fait avec un petit viseur porté par le disque, avec lequel on vise une des extrémités de la paille LL′. En déplaçant à la main PP′, on peut amener, au moment de la lecture, le viseur sur le repère. Un index fixe, devant lequel passent les divisions du disque, indique la rotation. Le schéma de l'expérience est représenté figure 11.

Voici, pour $L_0 = 61^{cm},5$, les torsions $\alpha_0$ imposées, les détorsions $\alpha'$ jusqu'au moment où la paille quitte les butoirs et les réactivités $\Delta p$ (*voir* n° 26) de deux fils. $\Delta p_1$ est la détorsion spontanée pendant l'intervalle $0^{s}$-$30^{s}$, $\Delta p_2$ pendant l'intervalle $30^{s}$-$1^{m}$, $\Delta p_3$ pendant l'intervalle $1^{m}$-$2^{m}$, etc.; les intervalles croissent en progression géométrique, l'origine du temps étant l'instant où la paille quitte les butoirs. Les $\alpha_0$, $\alpha'$ et $\Delta p$ sont donnés en unités arbitraires dont 1 tour vaut 13 880.

| | $\alpha_0$. | $\alpha'$. | $\Delta p_1$. | $\Delta p_2$. | $\Delta p_3$. | $\Delta p_4$. | $\Delta p_5$. | $\Delta p_6$. | $\Delta p_7$. | $\Delta p_8$. | $\Delta p_9$. | $\Delta p_{10}$. | $\Delta p_{11}$. | $\Delta p_{12}$. | $\Sigma \Delta p$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fil I.... | 111 040 | 1075 | 415 | 260 | 330 | 340 | 340 | 360 | 360 | 362 | 363 | 374 | 374 | 375 | 4253 |
| Fil II.... | 16 193 | 1760 | 329 | 177 | 176 | 160 | 143 | 118 | ... | ... | 110 | | | | 1213 |

La vitesse de torsion est moindre pour le premier fil que pour le second. C'est pourquoi, bien que $\alpha_0$ soit plus grand pour le fil I (8 tours) que pour le fil II (1,16 tour), $\alpha'$ est, au contraire, plus grand pour le fil II. Nous reviendrons là-dessus au numéro suivant.

La loi générale de la réactivité (n° 26) est vérifiée. Les $\Delta p$ sont du même ordre. Ils croissent avec $\alpha_0$, mais moins vite que lui.

L'expérience sur le fil I qui correspond à une torsion énorme dure 1024 minutes, 17 heures environ. Après ce temps, $\alpha' + \Sigma\,\Delta p$ est une petite fraction de $\alpha_0$. Mais, pour le fil II et une durée de l'expérience peu supérieure à 2 heures,

$$\alpha' + \Sigma\,\Delta p = 2973 = \tfrac{1}{5}\,\alpha_0 \text{ environ;}$$

$\alpha_0$ est aussi beaucoup moins grand.

Une déformation pas trop grande qui semble d'abord permanente *peut* donc se réduire à une fraction petite de sa valeur en un temps suffisant.

35. *Influence de la vitesse de torsion.* — Chaque essai est fait sur fil neuf. La torsion est de 5 tours (24520 millionièmes ou 69400 unités arbitraires). La vitesse est la même pour un même fil à la torsion et à la détorsion. Elle varie d'un fil à l'autre. On donne, en unités arbitraires, les $\Delta p$ à partir de $\Delta p_2$. Les nombres de la première ligne expriment, en secondes, la durée d'un tour de torsion; ceux de la deuxième représentent la vitesse de torsion :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Durées T'........... | 9 | 21 | 51 | 93 | 255 | 476 |
| $\frac{1}{T'}$................ | 1110 | 476 | 196 | 108 | 39 | 21 |
| $\alpha'$.................. | 5670 | 4830 | 2830 | 2500 | 1410 | 1065 |
| $\Delta p_2$................. | 300 | 300 | 340 | 210 | 210 | 155 |
| $\Delta p_3$................. | 160 | 260 | 300 | 325 | 275 | 175 |
| $\Delta p_4$................. | 145 | 210 | 300 | 310 | 300 | 280 |
| $\Delta p_5$................. | 145 | 130 | 255 | 305 | 305 | 305 |
| $\Delta p_6$................. | 80 | 125 | 225 | 280 | 330 | 320 |
| $\Delta p_7$................. | 75 | 105 | 230 | 230 | 330 | 330 |
| $p = \Sigma\,\Delta p$............ | 905 | 1130 | 1650 | 1660 | 1750 | 1565 |
| $\alpha' + p$............... | 6575 | 5960 | 4480 | 4160 | 3160 | 2630 |

1° Les $\alpha'$ croissent en fonction de la vitesse, d'abord proportionnellement, puis de moins en moins vite, à mesure que la vitesse devient grande. On se rend immédiatement compte de la nature de ces résultats, grâce à la figure 11, II, valable pour le cas de la torsion d'un fil. A mesure que la vitesse croît, $V' > V$, la courbe OGH se relève, le point H se déplace vers la gauche en H'. Nous savons d'ailleurs que le couple KG croît moins rapidement que la vitesse.

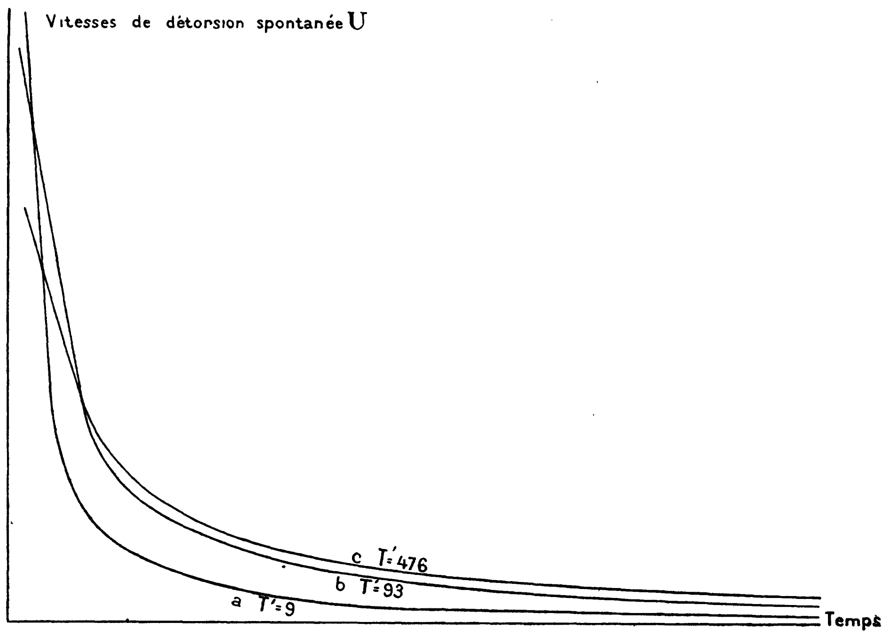
2° La loi de détorsion spontanée dépend de la vitesse de torsion $\frac{1}{T'}$. Soit U la vitesse de détorsion spontanée. La vitesse initiale $U_0$ croît beaucoup avec la vitesse de torsion $\frac{1}{T'}$. Pour un même fil, les vitesses successives sont d'autant plus rapidement décroissantes que la vitesse de torsion $\frac{1}{T'}$ est plus grande. Quand la *vitesse* *de torsion* décroît, on obtient les courbes de la figure 18 dans l'ordre indiqué.

Il en résulte qu'il y a un $\Delta p = \int U\,dt$ pris entre les limites convenables, maximum; et que l'indice de ce $\Delta p$ croît quand la vitesse de torsion $\frac{1}{T'}$ décroît.

3° La variation de $\Sigma\,\Delta p = \int_0^t U\,dt$ en fonction de T′ dépend entièrement du nombre d'intervalles choisis. En particulier, le maximum trouvé pour $T' = 255^s$ disparaîtrait si le nombre d'intervalles était plus grand.

4° Les $\alpha' + p$ qui mesurent la détorsion totale $\overline{KHL}$ (*fig.* 11, II) à partir de l'azimut où *commence la détorsion* sont constamment décroissants à mesure que T′ augmente; c'était à prévoir d'après la figure.

Fig. 18.




36. *Influence d'un arrêt* T *à la torsion maxima* (voir *fig.* 11, I). — Fil unique. Torsion de 5 tours en $64^s$. Arrêt T à la torsion maxima (perte de couple suivant BC) variable d'une expérience à l'autre. Une expérience avec arrêt nul est intercalée entre chaque expérience à arrêt T non nul. Un intervalle d'une minute sépare chaque expérience qui comporte une observation des $\Delta p$ pendant 8 minutes.

On donne les $\alpha'$, $p$, $p_0$ et $\frac{p}{p_0}$ d'après les notations précédentes, $p_0$ désignant les $\Sigma\,\Delta p$ pour un arrêt nul ;

| Arrêt T (minutes). | 0. | 0,5. | 1. | 5. | 10. | 40. | 1380. | 2640. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha'$........ | | 1760 | 1355 | 665 | 430 | 230 | 35 | 0 |
| $p$........ | 1305 | 1680 | 1645 | 1120 | 895 | 520 | 100 | 100 |
| $p_0$........ | | 1610 | 1680 | 1725 | 1770 | 1810 | 1800 | |
| $\frac{p}{p_0}$...... | 1,00 | 1,03 | 0,96 | 0,64 | 0,50 | 0,28 | 0,05 | |

Les $\alpha' = \overline{\mathrm{DE}}$ (*fig.* 11) décroissent très vite quand T augmente. Naturellement, comme l'arrêt a lieu au couple maximum, la déperdition $\overline{\mathrm{BC}}$ est considérable et l'effet de l'arrêt T est plus grand ($\alpha'$ est plus diminué) que si l'on faisait le même parcours *sans arrêt dans le même temps*.

Voici, pour cette même expérience, les $\Delta p$ jusqu'à $\Delta p_5$ correspondant aux divers arrêts :

| Arrêts. | 0. | 0,5. | 1. | 5. | 10. | 40. | 1380. | 2640. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta p_2$............ | 415 | 400 | 365 | 120 | 100 | 60 | 10 | 10 |
| $\Delta p_3$............ | 455 | 435 | 420 | 280 | 200 | 95 | 15 | 15 |
| $\Delta p_4$............ | 370 | 425 | 435 | 370 | 270 | 160 | 30 | 30 |
| $\Delta p_5$............ | 370 | 420 | 425 | 325 | 325 | 205 | 35 | 35 |

Même loi que précédemment. D'une expérience à l'autre, les vitesses initiales de détorsion spontanée $U_0$ diminuent quand T croît. Pour une même expérience, les vitesses U diminuent d'autant plus rapidement que T est plus petit. Quand T croît, on obtient des courbes analogues à celles de la figure 18 et dans l'ordre *abc*. On s'explique aisément que le rapport $\frac{p}{p_0}$ présente un maximum. On déplacerait ce maximum à volonté, en changeant le nombre et les indices des intervalles sur lesquels porte la comparaison.

Pour un même nombre d'intervalles ayant les mêmes indices, la position du maximum dépend du faisceau de courbes de la figure 18. Chaque courbe d'un faisceau a pour cote le temps d'arrêt T : le faisceau a pour paramètres la vitesse de torsion et de détorsion et la grandeur de la torsion.

Voici, les expériences étant croisées sur un fil unique, la valeur de $\frac{p}{p_0}$ pour les arrêts T indiqués et pour des torsions de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{4}$ de tour. Durée d'observation 8 minutes.

*Torsion* 180°.

| Arrêts T (minutes). | 0. | 0,25. | 0,75. | 2,00. | 6,00. | 15,00. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{p}{p_0}$........ | 1,00 | 1,16 | 1,10 | 1,02 | 0,82 | 0,56 |

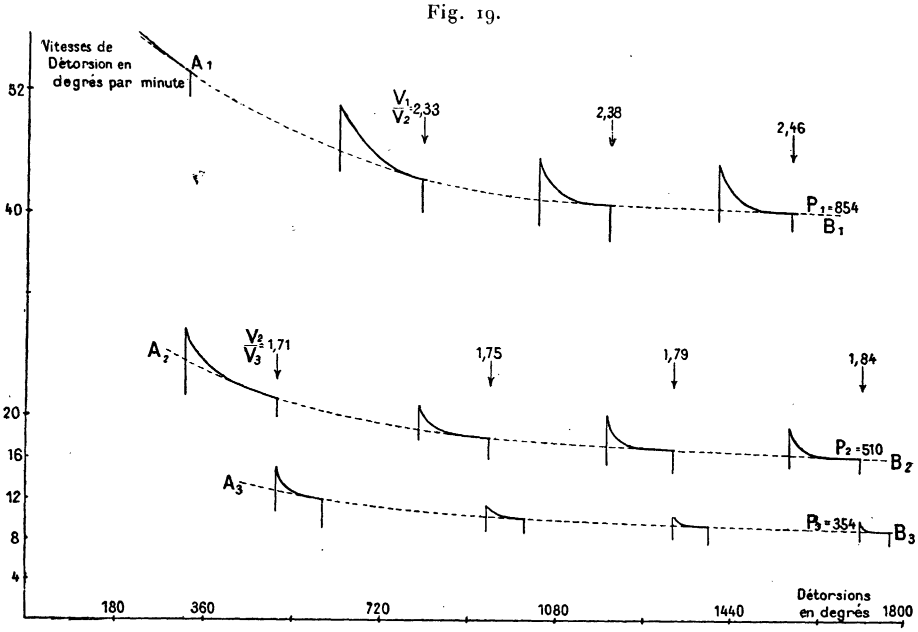
*Torsion* 90°.

| Arrêts T (minutes). | 0. | 0,50. | 2,00. | 6,00. |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{p}{p_0}$ ........ | 1,00 | 1,18 | 1,11 | 0,91 |

Faisons maintenant varier, non plus les torsions, mais les vitesses de torsion, la durée d'observation étant encore 8 minutes et la torsion 180°. Les courbes du faisceau se séparent de telle sorte que le maximum de $\frac{p}{p_0}$ passe de 1,18 à 1,86 quand on passe de la vitesse 180° en $46^s$ à la vitesse 180° en $4^s,5$.

37. *Influence d'une surcharge constante.* — Les expériences précédentes sont faites pour une tension faible du fil en expérience, $10^g$ environ. Que devient la réactivité quand on fait varier la tension? On tord un fil $L_0 = 61^{cm},5$ de 30 tours en 12 minutes. On détord sans arrêt et l'on observe les réactivités sous charge $10^g$

Fig. 19.




pendant 4 minutes. Au moyen de l'appareil représenté figure 7, on fait passer brusquement la charge de $10^g$ à $354^g$; on observe les détorsions pendant $8^m$. On revient à $10^g$ pendant $4^m$; on charge à $510^g$, etc. Le fil se détord ainsi sous les charges successives $10^g$, $354^g$, $10^g$, $510^g$, $10^g$, $854^g$, $10^g$, $354^g$, etc., pendant $8^m$, sauf pour les charges $10^g$ et $854^g$ pour lesquelles la durée d'observation est de

4 minutes. L'expérience montre que, si l'on prend les $\Delta p$ avec, pour origine du temps, l'instant où a été déposée la surcharge, la loi de la réactivité n'est pas vérifiée.

Cela prouve, non pas que la loi générale de la réactivité sous $P_1 > P_0$ soit différente de celle sous $P_0$, mais que l'instant à partir duquel doivent être comptés les $\Delta p$ n'est pas l'instant de la surcharge. Mesurons les vitesses de détorsion spontanée U et portons-les en ordonnées, les abscisses étant les détorsions elles-mêmes.

On obtient une série de *portions de courbe* (*fig.* 19, traits continus). *Sauf pendant les premières minutes* qui suivent la mise en charge, les différentes portions de courbe, pour une même charge, sont approximativement sur le prolongement l'une de l'autre. L'influence d'un parcours antérieur sur le parcours actuel est donc négligeable après un temps assez court; la vitesse de détorsion spontanée actuelle dépend seulement de la détorsion réalisée. Comparer au n° 17.

Faisons passer par tous les segments relatifs à une même surcharge une courbe unique; on obtient $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$. Elles représentent comme première approximation, en fonction de la détorsion, la variation de la vitesse de détorsion U sous la charge correspondante maintenue constante à partir du début.

La comparaison des ordonnées des trois courbes $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ donnera donc, *pour une même détorsion*, le rapport des vitesses de détorsion sous les charges $P_1$, $P_2$, $P_3$. On a inscrit sur la figure, aux points pour lesquels ils sont *expérimentalement* le mieux définis, la valeur des rapports $\frac{V_1}{V_2}$ et $\frac{V_2}{V_3}$, $P_1 > P_2 > P_3$. Ces rapports croissent avec la détorsion; mais la variation est faible.

38. *Allongements pendant la torsion.* — Pour étudier ces allongements, la tension étant un facteur principal, il est nécessaire que celle-ci soit bien définie. Dans ce but, j'ai modifié l'appareil (*fig.* 13) en supprimant le bifilaire. Le fil en expérience est fixé invariablement par le bas sur le disque de rotation DD′ et en son centre. En haut, il est relié par une tige en forme de T à l'une des extrémités d'un levier fourchu mobile autour d'un axe horizontal qu'on peut charger à *l'autre extrémité*. L'axe est constitué par les pointes de deux vis reposant sur des crapaudines. On peut ainsi appliquer au fil des tensions bien définies, allant de quelques grammes à $400^g$.

Une règle verticale divisée en millimètres suspendue à un point du levier à peu près horizontal permet de suivre dans une lunette les allongements.

J'ai étudié ces allongements : 1° en fonction de la torsion pour une charge et une vitesse données; 2° en fonction de la vitesse pour une torsion et une charge données; 3° en fonction de la charge, pour une vitesse et une torsion données.

1° En fonction de la torsion, la figure 20 donne la courbe des allongements pour un cycle de 453 tours. $L_0 = 1^m$. Charge $32^g$. Vitesse de torsion : 1 tour en $2^s,65$. Les allongements positifs sont portés vers le haut.

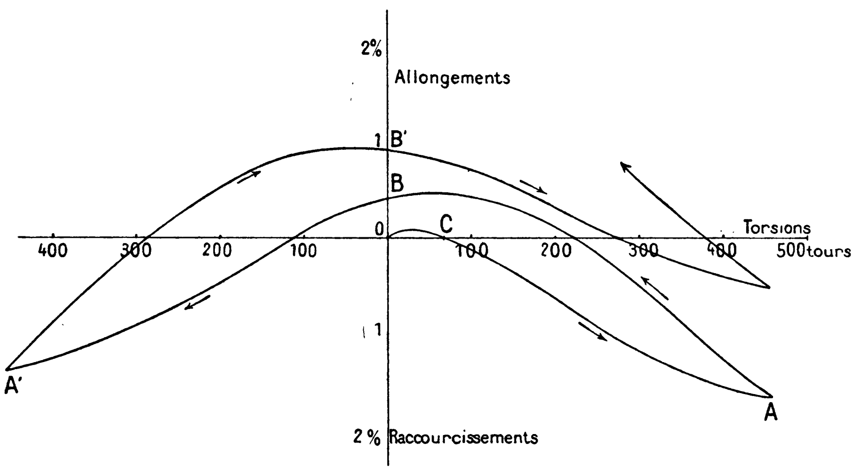
Il y a d'abord allongement, puis raccourcissement. Le raccourcissement semble tendre soit vers une limite, soit plus probablement vers un maximum.

Continuons l'expérience en décrivant des cycles; nous obtiendrons les courbes représentées (*fig.* 20).

L'expérience montre que, tordu, le fil présente à sa surface des stries hélicoïdales dont le pas peut même servir à compter, au moins approximativement, le nombre de tours imposés. On peut, à la détorsion, suivre ainsi sur le fil la disparition progressive des spires. Au voisinage de la torsion nulle, il n'y a plus d'hélices apparentes, mais une surface mate et dépolie.

Les cycles torsion-allongement ne sont pas fermés; ils sont simplement de

Fig. 20.




même forme. La variation finale de longueur après un cycle se traduit toujours par un allongement.

2° Dans la même expérience, $L_0 = 75^{cm}$, sur des fils différents, on fait varier la tension supportée. On compare les allongements pendant une torsion de 230 tours en 10 minutes aux allongements subis par le même fil, pendant le même temps, sous la même tension à l'azimut zéro *avant la torsion.*

Voici, pour les charges indiquées, ces allongements :

| Charges : | 40. | 100. | 120. | 150. | 300. |
|---|---|---|---|---|---|
| Allongements pendant la torsion... | $-72$ | $-2$ | $+17$ | $+32$ | $+187$ |
| Allongements avant la torsion...... | $+2$ | $+16$ | $+18$ | $+22$ | $+60$ |

Donc le *fait de tordre* un fil favorise l'allongement ou y met obstacle suivant la tension qu'il subit. Il s'agit du fait de tordre. Un fil *tordu* maintenu à azimut constant s'allonge toujours de quantités positives et ne donne plus lieu au phénomène signalé.

Naturellement, si la torsion pour laquelle est faite l'expérience ci-dessus diminue, les tensions pour lesquelles il y a un obstacle à l'allongement deviennent de plus en plus petites.

3° En fonction de la vitesse de torsion du fil, les raccourcissements correspondant à une torsion donnée passent par un maximum. Voici une expérience effectuée sur 6 fils différents. $L_0 = 75^{cm}$. Charge $40^g$. Torsion 230 tours. On donne en unités arbitraires les raccourcissements, en minutes et secondes la durée de la torsion :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Durée.............. | $5^m 10^s$ | $6^m 40^s$ | $10^m 00^s$ | $11^m 00^s$ | $20^m 35^s$ | $30^m 25^s$ |
| Raccourcissement... | 57 | 69 | 72 | 79 | 57 | 30 |

Le maximum est net.

39. *Pertes de couple à azimut constant* (voir *fig.* 11). — Voici, en unités arbitraires, les valeurs du couple $\overline{DB}$ (*fig.* 11, I) au moment de l'arrêt de la torsion et les $\Delta p$ successifs (pertes de *couple* suivant BC) pour les deux fils signalés aux nos 29 et 31; $\Delta p_1$ est la perte de couple correspondant à l'intervalle $0^m$-$30^s$ :

| | Couple : | $\Delta p_1$. | $\Delta p_2$. | $\Delta p_3$. | $\Delta p_4$. | $\Delta p_5$. | $\Delta p_6$. | $\Delta p_7$. | $\Sigma\Delta p$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fil I (n° 29, premier arrêt)..... | 1983 | 762 | 197 | 196 | 193 | 173 | 145 | | 1666 |
| Fil II (n° 31).................. | 2550 | 1500 | 210 | 182 | 144 | 120 | 85 | 70 | 2311 |

La perte de couple est énorme pendant la première minute et d'autant plus grande que le couple est lui-même plus grand. En un temps qui est de l'ordre de 30 minutes, le couple tombe à une fraction petite de sa valeur. Il ne serait pas besoin d'un temps bien considérable pour l'annuler complètement. Il est alors naturel que les $\Delta p$ soient constamment décroissants surtout pour les couples très grands.

40. *Oscillations de torsion. Méthode dynamique.* — La méthode employée est celle des nos 22-24. Dans l'appareil représenté figure 10 on remplace le spiral par un fil rectiligne, tendu comme il est dit au n° 34 par une charge de $10^g$ environ. Dans les formules du n° 22 qui donnent les durées T d'oscillation, on remplace C par $\Gamma$ pour indiquer qu'il s'agit d'une déformation par *torsion*.

*Première expérience.* — Amplitude constante, 1° pour $L_0 = 94^{cm}$; déformation maxima 10 millionièmes; moments d'inertie $\mathfrak{M}$ variables.

Voici les durées $T' = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{C'}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\Gamma + C'}}$ avec les valeurs de $\frac{\Gamma}{C'} = \frac{T'^2}{T^2} - 1$ qui s'en déduisent :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{M}$...... | 92,4 | 64,0 | 40,9 | 28,6 | 10,7 | 3,8 | 1,0 |
| T'....... | 95,63 | 79,26 | 63,67 | 47,85 | 32,55 | 19,63 | 9,77 |
| T........ | 56,21 | 45,54 | 35,33 | 26,30 | 17,59 | 10,38 | 4,99 |
| $\frac{\Gamma}{C'}$....... | 1,67 | 2,03 | 2,24 | 2,31 | 2,42 | 2,57 | 2,80 |

La variation de Γ atteint 50 pour 100 quand $\mathfrak{M}$ varie de 1 à 92. Pour le spiral, $\mathfrak{M}$ passant de 1 à 52, la variation était de 20 pour 100 (pour une déformation maxima à peu près égale). Les deux phénomènes sont du même ordre. La constante *apparente* de torsion Γ varie dans le même sens que la vitesse de torsion. Traçons la courbe des couples (ordonnées) en fonction de la torsion (abscisses) (voir *fig.* 21); Γ représente le coefficient angulaire moyen du diamètre des cordes verticales du cycle obtenu.

Ce coefficient croît donc quand T diminue.

*Deuxième expérience.* — $\mathfrak{M}$ constant. Amplitude variable. $L_0 = 94^{cm}$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Amplitudes A (millionièmes).. | 3,5 | 6,0 | 8,2 | 12,9 | 16,1 | 19,5 | 24,5 |
| Durées T..................... | 17,06 | 17,25 | 17,51 | 17,66 | 17,73 | 17,78 | 17,86 |

Γ dépend de l'amplitude et varie en sens inverse de celle-ci. Le diamètre des cordes verticales du cycle (couples, torsions) s'incline vers l'axe des torsions quand celles-ci augmentent. La courbe de torsion n° 28 s'incurve pour des torsions de l'ordre de 1° par mètre de fil, c'est-à-dire excessivement faibles.

*Troisième expérience.* — On entretient toujours l'oscillation comme il est dit au n° 21. On maintient constant un courant d'entretien $i_1$ pendant 25 oscillations, puis un courant $i_2$ pendant 25 oscillations. On revient alors au courant $i_1$ et ainsi de suite. On obtient les durées et amplitudes suivantes :

| | $i_1 = 4,5.$ | | | | $i_2 = 10,5.$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durées T........ | 22,72 | 22,22 | 22,13 | 21,66 | 23,15 | 22,46 | 22,14 | 22,18 |
| Amplitudes A.... | 102 | 102 | 105 | 108 | 148 | 138 | 139 | 141 |

Comme pour la traction, il y a un léger écrouissage. Il est indiscutable puisque, à mesure que T diminue, A croît. L'état du fil tend vers une limite. Après un millier d'oscillations, la durée est constante.

**41.** *Cycles sinusoïdaux de torsion. Méthode statique.* — La méthode dynamique des oscillations de torsion donne seulement la constante *apparente* de torsion $\Gamma$. La méthode statique consiste à *imposer* une torsion *sinusoïdale*

$$\alpha = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

et à observer le couple correspondant $C = f(\alpha)$.

L'appareil est décrit par M. Bouasse (*Ann. de Ch. et de Ph.*, 7[e] série, t. XIV, p. 111). On utilise un excentrique fixé sur un disque qui tourne d'un mouvement uniforme. On fait varier la période T au moyen de trains d'engrenages; on augmente l'amplitude A en déplaçant l'excentrique. Dans notre dispositif, la longueur de la bielle était de $3^{m}$ pour une distance de l'excentrique à l'axe de $22^{cm}$ au maximum. Le mouvement sinusoïdal est très approximativement réalisé.

Le fil en expérience est disposé, comme celui de la figure 13, en CD. Le disque DD′ est remplacé par une poulie à plusieurs gorges montée invariablement sur la tige TT′. La bielle consiste en un fil fixé dans une des gorges de la poulie; un second fil enroulé en sens inverse sur une seconde gorge et convenablement tendu rend le système parfaitement assimilable à une bielle rigide.

Pour la lecture soit des rotations, soit des couples, j'ai employé deux procédés. Le premier applicable aux oscillations de longue période consiste à lire les couples à la manière ordinaire aux époques $0, \frac{T}{30}, \frac{2T}{30}, \ldots$. Ils correspondent aux abscisses $0$, $A \sin 12^{\circ}$, $A \sin 24^{\circ}$, .... L'instant où doit se faire la lecture est marqué par l'appareil lui-même. La roue la plus rapide du train fait exactement 30 tours par période. A chaque tour, elle *rompt* le circuit d'une pile. L'aiguille d'un galvanomètre placé dans le circuit et dont un miroir envoie l'image dans la lunette du bifilaire est brusquement ramenée au zéro.

Le second procédé est l'enregistrement photographique. Le miroir plan M (*fig.* 13) est remplacé par un miroir concave sur lequel tombe la lumière provenant d'une fente très fine. Dans le plan vertical où se forme l'image, une plaque photographique $13 \times 18$ se déplace derrière une fente horizontale. On s'arrange pour que le déplacement vertical de la plaque soit proportionnel à $\alpha$. Il suffit de le commander par une seconde bielle (pratiquement un second fil convenablement tendu) montée à décalage nul sur le même arbre que la première. On obtient ainsi directement la courbe $C = f(\alpha)$. On fait varier la sensibilité du bifilaire EEFF (*fig.* 13), de manière à obtenir des courbes aussi grandes que possible, sans sortir du cliché.

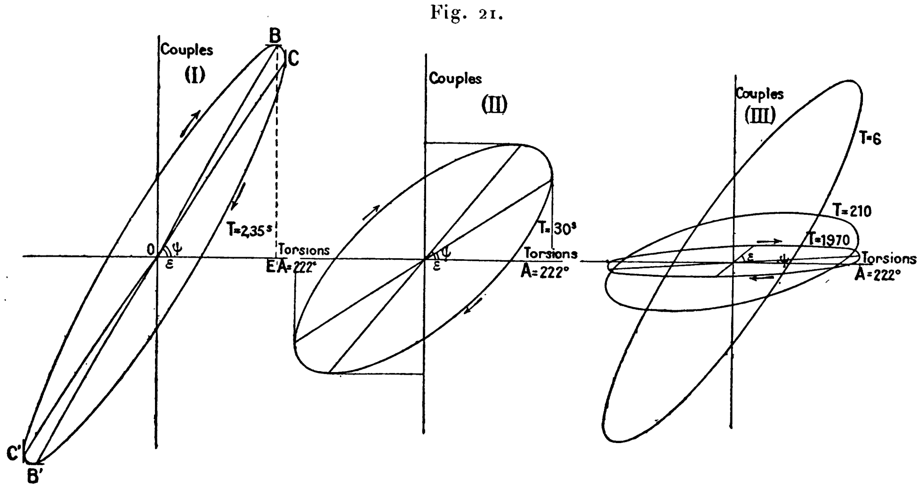
Les courbes obtenues très approximativement fermées ressemblent à des *ellipses*. Cherchons en fonction des deux paramètres du mouvement, amplitude et période, dans quelles limites on peut admettre cette assimilation; en particulier, pour quelles périodes et quelles amplitudes le diamètre des cordes verticales (couples) est rectiligne. Le *coefficient angulaire moyen* $\tang \psi$ de ce diamètre supposé rectiligne est la valeur de ce que j'ai appelé *module apparent de torsion* $\Gamma$, au numéro précédent. Le coefficient angulaire tang $\varepsilon$ du diamètre des cordes horizontales (torsions) sert à calculer l'azimut du couple maximum. Enfin, l'aire du cycle

$$W = \int_0^T C\,d\alpha$$

mesure l'énergie absorbée par période. Je l'ai déterminée avec le planimètre d'Amsler avec une précision de $\frac{1}{200}$.

**42.** *Influence de la période.* — $L_0 = 100^{cm}$, $A = 222°$. La période varie de $2^s,35$ à $1970^s$. Les courbes obtenues ont, suivant la période, les formes représentées (*fig.* 21), toutes à la même échelle.

Fig. 21.




1° Elles sont approximativement fermées après un petit nombre de parcours : trois ou quatre. Après le premier quart de période, la courbe côtoie déjà le cycle définitif.

2° Les diamètres OC des cordes verticales ou OB des cordes horizontales sont approximativement rectilignes. La courbe, *pour cette amplitude,* est approximativement une ellipse. En réalité, le demi-diamètre OC a sa concavité tournée vers l'axe des couples; le demi-diamètre OB a sa concavité tournée vers l'axe des torsions. Il y a un point d'inflexion à l'origine. La courbure difficile à mettre en évidence sur les clichés photographiques est apparente sur les courbes tracées d'après la première méthode où la sensibilité est plus grande.

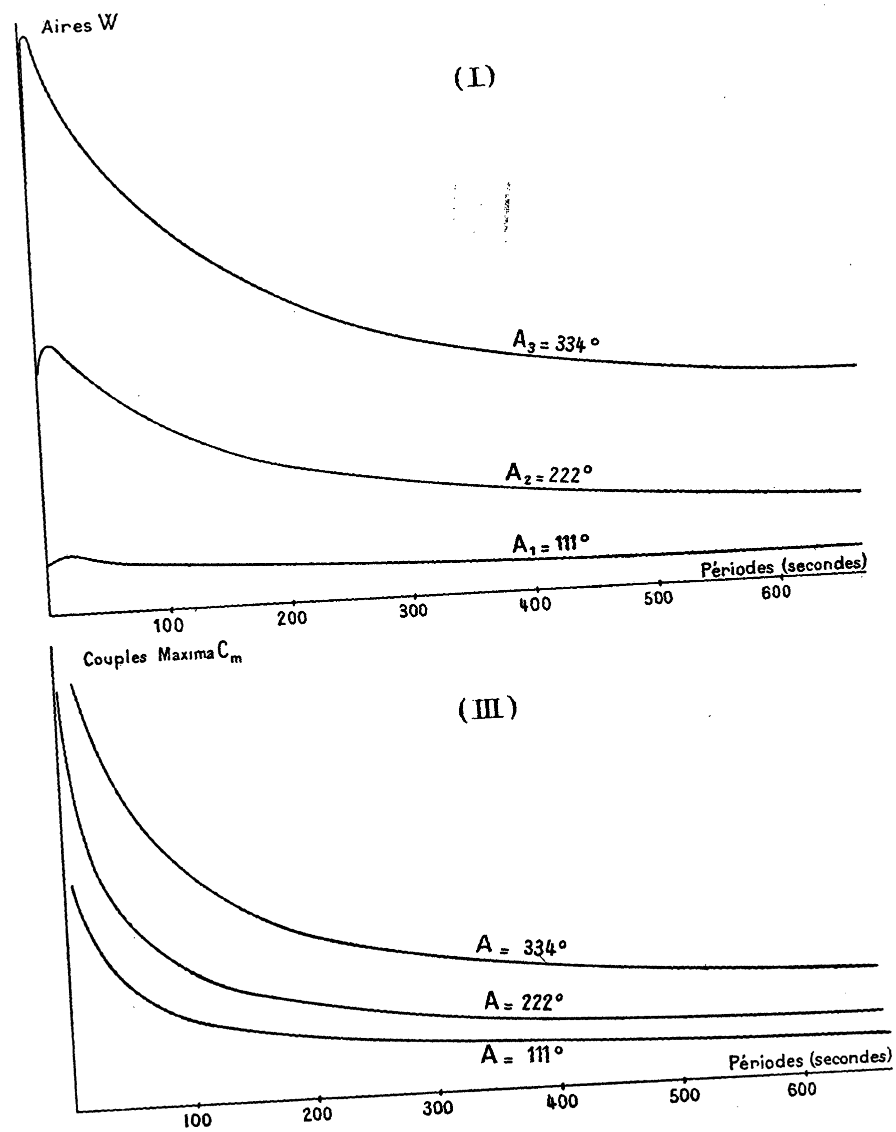
3° tang $\psi$ et, par conséquent, $\psi$ croissent quand la période diminue, résultat conforme à celui du numéro précédent. Les courbes (*fig.* 21) montrent l'énormité de cette variation.

4° Le coefficient angulaire tang $\varepsilon$ croît quand la période diminue, mais moins vite que tang $\psi$. On a

$$\operatorname{tang}\varepsilon\,\overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{BE}} = \mathrm{C}_m.$$

$\mathrm{C}_m$ est le couple maximum du cycle. $\overline{\mathrm{OE}} = \dfrac{\mathrm{C}_m}{\operatorname{tang}\varepsilon}$ représente l'azimut pour lequel

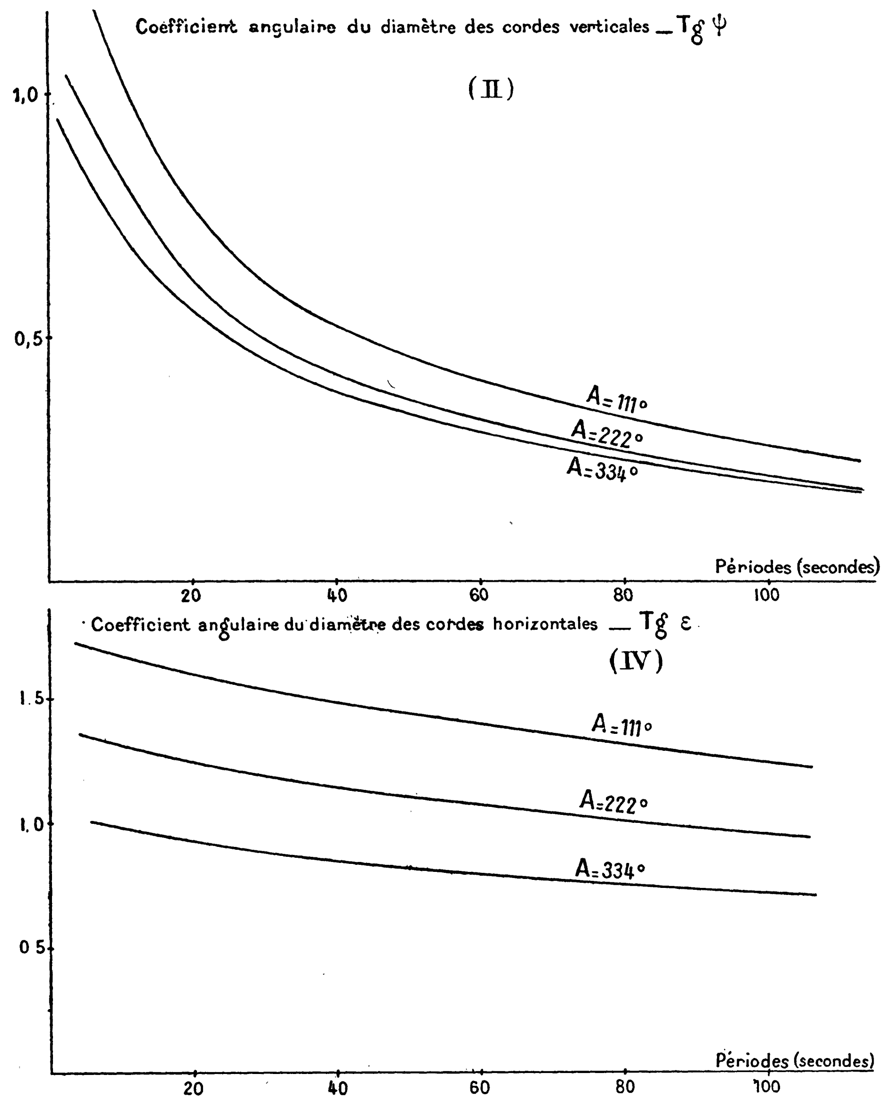
Fig. 22.




il est réalisé (pour une période et une amplitude déterminées). $\mathrm{C}_m$ décroît très rapidement quand la période augmente, $\overline{OE} = \frac{C_m}{\text{tang}\,\varepsilon}$ décroît moins rapidement, puisque tang ε diminue lentement quand la période augmente.

Pour les périodes très courtes, le maximum de couple est voisin du maximum

Fig. 22 *bis*.



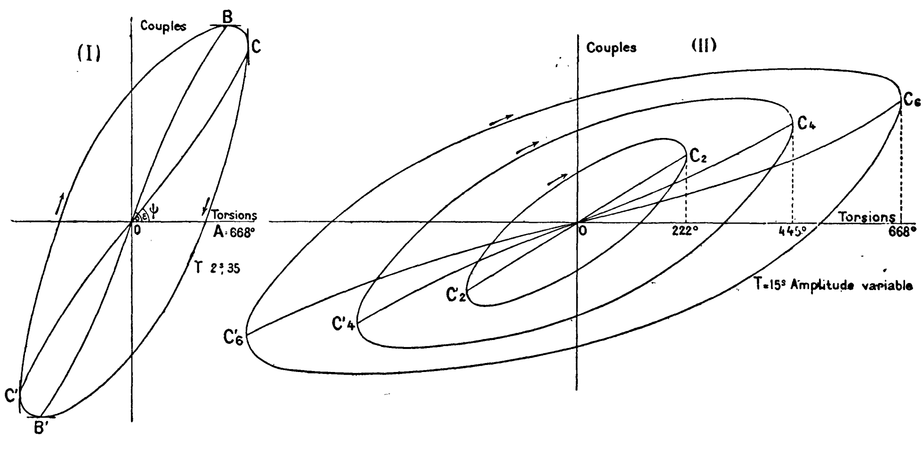

de torsion; pour les longues périodes, il correspond à une torsion faible. Cela tient à l'influence déjà constatée de la vitesse de torsion $\frac{d\alpha}{dt}$ qui est maxima pour la torsion nulle. Pour une période infiniment longue, le couple ne dépendrait que de la vitesse et aurait à l'azimut zéro son maximum, à partir duquel l'accroissement de la torsion est incapable de compenser à chaque instant les pertes de couple dues à la viscosité.

5° Les aires W sont fonction de la période. Il y a un maximum d'énergie absorbée, dans les conditions de l'expérience, pour une période de $9^s$ environ. Pour les périodes très courtes, l'épaisseur des cycles diminue plus rapidement que n'augmentent les couples.

L'expérience précédente a été répétée pour trois amplitudes différentes (constantes dans chaque série). Le fil est unique pour chaque série. J'ai vérifié en répétant l'expérience $T = 2^s,35$ au début et à la fin de chaque série que les parcours antérieurs sont sans influence appréciable sur le parcours actuel *fixé*. Les résultats relatifs aux diverses expériences sont résumés dans les graphiques des figures 22 et 22 *bis*. Je n'insisterai pas pour le moment sur l'influence de l'amplitude. Elle ne modifie pas la *forme générale* des courbes. Le maximum obtenu pour les aires s'accentue davantage quand l'amplitude croît; en même temps qu'il se rapproche de l'origine, c'est-à-dire a lieu pour des périodes plus courtes.

43. *Influence de l'amplitude.* — Sur un fil unique, on expérimente successivement avec la même période $T_1$ les amplitudes $A = 1, 2, 3, \ldots$. $A = 1$ vaut $111°$

Fig. 23.




pour $L_0 = 100^{cm}$. On répète la même expérience sur un second fil neuf pour une seconde période $T_2$; puis, sur un troisième fil, pour la période $T_3$.

On obtient, pour une période déterminée, une série de cycles tels que ceux de la figure 23 (II) se rapportant à $T = 15^s$.

Le demi-diamètre OC, à peu près rectiligne pour $A = 2$, ne l'est plus pour $A = 4$, *a fortiori* pour $A = 6$. C'est vrai pour $T = 15^s$, et même pour $T = 2^s,35$

[*fig.* 23 (I)]. C'est également vrai pour le demi-diamètre OB (I) des cordes horizontales. Le cycle s'écarte donc de la forme elliptique à mesure que l'amplitude croît, tout en conservant un centre à l'origine. Dans l'évaluation des coefficients angulaires tang $\psi$ et tang $\varepsilon$, nous prendrons comme diamètres les *droites* COC' et BOB'.

1° Ces coefficients diminuent rapidement quand l'amplitude croît.

2° Les couples maximums croissent avec l'amplitude. Il y a deux raisons à cela : déformation et vitesse de déformation plus grandes à chaque instant.

3° Les aires croissent avec l'amplitude.

Les lois de variation sont indiquées dans l'ensemble des graphiques de la

Fig. 24.

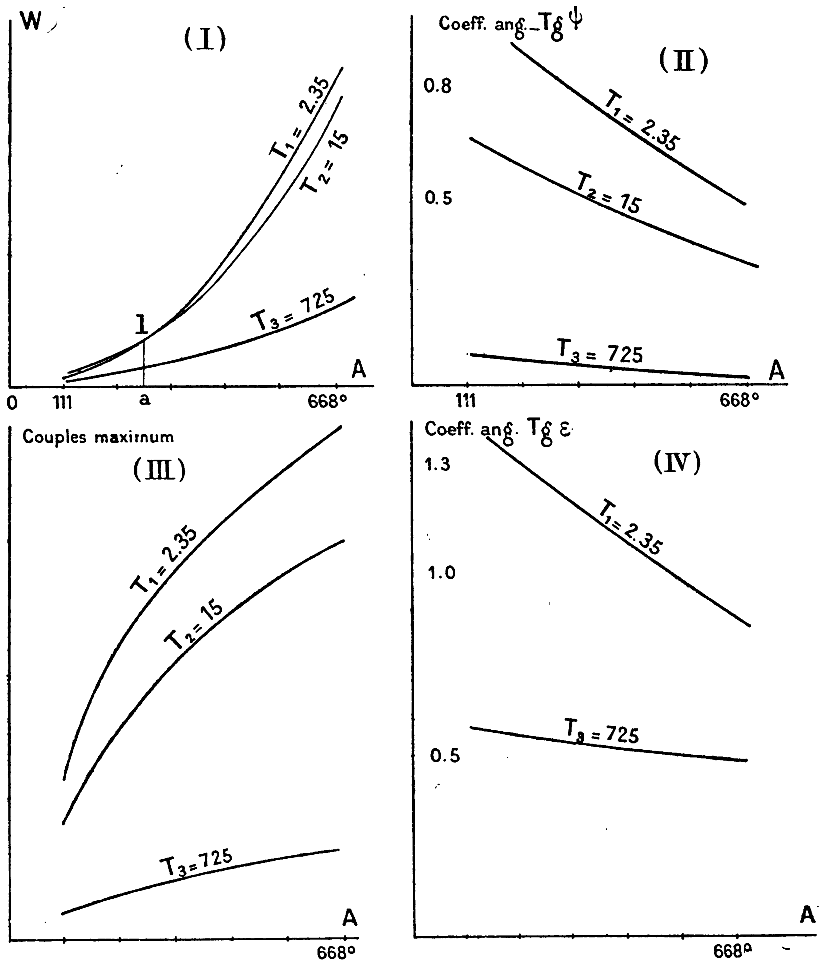



figure 24 se rapportant aux périodes $2^s,35$, $15^s$ et $725^s$ et aux amplitudes 1, 2, 3, 4 et 6.

Dans le graphique I, les deux courbes $T_1 = 2{,}35$ et $T_2 = 15$ se coupent en I. Cela tient au maximum d'aire en fonction de la période et à son déplacement en fonction de l'amplitude. En se reportant à la figure 22 (I), on voit que, sur la courbe $A_1$, W est plus grand pour $T_2$ que pour $T_1$; il est, au contraire, plus petit sur la courbe $A_3$. Il existe une amplitude telle que les points correspondant de part et d'autre du maximum à $T_1 = 2{,}35$ et $T_2 = 15$ soient sur une même horizontale. C'est l'amplitude $\overline{\mathrm{Oa}}$ de la figure 24 (I).

En fonction de l'amplitude, pour une même période, $\mathrm{tang}\,\psi$ et $\mathrm{tang}\,\varepsilon$ décroissent à peu près linéairement, tandis que $C_m$ et W croissent à peu près paraboliquement, la parabole étant à axe horizontal pour $C_m$, vertical pour W.

Si telle est la forme de $C_m$ et de $\mathrm{tang}\,\varepsilon$, le rapport $\frac{C_m}{\mathrm{tang}\,\varepsilon}$ doit croître linéairement en fonction de l'amplitude. C'est ce que vérifie à peu près l'expérience. Les courbes obtenues sont sensiblement des droites à coefficient angulaire positif. $\frac{C_m}{\mathrm{tang}\,\varepsilon}$ représente l'azimut du couple maximum. L'expérience prouve donc que cet azimut est proportionnel à l'amplitude. Il est donc, pour une période donnée, une *fraction* constante de l'amplitude, ou bien encore il correspond à une durée de torsion égale à une fraction constante de la période. Considérons le rapport $\frac{V}{\alpha}$, V étant la vitesse de torsion, et $\alpha$ la torsion, deux facteurs dont dépend essentiellement le couple. Le rapport est aussi indépendant de l'amplitude. Le résultat présent tend à prouver que l'influence sur le couple de la déformation et de la vitesse de déformation *varie* dans le même rapport avec la déformation.

44. *Oscillations à vitesse de déformation indépendante de l'amplitude.* — On a

$$v = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

La technique consiste à prendre $\frac{A}{T} = $ const. et à comparer les courbes obtenues. Voici, pour une série effectuée sur un fil unique avec trois périodes et trois amplitudes différentes, les W, $\mathrm{tang}\,\varepsilon$, $\mathrm{tang}\,\psi$ et $C_m$; $L_0 = 97^{\mathrm{cm}},5$ :

| $\frac{A^0}{T^s}$. | W. | $\mathrm{tang}\,\psi$. | $\mathrm{tang}\,\varepsilon$. | $C_m$. | $\frac{C_m}{\mathrm{tang}\,\varepsilon}$. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{111}{45}$.............. | 117 | 692 | 1417 | 448 | 316 |
| $\frac{222}{90}$.............. | 382 | 310 | 979 | 560 | 572 |
| $\frac{334}{135}$.............. | 465 | 242 | 660 | 758 | 1147 |

Les aires croissent avec l'amplitude, malgré l'accroissement simultané de période (on est loin du maximum). La croissance tend vers une limite ou, plus probablement, vers un maximum.

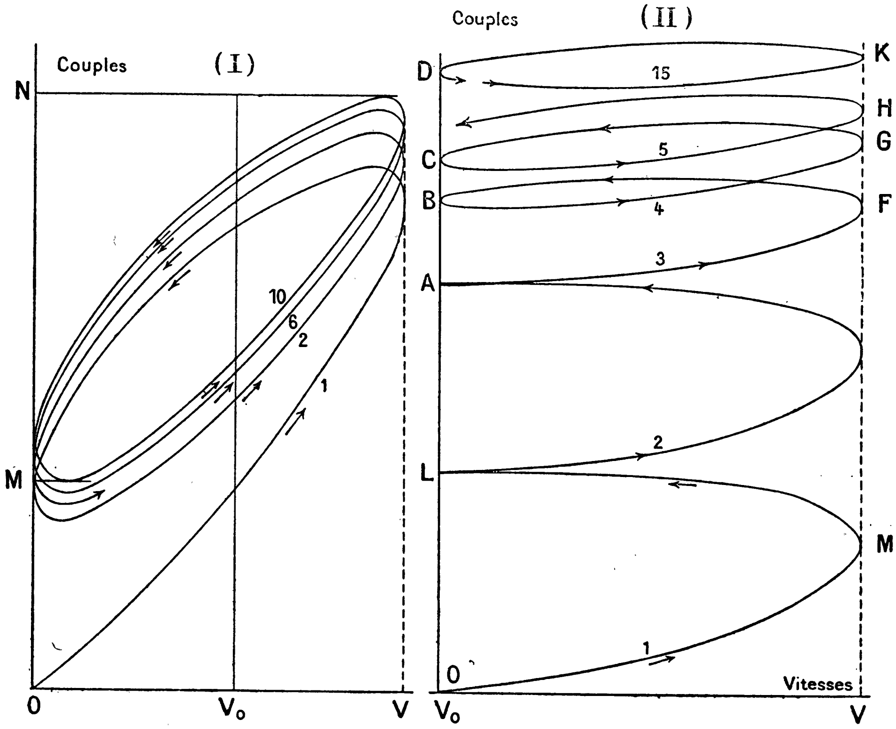
Tang$\varepsilon$ et tang$\psi$ décroissent très rapidement avec A et T, les deux causes produisant ici une variation de même sens.

Enfin, $C_m$ et $\dfrac{C_m}{\text{tang}\,\varepsilon}$ croissent avec A et T. La vitesse de déformation étant toujours la même, $C_m$ doit croître avec la déformation.

45. *Torsion à vitesse sinusoïdale de signe constant.* — On impose une vitesse de la forme $v = a - b\cos 2\pi\frac{t}{T}$ avec la condition $b \leqq a$. La vitesse varie de $V_0 = a - b$ à $V = a + b$. Cas particulier $b = a$, la vitesse varie de o à $2a$.

L'appareil utilisé est décrit par M. Bouasse (*Ann. Fac. Sc. Toul.*, 1900, p. 439). La méthode est la même, sauf que les courbes sont enregistrées photographiquement. Le mouvement du cliché est commandé par un cordon formant bielle. La

Fig. 25.




tête d'excentrique à laquelle il est attaché porte une bielle rigide par laquelle on obtient la variation de vitesse sinusoïdale. *Les abscisses des courbes inscrites sont donc non plus les torsions, mais les vitesses.* Il y a trois paramètres définissant le mouvement : $V_0$, V et la période T.

Cherchons d'abord comment se ferment les courbes.

La figure 25 représente la fixation d'un cycle sur un fil neuf. $L_0 = 100^{cm}$. Pour le fil I, $V_0 = 0$, $V = 38°,2$ par seconde, $T = 45^s$. Torsion par période 862°. Les cycles sont numérotés dans leur ordre d'exécution, aucun arrêt n'ayant eu lieu dans l'intervalle. Les premiers ne sont pas fermés. Ils le deviennent approximativement à partir du sixième. Il y a alors non plus un changement de forme, mais une translation parallèlement à l'axe des couples due à la torsion croissante du fil. La vitesse de cette translation diminue à mesure que croît la torsion, comme il résulte de la forme de la courbe de torsion n° 28.

Le fil II a été essayé pour

$$T = 6^s, \qquad V_0 = 21°,5, \qquad V = 37°,5 \quad \text{par seconde.}$$

Torsion par période, 177°. Dans ces conditions, il y a toujours en M, E, F, G, H, K un contour arrondi. En L, après le premier parcours, il y a un point de rebroussement. Cela veut dire qu'au voisinage de L, le gain de couple par torsion compense à peu près la perte de couple due à la viscosité, tant que la vitesse varie peu.

En A, le cycle commence à se boucler; la perte de couple (qui croît avec le couple) n'est plus compensée pour la vitesse $V_0$. L'aire de la boucle croît avec le numéro d'ordre du cycle qui est de forme à peu près invariable après le quinzième.

Il y a toujours transport du cycle parallèlement à l'axe des couples, à mesure que la torsion, c'est-à-dire le numéro d'ordre du parcours, croît. La limite est moins vite atteinte pour le fil II parce que la torsion par période est moindre, et la vitesse moyenne plus grande.

Fixés, les cycles sont de même forme dans l'un et l'autre cas. Ce sont encore, *pour les périodes choisies,* approximativement des ellipses. L'inclinaison moyenne du cycle sur l'axe des vitesses est beaucoup plus grande pour le fil II pour deux raisons : 1° la différence des vitesses extrêmes $V - V_0$ est plus faible; 2° la période est plus courte. (Sur la figure, les couples seuls sont à la même échelle. On a marqué dans I l'abscisse $V_0$.)

46. *Influence de la période.* — La figure 26 représente deux séries de cycles à période variable. $L_0 = 100^{cm}$. Torsion par période de $6^s$ : 117° pour I, 177° pour II.

1° L'inclinaison moyenne du cycle croît quand la période diminue. Cela tient à ce que, d'une part, la torsion et le couple maximum croissent avec cette période

$$\int_0^T d\alpha = \int_0^T v\, dt = \frac{V}{2} T,$$

et généralement

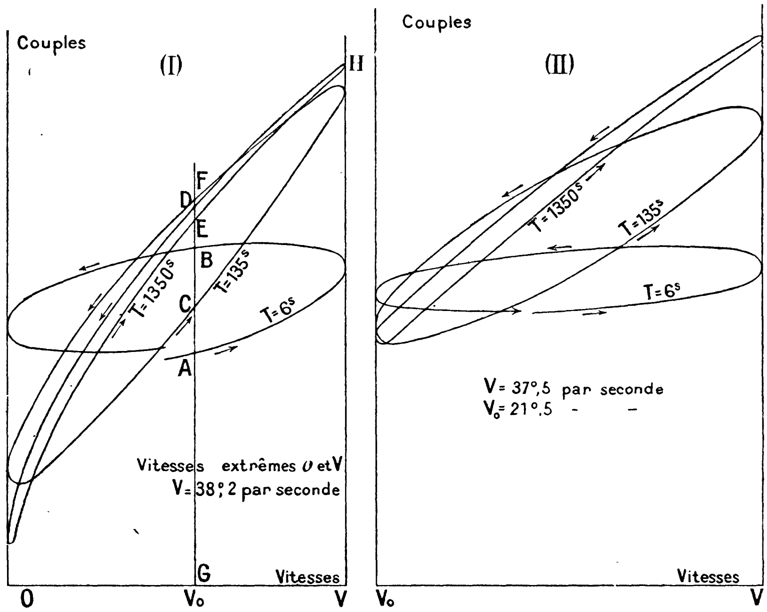
$$\frac{V + V_0}{2} T;$$

d'autre part, la perte de couple aux vitesses décroissantes est d'autant plus grande que la période est plus longue.

2° En appelant $\Delta C$ la différence des ordonnées des deux branches d'un même cycle, telle que $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, cette quantité diminue quand la période croît. Pour $T = 1350^s$ (I), les branches aller et retour sont voisines. Quand la vitesse varie très lentement, le couple reprend à peu près la même valeur pour la même vitesse, à la croissance et à la décroissance. A la limite, pour une période très longue et une torsion poussée très loin, les deux branches superposées donneraient la courbe signalée au n° 33 des couples limites en fonction de la vitesse de torsion, tournant sa concavité vers l'axe des vitesses.

3° Sur la figure 26 (I), les cycles de courte période sont elliptiques, ceux de

Fig. 26.




longue période sont en forme de croissant tourné vers l'axe des vitesses. La branche ascendante des cycles a une courbure qui peut changer de signe avec la période.

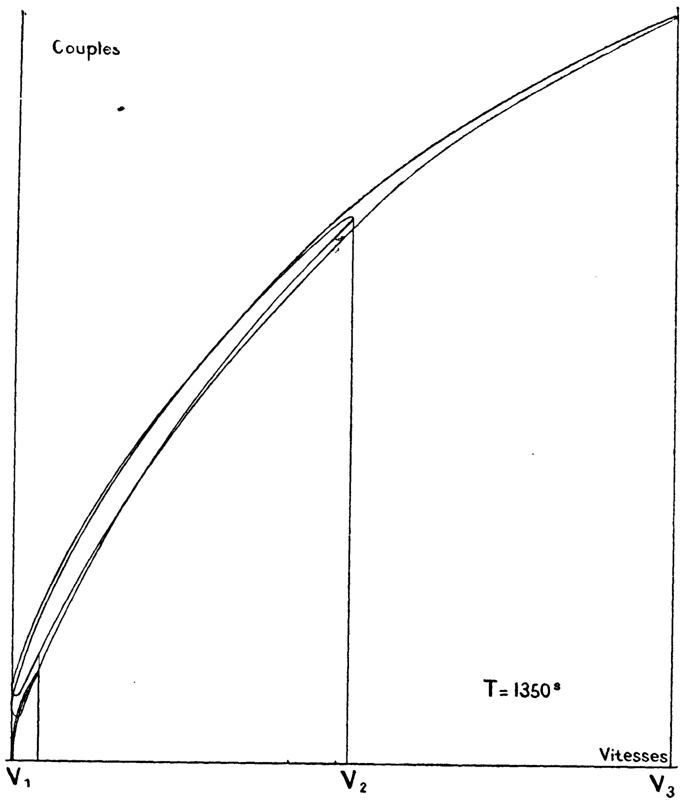
Il y a une période pour laquelle cette branche est à peu près rectiligne. La figure montre que cette période est voisine de $135^s$ *dans les conditions de l'expérience.*

4° Pour les cycles $V_0$, V, (II), la perte de couple est moindre puisque $V_0 \neq 0$. Aussi, pour la vitesse minima $V_0$, les couples varient peu avec la période. A la vitesse maxima, la variation est à peu près la même que pour les cycles $V_0 = 0$. Pour les longues périodes, le cycle n'est plus elliptique; il a un gros et un petit bout; en particulier, il y a analogie entre le cycle 1350 (II) et la courbe HDEH qui lui correspond sur le cycle I de même période. La loi de variation de la vitesse entre $V_0$ et V influe d'autant moins que cette variation est plus lente.

On comparera utilement les résultats ici obtenus avec ceux signalés par M. Bouasse pour le cuivre (*Ann. Fac. Sc. Toulouse,* 2e série, t. III, p. 144 et suiv.).

47. *Influence de la variation de vitesse.* — On maintient constant T, on fait

Fig. 27.




croître $V - V_0$ d'une expérience à l'autre. Il suffit de modifier la vitesse de rotation du plateau horizontal d'entraînement.

En particulier, pour $T = 1350^s$ et $V_0 = 0$, V variant d'une expérience à l'autre, on obtient les croissants de la figure 27. Soient $V_1 < V_2 < V_3$ les vitesses maxima portées en abscisses, le croissant $V_2$ a sensiblement la même direction moyenne que le croissant $V_1$ et se prolonge au delà, il est lui-même prolongé par le croissant $V_3$. Les diamètres (curvilignes) des cordes verticales des trois cycles sont approximativement confondus en une courbe unique qui peut représenter la courbe des couples limites en fonction de la vitesse de torsion. L'épaisseur des cycles croît avec V, surtout au voisinage de la vitesse nulle.

Avec des vitesses V et $V_0$ convenablement choisies, et une période T assez longue, on obtient pareillement des courbes fermées dont les diamètres des cordes verticales plus ou moins curvilignes sont aussi à peu près sur le prolongement les uns des autres et dessinent encore la courbe précédente, conformément à la remarque du numéro précédent 2° et 4°.

48. *Étude d'un cycle particulier.* — J'ai dit que, pour $L_0 = 100^{cm}$,

$$v = \frac{V}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T}\right), \qquad V = 38°,2 \text{ par seconde,}$$

la branche montante du cycle $T = 135^s$ est approximativement rectiligne.

Que se passe-t-il pour le fil neuf, à partir du début? La figure 28 (I) donne en $OA_1B_1$ le premier cycle de torsion. La portion $OA_1$ est, jusqu'au voisinage de $A_1$, à peu près rigoureusement rectiligne, à l'approximation de l'expérience. En $B_1$, on arrête la torsion pendant 10 minutes. Il y a perte de couple suivant $B_1C_2$.

$C_2A_2B_2$, $C_3A_3B_3$ représentent les deuxième et troisième cycles effectués de même après repos de 10 minutes. Toujours, la portion CA est rectiligne et de direction invariable. Il semble qu'il y ait simplement transport du cycle parallèlement à l'axe des couples des quantités $\overline{OC_2}$, $\overline{OC_3}$ qui représentent le couple rémanent au début du parcours.

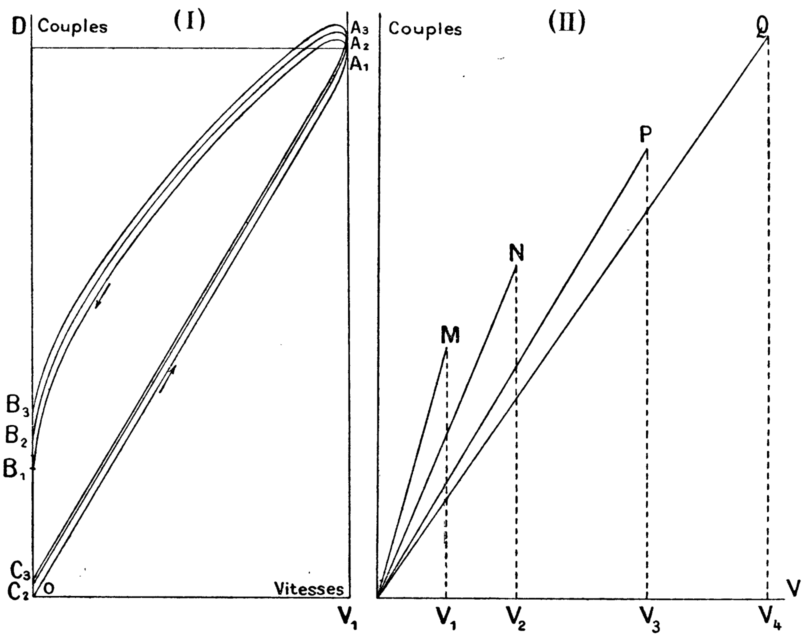
Si l'on répète un grand nombre de fois le même cycle, sans arrêt en B, sauf après le dernier et qu'on le reprenne après repos de 10 minutes, on obtient encore la même droite. Il en est de même si l'on arrête la torsion en $A_1$, laissant le couple tomber à zéro suivant ADO et reprenant après 10 minutes la vitesse sinusoïdale à partir de zéro.

Il existe donc une loi particulière (sinusoïdale) de variation de vitesse avec une valeur particulière de l'un des paramètres (période) définissant cette variation pour laquelle le *couple croît proportionnellement à la vitesse*. Il s'agit de savoir si cela est vrai quel que soit le second paramètre (amplitude V).

L'expérience faite d'après la technique du n° 47, avec $T = 135^s$ et V croissant d'un fil à l'autre à partir de $38^o,2$ par seconde, donne des courbes analogues à celles de la figure 25 (I), c'est-à-dire des croissants tournés vers l'axe des vitesses dont la courbure croît avec V.

Faisons varier à la fois V et T, d'après une loi particulière simple. $\frac{V}{T} = K$ donne encore des courbures variables. Mais $VT = K$ donne comme courbes de première torsion jusqu'à $\frac{T}{2}$ les droites de la figure 28 (II). La valeur de la con-

Fig. 28.




stante K est déterminée par les données de l'expérience précédente $V_1 = 38^o,2$ par seconde, $T = 135^s$, $L_0 = 100^{cm}$.

Le coefficient angulaire des droites varie. Il décroît quand V croît, de sorte que les points M, N, P, Q se placent encore sur une courbe représentant les couples en fonction de la vitesse *pour une même torsion*.

En effet,

$$\int_0^{\frac{T}{2}} d\alpha = \frac{VT}{4} = \frac{K}{4}.$$

La torsion par période est la même pour tous les fils.

La loi de la variation linéaire des couples en fonction de la vitesse est donc générale à condition d'effectuer une torsion toujours la même, avec une vitesse sinusoïdale dont la valeur maxima soit en raison inverse de la période.

On trouvera (H. Bouasse, *Ann. Fac. Sc. Toul.*, 2ᵉ série, t. VII, 1905) la discussion théorique de ces résultats.