

W. STEKLOFF

Théorie générale des fonctions fondamentales

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, tome 6, n° 4 (1904), p. 351-475

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1904_2_6_4_351_0

© Université Paul Sabatier, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS FONDAMENTALES,

PAR M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. La solution de la plupart des questions de la Physique mathématique se ramène à la détermination d'une fonction dépendant du temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z et vérifiant dans un domaine donné (D), limité par une surface fermée (S), telle ou telle équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre jointe à certaines conditions aux limites ainsi qu'à certaines conditions initiales correspondant à une valeur donnée de la variable t (par exemple $t = 0$).

La plupart de ces équations différentielles peuvent être partagées en deux catégories différentes : les unes se représentent sous cette forme générale

$$(1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d \frac{\partial U}{\partial x} + e \frac{\partial U}{\partial y} + f \frac{\partial U}{\partial z} + g U = 0,$$

les autres sous la forme suivante

$$(2) \quad \frac{\partial \dot{U}}{\partial t} + a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d \frac{\partial U}{\partial x} + e \frac{\partial U}{\partial y} + f \frac{\partial U}{\partial z} + g U = 0,$$

où a, b, c, d, e, f, g sont les fonctions données des variables x, y, z . Divers problèmes de l'Hydrodynamique, de l'Acoustique, de l'Électricité et du Magnétisme, de l'Élasticité, etc. dépendent de l'intégration des équations de première espèce (1), la solution de plusieurs questions de la théorie analytique de la chaleur se ramène à l'intégration des équations de seconde espèce (2).

Rappelons quelques cas les plus simples et les plus importants. Posons dans (1),

$$a = b = c = -k, \quad d = e = f = g = 0;$$

il viendra

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = k \Delta U = k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad k > 0.$$

C'est l'équation du mouvement vibratoire d'une masse gazeuse renfermée dans un vase solide.

Faisant les mêmes suppositions dans (2), nous obtiendrons

$$(4) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = k \Delta U,$$

l'équation de refroidissement d'un corps solide.

Supposons, par exemple, que le vase solide reste immobile. Le problème de l'Acoustique se ramène à la détermination d'une fonction U des quatre variables t, x, y, z vérifiant l'équation (3) et satisfaisant aux conditions

$$(5) \quad \frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$(6) \quad U = f(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = f_1(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

où f et f_1 désignent des fonctions données; (S) désigne la surface du vase, n la direction de la normale extérieure à (S), le symbole

$$\frac{\partial U_i}{\partial n}$$

désigne la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(n, z),$$

lorsque le point x, y, z tend vers un point de (S) en restant constamment à l'intérieur de (S) (sur la normale n).

Quant au problème de la chaleur, il se ramène à la détermination d'une fonction U satisfaisant à l'équation (4) jointe aux conditions

$$(7) \quad \frac{\partial U_i}{\partial n} + hU = 0 \quad \text{sur (S)},$$

$$(8) \quad U = f(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

où h est une constante positive.

Dans les cas limites, la constante h peut se réduire à zéro ou à l'infini; dans le cas de $h = 0$, la condition (7) se réduit à (5); dans le cas de $h = \infty$, elle se remplace par la suivante :

$$(9) \quad U = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Si la fonction U ne dépend pas de t , les équations (1) et (2) se réduisent à la

suivante :

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d \frac{\partial U}{\partial x} + e \frac{\partial U}{\partial y} + f \frac{\partial U}{\partial z} + gU = 0.$$

Les conditions initiales perdent leur sens et il ne reste que les conditions aux limites; rappelons, pour exemple, les problèmes classiques de Dirichlet et de C. Neumann.

2. Fourier, Cauchy et Lamé furent les premiers qui ont proposé une méthode générale pour résoudre tous les problèmes dont nous avons parlé au début du n° 1.

Pour expliquer les principes de cette méthode, il suffit de considérer certains exemples les plus simples.

Posons dans (3)

$$U = V(A \cos \lambda t + B \sin \lambda t),$$

A et B étant des constantes arbitraires, λ un nombre positif, V une fonction ne dépendant que de x, y, z .

Substituant cette expression de U dans (3) et (5), il viendra

$$\Delta V + \frac{\lambda^2}{k} V = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Supposons, pour plus de simplicité, que k soit égal à une constante positive. Supposons ensuite qu'il existe une infinité de nombres positifs

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots$$

vérifiant les équations

$$(10) \quad \Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

jointes aux conditions

$$(11) \quad \frac{\partial V_{kt}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

La série

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} V_k (A_k \cos t \sqrt{k \lambda_k} + B_k \sin t \sqrt{k \lambda_k}) + B_0 t,$$

B_0, A_k et B_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant des constantes, représentera la solution du problème, si nous choisissons les A_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) et B_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) de façon que l'on ait

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k = f(x, y, z), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k\lambda_k} B_k V_k + B_0 = f_1(x, y, z).$$

La même méthode s'applique à l'équation de la chaleur (4); il suffit de poser

$$(13) \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k e^{-k\lambda_k t},$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont les fonctions de x, y, z satisfaisant aux conditions

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta V_k + \lambda_k V_k &= 0 \quad \text{à l'intérieur de (S),} \\ \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} + h V_k &= 0 \quad \text{sur (S)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

La série (13) représentera la solution du problème, si nous choisissons les constantes A_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) de façon que la première des équations (12) soit satisfaite.

La méthode dont il s'agit s'applique aussi au cas où la fonction cherchée U ne dépend pas de t .

Rappelons, pour exemple, le problème de Dirichlet :

Trouver une fonction de x, y, z vérifiant l'équation

$$(15) \quad \Delta U = 0 \quad \text{à l'intérieur de (S)}$$

et se réduisant à la fonction donnée f sur (S).

Soit V_k une solution particulière de l'équation (15); l'expression $A_k V_k$, A_k étant une constante, le sera aussi.

La série

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

représentera la solution générale, si nous choisissons les solutions simples V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) et les constantes A_k de façon que cette série soit convergente à l'intérieur de (S) et se réduise à la fonction donnée f sur (S).

La même méthode s'applique aux autres problèmes analogues, par exemple au problème de Neumann.

3. On voit, par ce qui précède, que le problème se partage, en général, en deux parties principales :

(A). *Démontrer l'existence d'une infinité de solutions simples des équations du problème (en faisant abstraction des conditions initiales).*

(B). *Établir la possibilité du développement d'une fonction donnée $f(x, y, z)$, dans un certain domaine (D), en séries procédant suivant les fonctions $V_k (k = 1, 2, 3, \dots)$, auxquelles se réduisent les solutions simples pour $t = 0$.*

Faisons quelques remarques relatives au problème (A) en nous bornant aux cas des équations de l'Acoustique et de la Chaleur. Les solutions simples satisfont, comme nous l'avons vu, aux équations (10).

Si nous prenons les conditions aux limites sous la forme

$$(17) \quad V_k = 0 \quad \text{sur (S)},$$

nous obtiendrons les fonctions $V_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ dont l'existence a été établie pour la première fois par M. H. POINCARÉ dans son Mémoire connu : *Sur les équations de la Physique mathématique (Rendiconti di Palermo, 1894)*.

Si nous posons $h = 0$, nous obtiendrons les fonctions $V_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ satisfaisant aux équations (10) jointes aux conditions (11). J'ai établi l'existence de ces fonctions dans mon Mémoire : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique (Annales de l'École Normale, 1902)* ⁽¹⁾.

Supposant enfin que h est une constante différente de zéro, nous obtiendrons les fonctions V_k vérifiant les équations (14). La démonstration de l'existence de ces fonctions se trouve dans divers Mémoires de MM. H. POINCARÉ, S. ZAREMBA, A. KORN ainsi que dans mon Mémoire tout à l'heure mentionné.

Il importe de remarquer que toutes les fonctions considérées peuvent être définies par certaines équations fonctionnelles, comme je l'ai déjà montré dans mes recherches antérieures.

Dans le cas (17) on trouve, en effet,

$$V_k = \lambda_k \int G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau',$$

l'intégrale, prise par rapport à ξ, η, ζ , étant étendue au domaine (D) tout entier, G désignant la fonction de Green (voir H. POINCARÉ, *loc. cit.*).

Les fonctions, satisfaisant aux conditions (10) et (11), vérifient les équations

$$V_k = \lambda_k \int J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau',$$

⁽¹⁾ Voir aussi W. STEKLOFF, *Sur les équations différentielles de la Physique mathématique [Recueil mathématique de Moscou, 1896 (en russe)]*.

où J désignent une fonction symétrique en x, y, z et ξ, η, ζ , continue à l'intérieur de (S), sauf pour

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme $\frac{\mu}{r}$, μ étant une constante, r la distance de deux points $m(x, y, z)$ et $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, et satisfaisant aux conditions

$$\Delta J = \frac{1}{D} \quad \text{à l'intérieur de (S),}$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)} \quad (1),$$

D désignant le volume du domaine (D).

Dans le cas général, où h est une constante positive différente de zéro, on a

$$V_k = \lambda_k \int \mathbf{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau',$$

\mathbf{H} étant une fonction dont j'ai établi l'existence dans mon Mémoire cité (p. 250), continue dans (D), sauf pour

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme $\frac{\mu}{r}$, et symétrique en $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ (2).

4. Passons maintenant au cas où la fonction cherchée U ne dépend pas de t (voir n° 2) et considérons les solutions simples de l'équation de Laplace correspondant aux problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Les fonctions fondamentales de M. H. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX), les fonctions de M. Éd. Le Roy (*Annales de l'École Normale*, 1898-1899) et les fonctions fondamentales dont j'ai établi l'existence en 1899 (3), représentent ces solutions simples de l'équation de Laplace.

On pourrait démontrer que toutes les fonctions considérées satisfont aux

(1) W. STEKLOFF, *Sur les problèmes fondamentaux, etc.* (*Annales de l'École Normale*, 1902, p. 248).

(2) Rappelons que \mathbf{H} satisfait aux conditions

$$\Delta \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial n} + h \mathbf{H} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

(3) W. STEKLOFF, *Sur l'existence des fonctions fondamentales* (*Comptes rendus*, 27 mars 1899).

équations de la forme

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) ds',$$

l'intégrale étant étendue à la surface donnée (S).

On a, par exemple, pour les fonctions de M. Le Roy,

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r} V_k(\xi, \eta, \zeta) ds',$$

où p est une fonction positive ne s'annulant pas et continue sur (S).

5. On voit, par ce qui précède, que toutes les fonctions dont il s'agit se partagent en deux catégories :

Les unes, que nous désignerons, en général, par V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), ont cette propriété commune : elles satisfont aux équations fonctionnelles de la forme

$$V_k = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau',$$

où λ_k sont des constantes, p est une fonction continue positive et ne s'annulant pas dans le domaine (D), G est une fonction symétrique en x, y, z et ξ, η, ζ , continue en tous les points de (D), sauf pour le point

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

où elle devient infinie comme la fonction $\frac{\mu}{r}$.

Les autres, que nous désignerons, en général, par W_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), vérifient les équations suivantes

$$W_k = \mu_k \int q(\xi, \eta, \zeta) J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) W_k(\xi, \eta, \zeta) ds',$$

où μ_k sont des constantes, q et J les fonctions jouissant des mêmes propriétés par rapport aux points de la surface (S) que les fonctions p et G par rapport aux points du domaine (D), limité par (S).

6. Il est naturel maintenant de poser ces questions générales :

1° Peut-on trouver, pour chaque domaine (D), limité par une surface donnée (S), et pour toutes les fonctions données $p(x, y, z)$ et $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$, satisfaisant aux conditions générales énoncées dans le numéro précédent, une

suite de nombres réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots,$$

continues dans (D) et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$V_k(x, y, z) = \lambda_k \int p(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) V_k(\xi, \eta, \zeta) d\tau';$$

2° Peut-on trouver, pour chaque surface fermée (S) et pour toutes les fonctions données $q(x, y, z)$ et $J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ jouissant des propriétés générales, indiquées à la fin du n° 3, une suite de nombres réels

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$W_1, W_2, W_3, \dots, W_k, \dots,$$

continues et vérifiant les équations

$$W_k(x, y, z) = \mu_k \int q(\xi, \eta, \zeta) J(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) W_k(\xi, \eta, \zeta) ds'.$$

La solution de ces questions générales fera l'objet du premier et du quatrième Chapitres du Mémoire qui va suivre.

7. Passons maintenant au problème (B) du n° 3.

J'ai proposé, dans mes recherches antérieures, une méthode générale qui permet d'établir la possibilité du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les fonctions, dont nous avons parlé dans les n°s 3 et 4, sous certaines suppositions très générales.

J'ai pris pour le point de départ ce théorème, établi dans toute sa généralité dans mon Mémoire récent : *Sur certaines égalités communes à plusieurs séries des fonctions souvent employées dans l'Analyse* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, 1904) :

Quelle que soit la fonction f , bornée et intégrable dans un certain domaine (D), on a toujours, pour toutes les fonctions $V_k (k=1, 2, 3, \dots)$, mentionnées plus haut,

$$\int p(x, y, z) f^2(x, y, z) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2,$$

où l'on a posé

$$A_k = \int p(x, y, z) f(x, y, z) V_k(x, y, z) d\tau,$$

$d\tau$ désignant l'élément différentiel du domaine (D).

Il est naturel de se demander : ces égalités ont-elles lieu pour toutes les fonctions du n° 6?

Quant au développement d'une fonction donnée en séries des fonctions V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), j'ai remarqué que toute fonction $f(m)$ qui se représente sous la forme

$$(18) \quad f(m) = \int G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

G désignant la fonction de Green, se développe en séries des fonctions fondamentales V_k ($k = 1, 2, \dots$), correspondant à la fonction de Green; toute fonction vérifiant l'équation

$$f(m) = \int J(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

se développe en série des fonctions correspondant à la fonction $J(m, m_1)$; enfin, toute fonction se représentant à l'aide de l'intégrale

$$f(m) = \int H(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

se développe en série des fonctions V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) correspondant à la fonction $H(m, m_1)$ (1).

Il est naturel de se proposer d'étendre ces résultats particuliers à toutes les fonctions $G(m, m_1)$ du n° 6 qui jouissent des propriétés analogues à celles des fonctions G (fonction de Green), J et H .

Nous trouverons la solution de ces questions dans les Chapitres II et V de ce Mémoire.

Les Chapitres IV et VI seront consacrés à diverses applications des résultats obtenus dans les Chapitres précédents.

(1) W. STEKLOFF, *Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur* (Comptes rendus, 4 avril 1898). — *Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques* (Comptes rendus, 30 janvier 1899). — *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (Annales de l'École Normale, juillet 1902, p. 255, 259).



CHAPITRE I.

REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

1. Désignons par (S) une surface fermée satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° *En tout point de (S) il existe un plan tangent déterminé;*
- 2° *Autour de chaque point p de (S) on peut décrire une sphère (σ) d'un certain rayon D, assez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à (S) en p ne puisse rencontrer la surface (S), à l'intérieur de (σ), qu'en un seul point;*
- 3° *L'angle aigu que font les normales à (S), en deux points quelconques p et p' de (S), est plus petit que ar, a désignant un nombre fixe ne dépendant pas de la position des points p et p' sur (S), r désignant la distance pp'.*

On sait que le *principe de Neumann* s'applique à toute surface (S) jouissant des propriétés énoncées.

On peut donc résoudre le problème de Dirichlet pour toute surface (S) appartenant à la classe considérée, c'est-à-dire trouver une expression analytique de la fonction U satisfaisant aux conditions

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{à l'intérieur ou à l'extérieur de (S),}$$

$$U = f(x, y, z) \quad \text{sur (S),}$$

quelle que soit la fonction donnée f , continue sur (S).

Cela résulte de diverses recherches de MM. S. Zaremba, A. Liapounoff et W. Stekloff (Voir *Journal de Mathématiques, Annales de l'École Normale, Communications de la Société mathématique de Kharkow, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1899-1902).

Nous n'allons considérer, pour fixer les idées, que des surfaces satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, mais il est utile de remarquer d'avance que plusieurs résultats de nos recherches, qui vont suivre, resteront vrais pour une classe de surfaces beaucoup plus générale, à savoir pour toutes les surfaces auxquelles s'applique le *principe de Dirichlet* (voir H. POINCARÉ, *American Journal*, t. XII).

2. Désignons le domaine de l'espace, limité par une surface (S), par (D); le domaine extérieur à (S), nous le désignerons par (D'). Remarquons qu'on peut

considérer (D') comme une limite d'un domaine, limité par la surface donnée (S) et par une sphère, décrite autour de l'origine des coordonnées, de rayon R, lorsque R tend vers l'infini.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction quelconque de trois variables réelles x, y, z ; on peut la considérer comme une fonction du point m de l'espace, en entendant par x, y, z les coordonnées (rectangulaires) du point m .

Nous désignerons une telle fonction simplement par

$$f(m).$$

Toute fonction $F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ de six variables réelles x, y, z et ξ, η, ζ peut être considérée comme une fonction de deux points m et m_1 ayant respectivement x, y, z et ξ, η, ζ pour coordonnées.

Nous désignerons une telle fonction par

$$F(m, m_1).$$

L'intégrale d'une fonction quelconque $F(m, m_1)$, prise par rapport aux variables x, y, z et étendue au domaine (D) tout entier, nous la désignerons par

$$\int F(m, m_1) d\tau;$$

l'intégrale analogue, prise par rapport aux variables ξ, η, ζ et étendue au domaine (D), nous la désignerons par

$$\int F(m, m_1) d\tau',$$

$d\tau$ et $d\tau'$ étant les éléments de volume du domaine (D).

Désignons encore par

$$\int F(m, m_1) dT$$

l'intégrale, prise par rapport à $m(x, y, z)$ et étendue au domaine, composé de deux domaines (D) et (D') (c'est-à-dire l'intégrale, étendue à l'espace tout entier).

Désignons enfin par

$$\int F(m) d\tau_1,$$

$F(m)$ étant une fonction quelconque du point m , l'intégrale, étendue au domaine (D'), $d\tau_1$ étant l'élément de volume de (D').

3. Avant d'aller plus loin, signalons un lemme remarquable qui jouera un rôle important dans les recherches qui vont suivre.

Voici l'énoncé du lemme dont il s'agit :

Soit

$$f(m) = \alpha_1 f_1(m) + \alpha_2 f_2(m) + \dots + \alpha_n f_n(m),$$

où $\alpha_s (s = 1, 2, 3, \dots, n)$ sont des constantes indéterminées, $f_s(m) (s = 1, 2, \dots, n)$ fonctions du point m , linéairement indépendantes et continues avec ses dérivées du premier ordre dans le domaine (D).

On peut toujours disposer les constantes $\alpha_s (s = 1, 2, 3, \dots, n)$, en les assujettissant à vérifier un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, de telle manière que le rapport

$$\frac{\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau}{\int f^2 d\tau}$$

soit plus grand qu'un nombre L_n , ne dépendant que de la surface (S) [ne dépendant pas de $f(m)$] et infiniment croissant avec l'indice n , de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty.$$

Je me permets de ne pas exposer la démonstration que le lecteur trouvera dans le Mémoire bien connu de M. H. Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique (Rendiconti di Palermo, 1894)*.

J'appellerai ce lemme *lemme fondamental de M. H. Poincaré*.

SOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE FONDAMENTALE.

4. Désignons par $p(m)$ une fonction positive, bornée, intégrable et ne s'annulant pas dans le domaine (D).

On aura, quelle que soit la position du point m dans (D),

$$(1) \quad \alpha < p(m) < \beta,$$

α et β étant des nombres fixes.

Soit $H(m, m_1)$ une fonction de deux points m et m_1 satisfaisant aux conditions suivantes :

- (a) Elle est symétrique en $m(x, y, z)$ et $m_1(\xi, \eta, \zeta)$;
- (b) Elle reste continue en tous les points m , INTÉRIEURS à (S), quelle que soit la position du point m_1 dans (D) (et inversement);
- (c) Il existe un nombre fixe A tel qu'on ait

$$(2) \quad \int |H(m, m_1)| d\tau' < A,$$

quelle que soit la position du point m dans (D) [les points de la surface (S) y compris].

Désignons par $G(m, m_1)$ la fonction suivante

$$(3) \quad G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r},$$

μ étant une constante, r la distance mm_1 .

Il est évident que la fonction $G(m, m_1)$ est aussi symétrique en m et m_1 .

5. Maintenant, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction $V(m)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m),$$

$f(m)$ étant une fonction donnée, bornée et intégrable à l'intérieur de (D) , λ étant un paramètre.

L'équation (4) représente une généralisation de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x),$$

étudiée par M. I. Fredholm, sous certaines suppositions très générales par rapport à la fonction $f(x)$, dans son Mémoire : *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, p. 365) (1).

J'emploierai, dans mes recherches, une autre méthode, différente de celle de M. I. Fredholm, à savoir la méthode de Schwarz-Poincaré (*Rendiconti di Palermo*, 1894).

J'imposerai encore certaines restrictions à la fonction $G(m, m_1)$ dont j'ai déjà signalé quelques-unes au numéro précédent, sans traiter le problème dans toute sa généralité, mais les restrictions dont il s'agit sont justifiées par les applications de l'équation (4) à la Physique mathématique, comme nous verrons cela plus tard.

Moyennant la méthode de Schwarz-Poincaré, cherchons $V(m)$ sous la forme de la série

$$(5) \quad V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \dots + \lambda^k v_k(m) + \dots,$$

où $v_k(m)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) sont les fonctions du point m .

(1) Voir aussi D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Heft I, 1904). — V. VOLTERRA, *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti* (*Annali di Matematica*, t. XXV).

Substituant cette expression de $V(m)$ dans (4), on trouve

$$(6) \quad v_0(m) = f(m),$$

$$(6_1) \quad v_k(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau' \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Désignons par J_k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) l'intégrale suivante

$$(7) \quad J_k = \int p(m) v_k^2(m) d\tau > 0.$$

De l'égalité (6₁) on tire

$$(7_1) \quad v_k^2(m) \leq \int p(m_1) G^2(m, m_1) d\tau' \int p(m_1) v_{k-1}^2(m_1) d\tau' = J_{k-1} \int p(m_1) G^2(m, m_1) d\tau',$$

où, en vertu de (3),

$$\int p(m_1) G^2(m, m_1) d\tau' < 2 \int p(m_1) \left[H^2(m, m_1) + \frac{\mu^2}{r^2} \right] d\tau'.$$

Désignons par (S_i) une surface fermée intérieure à (S) , par (D_i) le domaine limité par (S_i) .

D'après l'hypothèse faite par rapport à $H(m, m_1)$, on peut assigner un nombre fixe A_1^2 , tel qu'on ait

$$(2_1) \quad \int H^2(m, m_1) d\tau' < A_1^2,$$

pour tous les points intérieurs à la surface (S_i) qui peut être si voisine de (S) qu'on le veut.

D'autre part, on sait que

$$\int \frac{d\tau'}{r^2} < 2\pi l,$$

l désignant la plus grande distance de deux points de (S) .

On trouve donc, eu égard à (1),

$$(2_2) \quad \int p(m_1) G^2(m, m_1) d\tau' < 2\beta(A_1^2 + 2\pi\mu^2 l) = Q^2,$$

quelle que soit la position du point m dans le domaine (D_i) .

On a donc, eu égard à (7₁),

$$(8) \quad v_k^2(m) < Q^2 J_{k-1}.$$

On peut dire, en se rappelant les propriétés de la surface (S_i) , que cette inégalité a lieu pour tous les points m , intérieurs au domaine (D) .

6. Reprenons l'équation (6₁) et posons

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int p(m_1) \mathbf{H}(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau', \\ \mathbf{R} &= \mu \int \frac{p(m_1) v_{k-1}(m_1)}{r} d\tau'. \end{aligned}$$

On trouve, en vertu de (1) et (2),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 &\leq \int p(m_1) |\mathbf{H}(m, m_1)| d\tau' \int p(m_1) |\mathbf{H}(m, m_1)| v_{k-1}^2(m_1) d\tau' \\ &< \beta \mathbf{A} \int p(m_1) |\mathbf{H}(m, m_1)| v_{k-1}^2(m_1) d\tau'. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbf{R}^2 < 2\pi\mu^2 l\beta \mathbf{J}_{k-1},$$

et, par suite,

$$v_k^2(m) < 2(\mathbf{S}^2 + \mathbf{R}^2) < 2\beta \left[\mathbf{A} \int p(m_1) |\mathbf{H}(m, m_1)| v_{k-1}^2(m_1) d\tau' + 2\pi\mu^2 l\mathbf{J}_{k-1} \right],$$

d'où, eu égard à (2),

$$(9) \quad \int p(m) v_k^2(m) d\tau = \mathbf{J}_k < 2\beta^2 (\mathbf{A}^2 + 2\pi\mu^2 l\mathbf{D}) \mathbf{J}_{k-1} = \mathbf{B}^2 \mathbf{J}_{k-1},$$

D désignant le volume du domaine (D).

7. Multiplions maintenant (6₁) par $p(m) v_k(m) d\tau$ et intégrons, en étendant l'intégration au domaine (D).

On trouve, eu égard à (7),

$$\mathbf{J}_k = \int p(m) v_k(m) \left(\int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau' \right) d\tau,$$

d'où l'on tire, en échangeant l'ordre des intégrations,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \left(\int p(m) \mathbf{G}(m, m_1) v_k(m) d\tau \right) d\tau' \\ &= \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) v_{k+1}(m_1) d\tau', \end{aligned}$$

car la fonction $\mathbf{G}(m, m_1)$ est symétrique en m et m_1 .

De cette égalité on tire l'inégalité suivante

$$(10) \quad \mathbf{J}_k^2 \leq \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{J}_{k+1},$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de l'indice $k = 1, 2, 3, \dots$

Les inégalités (9) et (10) donnent

$$(11) \quad \frac{\mathbf{J}_1}{\mathbf{J}_0} < \frac{\mathbf{J}_2}{\mathbf{J}_1} < \frac{\mathbf{J}_3}{\mathbf{J}_2} < \dots < \frac{\mathbf{J}_k}{\mathbf{J}_{k-1}} < \dots < \mathbf{B}^2.$$

8. Comparons maintenant les séries

$$(5_1) \quad V'(m) = v_1(m) + \lambda v_2(m) + \dots + \lambda^{k-1} v_k(m) + \dots$$

et

$$Q\sqrt{J_0} + Q\lambda\sqrt{J_1} + Q\lambda^2\sqrt{J_2} + \dots + Q\lambda^{k-1}\sqrt{J_{k-1}} + \dots,$$

dont la dernière converge, pourvu que

$$|\lambda| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}} = \rho_0,$$

où, en vertu de (9),

$$\rho_0 > \frac{1}{B}$$

est un nombre positif, *différent de zéro, quelle que soit la fonction $f(m)$* . On en conclut, eu égard à (8), que la série (5₁) converge absolument et uniformément à l'intérieur de (D), pourvu que

$$(12) \quad |\lambda| < \rho_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}}.$$

Donc la série (5₁) représente une fonction $V'(m)$ continue à l'intérieur du domaine (D) pour les valeurs du paramètre λ satisfaisant à la condition (12).

9. Quant à la série (5), elle représente une fonction bornée et intégrable dans (D).

Si nous supposons que $f(m)$ soit continue à l'intérieur de (D), il en sera de même de la fonction $V(m)$, car, en vertu de (6), (5) et (5₁),

$$V(m) = f(m) + \lambda V'(m).$$

Il ne reste qu'à prouver que la fonction trouvée $V(m)$ satisfait à l'équation (4).

Remplaçons dans (5) m par m_1 , multiplions l'égalité ainsi obtenue par $p(m_1)G(m, m_1)$ et intégrons-la.

On trouve, en se rappelant que la série (5₁) converge uniformément dans (D),

$$\int p(m_1)G(m, m_1)V(m_1) d\tau' = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int p(m_1)G(m, m_1)v_k(m_1) d\tau',$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (5), (6) et (6₁),

$$\int p(m_1)G(m, m_1)V(m_1) d\tau' = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} v_{k+1}(m) = \frac{1}{\lambda} [V(m) - v_0(m)]$$

ou

$$V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m);$$

c'est précisément l'équation (4).

C. Q. F. D.

10. Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que la fonction $f(m)$ soit continue dans (D).

Considérons $V(m)$ comme une fonction du paramètre λ et désignons par ρ le rayon de la convergence absolue et uniforme de la série (5).

L'inégalité (12) montre que

$$(13) \quad \rho \geq \rho_0.$$

Montrons que ρ est précisément égal à ρ_0 .

Posons, en général,

$$(14) \quad J_{r,s} = \int p(m) v_r(m) v_s(m) d\tau,$$

r et s étant des entiers quelconques.

On trouve, conformément aux notations du n° 5 [l'égalité (7)],

$$(15) \quad J_{r,r} = J_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Remplaçons dans (6₁) k par s , multiplions le résultat ainsi obtenu par $p(m) v_r(m) d\tau$ et intégrons.

On obtient

$$\begin{aligned} J_{r,s} &= \int p(m) v_r(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) v_{s-1}(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= \int p(m_1) v_{s-1}(m_1) \left(\int p(m) G(m, m_1) v_r(m) d\tau \right) d\tau' \\ &= \int p(m_1) v_{s-1}(m_1) v_{r+1}(m_1) d\tau' = J_{r+1, s-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(16) \quad J_{r,s} = J_{r+k, s-k},$$

k étant un entier positif, plus petit que s .

Supposons que $s > r$ et que les nombres s et r soient pairs ou impairs à la fois.

On peut toujours poser

$$s = r + 2j,$$

j étant un entier convenablement choisi.

Remplaçant dans (16) k par j , il viendra, eu égard à (15),

$$(17) \quad J_{r,s} = J_{r+j, r+j} = J_{r+j} = J_{\frac{r+s}{2}}.$$

Cela posé, considérons les séries

$$(18) \quad s_0(m) = v_0(m) + \lambda^2 v_2(m) + \lambda^4 v_4(m) + \dots + \lambda^{2k} v_{2k}(m) + \dots,$$

$$(18_1) \quad s_1(m) = v_1(m) + \lambda^2 v_3(m) + \lambda^4 v_5(m) + \dots + \lambda^{2k} v_{2k+1}(m) + \dots$$

Le rayon de la convergence uniforme de ces séries ne surpasse pas celui des séries

$$\begin{aligned} & \int p(m) s_0(m) v_0(m) d\tau \\ &= \int p(m) v_0^2(m) d\tau + \lambda^2 \int p(m) v_0(m) v_2(m) d\tau + \dots + \lambda^{2k} \int p(m) v_0(m) v_{2k}(m) d\tau + \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int p(m) s_1(m) v_1(m) d\tau \\ &= \int p(m) v_1^2(m) d\tau + \lambda^2 \int p(m) v_1(m) v_3(m) d\tau + \dots + \lambda^{2k} \int p(m) v_1(m) v_{2k+1}(m) d\tau + \dots, \end{aligned}$$

qui se réduisent, en vertu de (17), aux suivantes :

$$(18_2) \quad J_0 + \lambda^2 J_1 + \lambda^4 J_2 + \dots + \lambda^{2k} J_k + \dots$$

et

$$(18_3) \quad J_1 + \lambda^2 J_2 + \lambda^4 J_3 + \dots + \lambda^{2k} J_{k+1} + \dots$$

Supposons que $\lambda > 0$. Chacune de ces dernières séries ne peut converger que pour les valeurs de λ , plus petites que le nombre ρ_0 ,

$$\rho_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}}.$$

Donc, les séries (18) et (18₁) ont le même rayon ρ_1 de convergence qui est au plus égal à ρ_0 .

Or, le rayon ρ de convergence de la série (5)

$$v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \dots + \lambda^k v_k(m) + \dots = s_0(m) + \lambda s_1(m)$$

est, évidemment, égal à ρ_1 .

Il s'ensuit que

$$\rho = \rho_1 \leq \rho_0.$$

On a donc précisément, eu égard à (13),

$$\rho = \rho_0$$

C. Q. F. D.

11. Nous n'avons considéré les valeurs de la fonction $G(m, m_1)$ et des fonctions $v_k(m)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) que pour les points intérieurs à (S). Or, la fonc-

tion $G(m, m_1)$, considérée, par exemple, comme une fonction du point m , peut être prolongée à l'espace extérieur à (S) , c'est-à-dire à tous les points du domaine (D') , et cela d'une infinité de manières.

A chaque prolongement déterminé de la fonction $G(m, m_1)$ correspondra un prolongement bien déterminé des fonctions $v_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), définies par les relations (6₁).

Supposons maintenant que la fonction $H(m, m_1)$ *reste continue avec ses dérivées du second ordre dans le domaine (D) tout entier* [les points de la surface (S) y compris].

Dans ce cas, on peut trouver deux nombres fixes A et L , de façon que l'on ait

$$(19) \quad \int G^2(m, m_1) d\tau' < A, \quad \int [\Delta H(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2,$$

quelle que soit la position du point m dans le domaine (D) .

Formons la fonction $U(m, m_1)$ satisfaisant aux conditions

$$\Delta U(m, m_1) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{à l'extérieur de } (S),$$

$$U(m, m_1) = H(m, m_1) \quad \text{sur } (S),$$

et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

C'est le problème extérieur de Dirichlet qui peut être résolu dans le cas considéré, car, d'après les suppositions faites, la surface (S) satisfait aux conditions 1^o, 2^o et 3^o du n^o 1 et la fonction $H(m, m_1)$ reste continue sur (S) .

Nous supposons toujours que *le point m_1 se trouve dans le domaine (D)* .

Prenons maintenant pour $G(m, m_1)$ la fonction, définie par les conditions suivantes :

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r} \quad \text{à l'intérieur de } (S),$$

$$G(m, m_1) = U(m, m_1) + \frac{\mu}{r} \quad \text{à l'extérieur de } (S).$$

Dans ce cas, *toutes les fonctions $v_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), définies par les relations (6₁), seront continues dans l'espace tout entier; leurs dérivées du premier ordre seront continues à l'intérieur et à l'extérieur de la surface (S)* .

Désignons par R la distance du point m à l'origine des coordonnées.

On aura, quelle que soit la position du point m dans le domaine (D') , extérieur à (S) ,

$$R |G(m, m_1)| < A,$$

$$R^2 \left| \frac{\partial G(m, m_1)}{\partial x} \right| < B$$

et les inégalités analogues pour les dérivées de $G(m, m_1)$ par rapport à y et à z , A et B étant des nombres fixes.

Par conséquent,

$$R |v_k(m)| < \int p(m_1) R |G(m, m_1)| |v_{k-1}(m_1)| d\tau' < A \int p(m_1) |v_{k-1}(m_1)| d\tau' = A_1,$$

$$R^2 \left| \frac{\partial v_k(m)}{\partial x} \right| < \int p(m_1) R^2 \left| \frac{\partial G(m, m_1)}{\partial x} \right| |v_{k-1}(m_1)| d\tau' < B \int p(m_1) |v_{k-1}(m_1)| d\tau' = B_1,$$

.....

A_1 et B_1 étant des nombres fixes.

On en conclut que chacune des fonctions $v_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien.

Il est évident ensuite que *chacune des fonctions $v_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) admet les dérivées du second ordre, continues dans (D'), et satisfait à l'équation*

$$(20) \quad \Delta v_k(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (S).}$$

Supposons encore que la fonction $p(m)$ soit choisie de façon que le potentiel

$$\int \frac{p(m) v_k(m)}{r} d\tau$$

admette les dérivées du second ordre à l'intérieur de (D).

Cette condition étant remplie, on trouve

$$(21) \quad \Delta v_k(m) = -4\pi\mu p(m) v_{k-1}(m) + \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \Delta H(m, m_1) d\tau'$$

à l'intérieur de (S).

12. Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} = \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Désignons par n la direction de la normale extérieure à (S).

Les limites, vers lesquelles tend une fonction quelconque F du point m , lorsque m tend vers un point de la surface (S), nous les désignerons par

$$F_i \quad \text{et} \quad F_e,$$

selon que m reste constamment à l'intérieur ou à l'extérieur de (S).

Désignons encore par les symboles

$$\frac{\partial F_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_e}{\partial n}$$

ce qu'on appelle *dérivées normales intérieure et extérieure* de la fonction F , c'est-à-dire les limites vers lesquelles tend l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial F}{\partial z} \cos(n, z),$$

lorsque le point $m(x, y, z)$ tend vers un point de (S) en restant respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur de (S) (sur la normale n).

Comme, d'après l'hypothèse faite, $H(m, m_1)$ reste continue sur (S) avec ses dérivées de deux premiers ordres, la fonction $U(m, m_1)$, définie dans le numéro précédent, admet la dérivée normale

$$\frac{\partial U_c}{\partial n}$$

régulière sur (S) (1).

On peut donc trouver un nombre fixe L_1 , tel qu'on ait

$$(19_1) \quad \int P^2 ds = \int \left(\frac{\partial H_i}{\partial n} - \frac{\partial U_c}{\partial n} \right)^2 ds < L_1^2,$$

l'intégrale étant étendue à la surface (S) .

Cela posé, appliquons le théorème de Green à la fonction $v_k(m)$.

On trouve, conformément aux notations introduites (voir aussi n° 2),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \int v_k \Delta v_k d\tau + \int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds$$

et, en vertu de (20),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau_1 = - \int v_k \Delta v_k d\tau_1 - \int v_{ke} \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} ds = - \int v_{ki} \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} ds,$$

car v_k reste continue dans l'espace tout entier.

Or,

$$v_k(m) = \int p(m_1) H(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau' + \mu \int \frac{p(m_1) v_{k-1}(m_1)}{r} d\tau'.$$

(1) Voir mon Ouvrage : *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique*, Kharkow, 1901, p. 181 (en russe). Les conditions plus générales de l'existence des dérivées normales d'une fonction harmonique sont indiquées dans le Mémoire de M. Liapounoff : *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

Les dérivées du premier ordre du potentiel newtonien

$$\int \frac{p(m_1) v_{k-1}(m_1)}{r} d\tau'$$

restent continues dans l'espace tout entier; on a donc

$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} - \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} = \int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \left(\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial n} \right) d\tau'$$

et, eu égard à (21),

$$(22) \quad \mathbf{I}_k = \int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\Gamma = 4\pi\mu \int p v_k v_{k-1} d\tau - \int v_k \left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right) d\tau \quad (1) \\ + \int v_{ki} \left[\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \left(\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial n} \right) d\tau' \right] ds.$$

Or,

$$\left[\int v_k \left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right) d\tau \right]^2 \leq \int v_k^2 d\tau \int \left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right)^2 d\tau$$

et

$$\left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right)^2 \leq \int p v_{k-1}^2 d\tau' \int p (\Delta \mathbf{H})^2 d\tau',$$

d'où, en vertu de (1), (7) et (19),

$$\left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right)^2 < \beta \mathbf{L}^2 \mathbf{J}_{k-1}.$$

Par conséquent, en vertu de (9),

$$\left| \int v_k \left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right) d\tau \right| < \mathbf{L} \sqrt{\frac{\beta \mathbf{D}}{\alpha}} \sqrt{\mathbf{J}_k} \sqrt{\mathbf{J}_{k-1}} < \mathbf{B} \mathbf{L} \sqrt{\frac{\beta \mathbf{D}}{\alpha}} \mathbf{J}_{k-1}.$$

D'autre part,

$$\left[\int v_{ki} \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \mathbf{P} d\tau' \right) ds \right]^2 \leq \int v_{ki}^2 ds \int \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \mathbf{P} d\tau' \right)^2 ds, \\ \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \mathbf{P} d\tau' \right)^2 \leq \int p(m_1) v_{k-1}^2(m_1) d\tau' \int p(m_1) \mathbf{P}^2 d\tau',$$

et, en vertu de (19),

$$\int ds \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) \mathbf{P} d\tau' \right)^2 \leq \mathbf{J}_{k-1} \int p(m_1) \left(\int \mathbf{P}^2 ds \right) d\tau' < \beta \mathbf{D} \mathbf{L}_1^2 \mathbf{J}_{k-1}.$$

(1) Nous écrivons, pour plus de simplicité, F au lieu de F(m), H au lieu de H(m, m₁), etc., ce qui ne peut donner lieu à aucun malentendu.

Par conséquent,

$$\left| \int v_{ki} \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) P d\tau' \right) ds \right| < L_1 \sqrt{\beta D} \sqrt{J_{k-1}} \left(\int v_{ki}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, dans le cas considéré, l'inégalité (8) a lieu pour tous les points du domaine (D) [les points de (S) y compris].

On a donc

$$\left| \int v_{ki} \left(\int p(m_1) v_{k-1}(m_1) P d\tau' \right) ds \right| < SL_1 Q \sqrt{\beta D} J_{k-1},$$

S désignant la grandeur de la surface (S).

On trouve donc finalement, eu égard à (22),

$$(23) \quad I_k < \left(4\pi\mu B + BL \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} + SL_1 Q \sqrt{\beta D} \right) J_{k-1} = NJ_{k-1},$$

car, en vertu de (9),

$$\left| \int p v_k v_{k-1} d\tau \right| < \sqrt{J_k} \sqrt{J_{k-1}} < BJ_{k-1}.$$

L'inégalité (23) donne

$$\frac{I_k}{J_k} < N \frac{J_{k-1}}{J_k},$$

d'où

$$(24) \quad \frac{J_k}{J_{k-1}} < N \frac{J_k}{I_k} < N\beta \frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau} < N\beta \frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau}.$$

Il est utile de remarquer que dans certains cas particuliers la démonstration de l'inégalité

$$(24_1) \quad \frac{J_k}{J_{k-1}} < N\beta \frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau}$$

peut être essentiellement simplifiée.

Supposons, par exemple, la fonction $G(m, m_1)$ choisie de façon que l'on ait

$$(19_2) \quad \int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds \leq 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice $k = 1, 2, 3, \dots$

Ces conditions étant remplies, l'introduction de la fonction $U(m, m_1)$ ainsi que de l'inégalité (19₁) devient inutile.

En effet, de l'inégalité

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau = - \int v_k \Delta v_k d\tau + \int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds,$$

on tire immédiatement, eu égard à (19₂),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau < \left| \int v_k \Delta v_k d\tau \right|,$$

d'où, comme précédemment,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\tau < \left(4\pi\mu B + BL \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} \right) \mathbf{J}_{k-1} = \mathbf{N} \mathbf{J}_{k-1}.$$

Cette inégalité conduit tout de suite à (24₁).

Supposons encore que la fonction symétrique $\mathbf{H}(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m , jouisse des propriétés suivantes :

Elle reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admet les dérivées du second ordre continues dans (\mathbf{D}) , se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation

$$\Delta \mathbf{H}(m, m_1) = 0 \quad \text{à l'extérieur de } (\mathbf{D}) \quad (1).$$

Ces conditions étant remplies, l'introduction de la fonction $\mathbf{U}(m, m_1)$ sera aussi inutile, car toutes les fonctions v_k seront continues avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, de sorte qu'on aura

$$(19_3) \quad \int \left(v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} - v_{ke} \frac{\partial v_{ke}}{\partial n} \right) ds = 0$$

et, par suite,

$$\mathbf{I}_k = \int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 d\mathbf{T} = 4\pi\mu \int p v_k v_{k-1} d\tau - \int v_k \left(\int p v_{k-1} \Delta \mathbf{H} d\tau' \right) d\tau,$$

d'où l'on tire, comme précédemment, l'inégalité (23) et puis l'inégalité (24).

Nous aurons l'occasion de faire usage de ces remarques plus tard.

13. Supposons maintenant que la fonction $f(m)$ dans l'équation (4) se représente sous la forme suivante :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n,$$

(1) Ce sont les suppositions que j'ai faites dans ma Note : *Sur certaines égalités communes à toutes les fonctions fondamentales* (Comptes rendus, 4 juillet 1904).

α_s ($s = 1, 2, \dots, n$) étant des constantes indéterminées, f_s ($s = 1, 2, \dots, n$) étant des fonctions du point m , linéairement indépendantes et continues dans (D).

Les relations (6₁) montrent que, dans le cas considéré, chacune des fonctions v_k sera une fonction linéaire de constantes α_s .

D'après le lemme fondamental de M. H. Poincaré (n° 3), on peut toujours disposer les α_s de façon que l'on ait

$$\frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{1}{L_n}.$$

Nous aurons alors, eu égard à (24),

$$\frac{J_k}{J_{k-1}} < N\beta \frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} < N\beta \frac{\int v_k^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)^2 d\tau} < \frac{N\beta}{L_n} = \frac{K}{L_n}$$

et, en vertu de (11),

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \dots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \sqrt{\frac{K}{L_n}}.$$

Désignons par (E_k) l'ensemble des valeurs des α_s , pour lesquelles ces inégalités ont lieu.

Remplaçons k par $k + 1$; nous obtiendrons, comme précédemment, les inégalités suivantes :

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \dots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \frac{\sqrt{J_{k+1}}}{\sqrt{J_k}} < \sqrt{\frac{K}{L_n}},$$

ainsi qu'un ensemble correspondant (E_{k+1}).

Comme ces inégalités entraînent les inégalités précédentes, on en conclut que l'ensemble (E_{k+1}) est renfermé dans (E_k).

Supposant que l'indice k croisse indéfiniment, nous obtiendrons une suite d'ensembles

$$(E_k), (E_{k+1}), (E_{k+2}), \dots, (E_{k+p}), \dots,$$

dont chacun des suivants est renfermé dans le précédent.

Il s'ensuit que chacun des ensembles (E_{k+p}) est un ensemble bien déterminé, quel que soit le nombre p .

Supposant que p croisse indéfiniment et en passant à la limite, nous obten-

drons un ensemble déterminé $(E_\infty) = (E)$ de valeurs des α_s , telles qu'on aura

$$\frac{\sqrt{J_1}}{\sqrt{J_0}} < \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{J_1}} < \dots < \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k-1}}} < \dots < \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L_n}}.$$

Dans ce cas nous aurons (voir n° 9)

$$(25) \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_{k-1}}}{\sqrt{J_k}} > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}},$$

l'inégalité qui nous sera nécessaire plus loin.

14. Montrons maintenant, en suivant une voie indiquée par M. H. Poincaré, que $V(m)$, considéré comme fonction du paramètre λ , est une fonction méromorphe en λ n'ayant que des pôles simples et réels.

Formons les séries

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = v_1 + \lambda v_2 + \lambda^2 v_3 + \dots, \\ u_3 = v_2 + \lambda v_3 + \lambda^2 v_4 + \dots, \\ \dots \dots \dots, \\ u_k = v_{k-1} + \lambda v_k + \lambda^2 v_{k+1} + \dots, \\ u_{k+1} = v_k + \lambda v_{k+1} + \lambda^2 v_{k+2} + \dots, \\ \dots \dots \dots, \\ u_{n+1} = v_n + \lambda v_{n+1} + \lambda^2 v_{n+2} + \dots, \end{array} \right.$$

qui convergent, évidemment, absolument et uniformément dans (D) pour les mêmes valeurs du paramètre λ que la série (5).

Elles représentent donc les fonctions u_k ($k = 1, 2, \dots, n+1$) continues dans (D). Ces fonctions satisfont aux conditions

$$(27) \quad u_k - \lambda u_{k+1} = v_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n),$$

$$(28) \quad u_k(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) u_{k-1}(m_1) d\tau' \quad (k = 2, 3, \dots, n+1),$$

ce qui résulte immédiatement de (6) et (26).

Désignons maintenant par

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

n constantes indéterminées et posons

$$(29) \quad w = \alpha_1 V + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Multipliant cette égalité par $\lambda p(m_1) G(m, m_1) d\tau'$ et intégrant, on trouve, eu

égard à (4), (27), (28) et (29),

$$\begin{aligned} & \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) \omega(m_1) d\tau' \\ &= \alpha_1 V(m) - \alpha_1 v_0(m) + \lambda \alpha_2 u_3(m) + \lambda \alpha_3 u_4(m) + \dots + \lambda \alpha_n u_{n+1}(m) \\ &= \omega - \alpha_1 v_0 - \alpha_2 (u_2 - \lambda u_3) + \dots + \alpha_n (u_n - \lambda u_{n+1}) \\ &= \omega - (\alpha_1 v_0 + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 v_2 + \dots + \alpha_n v_{n-1}). \end{aligned}$$

Donc, la fonction $\omega(m)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\omega(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) \omega(m_1) d\tau' + f_1(m),$$

où l'on a posé

$$f_1(m) = \alpha_1 v_0(m) + \alpha_2 v_1(m) + \alpha_3 v_2(m) + \dots + \alpha_n v_{n-1}(m).$$

C'est une équation de la même forme que (4), que nous avons pris pour le point de départ de nos recherches.

Répétant presque textuellement les raisonnements précédents (n^{os} 4-11), on s'assure que $\omega(m)$ se représente sous la forme de la série

$$(30) \quad \omega = \omega_0 + \lambda \omega_1 + \lambda^2 \omega_2 + \dots + \lambda^k \omega_k + \dots,$$

dont le rayon ρ_1 de la convergence absolue et uniforme est égal à

$$\rho_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}},$$

où l'on a désigné par J'_k ce qui devient J_k [voir n^o 5, l'égalité (7)], si l'on y remplace v_k par ω_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Ce résultat reste vrai, quelles que soient les constantes α_s ($s = 1, 2, \dots, n$).

Or, d'après la proposition établie dans le n^o 13, on peut choisir les α_s de façon que l'on ait

$$\rho_1 > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}}.$$

D'autre part, en choisissant convenablement le nombre n , on aura

$$\rho_1 > \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{K}} > A,$$

A étant un nombre donné à l'avance, qu'on pourra prendre aussi grand qu'on voudra, car (voir n^o 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty.$$

On en conclut qu'on peut toujours choisir le nombre n et disposer ensuite les constantes α_s ($s = 1, 2, \dots, n$) de façon que l'on ait

$$(31) \quad \rho_1 > \rho,$$

ρ désignant le rayon de convergence de la série (5).

15. Nous avons vu (n° 13) que le rayon ρ de convergence de la série (5), représentant la solution de l'équation (4), dépend du choix de la fonction $f(m)$, mais il ne peut pas dépasser un certain nombre positif et différent de zéro.

En le désignant par l_1 , supposons que la fonction $f(m)$ soit choisie de façon que

$$\rho = l_1.$$

Supposons encore que les constantes α_s soient choisies de façon que [l'inégalité (31) du numéro précédent]

$$\rho_1 > \rho.$$

Formons le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} V - \lambda u_2 &= v_0, \\ u_2 - \lambda u_3 &= v_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n-1} - \lambda u_n &= v_{n-2}, \\ \alpha_1 V + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n &= w. \end{aligned}$$

En les résolvant par rapport à V , on trouve

$$(32) \quad V(m) = \frac{P(m)}{D(\lambda)},$$

où l'on a posé

$$(33) \quad P(m) = \begin{vmatrix} w(m) & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ v_0(m) & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1(m) & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ v_{n-3}(m) & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ v_{n-2}(m) & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

$$(34) \quad D(\lambda) = \alpha_n - \lambda \alpha_{n-1} + \lambda^2 \alpha_{n-2} + \dots + (-\lambda)^{n-1} \alpha_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

La fonction $P(m)$ se représente sous la forme de la série

$$(35) \quad P(m) = P_0(m) + \lambda P_1(m) + \lambda^2 P_2(m) + \dots + \lambda^k P_k(m) + \dots$$

qui converge absolument et uniformément dans (D), pourvu que

$$(36) \quad |\lambda| < \rho_1 > l_1.$$

Or, nous avons vu que la fonction $V(m)$ cesse d'être continue pour les valeurs de λ dont le module est égal à l_1 .

Il s'ensuit que le polynôme $D(\lambda)$ admet au moins une racine λ' dont le module est égal à l_1 ; cette racine représente en même temps un pôle de la fonction $V(m)$, considérée comme fonction du paramètre λ .

On en conclut que *la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (4) est, en général, une fonction méromorphe du paramètre λ .*

16. Démontrons qu'elle ne peut admettre que des pôles simples.

Soit $\lambda = \lambda'$ un pôle de la fonction $V(m)$.

Substituant (32) dans (4), il viendra

$$(37) \quad P(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) P(m_1) d\tau' + D(\lambda) f(m).$$

Désignons par $V'(m)$ ce que devient $P(m)$, si l'on y pose $\lambda = \lambda'$.

On aura

$$(38) \quad V'(m) = \lambda' \int p(m_1) G(m, m_1) V'(m_1) d\tau'.$$

Supposons que λ' soit un pôle multiple de la fonction $V(m)$ et, par suite, une racine multiple de polynôme $D(\lambda)$; soit $q + 1$ son ordre de multiplicité.

On a

$$(39) \quad D(\lambda') = 0, \quad D^{(1)}(\lambda') = 0, \quad D^{(2)}(\lambda') = 0, \quad \dots, \quad D^{(q)}(\lambda') = 0,$$

$D^{(s)}(\lambda)$ désignant la dérivée de $s^{\text{ième}}$ ordre du polynôme $D(\lambda)$.

Désignons par $P^{(s)}(m)$ la dérivée de $s^{\text{ième}}$ ordre de la fonction $P(m)$, prise par rapport à λ ; on a

$$(40) \quad P^{(s)} = s! P_s + \frac{(s+1)!}{1} \lambda P_{s+1} + \dots + \frac{(s+k)!}{k!} \lambda^k P_{s+k} + \dots$$

Or, l'égalité (33) montre que

$$P_{n+k} = (-1)^{n-1} \omega_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

On en conclut que le rayon de convergence de la série (40) est égal à celui de (30); la série (40) représente donc une fonction continue dans (D), pourvu que λ satisfasse à l'inégalité (36).

Différentions maintenant (37) s fois par λ ; il viendra, eu égard à (39),

$$(41) \quad \mathbf{P}^{(s)}(m) = \lambda' \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^s(m_1) d\tau' + s! \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k}{(\lambda')^{s-1-k}} \frac{\mathbf{P}^{(k)}}{k!}.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de s à partir de $s = 0$ jusqu'à $s = q$.

On en tire, en remplaçant s par $s - 1$,

$$(42) \quad \mathbf{P}^{(s-1)}(m) = \lambda' \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s-1)}(m_1) d\tau' + (s-1)! \sum_{k=0}^{s-2} \frac{(-1)^k}{(\lambda')^{s-2-k}} \frac{\mathbf{P}^{(k)}}{k!}.$$

Posons

$$\int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s-1)}(m_1) d\tau' = \mathbf{U}(m).$$

On aura, en se rappelant que $\mathbf{G}(m, m_1)$ est une fonction symétrique en m et m_1 ,

$$\int p(m) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s-1)}(m) d\tau' = \mathbf{U}(m_1).$$

Supposons maintenant que

$$\mathbf{P}^{(k)}(m) = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \dots, s-2.$$

Multiplions (41) et (42) respectivement par

$$p(m) \mathbf{P}^{(s-1)}(m) d\tau \quad \text{et} \quad p(m) \mathbf{P}^{(s)}(m) d\tau,$$

retranchons et intégrons le résultat ainsi obtenu.

Remarquant que

$$\begin{aligned} & \int p(m) \mathbf{P}^{(s-1)}(m) \left(\int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s)}(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= \int p(m_1) \mathbf{P}^{(s)}(m_1) \left(\int p(m) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s-1)}(m) d\tau \right) d\tau' = \int p(m_1) \mathbf{P}^{(s)}(m_1) \mathbf{U}(m_1) d\tau', \\ & \int p(m) \mathbf{P}^{(s)}(m) \left(\int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \mathbf{P}^{(s-1)}(m_1) d\tau' \right) d\tau = \int p(m) \mathbf{P}^{(s)}(m) \mathbf{U}(m) d\tau, \end{aligned}$$

on trouve

$$\int p(m) [\mathbf{P}^{(s-1)}(m)]^2 d\tau = 0,$$

d'où

$$\mathbf{P}^{(s-1)}(m) = 0,$$

car $p(m)$ reste positif dans (D).

Or, si λ' est un pôle multiple de $V(m)$, on aura nécessairement

$$P^{(0)}(m) = V_1(m) = 0.$$

Par conséquent,

$$P^{(1)}(m) = P^{(2)}(m) = \dots = P^{(q-1)}(m) = 0$$

et

$$V(m) = \frac{P^{(q)}(m)}{D^{(q)}(\lambda)},$$

où $P^{(q)}(m)$ est différent de zéro.

Supposant, en effet, que

$$P^{(q)}(m) = 0,$$

on aura pour $\lambda = \lambda'$

$$V(m) = \frac{P^{(q+1)}(m)}{D^{(q+1)}(\lambda')},$$

où $D^{(q+1)}(\lambda')$ est différent de zéro.

La fonction $V(m)$ se représentera, pour $\lambda = \lambda'$, sous la forme de la série (5), ce qui est impossible.

Donc, $P^{(q)}(m)$ est différent de zéro.

Il s'ensuit que λ' est un pôle simple de la fonction $V(m)$, car il est en même temps la racine simple du polynôme $D^{(q)}(\lambda)$.

On peut donc supposer que $P(m)$, dans l'équation (32), est une fonction bien déterminée et différente de zéro pour $\lambda = \lambda'$.

17. Démontrons encore que *tous les pôles de la fonction $V(m)$ sont réels.*

Soit

$$\lambda' = \alpha + i\beta, \quad i = \sqrt{-1},$$

α et β étant deux nombres réels différents de zéro, un pôle de la fonction $V(m)$.

On peut poser

$$V'(m) = U_1(m) + i U_2(m),$$

où $U_1(m)$ et $U_2(m)$ sont les fonctions réelles du point m .

La fonction $V'(m)$ satisfait à l'équation (38) qui donne

$$(43) \quad U_1(m) = \alpha \int p(m_1) G(m, m_1) U_1(m_1) d\tau' - \beta \int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau',$$

$$(44) \quad U_2(m) = \beta \int p(m_1) G(m, m_1) U_1(m_1) d\tau' + \alpha \int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau'.$$

Multiplions (43) et (44) par $p(m) U_2(m) d\tau$ et $p(m) U_1(m) d\tau$, retranchons

et intégrons le résultat obtenu ; on trouve

$$(45) \quad \int p(m) U_1(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) U_1(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ + \int p(m) U_2(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau' \right) d\tau = 0,$$

car

$$(46) \quad \int p(m) U_2(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) U_1(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ = \int p(m) U_1(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau' \right) d\tau.$$

Multipliant maintenant (43) et (44) respectivement par $p(m) U_1(m) d\tau$ et $p(m) U_2(m) d\tau$, additionnant et intégrant le résultat, on trouve, eu égard à (45) et (46),

$$\int p(m) [U_1^2(m) + U_2^2(m)] d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$U_1(m) = U_2(m) = V'(m) = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc, *tous les pôles de la fonction $V(m)$ sont réels.*

18. On peut maintenant énoncer ce théorème général :

THÉORÈME. — *Soit (S) une surface fermée, à laquelle s'applique le principe de Neumann ⁽¹⁾. Soit $p(m)$ une fonction du point $m(x, y, z)$ continue positive et ne s'annulant pas dans le domaine (D), limité par la surface (S).*

Supposons encore que la fonction $p(m)$ soit choisie de façon que le potentiel newtonien

$$\int \frac{p(m) \varphi(m)}{r} d\tau'$$

admette les dérivées des deux premiers ordres dans (D), quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre ⁽²⁾.

Soit $f(m)$ une fonction du point m , continue ⁽³⁾ dans (D).

⁽¹⁾ Il suffit de supposer que (S) satisfasse aux conditions 1°, 2° et 3° du n° 1.

⁽²⁾ Il suffit de supposer que $p(m)$ reste continue avec ses dérivées du premier ordre à l'intérieur de (D). Quant aux conditions plus générales, voir O. HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*, Stuttgart, 1882.

⁽³⁾ Remarquons que cette restriction n'a rien d'essentiel ; il suffit de supposer que $f(m)$ soit bornée et intégrable, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

Soit enfin $H(m, m_1)$ une fonction de deux points $m(x, y, z)$ et $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, symétrique en m et m_1 et continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans le domaine (D) tout entier [les points de la surface (S) y compris].

Posons

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{r},$$

μ désignant une constante, r la distance de deux points m et m_1 .

Ces conditions étant remplies, l'équation fonctionnelle

$$V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m),$$

λ étant un paramètre, admet toujours une solution $V(m)$ qui se représente sous la forme de la série procédant suivant les puissances croissantes de λ et absolument et uniformément convergente dans (D) , pourvu que le module de λ ne surpasse pas un certain nombre l_1 , positif et différent de zéro.

Cette solution $V(m)$, considérée, en général, comme une fonction du paramètre λ , est une fonction méromorphe en λ n'ayant que des pôles simples et réels.

FONCTIONS FONDAMENTALES.

19. Des recherches précédentes il résulte immédiatement que le nombre positif l_1 représente un pôle de la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (4).

Le point

$$\lambda = -l_1$$

peut aussi présenter un pôle de la fonction $V(m)$.

Il existe donc au moins un nombre λ_1 dont la valeur numérique est égale à l_1 , et une fonction $V_1(m)$, bien déterminée, différente de zéro et telle qu'on ait

$$V_1(m) = \lambda_1 \int p(m_1) G(m, m_1) V_1(m_1) d\tau'.$$

Reprenons maintenant l'équation (4) en y remplaçant $f(m)$ par une autre fonction $f_1(m)$.

D'après le théorème du n° 14 on peut choisir $f_1(m)$ de façon que le rayon de convergence de la série

$$(47) \quad v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \dots + \lambda^k v_k(m) + \dots,$$

où

$$v_0(m) = f_1(m), \quad v_k(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau',$$

sera égal à un nombre l_2 plus grand que l_1 .

Appliquant au cas considéré les raisonnements précédents, nous nous assurerons que le nombre l_2 sera un pôle de la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation

$$V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f_1(m)$$

et que le point

$$\lambda = -l_2$$

peut aussi présenter un pôle de la fonction $V(m)$.

Il existe donc au moins un nombre λ_2 , dont la valeur numérique est égale à $l_2 > l_1$, et une autre fonction $V_2(m)$, différente de zéro et vérifiant l'équation

$$V_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1) G(m, m_1) V_2(m_1) d\tau'.$$

Remplaçant ensuite dans (4) $f(m)$ par $f_2(m)$ et choisissant la fonction $f_2(m)$ de façon que le rayon de convergence de la série (47), où il faut poser maintenant

$$v_0(m) = f_2(m),$$

soit égal à $l_3 > l_2$, nous obtiendrons, comme précédemment, un nombre λ_3 , dont le module est égal à l_3 , et une troisième fonction $V_3(m)$ satisfaisant à l'équation

$$V_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1) G(m, m_1) V_3(m_1) d\tau'.$$

Continuant ainsi, nous démontrerons successivement l'existence d'une suite de nombres

$$(48) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$(49) \quad V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots,$$

vérifiant les équations

$$(50) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau' \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

La suite (48) peut être, en général, *limitée* ou *illimitée*.

20. Revenons à la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation

$$(51) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m).$$

Nous avons vu (n° 48) que $V(m)$ est une fonction méromorphe en λ se représentant sous la forme suivante

$$(52) \quad V(m) = \frac{P(m)}{D(\lambda)}$$

et n'ayant que des pôles simples et réels.

Il est évident que ces pôles dépendent du choix de la fonction $f(m)$ dans l'équation (51).

En entendant dans (51) par $f(m)$ une fonction choisie d'une manière quelconque bien déterminée, désignons par

$$(53) \quad \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1k}, \dots$$

la suite de nombres représentant les pôles de la fonction correspondante $V(m)$.

Supposons que les nombres (53) soient rangés par l'ordre croissant de grandeur de leurs modules.

Chacun des nombres λ_{1k} ($k = 1, 2, \dots$) représente en même temps une racine simple de polynôme $D(\lambda)$.

Si nous posons dans (52) $\lambda = \lambda_{1k}$, la fonction $P(m)$ se réduira à une fonction $U_{1k}(m)$, bien déterminée différente de zéro et satisfaisant à l'équation

$$U_{1k}(m) = \lambda_{1k} \int p(m_1) G(m, m_1) U_{1k}(m_1) d\tau'.$$

Nous obtiendrons ainsi une suite de fonctions

$$(54) \quad U_{11}, U_{12}, U_{13}, \dots, U_{1k}, \dots$$

correspondant aux nombres (53).

Remplaçons dans (51) $f(m)$ par une autre fonction $f_1(m)$. Nous trouverons une autre suite de nombres

$$(55) \quad \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \dots, \lambda_{2k}, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$(56) \quad U_{21}, U_{22}, U_{23}, \dots, U_{2k}, \dots$$

Les suites (53) et (55) ne sont pas, en général, identiques, mais elles peuvent contenir des nombres égaux.

Il est aisé de voir qu'une seule fonction ne peut correspondre à deux nombres inégaux.

Soit, en effet, $U(m)$ une fonction correspondant à deux nombres différents λ_1 et λ_2 .

On doit avoir à la fois

$$U(m) = \lambda_1 \int p(m_1) G(m, m_1) U(m_1) d\tau',$$

$$U(m) = \lambda_2 \int p(m_1) G(m, m_1) U(m_1) d\tau',$$

ce qui est impossible, si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ (¹).

Or, à un seul nombre λ_k peuvent, en général, correspondre plusieurs fonctions, linéairement indépendantes.

Choisissant les fonctions $f(m)$ dans (51) de toutes les manières possibles, nous trouverons toutes les suites possibles de nombres

$$\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}, \dots, \lambda_{j_k}, \dots$$

et de fonctions correspondantes

$$U_{j_1}, U_{j_2}, U_{j_3}, \dots, U_{j_k}, \dots$$

Disposons tous les nombres λ par l'ordre de grandeur croissante de leurs modules et désignons ces nombres successivement par

$$(57) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

Les fonctions correspondantes U_{j_k} , nous les désignerons maintenant par

$$(58) \quad V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots;$$

j'appellerai ces fonctions $V_k(m)$ ($k=1, 2, 3, \dots$), dont nous avons établi l'existence, *fonctions FONDAMENTALES appartenant au domaine donné (D) et correspondant à la fonction GÉNÉRATRICE $G(m, m_1)$ et à la fonction CARACTÉRISTIQUE $p(m)$.*

Quant aux nombres λ_k ($k=1, 2, 3, \dots$), je les appellerai *nombres caractéristiques* pour les fonctions fondamentales $V_k(m)$ ($k=1, 2, 3, \dots$).

21. Soient V_r et V_s deux fonctions fondamentales correspondant aux nombres caractéristiques λ_r et λ_s .

Supposons que

$$(59) \quad \lambda_r \geq \lambda_s.$$

(¹) La fonction $U(m)$ n'est pas égale identiquement à zéro.

On a

$$(60) \quad V_r(m) = \lambda_r \int p(m_1) G(m, m_1) V_r(m_1) d\tau',$$

$$(60_1) \quad V_s(m) = \lambda_s \int p(m_1) G(m, m_1) V_s(m_1) d\tau'.$$

Ces égalités donnent

$$\begin{aligned} \int p(m) V_r(m) V_s(m) d\tau &= \lambda_r \int p(m) V_s(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) V_r(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= \frac{\lambda_r}{\lambda_s} \int p(m_1) V_r(m_1) V_s(m_1) d\tau' = \frac{\lambda_r}{\lambda_s} \int p(m) V_r(m) V_s(m) d\tau, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (59),

$$(61) \quad \int p(m) V_r(m) V_s(m) d\tau = 0.$$

Soit $V_r(m)$ une fonction quelconque satisfaisant à l'équation (60). Il est évident que toute fonction

$$C_r V_r(m),$$

C_r étant une constante arbitraire, satisfait à la même équation.

On peut toujours choisir C_r de façon que l'on ait

$$C_r^2 \int p(m) V_r^2(m) d\tau = 1,$$

et prendre pour les fonctions fondamentales $V_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) celles qui satisfont aux conditions

$$(62) \quad \int p(m) V_k^2(m) d\tau = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

22. Cela posé, désignons par l_k le module d'un nombre quelconque λ_k . Nous obtiendrons ainsi une suite de nombres positifs l_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) correspondant à la suite (57) de nombres λ_k ($k = 1, 2, \dots$) et satisfaisant aux conditions

$$(63) \quad l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq l_4 \leq \dots \leq l_k \leq \dots$$

La suite (57) et, par conséquent, (58) et (59) peuvent être limitées ou illimitées.

Supposons que la suite (63) soit illimitée.

Démontrons que dans ce cas les nombres l_k croissent indéfiniment avec l'indice k .

Soit

$$(64) \quad \lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \lambda_{q_3}, \dots, \lambda_{q_n},$$

q_s ($s = 1, 2, \dots, n$) étant des entiers quelconques, une suite de nombres caractéristiques.

Formons la suite correspondante de nombres positifs l_{q_s} et supposons que λ_{q_s} soient choisis de façon que l'on ait

$$(64_1) \quad l_{q_1} < l_{q_2} < l_{q_3} < \dots < l_{q_n}.$$

Formons la fonction

$$U = \alpha_1 V_{q_1} + \alpha_2 V_{q_2} + \dots + \alpha_n V_{q_n},$$

α_s ($s = 1, 2, \dots, n$) étant des constantes indéterminées, V_{q_s} ($s = 1, 2, \dots, n$) étant les fonctions fondamentales correspondant aux nombres caractéristiques (64).

Il est aisé de s'assurer, en tenant compte de (60), que U satisfait à l'équation

$$(65) \quad U(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) W(m_1) d\tau',$$

où l'on a posé

$$W(m) = \alpha_1 \lambda_1 V_{q_1}(m) + \alpha_2 \lambda_2 V_{q_2}(m) + \dots + \alpha_n \lambda_n V_{q_n}(m).$$

Appliquant à l'équation (65) les raisonnements du n° 12, nous obtiendrons l'inégalité

$$\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT < N \int p(m) W^2(m) d\tau,$$

N désignant un nombre fixe (voir n° 12).

Or, en vertu de (61) et (62),

$$\begin{aligned} \int p(m) W^2(m) d\tau &= \alpha_1^2 \lambda_{q_1}^2 + \alpha_2^2 \lambda_{q_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_{q_n}^2 \\ &= \alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 l_{q_n}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(66) \quad \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT < N (\alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 l_{q_n}^2).$$

Envisageons maintenant le rapport

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT}{\int U^2 d\tau}.$$

On a évidemment

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < K < \beta \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT}{\int p U^2 d\tau},$$

β désignant le maximum de $p(m)$ dans (D).

Par conséquent, en vertu de (66),

$$(66_1) \quad \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta \frac{\alpha_1^2 l_{q_1}^2 + \alpha_2^2 l_{q_2}^2 + \dots + \alpha_n^2 l_{q_n}^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2},$$

car, en vertu de (61) et (62),

$$\int p U^2 d\tau = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2.$$

De l'inégalité précédente on tire, en tenant compte de (64₁),

$$(67) \quad \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_{q_n}^2.$$

Cette inégalité a lieu quels que soient les nombres α_s ($s = 1, 2, \dots, n$). Prenons maintenant dans la suite (63) n premiers nombres successifs inégaux correspondant aux nombres caractéristiques λ_k inégaux.

Appliquons l'inégalité (67) à la fonction

$$U = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n,$$

V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant les fonctions fondamentales linéairement indépendantes correspondant aux nombres λ_k .

On trouve

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_n^2.$$

Or, les fonctions V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) étant linéairement indépendantes, on peut disposer les constantes α_s ($s = 1, 2, \dots, n$) de façon que l'on ait (lemme fondamental de M. H. Poincaré)

$$L_n < \frac{\int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int U^2 d\tau} < N\beta l_n^2.$$

En se rappelant que le nombre L_n tend vers l'infini en même temps que l'indice n , on en conclut *que l_n tend vers l'infini, lorsque n croît indéfiniment.*

C. Q. F. D.

23. Nous avons déjà dit (n° 20) qu'à un seul nombre caractéristique λ_k peuvent correspondre plusieurs fonctions fondamentales linéairement indépendantes.

Montrons qu'à *un seul nombre λ_k ne peut correspondre qu'un nombre fini de ces fonctions.*

Soient

$$V_{1k}, V_{2k}, V_{3k}, \dots, V_{nk}$$

n fonctions fondamentales linéairement indépendantes et correspondantes au nombre λ_k .

Il est évident que toute combinaison linéaire de fonctions fondamentales, correspondant à un nombre quelconque λ_k , représente aussi une fonction fondamentale correspondant au même nombre.

Posons

$$(68) \quad U_{sk} = \alpha_{s1}V_{1k} + \alpha_{s2}V_{2k} + \dots + \alpha_{sn}V_{nk} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

α_{sj} ($s, j = 1, 2, \dots, n$) étant des constantes.

Nous obtiendrons un groupe de n fonctions

$$(69) \quad U_{1k}, U_{2k}, \dots, U_{nk}$$

linéairement indépendantes et correspondantes au nombre λ_k .

Choisissons maintenant les constantes α_s , qui restent indéterminées, de façon que l'on ait

$$(70) \quad \int \rho U_{ks}^2 d\tau = 1, \quad \int \rho U_{ks} U_{kr} d\tau = 0 \quad \text{pour } s \neq r,$$

ce qui est toujours possible; il suffit de supposer, en effet, que la transformation linéaire (68) représente une transformation linéaire orthogonale.

Prenons les fonctions (69) ainsi définies pour les fonctions fondamentales correspondant au nombre λ_k ; posons, comme au numéro précédent,

$$U = \alpha_1 U_{1k} + \alpha_2 U_{2k} + \dots + \alpha_n U_{nk},$$

α_k étant des constantes arbitraires, et appliquons à la fonction U l'inégalité (66₁), ce qui est évidemment possible, en vertu de (70).

En remarquant que dans le cas considéré

$$l_{q_1} = l_{q_2} = \dots = l_{q_k} = l_k,$$

on retrouve, comme au numéro précédent,

$$(71) \quad L_n < N\beta l_k.$$

Supposons que le nombre λ_k se trouve dans un intervalle quelconque $(-A, +A)$, A étant un nombre positif, donné à l'avance. On a

$$(72) \quad l_k < A.$$

Si le nombre des fonctions fondamentales correspondant au nombre λ_k était infini, nous pourrions choisir le nombre n de façon que l'on ait

$$L_n > AN\beta,$$

c'est-à-dire, en vertu de (71),

$$l_k > A,$$

ce qui est impossible, car, d'après l'hypothèse faite, l_k est plus petit que A .

Donc, le nombre n ne surpasse pas une certaine limite fixe.

C. Q. F. D.

M. H. Poincaré a montré que (*Rendiconti di Palermo*, 1894)

$$L_n > an^{\frac{2}{3}},$$

a étant une constante positive, ne dépendant pas de n .

On a donc, eu égard à (71) et (72),

$$an^{\frac{2}{3}} < N\beta A,$$

d'où

$$n < \left(\frac{N\beta A}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il s'ensuit que le nombre des fonctions fondamentales linéairement indépendantes correspondant à un nombre caractéristique dont le module est plus petit que A reste inférieur à

$$E \left(\frac{N\beta A}{a} \right)^{\frac{3}{2}},$$

E désignant le plus grand nombre entier contenu dans le nombre

$$\left(\frac{N\beta A}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

24. Désignons maintenant par q_k le nombre des fonctions fondamentales

linéairement indépendantes correspondant au nombre λ_k ($k = 1, 2, \dots$), par

$$V_{k1}, V_{k2}, V_{k3}, \dots, V_{kq_k}$$

la suite de ces fonctions, en les choisissant de façon que l'on ait (n° 23)

$$\int p V_{ks}^2 d\tau = 1, \quad \int p V_{kr} V_{ks} d\tau = 0 \quad \text{pour } r \geq s \quad (s = 1, 2, \dots, q_k).$$

On obtient ainsi une suite de nombres

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

et une suite de groupes des fonctions fondamentales

$$(73) \quad (V_{11}, V_{12}, \dots, V_{1q_1}), \quad (V_{21}, V_{22}, \dots, V_{2q_2}), \quad \dots, \quad (V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{kq_k}), \quad \dots$$

satisfaisant aux conditions

$$\int p V_{rs}^2 d\tau = 1$$

et

$$\int p V_{sq} V_{rp} d\tau = 0,$$

dont la dernière a lieu toujours, pourvu que

$$r \geq s.$$

Nous pouvons maintenant échanger les notations de la manière suivante :

Désignons les fonctions (73) successivement par la lettre V avec un seul indice k , en donnant à k consécutivement toutes les valeurs entières à partir de $k = 1$, et faisons correspondre une seule fonction fondamentale V_k à chaque nombre caractéristique λ_k .

Employant ces notations nous pouvons énoncer ce théorème général, qui résulte immédiatement des recherches précédentes :

THÉORÈME. — *Toute surface fermée (S) jouissant des propriétés 1°, 2° et 3° du n° 1 donne lieu à une suite de nombres*

$$(74) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

dont les modules l_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) satisfont aux conditions

$$(74_1) \quad l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots \leq l_k \leq \dots,$$

et de fonctions correspondantes

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots,$$

linéairement indépendantes et satisfaisant aux conditions

$$(75) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

$$(76) \quad \int p(m) V_k^2(m) d\tau = 1,$$

$$(77) \quad \int p(m) V_r(m) V_s(m) d\tau = 0 \quad \text{pour } r \neq s,$$

où $p(m)$ et $G(m, m_1)$ sont des fonctions données satisfaisant aux conditions du théorème du n° 18.

Certains d'entre les nombres λ_k , pris successivement dans la suite (74), peuvent être égaux les uns aux autres; les groupes de ces nombres égaux se séparent par des nombres inégaux, les modules de ces nombres satisfont aux conditions (74₁), où, entre deux nombres inégaux ne peut se trouver aucun nombre intermédiaire représentant le module d'un nombre caractéristique, auquel pourrait correspondre une fonction fondamentale différente de zéro.

La suite (74) peut être limitée ou illimitée; dans le second cas les nombres λ_k croissent indéfiniment, lorsque l'indice k tend vers l'infini.

Remarquons enfin que les fonctions V_k , quelles que soient les fonctions données $p(m)$ et $G(m, m_1)$ (jouissant des propriétés indiquées plus haut), restent continues avec les dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur du domaine donné (D).

REMARQUE SUR LE CALCUL DES FONCTIONS FONDAMENTALES
ET DES NOMBRES CARACTÉRISTIQUES, LORSQUE CES DERNIERS SONT TOUS POSITIFS.

23. Soit $\varphi(m)$ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans le domaine (D).

Envisageons l'intégrale

$$K = \int p(m) \varphi(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right) d\tau,$$

où $G(m, m_1)$ désigne une fonction génératrice ayant les propriétés indiquées plus haut.

L'intégrale K représente une constante qui peut être positive ou négative, selon le choix des fonctions $\varphi(m)$ et $G(m, m_1)$.

Supposons que la fonction $G(m, m_1)$ jouisse de la propriété suivante :

L'intégrale K reste toujours positive indépendamment du choix de la fonction $\varphi(m)$.

Il est aisé de voir que *les nombres caractéristiques des fonctions fondamentales V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) correspondant à la fonction génératrice $G(m, m_1)$, qui satisfait à la condition tout à l'heure énoncée, sont tous positifs.*

Posant, en effet, dans K ,

$$\varphi(m) = V_k(m),$$

on trouve, eu égard à (75) et (76),

$$K = \int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau' \right) d\tau = \frac{1}{\lambda_k},$$

d'où, en vertu de l'hypothèse faite sur K ,

$$\lambda_k > 0,$$

quel que soit l'indice k .

Nous verrons plus loin que, dans la plupart des applications, les fonctions fondamentales appartiennent à une classe de fonctions n'admettant que des nombres caractéristiques positifs et méritent, par conséquent, une attention particulière.

Dans ce cas, nous pouvons indiquer une méthode générale pour calcul approché des fonctions fondamentales V_k et des nombres caractéristiques λ_k , qui peut être considérée en même temps comme une méthode de la démonstration de l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une fonction génératrice $G(m, m_1)$ satisfaisant à la condition

$$(78) \quad \int p(m) \varphi(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right) d\tau > 0,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

26. Revenons à la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (4).

Nous avons vu que $V(m)$ reste holomorphe en λ , pourvu que $|\lambda|$ ne surpasse pas une certaine limite que nous désignerons maintenant par λ_1 ; elle est, en général, une fonction méromorphe du paramètre λ , n'ayant que des pôles réels;

ces pôles représentent les nombres caractéristiques des fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $G(m, m_1)$ qui figure dans l'équation (4).

Si la fonction $G(m, m_1)$ satisfait à la condition (78), tous les nombres caractéristiques sont positifs et, par suite, tous les pôles de la fonction $V(m)$ sont aussi positifs.

Supposons que λ_1 est le plus petit des pôles de la fonction $V(m)$ et désignons par $V'(m)$ le résidu correspondant.

On sait que $V'(m)$ est une fonction du point m vérifiant l'équation

$$(79) \quad V'(m) = \lambda_1 \int p(m_1) G(m, m_1) V'(m_1) d\tau'.$$

Posons

$$(80) \quad V_1 = CV',$$

C désignant une constante, et choisissons C de façon que l'on ait

$$(81) \quad \int p V_1^2 d\tau = C^2 \int p V'^2 d\tau = 1.$$

En se rappelant que λ_1 est un pôle simple de la fonction $V(m)$, on peut poser

$$(82) \quad V = \frac{P'}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} = \frac{P}{D(\lambda)},$$

où P' est une fonction holomorphe en λ pour toutes les valeurs de λ dont le module ne surpasse pas un certain nombre λ_2 , plus grand que λ_1 .

L'égalité précédente donne

$$P' = \frac{P}{\lambda_1} \frac{\lambda_1 - \lambda}{D(\lambda)}.$$

Désignons par $P'(\lambda_1)$ et $P(\lambda_1)$ les valeurs de P' et P pour $\lambda = \lambda_1$. Supposons que λ tende vers λ_1 et passons à la limite; on trouve

$$(83) \quad P'(\lambda_1) = \frac{P(\lambda_1)}{\lambda_1} K = \frac{V_1}{C\lambda_1} K,$$

où l'on a posé

$$(84) \quad K = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{\lambda_1 - \lambda}{D(\lambda)}.$$

Reprenons l'équation (37) du n° 16 :

$$P(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) P(m_1) d\tau' + D(\lambda) f(m).$$

On en tire, eu égard à (79) [si l'on y remplace $V'(m)$ par $V_1(m)$],

$$\begin{aligned} & \int p(m) V_1(m) P(m) d\tau \\ &= \lambda \int p(m) V_1(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) P(m_1) d\tau' \right) d\tau + D(\lambda) \int f(m) p(m) V_1(m) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \int p(m_1) P(m_1) V_1(m_1) d\tau' + D(\lambda) A_k, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A_k = \int p(m) f(m) V_1(m) d\tau.$$

Supposant que λ tend vers λ_1 et en passant à la limite, on trouve, eu égard à (80), (81) et (84),

$$K = C \lambda_1 A_k,$$

car $P(m)$ se réduit à $V'(m)$ pour $\lambda = \lambda_1$.

On a donc, en vertu de (83),

$$(85) \quad P'(\lambda_1) = A_1 V_1.$$

27. La fonction $P'(\lambda)$ se représente, pour les valeurs de λ dont le module ne surpasse pas λ_2 , sous la forme de la série

$$(86) \quad P' = P_0 + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \dots + \lambda^k P_k + \dots,$$

P_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) étant des fonctions du point m .

Substituant cette expression de P' dans (82), il viendra

$$V = P_0 + \lambda \left(P_1 + \frac{P_0}{\lambda_1} \right) + \lambda^2 \left(P_2 + \frac{P_1}{\lambda_1} + \frac{P_0}{\lambda_1^2} \right) + \dots + \lambda^k \left(P_k + \frac{P_{k-1}}{\lambda_1} + \dots + \frac{P_0}{\lambda_1^k} \right) + \dots$$

La série du second membre converge uniformément dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lambda_1.$$

La comparaison de ce développement avec (5) donne

$$v_0 = P_0,$$

$$v_k = P_k + \frac{P_{k-1}}{\lambda_1} + \dots + \frac{P_0}{\lambda_1^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

d'où

$$(87) \quad P_k = v_k - \frac{v_{k-1}}{\lambda_1},$$

l'équation qui restera vraie pour toutes les valeurs de l'indice k , à partir de $k = 0$, si nous supposons que

$$v_{-1} = 0.$$

Les fonctions v_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) sont connues [voir les égalités (6) et (6₁)].

Quant au nombre λ_1 , on peut le considérer aussi comme connu, car

$$(88) \quad \lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\int p v_k^2 d\tau}}{\sqrt{\int p v_{k+1}^2 d\tau}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}}.$$

Les relations (87) déterminent successivement les fonctions P_k .

Posant dans (86) $\lambda = \lambda_1$, on trouve l'expression de $P'(\lambda_1)$ sous la forme de la série

$$P'(\lambda_1) = P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_1^2 P_2 + \dots + \lambda_1^k P_k + \dots,$$

où tous les éléments sont connus.

Substituant dans $P'(\lambda_1)$ les expressions de P_k (87) et en tenant compte de (85), on obtient

$$P'(\lambda_1) = A_1 V_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \left(v_k - \frac{v_{k-1}}{\lambda_1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k v_k,$$

l'expression analytique de la fonction

$$U_1(m) = A_1 V_1$$

vérifiant l'équation

$$(89) \quad U_1(m) = \lambda_1 \int p(m_1) G(m, m_1) U_1(m_1) d\tau'.$$

Nous avons ainsi trouvé le premier nombre caractéristique $\lambda_1 > 0$ et la fonction fondamentale correspondante $U_1(m)$ [les formules (88) et (89)].

28. On peut poser maintenant, en tenant compte de (82) et (85)

$$V = \frac{A_1 V_1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \dots + \lambda^k Q_k + \dots,$$

où la série du second membre converge uniformément dans (D), pourvu que $|\lambda|$ soit plus petit qu'un nombre positif λ_2 , plus grand que λ_1 .

La comparaison du développement, qui résulte de cette dernière expression

de V , avec (5) donne

$$Q_k = v_k - \frac{A_1 V_1}{\lambda_1^k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

De cette égalité on tire, eu égard à (6₁) et (7₉) [où il faut remplacer $V'(m)$ par $V_1(m)$],

$$\begin{aligned} & \int p(m_1) G(m, m_1) Q_k(m_1) d\tau' \\ &= \int p(m_1) G(m, m_1) v_k(m_1) d\tau' \\ & \quad - \frac{A_1}{\lambda_1^k} \int p(m_1) G(m, m_1) V_1(m_1) d\tau' = v_{k+1} - \frac{A_1 V_1}{\lambda_1^{k+1}} = Q_{k+1}. \end{aligned}$$

On en conclut que la série

$$(90) \quad Q = Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \dots + \lambda^k Q_k + \dots$$

représente une fonction du point m vérifiant l'équation

$$(91) \quad \begin{aligned} Q(m) &= \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) Q(m_1) d\tau' + Q_0 \\ &= \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) Q(m_1) d\tau' + f(m) - A_1 V_1(m), \end{aligned}$$

car

$$Q_0 = v_0 - A_1 V_1, \quad v_0 = f.$$

29. Désignons maintenant par J'_k l'intégrale

$$J'_k = \int p(m) Q_k^2(m) d\tau.$$

Appliquant à l'équation (91) les raisonnements des nos 5-18, on s'assure, comme précédemment, que la série (90) converge absolument et uniformément dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}} = \lambda_2,$$

et que $\lambda_2 (> \lambda_1)$ est un pôle simple de la fonction Q ; le résidu correspondant à ce pôle est égal à

$$A_2 V_2,$$

où

$$(92) \quad A_2 = \int p(m) [f(m) - A_1 V_1(m)] V_2(m) d\tau,$$

V_2 est une fonction différente de zéro et vérifiant l'équation

$$(93) \quad V_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1) G(m, m_1) V_2(m_1) d\tau',$$

jointe à la condition

$$\int p(m) V_2^2(m) d\tau = 1.$$

L'équation

$$(94) \quad \lambda_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}}$$

détermine un second nombre caractéristique $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, auquel correspond une fonction fondamentale $V_2(m)$.

Les équations (79) et (93) fournissent la relation suivante

$$\int p(m) V_1(m) V_2(m) d\tau = 0,$$

et l'égalité (92) se réduit à

$$A_2 = \int p(m) f(m) V_2(m) d\tau.$$

30. Formons maintenant une expression analytique de la fonction fondamentale correspondant au nombre caractéristique λ_2 .

Posons, comme au n° 26,

$$Q = \frac{P''}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}},$$

où

$$(95) \quad P'' = P'_0 + \lambda P'_1 + \lambda^2 P'_2 + \dots + \lambda^k P'_k + \dots$$

est une série absolument et uniformément convergente dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lambda_3 > \lambda_2.$$

On trouve, en répétant les raisonnements du n° 27,

$$(96) \quad P'_k = Q_k - \frac{Q_{k-1}}{\lambda_2}, \quad Q_{-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Si l'on pose

$$\lambda = \lambda_2,$$

on aura

$$P''(\lambda_2) = A_2 V_2$$

et, en vertu de (95) et (96),

$$U_2 = A_2 V_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k \left(Q_k - \frac{Q_{k-1}}{\lambda_2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_2^k Q_k,$$

où Q_k et λ_2 sont connus.

On obtient ainsi une expression analytique de la fonction $U_2(m)$ satisfaisant à l'équation

$$U_2(m) = \lambda_2 \int p(m_1) G(m, m_1) U_2(m_1) d\tau',$$

c'est-à-dire de la fonction fondamentale correspondant au nombre λ_2 , défini par l'équation (94).

31. Posons ensuite

$$Q = \frac{A_2 V_2}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}} + Q'_0 + \lambda Q'_1 + \lambda^2 Q'_2 + \dots$$

Répétant presque textuellement les raisonnements précédents, on trouve

$$Q'_k = Q_k - \frac{A_2 V_2}{\lambda_2^k}.$$

Ces équations déterminent successivement les fonctions Q'_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), car Q_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), $A_2 V_2$ et λ_2 sont déjà connus.

Si nous posons

$$J'_k = \int p(m) [Q'_k(m)]^2 d\tau,$$

nous obtiendrons un troisième nombre positif

$$(97) \quad \lambda_3 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J'_k}}{\sqrt{J'_{k+1}}} > \lambda_2,$$

qui représentera un pôle simple de la fonction

$$Q' = \frac{P'''}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_3}},$$

où P''' est une fonction qui se réduit pour $\lambda = \lambda_3$ à une fonction $U_3(m)$ vérifiant

l'équation

$$U_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1) G(m, m_1) U_3(m_1) d\tau'.$$

Donc, $U_3(m)$ est une fonction fondamentale correspondant au nombre caractéristique λ_3 .

La fonction P''' se représente sous la forme de la série

$$P''' = P''_0 + \lambda P''_1 + \lambda^2 P''_2 + \dots + \lambda^k P''_k + \dots,$$

absolument et uniformément convergente dans (D), pourvu que

$$|\lambda| < \lambda_k > \lambda_3.$$

Les fonctions P''_k s'expriment à l'aide des fonctions connues Q'_k comme il suit :

$$P''_k = Q'_k - \frac{Q'_{k-1}}{\lambda_3}, \quad Q'_{-1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

La fonction U_3 se représente sous la forme suivante

$$(98) \quad U_3 = A_3 V_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_3^k \left(Q'_k - \frac{Q'_{k-1}}{\lambda_3} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_3^k Q'_k,$$

où

$$A_3 = \int p f V_3 d\tau,$$

V_3 étant une fonction vérifiant l'équation

$$V_3(m) = \lambda_3 \int p(m_1) G(m, m_1) V_3(m_1) d\tau',$$

jointe à la condition

$$\int p V_3^2 d\tau = 1.$$

L'égalité (97) détermine un troisième nombre caractéristique λ_3 ; l'égalité (98) donne une expression analytique d'une troisième fonction fondamentale correspondant au nombre λ_3 .

En continuant ainsi nous déterminerons successivement une suite de nombres positifs

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots,$$

et de fonctions fondamentales correspondantes

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots$$

vérifiant les équations

$$U_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) U_k(m_1) d\tau' \quad (1).$$

32. Les expressions analytiques des fonctions $U_k(m)$ étant trouvées, il est aisé de déterminer les fonctions $V_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) satisfaisant aux conditions

$$(99) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

$$(100) \quad \int p(m) V_k^2(m) d\tau = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Pour cela, il suffit, évidemment, de calculer les constantes

$$A_k = \int p f V_k d\tau.$$

Remarquant que la série

$$U_k = A_k V_k = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) = \sum_{s=0}^n \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) + r_n,$$

$Q_s^{(k-2)}$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) étant des fonctions connues, converge uniformément, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$(101) \quad |r_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq \nu,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

De l'égalité

$$A_k V_k = U_k = \sum_{s=0}^n \lambda_k^s \left(Q_s^{(k-2)} - \frac{Q_{s-1}^{(k-2)}}{\lambda_k} \right) + r_n = \lambda_k^n Q_n^{(k-2)} + r_n,$$

on tire, eu égard à (100),

$$(102) \quad A_k^2 = \lambda_k^{2n} \int p [Q_n^{(k-2)}]^2 d\tau + 2\lambda_k^n \int p r_n Q_n^{(k-2)} d\tau + \int p r_n^2 d\tau.$$

Posons

$$J_n^{(k-1)} = \int p [Q_n^{(k-2)}]^2 d\tau, \quad \rho_n = \int p r_n^2 d\tau + 2\lambda_k^n \int p r_n Q_n^{(k-2)} d\tau.$$

L'égalité (102) se réduit à

$$A_k^2 = \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)} + \rho_n.$$

(1) Voir E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 125.

Supposons que n croisse indéfiniment et passons à la limite; on trouve

$$A_k^2 = \lim_{n=\infty} \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)} + \lim_{n=\infty} \rho_n.$$

Or,

$$|\rho_n| < \int pr_n^2 d\tau + 2\lambda_k^n \sqrt{\int pr_n^2 d\tau} \sqrt{J_n^{(k-1)}} = \sqrt{\int pr_n^2 d\tau} \left(2\lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}} + \sqrt{\int pr_n^2 d\tau} \right).$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{J_1^{(k-1)}}{J_0^{(k-1)}} < \frac{J_2^{(k-1)}}{J_1^{(k-1)}} < \dots < \frac{J_n^{(k-1)}}{J_{n-1}^{(k-1)}} < \dots \leq \frac{1}{\lambda_k^2},$$

$$\lambda_k = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{J_n^{(k-1)}}}{\sqrt{J_{n+1}^{(k-1)}}}.$$

On a donc

$$\lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}} < \sqrt{J_0^{(k-1)}}.$$

Par conséquent,

$$|\rho_n| < A \sqrt{\int pr_n^2 d\tau},$$

A étant un nombre fixe ne dépendant pas de n .

Or, en vertu de (101),

$$\int pr_n^2 d\tau < \varepsilon^2 \int p d\tau \quad \text{pour } n \gg \nu,$$

d'où l'on conclut que

$$\lim_{n=\infty} \int pr_n^2 d\tau = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = 0$$

et

$$A_k^2 = \lim_{n=\infty} \lambda_k^{2n} J_n^{(k-1)}.$$

On peut donc écrire

$$A_k = \pm \lim_{n=\infty} \lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}}.$$

D'autre part,

$$U_k = A_k V_k = \lim_{n=\infty} \lambda_k^n Q_n^{(k-1)}.$$

On trouve donc

$$V_k = \frac{U_k}{A_k} = \pm \frac{\lim_{n=\infty} \lambda_k^n Q_n^{(k-1)}}{\lim_{n=\infty} \lambda_k^n \sqrt{J_n^{(k-1)}}} = \pm \lim_{n=\infty} \frac{Q_n^{(k-1)}}{\sqrt{J_n^{(k-1)}}}.$$

On peut prendre à volonté le signe + ou —, car la fonction $-V_k$ satisfait aux mêmes conditions (99) et (100) que la fonction $+V_k$.

CHAPITRE II.

CERTAINES ÉGALITÉS GÉNÉRALES COMMUNES À TOUTES LES FONCTIONS FONDAIMENTALES.

1. Revenons au cas général, où les nombres caractéristiques correspondant au domaine donné (D) et aux fonctions données $p(m)$ et $G(m, m_1)$ peuvent être aussi bien négatifs que positifs.

Nous désignerons tous les nombres caractéristiques successivement par

$$(1) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots,$$

et nous supposons, dans ce qui va suivre, qu'ils soient arrangés de façon que l'on ait

$$l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots \leq l_k \leq \dots,$$

l_k désignant la valeur numérique du nombre λ_k .

Les fonctions fondamentales correspondant aux nombres λ_k , nous les désignons, comme précédemment, par $V_k(m)$ (ou simplement V_k) ($k = 1, 2, 3, \dots$) en supposant toujours qu'elles satisfassent aux conditions

$$\int p(m) V_k^2(m) d\tau = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

2. Supposons que la fonction $f(m)$ dans l'équation

$$(2) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m)$$

satisfasse à la condition

$$(3) \quad \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau = 0.$$

L'équation (2) donne, eu égard à (75) (Chapitre précédent),

$$\begin{aligned} \int p(m) V(m) V_k(m) d\tau &= \lambda \int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_k} \int p(m_1) V(m_1) V_k(m_1) d\tau' \end{aligned}$$

ou

$$(\lambda_k - \lambda) \int p(m) V(m) V_k(m) d\tau = 0,$$

et, en vertu de (32) (Chapitre I, n° 15),

$$\frac{\lambda - \lambda_k}{D(\lambda)} \int p(m) V_k(m) P(m) d\tau = 0.$$

Supposant que λ tend vers λ_k et en passant à la limite, on trouve, en se rappelant que $P(m)$ se réduit à $V_k(m)$ pour $\lambda = \lambda_k$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{\lambda - \lambda_k}{D(\lambda)} \int p(m) V_k^2(m) d\tau = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc λ_k est un point simple de la fonction $V(m)$, si $f(m)$ satisfait à la condition (3).

3. Supposons que $f(m)$ satisfasse à n conditions

$$(4) \quad \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

V_k étant les fonctions fondamentales correspondant aux nombres (1).

Le théorème du numéro précédent montre que dans le cas considéré tous les points λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) sont les points simples de la fonction $V(m)$. Il s'ensuit que la fonction $V(m)$ ne peut admettre aucun pôle dont le module est plus petit ou égal à l_k .

Donc, si la fonction $f(m)$ satisfait à n conditions (4), la fonction $V(m)$ reste holomorphe en λ , pourvu que $|\lambda| < l_{n+1}$.

4. Désignons par $\varphi(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D), et posons

$$(5) \quad \varphi(m) = A_1 V_1(m) + A_2 V_2(m) + \dots + A_n V_n(m) + R_n,$$

où n est un entier,

$$A_k = \int p(m) \varphi(m) V_k(m) d\tau \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

L'égalité (5) donne, en vertu de (76) et (77) (Chapitre I, n° 24),

$$S_n = \int p(m) R_n^2(m) d\tau = \int p(m) \varphi^2(m) d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \dots - A_n^2.$$

On en conclut que S_n décroît, lorsque n croît indéfiniment et que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

converge toujours, pourvu que la fonction $\varphi(m)$ reste bornée et intégrable dans (D).

5. Envisageons maintenant l'équation suivante :

$$(6) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + R_n.$$

Il est aisé de s'assurer que R_n satisfait à n conditions,

$$(6_1) \quad \int p(m) R_n(m) V_k(m) d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

On en conclut, en tenant compte du théorème du n° 3, que le plus petit des modules des pôles de la fonction $V(m)$, satisfaisant à l'équation (6), est plus grand ou égal à l_{n+1} .

Par conséquent (Chapitre I, n° 10),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}} \geq l_{n+1}.$$

On en tire, eu égard à (11) (Chapitre I, n° 7),

$$(7) \quad \frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1},$$

où

$$(8) \quad J_0 = \int p(m) v_0^2(m) d\tau = \int p(m) R_n^2(m) d\tau,$$

$$(9) \quad J_1 = \int p(m) v_1^2(m) d\tau = \int p(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) R_n(m_1) d\tau' \right)^2 d\tau.$$

6. Supposons d'abord que la suite de nombres caractéristiques soit limitée et contienne n nombres.

Dans ce cas, la fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (6) sera holomorphe dans le plan de la variable λ tout entier, ce qui donne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{J_k}}{\sqrt{J_{k+1}}} = \infty$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} = \infty.$$

Il s'ensuit que

$$J_1 = \int p(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) R_n(m_1) d\tau' \right)^2 d\tau = 0,$$

car J_0 ne surpasse pas une certaine limite fixe.

Posons

$$(10) \quad T_n(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) R_n(m_1) d\tau'.$$

Il est évident que $T_n(m)$ reste continue dans (D).

Par conséquent,

$$T_n(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) R_n(m_1) d\tau' = 0$$

dans (D).

Or,

$$R_n(m) = \varphi(m) - A_1 V_1(m) - A_2 V_2(m) - \dots - A_n V_n(m).$$

On a donc, eu égard à (75) du Chapitre précédent,

$$\int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau = \frac{A_1}{\lambda_1} V_1(m) + \frac{A_2}{\lambda_2} V_2(m) + \dots + \frac{A_n}{\lambda_n} V_n(m).$$

Cette égalité a lieu, quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ bornée et intégrable dans (D).

Le résultat analogue est indiqué aussi par M. D. Hilbert dans son Mémoire récent : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (*Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Heft I, 1904).

7. Soit m_1 un point quelconque du domaine (D).

Décrivons autour de m , comme centre, une sphère (σ) de rayon ρ assez petit, et posons

$$\varphi(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de } (\sigma),$$

$$\varphi(m) = \frac{1}{p(m)} \quad \text{à l'intérieur de } (\sigma).$$

Désignant par $d\tau_0$ l'élément de volume de (σ) , on trouve

$$\int G(m, m_1) d\tau_0 = \frac{V_1(m)}{\lambda_1} \int V_1(m_1) d\tau_0 \\ + \frac{V_2(m)}{\lambda_2} \int V_2(m_1) d\tau_0 + \dots + \frac{V_n(m)}{\lambda_n} \int V_n(m_1) d\tau_0.$$

Cette égalité a lieu quelque petit que soit ρ .

On en conclut, en se rappelant que $G(m, m_1)$ et $V_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) restent continues dans (D) , que

$$G(m, m_1) = \frac{V_1(m) V_1(m_1)}{\lambda_1} + \frac{V_2(m) V_2(m_1)}{\lambda_2} + \dots + \frac{V_n(m) V_n(m_1)}{\lambda_n},$$

condition nécessaire, à laquelle doit satisfaire la fonction génératrice pour que la suite de nombres caractéristiques, appartenant au domaine donné (D) , soit limitée ⁽¹⁾.

8. Passons maintenant au cas le plus intéressant, où la suite de nombres caractéristiques est illimitée.

L'inégalité (7) a lieu toujours, quel que soit le nombre n .

Supposons que n croisse indéfiniment et passons à la limite.

En se rappelant que l_{n+1} tend vers l'infini et que J_0 ne surpasse pas une certaine limite fixe, lorsque n croît indéfiniment, on obtient

$$\lim_{n=\infty} J_1 = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu de (9) et (10),

$$(11) \quad \lim_{n=\infty} \int \rho(m) T_n^2 d\tau = 0.$$

Remarquons que cette égalité représente une simple généralisation d'une égalité analogue que j'ai établie, dans un Article inséré, il y a 8 ans, dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkow* (en 1896) ⁽²⁾, par une méthode tout à fait identique à celle que je viens d'exposer.

Remplaçons maintenant dans (5) m par m_1 , multiplions le résultat par

⁽¹⁾ Voir M. D. HILBERT, *loc. cit.*, p. 72.

⁽²⁾ W. STEKLOFF, *Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques* [*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1896 (en russe)].

$p(m_1) G(m, m_1) d\tau'$ et intégrons; il viendra, en vertu de (99),

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau = \frac{A_1}{\lambda_1} V_1(m) + \frac{A_2}{\lambda_2} V_2(m) + \dots + \frac{A_n}{\lambda_n} V_n(m) + T_n,$$

d'où l'on tire aisément, eu égard à (6₁) et (10),

$$\int p(m) f^2(m) d\tau = \frac{A_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{A_2^2}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{A_n^2}{\lambda_n^2} + \int p(m) T_n^2 d\tau,$$

et, en vertu de (11),

$$\int p(m) f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{\lambda_k^2}.$$

Posons

$$B_k = \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau.$$

De l'égalité

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

on tire

$$B_k = \frac{A_k}{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Par conséquent,

$$\int p(m) f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \quad B_k = \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau,$$

ce qui exprime le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ se représentant à l'intérieur de (D) sous la forme de l'intégrale

$$(12) \quad f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

φ étant une fonction bornée et intégrable, on a toujours, pour toutes les fonctions fondamentales, le développement suivant :

$$\int p(m) f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \quad B_k = \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau.$$

9. Dans une Note, insérée aux *Comptes rendus* du 4 juillet 1904, j'ai énoncé un théorème plus général; or, il est aisé de remarquer que j'y ai fait une hypothèse particulière sur la fonction génératrice $G(m, m_1)$, comme le montre la méthode

même de la démonstration. J'ai choisi, en effet, de toutes les fonctions fondamentales celles qui correspondent à un groupe de fonctions génératrices satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La fonction $H(m, m_1)$, qui figure dans l'expression (3) (Chapitre I) de $G(m, m_1)$, reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation de Laplace à l'extérieur de (S).

2° La constante μ , dans l'expression de $G(m, m_1)$, satisfait à l'inégalité

$$4\pi\mu > L\sqrt{\frac{D\beta}{\alpha}}.$$

Nous allons établir, dans ce qui va suivre, certaines propositions plus générales, en employant une autre méthode de la démonstration, un peu plus simple.

Il faut remarquer, en général, qu'à tout groupe de fonctions génératrices, satisfaisant à telles ou telles conditions particulières, correspond un groupe de fonctions $f(m)$ dont chacune peut se représenter sous la forme de l'intégrale (12).

Ce groupe se caractérise par certaines conditions, auxquelles doit satisfaire chaque fonction $f(m)$, appartenant au groupe considéré, pour que l'équation (12) soit satisfaite.

On peut partager ces conditions, en général, en deux catégories : les unes, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $f(m)$ à l'intérieur du domaine (D) (conditions intérieures); les autres, auxquelles ces fonctions doivent satisfaire aux points de la surface (S) qui limite le domaine (D) (conditions aux limites).

Ces conditions peuvent se varier d'une infinité de manières, mais dans la plupart des applications les conditions intérieures supposent la continuité de la fonction primitive $f(m)$ et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre k , les conditions aux limites imposent certaines restrictions sur les valeurs de $f(m)$, ou sur celles de ces dérivées, ou donnent certaines relations entre la fonction $f(m)$ et ses dérivées pour les points de (S).

Soit maintenant $f(m)$ l'une des fonctions satisfaisant à un ensemble déterminé (a) des conditions intérieures de l'espèce tout à l'heure indiquée ainsi qu'à un ensemble analogue (b) des conditions aux limites.

Rassemblons en un seul groupe (A) toutes les fonctions $G(m, m_1)$, pour lesquelles l'égalité (12) a lieu toujours, quelle que soit la fonction $f(m)$ satisfaisant aux conditions (a) et (b).

Le théorème du n° 8 montre que l'égalité

$$(13) \quad \int p(m)f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \quad B_k = \int p(m)f(m) V_k(m) d\tau$$

a lieu toujours pour toutes les fonctions fondamentales correspondant à toute fonction génératrice $G(m, m_1)$, qui appartient au groupe (A), et pour toute fonction $f(m)$ satisfaisant aux conditions (a) et (b).

10. Prenons sur la normale n en un point quelconque p de (S) un autre point P, situé à l'intérieur de (S), et désignons par δ la distance pP .

Le lieu géométrique des points P représentera, δ étant un nombre fixe suffisamment petit, une surface fermée, parallèle à (S) et tendant vers (S), lorsque δ tend vers zéro (1).

Désignons cette surface par (S_i) , par (D_i) le domaine limité par (S_i) , par (D_1) le domaine limité par (S_i) et (S), par $d\tau_i$ l'élément de volume du domaine (D_i) , par $d\tau_0$ celui de (D_1) .

Supposons maintenant que la fonction $f(m)$, étant continue avec ses dérivées de k premiers ordres dans (D), ne satisfait pas aux conditions (b) sur (S).

Formons une autre fonction $P(m)$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) à la fois et telle qu'on ait

$$\int (f - P)^2 d\tau < \varepsilon^2,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Pour cela, il suffit de choisir $P(m)$ de façon que l'on ait

$$(14) \quad f = P + \eta \quad \text{dans} \quad (D_i),$$

où

$$(15) \quad |\eta| < \varepsilon_1 \quad \text{en tous les points de} \quad (D_i),$$

ε_1 étant un nombre positif donné à l'avance.

On a, en effet,

$$\int (f - P)^2 d\tau = \int (f - P)^2 d\tau_i + \int (f - P)^2 d\tau_0.$$

Or, en vertu de (14) et (15),

$$\int (f - P)^2 d\tau_i < \varepsilon_1^2 D_i < \varepsilon_1^2 D$$

(1) Rappelons que la surface (S) satisfait aux conditions 1^o, 2^o et 3^o du n^o 1 du Chapitre précédent.

et

$$\int (f - P)^2 d\tau_0 < M^2 \int d\tau_0 < M^2 S \delta,$$

δ désignant la grandeur de la surface (S), M le maximum de module de $(f - P)$.

Par conséquent,

$$(16) \quad \int (f - P)^2 d\tau < \varepsilon_1^2 D + M^2 S \delta = \varepsilon^2.$$

Le théorème énoncé à la fin du numéro précédent s'applique à la fonction P , car elle satisfait aux conditions (a) et (b).

On a donc

$$\int p P^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \quad B_k = \int p P V_k d\tau.$$

Écrivons cette égalité sous la forme suivante

$$\int p f^2 d\tau + 2 \int p f(P - f) d\tau + \int p (P - f)^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + C_k)^2,$$

en y posant

$$A_k = \int p f V_k d\tau, \quad C_k = \int p (P - f) V_k d\tau.$$

L'égalité précédente donne

$$(17) \quad \int p f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k - \int p (P - f)^2 d\tau - 2 \int p f (P - f) d\tau.$$

Soient maintenant

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{aligned}$$

deux suites de nombres arbitraires, n étant un entier quelconque. On a toujours

$$(18) \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2},$$

quels que soient les nombres a_k et b_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Si les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

convergent, on aura

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}.$$

Appliquons cette inégalité générale au cas de

$$a_k = A_k, \quad b_k = C_k.$$

En se rappelant que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

convergent (voir n° 4), on trouve

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k \right| < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \leq \int p f^2 d\tau, \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \int p(P-f)^2 d\tau$$

et

$$\left| \int p f(P-f) d\tau \right| \leq \left(\int p f^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int p(P-f)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc, eu égard à (16),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 &< \beta \varepsilon^2, & \left| \sum_{k=1}^{\infty} A_k C_k \right| &< \varepsilon \sqrt{\beta} \sqrt{\int p f^2 d\tau}, \\ \left| \int p f(P-f) d\tau \right| &< \varepsilon \sqrt{\beta} \sqrt{\int p f^2 d\tau}. \end{aligned}$$

Ces inégalités et l'égalité (17) montrent que

$$\left| \int p f^2 d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \right| < \varepsilon N,$$

où

$$N = \left(2\beta\varepsilon + 4\sqrt{\beta} \sqrt{\int p f^2 d\tau} \right)$$

est un nombre fini positif.

L'inégalité précédente démontre le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue avec ses dérivées jusqu'à un certain ordre k dans (D) [conditions (a) du n° 9], on a toujours

$$\int p(m) f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A) ⁽¹⁾.

11. Soit maintenant $f(m)$ une fonction quelconque qui n'est que continue dans (D).

Quelle que soit la fonction f , continue dans le domaine (D), on peut toujours construire un polynôme P tel que l'on ait pour tous les points du domaine (D)

$$|f - P| < \varepsilon_1,$$

ε_1 étant un nombre positif, donné à l'avance.

C'est le théorème connu de Weierstrass.

Le polynôme P admet les dérivées de tous les ordres dans (D), et satisfait, évidemment, à la condition

$$\int (f - P)^2 d\tau < \varepsilon_1^2 D = \varepsilon^2.$$

En répétant textuellement les raisonnements du numéro précédent en y entendant par P le polynôme, défini de la manière tout à l'heure indiquée, nous démontrerons le théorème suivant :

Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue dans (D), on a toujours

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

12. Supposons enfin que $f(m)$ n'est que bornée et intégrable dans (D).

Décomposons le domaine (D) en domaines élémentaires

$$e_1, e_2, \dots, e_q,$$

q étant un nombre entier quelconque.

(1) Compar. W. STEKLOFF, *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions, etc.* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, 1904, p. 7, etc.) (présenté le 26 novembre 1903).

Désignons par e_k ceux de ces domaines, où l'oscillation O_k de la fonction f est plus petite qu'un nombre ε , donné à l'avance, par e_i ceux où l'oscillation O_i de f surpasse ε .

Comme f est intégrable dans (D), on peut choisir une décomposition convenable telle que l'on ait

$$(18_1) \quad \sum e_i < \varepsilon,$$

la somme étant étendue à tous les éléments e_i , où l'oscillation est plus grande que ε .

Le nombre ε étant fixé d'une manière convenable, formons une fonction ψ , continue dans le domaine (D) tout entier, et telle que l'on ait, en tout point de chacun des éléments e_k ,

$$(19) \quad \psi = f + \eta,$$

où

$$(20) \quad |\eta| < \varepsilon,$$

ce qui est toujours possible.

Posons maintenant

$$(21) \quad f = \sum_{k=1}^n A_k V_k + R_n, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

$$(22) \quad \psi = \sum_{k=1}^n B_k V_k + R'_n, \quad B_k = \int p \psi V_k d\tau,$$

$$S_n = \int p R_n^2 d\tau, \quad S'_n = \int p R_n'^2 d\tau.$$

Il est aisé de voir que la fonction R_n satisfait aux conditions

$$\int p R_n V_k d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Par conséquent,

$$(23) \quad S_n = \int p f R_n d\tau.$$

Multiplions maintenant (21) par $p\psi d\tau$, (22) par $pf d\tau$, intégrons et retranchons les résultats ainsi obtenus.

On trouve

$$(24) \quad \int p \psi R_n d\tau = \int p f R_n' d\tau.$$

Désignons, d'une manière générale, par le symbole

$$\int_{e_s} \mathbf{F} d\tau$$

l'intégrale étendue au domaine e_s ($s = 1, 2, 3, \dots, q$).

On peut écrire

$$\int p\psi R_n d\tau = \sum \int_{e_k} p\psi R_n d\tau + \sum \int_{e_i} p\psi R_n d\tau,$$

d'où, en vertu de (19),

$$\begin{aligned} \int p\psi R_n d\tau &= \sum \int_{e_k} p(f + \eta) R_n d\tau + \sum \int_{e_i} p\psi R_n d\tau \\ &= \int p f R_n d\tau + \int_{e_k} p \eta R_n d\tau + \sum \int_{e_i} p(\psi - f) R_n d\tau, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (23) et (24),

$$S_n = \int p f R'_n d\tau - \sum \int_{e_k} p \eta R_n d\tau + \sum \int_{e_i} p(f - \psi) R_n d\tau.$$

Cette égalité donne

$$(25) \quad S_n \leq \left| \int p f R'_n d\tau \right| + \left| \sum \int_{e_k} p \eta R_n d\tau \right| + \left| \sum \int_{e_i} p(f - \psi) R_n d\tau \right|.$$

Or,

$$(26) \quad \left| \int p f R'_n d\tau \right| \leq Q \sqrt{S'_n},$$

où

$$Q^2 = \int p f^2 d\tau$$

est un nombre fixe, ne dépendant pas de n .

D'autre part, en vertu de (20),

$$(27) \quad \begin{aligned} \left| \sum \int_{e_k} p \eta R_n d\tau \right| &< \varepsilon \sum \int_{e_k} p |R_n| d\tau < \varepsilon \int p |R_n| d\tau \\ &< \varepsilon \sqrt{\int p d\tau} \sqrt{S_n} < \varepsilon Q \sqrt{\beta D}, \end{aligned}$$

car

$$S_n \leq \int p f^2 d\tau = Q^2.$$

Considérons enfin le dernier membre de l'inégalité (25).

On a

$$\left| \sum \int_{e_i} p(f - \psi) R_n d\tau \right| \leq \sum \left(\int_{e_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{e_i} p(f - \psi)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ < M \sum \sqrt{e_i} \left(\int_{e_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

où M désigne le maximum de $|f - \psi| \sqrt{p}$ dans le domaine (D).

Appliquant l'inégalité (18) au cas de

$$a_k = \sqrt{e_i}, \quad b_k = \left(\int_{e_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

on trouve, comme précédemment,

$$\sum \sqrt{e_i} \left(\int_{e_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\sum e_i} \left(\sum \int_{e_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < Q \sqrt{\sum e_i},$$

d'où, en tenant compte de (18₁),

$$\left| \sum \int_{e_i} p(f - \psi) R_n d\tau \right| < MQ \sqrt{\varepsilon}.$$

Cette dernière inégalité et les inégalités (25), (26) et (27) donnent

$$S_n < Q(\sqrt{S'_n} + \varepsilon \sqrt{\beta D} + M \sqrt{\varepsilon}).$$

Or, d'après l'hypothèse faite, on peut trouver un nombre ν tel que l'on ait, pour $n \geq \nu$,

$$S'_n < \varepsilon.$$

En choisissant le nombre ν de la manière indiquée, on aura

$$S_n < A \sqrt{\varepsilon} \quad \text{pour } n \geq \nu,$$

où

$$A = Q(1 + M + \sqrt{\varepsilon \beta D})$$

est un nombre fixe, ne dépendant pas de n .

On a donc nécessairement

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

quelle que soit la fonction f , bornée et intégrable dans (D) (1).

(1) Voir mon Mémoire cité plus haut (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, mars 1904, p. 9, etc.).

On peut donc énoncer ce théorème général :

THÉORÈME. — *Quelle que soit la fonction $f(m)$, bornée et intégrable dans le domaine (D), on a toujours*

$$(29) \quad \int p(m) f^2(m) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p(m) f(m) V_k(m) d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

13. Signalons encore un théorème plus général contenant comme un cas particulier le théorème que nous venons d'énoncer.

Désignons, comme précédemment (n° 10), par (D_i) un domaine quelconque intérieur à (D).

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D), soit φ une autre fonction pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés du domaine (D_i) , mais telle que les intégrales

$$\int_{D_i} p f \varphi d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi^2 d\tau,$$

étendues au domaine (D_i) , aient un sens bien déterminé.

Multiplions l'égalité (21) par $p \varphi d\tau$ et intégrons-la, en étendant l'intégration au domaine (D_i) .

On trouve

$$\int_{D_i} p f \varphi d\tau = \sum_{k=1}^n A_k B_k + \int_{D_i} p \varphi R_n d\tau,$$

où l'on a posé

$$B_k = \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Or,

$$\left| \int_{D_i} p \varphi R_n d\tau \right| \leq \left(\int_{D_i} p \varphi^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D_i} p R_n^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < Q \sqrt{S_n},$$

où

$$Q^2 = \int p \varphi^2 d\tau$$

est un nombre fixe, ne dépendant pas de n .

Supposons que l'indice n croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, eu égard à (28),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_i} p \varphi R_n d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{D_i} p \varphi f d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit f une fonction bornée et intégrable dans le domaine donné (D) , soit φ une autre fonction pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés d'un domaine (D_i) , intérieur à (D) , mais telle que les intégrales

$$\int_{D_i} p f \varphi d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi^2 d\tau$$

aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on a toujours, pour toutes les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A) , le développement

$$(29) \quad \int_{D_i} p f \varphi d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau, \quad B_k = \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau.$$

Il est évident que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k$$

converge absolument, car

$$|A_k B_k| < \frac{1}{2}(A_k^2 + B_k^2)$$

et chacune des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2$$

converge.

14. Le théorème du n° 8 et celui du n° 12 peuvent être considérés comme deux théorèmes réciproques.

Le développement (29) reste vrai pour toute fonction donnée $f(m)$ bornée et intégrable dans (D) , mais seulement pour les fonctions fondamentales satisfaisant à certaines conditions et formant un certain groupe que nous avons désigné par *groupe* (A) .

Le développement analogue du n° 8 a lieu pour toutes les fonctions fondamentales, mais seulement pour les fonctions $f(m)$ qui peuvent se représenter sous la forme de l'intégrale

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans } (D),$$

où $\varphi(m)$ est une certaine fonction du point m .

Remarquons que cette dernière condition peut être remplacée par une autre plus générale.

Il est aisé de s'assurer, en effet, que l'égalité (29) aura lieu toutes les fois qu'on pourra, la fonction $f(m)$ étant donnée, trouver une autre fonction $\varphi(m)$ telle qu'on ait

$$\int \left(f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right)^2 d\tau < \varepsilon^2,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Pour cela, il suffit de poser

$$P(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

et appliquer au cas considéré les raisonnements du n° 10.

Remarquons qu'une proposition analogue est signalée aussi par M. D. Hilbert dans sa Communication, présentée à la Société scientifique à Göttingen le 5 mars 1904 (voir son Mémoire : *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*).

Or, on voit, par ce qui précède, que ce théorème ainsi que tous les autres, établis plus haut (n° 10, etc.), ne représentent que de simples conséquences de mes recherches antérieures qui ont été présentées à l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg le 26 novembre 1903 (voir mon Mémoire : *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries des fonctions, etc.*).

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DONNÉE EN SÉRIES PROCÉDANT
SUIVANT LES FONCTIONS FONDAMENTALES.

15. Supposons que la fonction donnée $f(m)$ se représente dans (D) sous la forme de l'intégrale

$$(30) \quad f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D),}$$

où $\varphi(m)$ est une certaine fonction du point m , bornée et intégrable dans (D).

Posons

$$(31) \quad \varphi = B_1 V_1 + B_2 V_2 + \dots + B_n V_n + r_n,$$

où

$$B_k = \int p \varphi V_k d\tau \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Multiplions l'égalité (31) par $p(m_1) G(m, m_1) d\tau'$ et intégrons-la.

On trouve, eu égard à (30),

$$(32) \quad f = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_n V_n + R_n,$$

où l'on a posé

$$A_k = \int p f V_k d\tau, \quad R_n = \int p(m_1) G(m, m_1) r_n(m_1) d\tau'.$$

Or,

$$(33) \quad |R_n| = \left| \int p(m_1) G(m, m_1) r_n(m_1) d\tau' \right| \leq \sqrt{\int p G^2 d\tau'} \sqrt{\int p r_n^2 d\tau} < Q \sqrt{S_n},$$

où Q est un nombre assignable, car, d'après l'hypothèse faite, l'intégrale

$$\int p(m_1) G^2(m, m_1) d\tau'$$

ne surpasse pas un certain nombre fixe.

D'autre part, l'intégrale

$$S_n = \int p r_n^2 d\tau$$

ne surpasse pas une certaine limite fixe, ne dépendant pas du nombre n [voir n° 4].

On en conclut, en tenant compte de (32) et (33), que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

converge.

On obtient donc ce théorème :

THÉORÈME. — La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

converge pour toutes les fonctions fondamentales, pourvu que la fonction donnée f satisfasse à la condition (30).

16. Supposons maintenant que les fonctions fondamentales V_k ($k = 1, 2, \dots$) appartiennent au groupe (A) [voir n° 9], et que $f(m)$ n'est que *continue* dans (D).

On trouve, d'après le théorème du n° 12,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int p R_n^2 d\tau = 0.$$

Supposons encore que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

converge uniformément dans (D).

Dans ce cas, la fonction R_n dans (32) tend vers une fonction R , continue dans (D), lorsque n croît indéfiniment.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} \int p R_n^2 d\tau = \int p \lim_{n=\infty} R_n^2 d\tau = \int p R^2 d\tau = 0,$$

d'où

$$R = 0$$

et

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

représente le développement d'une fonction donnée $f(m)$, continue dans (D), en série procédant suivant les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A) toutes les fois qu'elle converge uniformément dans (D).

17. Supposons enfin que la fonction $f(m)$ satisfasse à l'équation (30), et reprenons l'inégalité (33) qui a lieu pour toutes les fonctions fondamentales.

Si ces fonctions appartiennent au groupe (A), on trouve, d'après le théorème du n° 12,

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} \int p r_n^2 d\tau = 0,$$

car, d'après l'hypothèse faite, φ reste bornée et intégrable dans (D).

On a donc

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k \quad \text{dans (D).}$$

Il est aisé de s'assurer que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k$$

converge uniformément dans (D).

Le théorème du n° 12 montre qu'on peut toujours assigner un nombre ν tel qu'on ait

$$S_n < \varepsilon^2 \quad \text{pour } n \geq \nu.$$

Le nombre ν étant choisi de la manière indiquée, on aura, eu égard à (32) et (33),

$$\left| f - \sum_{k=1}^n A_k V_k \right| < Q\varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{pour } n \geq \nu,$$

ε_1 étant un nombre positif donné à l'avance.

Cette inégalité démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction donnée $f(m)$ se représentant dans (D) sous la forme de l'intégrale*

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

$\varphi(m)$ étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D), se développe en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

18. Indiquons encore une propriété intéressante de toutes les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont les fonctions fondamentales appartenant au groupe (A).

Écrivons l'égalité (29₁) du n° 13 sous cette forme

$$\int_{D_i} p \varphi \left(f - \sum_{k=1}^n A_k V_k \right) d\tau = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k B_k = r'_n$$

et posons

$$\varphi = \frac{1}{p} \quad (1).$$

(1) Rappelons que p ne s'annule pas dans (D).

On aura

$$\mathbf{K} = \int_{\mathbf{D}_i} \left(f - \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k \right) d\tau = r_n,$$

où r_n désigne la valeur de r'_n pour $\varphi = \frac{1}{p}$.

D'après le théorème du n° 13, on peut toujours trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$(34) \quad |\mathbf{K}| < \varepsilon \mathbf{D}_i,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance, \mathbf{D}_i désignant le volume du domaine (\mathbf{D}_i) .

Remarquons que cette inégalité a lieu, quel que soit le domaine (\mathbf{D}_i) , intérieur au domaine donné (\mathbf{D}) .

Supposons que la fonction $f(m)$ reste continue dans (\mathbf{D}) ; la fonction

$$\psi = f - \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k$$

le sera aussi.

D'après le théorème de la moyenne, on peut trouver un point m , intérieur au domaine (\mathbf{D}_i) ⁽¹⁾, tel qu'on ait

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_i \left(f(m) - \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k(m) \right).$$

On aura donc, eu égard à (34),

$$\left| f(m) - \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k(m) \right| < \varepsilon,$$

ce qui nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans tout domaine (\mathbf{D}_i) , intérieur au domaine donné (\mathbf{D}) , il existe au moins un point m , où la série*

$$\sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{A}_k \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{A}_k = \int p f \mathbf{V}_k d\tau,$$

ν étant un entier convenablement choisi, \mathbf{V}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant les fonctions fondamentales appartenant au groupe (\mathbf{A}) , représente la valeur de la fonction f en ce point avec l'approximation donnée à l'avance ε , pourvu que la fonction donnée f reste continue dans le domaine (\mathbf{D}_i) .

(1) Remarquons que la position du point m dépend, en général, du choix du nombre ν .

APPLICATION DES RÉSULTATS OBTENUS A LA SOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS
FONCTIONNELLES.

19. Nous avons vu que l'équation

$$(35) \quad f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

joue un rôle important dans le problème du développement d'une fonction donnée en série des fonctions fondamentales.

Il importe donc de résoudre le problème suivant :

Les fonctions $f(m)$, $p(m)$ et $G(m, m_1)$ étant données, trouver la fonction $\varphi(m)$ vérifiant l'équation (35).

C'est un problème très délicat que nous ne pouvons pas résoudre dans toute sa généralité ⁽¹⁾, mais nous pouvons en donner une solution complète dans certains cas particuliers.

Je me permets d'indiquer, dans ce qui va suivre, quelques exemples les plus intéressants.

Il faut remarquer que ce problème a été déjà traité par M. Volterra en 1896 ⁽¹⁾; malheureusement, le Mémoire de M. Volterra ne faisant pas partie de la bibliothèque de notre Université, j'ignore l'analyse et les résultats obtenus par ce savant italien.

20. Soit $f(m)$ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D).

Considérons la fonction

$$(36) \quad u(m) = f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

où

$$(37) \quad G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}.$$

Supposons que $H(m, m_1)$, considérée comme fonction du point m , le point m_1 étant situé à l'intérieur de (D), reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et qu'il existe un nombre fixe L tel qu'on ait

$$(38) \quad \int [\Delta H(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2,$$

quelle que soit la position des points m et m_1 dans le domaine (D).

⁽¹⁾ Voir I. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta Mathematica*, t. XXVII).

Quant à la fonction $\varphi(m)$, nous supposons qu'elle reste continue dans (D) et que le théorème de Poisson s'applique au potentiel

$$\int \frac{p(m_1) \varphi(m_1)}{r} d\tau'.$$

On trouve, eu égard à (36) et (37),

$$\Delta u(m) = \Delta f(m) + \mu p(m) \varphi(m) - \int \Delta H(m, m_1) p(m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

ou

$$\Delta u(m) = \mu \left(\psi(m) - \frac{1}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi(m_1) d\tau' - \Theta(m) \right),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \psi(m) &= p(m) \varphi(m), & \Theta(m) &= -\frac{1}{\mu} \Delta f(m), \\ Q(m, m_1) &= \Delta H(m, m_1). \end{aligned}$$

Déterminons maintenant la fonction $\varphi(m)$ ou, ce qui revient au même, la fonction $\psi(m)$ à l'aide de l'équation

$$(39) \quad \psi(m) = \frac{1}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi(m_1) d\tau' + \Theta(m).$$

Envisageons l'équation

$$(40) \quad \psi(m) = \frac{\lambda}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi(m_1) d\tau' + \Theta(m),$$

λ étant un paramètre.

Nous revenons à l'équation fonctionnelle du n° 4 du Chapitre I.

Posant

$$(41) \quad \psi(m) = \psi_0(m) + \lambda \psi_1(m) + \lambda^2 \psi_2(m) + \dots + \lambda^k \psi_k(m) + \dots,$$

on trouve

$$(42) \quad \psi_0(m) = \Theta(m), \quad \psi_k(m) = \frac{1}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi_{k-1}(m_1) d\tau',$$

d'où, comme au n° 4 du Chapitre I,

$$\begin{aligned} \psi_k^2(m) &< \frac{L^2}{\mu^2} \int \psi_{k-1}^2 d\tau = \frac{L^2}{\mu^2} J_{k-1}, \\ J_k &= \int \psi_k^2(m) d\tau < \frac{DL^2}{\mu^2} J_{k-1} = q^2 J_{k-1} \quad (1). \end{aligned}$$

(1) Rappelons que, en vertu de (38),

$$\int Q^2(m, m_1) d\tau' = \int [\Delta H(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2.$$

Cette inégalité donne

$$(43) \quad J_k < q^{2k} J_0.$$

On en conclut que la série

$$|\psi_0(m)| + \lambda [\sqrt{J_0} + \lambda \sqrt{J_1} + \lambda^2 \sqrt{J_2} + \dots + \lambda^k \sqrt{J_k} + \dots]$$

converge pour toutes les valeurs positives de λ , pourvu que

$$\lambda q < 1,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda < \frac{1}{q} = \frac{\mu}{L\sqrt{D}} \quad (1).$$

Il en est de même de la série (41).

On en conclut que, si la constante μ satisfait à l'inégalité

$$(44) \quad \mu^2 > DL^2,$$

la série (41) converge pour $\lambda = 1$ et représente une fonction $\psi(m)$, bien déterminée, continue dans (D) et vérifiant l'équation

$$(39) \quad \psi(m) = \frac{1}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi(m_1) d\tau' + \Theta(m).$$

21. Supposons maintenant que les fonctions

$$\Delta f(m) \quad \text{et} \quad Q(m, m_1) = \Delta H(m, m_1)$$

satisfassent aux conditions

$$(45) \quad |\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^\beta,$$

$$(45_1) \quad |Q(m', m_1) - Q(m'', m_1)| < a\rho^\beta,$$

a et $\beta < 1$ étant des nombres positifs ne dépendant pas du choix des points m' , m'' , m_1 dans le domaine (D), ρ désignant la distance $m' m''$.

Ces conditions étant remplies, on aura

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < A\rho^\beta,$$

(1) Nous supposons que $\mu > 0$.

A étant un nombre positif ne dépendant pas de la position des points m' et m'' dans (D).

On trouve, en effet,

$$(46) \quad |\psi(m') - \psi(m'')| < \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k |\psi_k(m') - \psi_k(m'')|.$$

Or, en vertu de (42), (43), (45) et (45₁),

$$\begin{aligned} [\psi_k(m') - \psi_k(m'')]^2 &< \frac{J_{k-1}}{\mu^2} \int [\mathbf{Q}(m', m_1) - \mathbf{Q}(m'', m_1)]^2 d\tau' \\ &< \frac{a^2 \rho^{2\beta} \mathbf{D}}{\mu^2} J_{k-1} < \frac{a^2 \rho^{2\beta} \mathbf{D}}{\mu^2} q^{2(k-1)} J_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu de (46),

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < \frac{a}{\mu} [1 + \lambda \mathbf{D} J_0 (1 + \lambda q + \lambda^2 q^2 + \dots + \lambda^k q^k + \dots)] \rho^\beta.$$

Supposant maintenant que μ satisfasse à l'inégalité (44) et posant $\lambda = 1$, on trouve

$$|\psi(m') - \psi(m'')| < \frac{a}{\mu} \left(1 + \frac{\mathbf{D} J_0}{1 - q} \right) \rho^\beta = \mathbf{A} \rho^\beta. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On en conclut, d'après le théorème de M. Hölder (1), que *le théorème de Poisson s'applique au potentiel*

$$\int \frac{\psi(m_1)}{r} d\tau' = \int \frac{p(m_1) \varphi(m_1)}{r} d\tau',$$

pourvu que les fonctions $f(m)$ et $\mathbf{H}(m, m_1)$ satisfassent aux inégalités (45) et (45₁).

22. Revenons à l'équation

$$(47) \quad u(m) = f(m) - \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'.$$

Supposons que les conditions (44), (45) et (45₁) soient satisfaites et que $\varphi(m)$ dans (47) soit égale à

$$\frac{\psi(m)}{p(m)},$$

où $\psi(m)$ est la fonction vérifiant l'équation (39).

(1) O. HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*. Stuttgart, 1882, p. 10.

On trouve

$$\Delta u(m) = \mu \left(\psi(m) - \frac{1}{\mu} \int Q(m, m_1) \psi(m_1) d\tau' - \Theta(m) \right) = 0 \quad \text{dans (D)}.$$

Supposons ensuite que $f(m)$ et $G(m, m_1)$ s'annulent sur la surface (S).
Dans ce cas, la fonction $u(m)$ satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} \Delta u(m) &= 0 \quad \text{dans (D)}, \\ u(m) &= 0 \quad \text{sur (S)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)}.$$

On peut exprimer ce résultat sous la forme du théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}, \quad \mu > 0,$$

où $H(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions

$$(48) \quad \int [\Delta H(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2,$$

$$(49) \quad |\Delta H(m', m_1) - \Delta H(m'', m_1)| < a\rho^\beta,$$

$L, a, \beta < 1$ étant des nombres fixes ne dépendant pas de la position des points m, m_1, m' et m'' dans (D), ρ étant la distance $m'm''$, et

$$(50) \quad G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r} = 0 \quad \text{sur (S)};$$

μ est une constante positive satisfaisant à l'inégalité

$$(51) \quad \mu^2 > DL^2,$$

D désignant le volume de (D).

Toute fonction $G(m, m_1)$ jouissant des propriétés tout à l'heure indiquées appartient au groupe (A), c'est-à-dire il existe toujours une fonction $\varphi(m)$, bien déterminée dans (D) et telle qu'on ait

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

quelle que soit la fonction $f(m)$ continue avec ses dérivées des deux premiers

ordres dans (D), satisfaisant à la condition

$$(52) \quad |\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < \alpha \rho^\beta$$

[conditions intérieures (a) du n° 9] et s'annulant sur (S) [conditions (b) aux limites du n° 9].

23. Supposons maintenant que la fonction $H(m, m_1)$ satisfasse aux conditions (48) et (49) du théorème précédent et à la suivante :

$$\frac{\partial H_i}{\partial n} + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Soit $f(m)$ une fonction vérifiant l'inégalité (52) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Ces conditions étant remplies, nous obtiendrons, comme au n° 22, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

assujettie aux conditions

$$\Delta U(m) = 0 \quad \text{dans (D)},$$

$$\frac{\partial U_i(m)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S)},$$

ce qui donne

$$U(m) = \text{const.} \quad \text{dans (D)}.$$

On a donc

$$f_1(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

où l'on a posé

$$f_1(m) = f(m) + C,$$

C étant une constante.

On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — Toute fonction

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions (48) et (49) du

numéro précédent et à la suivante

$$\frac{\partial G_i(m, m_1)}{\partial n} = 0,$$

μ est une constante satisfaisant à l'inégalité (51), appartient au groupe (A), c'est-à-dire à toute fonction $f(m)$, satisfaisant à la condition (52) et à la suivante

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0,$$

correspond une fonction $\varphi(m)$, bien déterminée dans (D) et telle qu'on ait

$$f(m) + C = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

C étant une constante.

24. Supposons encore que $G(m, m_1)$ satisfasse à toutes les conditions du théorème du n° 22, sauf à la condition (50), qui se remplace par la suivante

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} + h G_i = 0 \quad \text{sur (S)},$$

h étant une constante positive, différente de zéro.

Soit $f(m)$ une fonction, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + h f_i = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

Sous ces conditions, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

où

$$\varphi(m) = \frac{\psi(m)}{p(m)},$$

$\psi(m)$ désignant la fonction vérifiant l'équation (39) (1), représente une fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta U(m) = 0 \quad \text{dans (D)},$$

jointe à la condition

$$\frac{\partial U_i(m)}{\partial n} + h U_i(m) = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

(1) Rappelons que $\psi(m)$ se représente sous la forme de la série

$$\psi(m) = \psi_0(m) + \psi_1(m) + \psi_2(m) + \dots + \psi_k(m) + \dots,$$

absolument et uniformément convergente dans (D) (n° 20).

On a donc

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)}.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Toute fonction*

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

satisfaisant aux conditions (48), (49) et (51) et à la suivante

$$\frac{\partial G_i}{\partial n} + h G_i = 0 \quad \text{sur (S)},$$

h étant une constante positive, différente de zéro, appartient au groupe (A), c'est-à-dire à toute fonction $f(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfaisant à l'inégalité (52) [conditions intérieures (a) du n° 9] ainsi qu'à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + h f_i = 0 \quad \text{sur (S)}$$

[conditions (b) aux limites du n° 9], correspond une fonction $\varphi(m)$, bien déterminée et telle qu'on ait

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)}.$$

25. Faisons enfin l'hypothèse suivante sur $H(m, m_1)$:

La fonction $H(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m , le point m_1 étant situé à l'intérieur de (D), reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admet les dérivées du second ordre dans (D) et (D'), se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D')}.$$

Formons, comme précédemment, la fonction

$$U(m) = f(m) - \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

en supposant que $f(m)$ jouisse des mêmes propriétés que $H(m, m_1)$ et que $\varphi(m)$

soit égal à

$$\frac{\psi(m)}{p(m)},$$

$\psi(m)$ étant la fonction vérifiant l'équation (39).

Supposons encore que $f(m)$ et $\mathbf{H}(m, m_1)$ satisfont aux conditions (52), (48) et (49), la constante μ à l'inégalité (51).

Ces conditions étant remplies, nous obtiendrons la fonction $\mathbf{U}(m)$ jouissant des propriétés suivantes :

La fonction $\mathbf{U}(m)$ reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation

$$\Delta \mathbf{U}(m) = 0 \quad \text{dans } (\mathbf{D}) \text{ et dans } (\mathbf{D}').$$

On a donc

$$f(m) = \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

en tous les points de l'espace, ce qui démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mathbf{H}(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m , reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admet les dérivées du second ordre dans (\mathbf{D}) et (\mathbf{D}') , se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et vérifie l'équation

$$\Delta \mathbf{H}(m, m_1) = 0 \quad \text{dans } (\mathbf{D}')$$

et l'inégalité (49).

Soit μ est une constante positive satisfaisant à la condition (51).

A toute fonction $f(m)$ jouissant des mêmes propriétés que $\mathbf{H}(m, m_1)$ correspond une fonction $\varphi(m)$, bien déterminée et telle qu'on ait

$$f(m) = \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

en tous les points de l'espace.

Dans tous les cas, considérés plus haut (n^{os} 22-25),

$$\varphi(m) = \frac{\psi(m)}{p(m)},$$

où $p(m)$ est une fonction donnée, continue, positive et ne s'annulant pas dans (\mathbf{D}) ,

$\psi(m)$ est la fonction se représentant sous la forme de la série

$$\psi(m) = \psi_0(m) + \psi_1(m) + \psi_2(m) + \dots + \psi_k(m) + \dots,$$

où

$$\psi_0(m) = -\frac{\Delta f(m)}{\mu}, \quad \psi_k(m) = \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \psi_{k-1}(m_1) d\tau',$$

absolument et uniformément convergente dans (D).

26. Considérons maintenant le cas plus général :

Supposons seulement que la fonction

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

soit symétrique en m et m_1 et appartienne au groupe (A), c'est-à-dire qu'à toute fonction $f(m)$, satisfaisant à certaines conditions intérieures (a) et à certaines conditions (b) aux limites, correspond une fonction $\varphi(m)$ telle qu'on ait

$$(53) \quad f(m) = \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)}.$$

Appliquons le théorème général du n° 13 à la solution de cette équation.

Remplaçons dans (29₁) φ par $\frac{1}{p}$, f par la fonction cherchée $\varphi(m)$.

On trouve

$$\int_{\mathbf{D}_i} \varphi d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k \int_{\mathbf{D}_i} \mathbf{V}_k d\tau = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \int_{\mathbf{D}_i} \mathbf{V}_k d\tau + s_n,$$

où l'on a posé

$$\mathbf{B}_k = \int p \varphi \mathbf{V}_k d\tau, \quad s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{B}_k \int_{\mathbf{D}_i} \mathbf{V}_k d\tau,$$

\mathbf{V}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) désignant les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $\mathbf{G}(m, m_1)$.

D'après le théorème du n° 13, on peut trouver un nombre ν tel qu'on ait

$$|s_n| < \varepsilon \quad \text{pour } n \geq \nu,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

On peut donc écrire

$$(54) \quad \left| \int_{\mathbf{D}_i} \varphi d\tau - \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \int_{\mathbf{D}_i} \mathbf{V}_k d\tau \right| < \varepsilon \mathbf{D}_i \quad \text{pour } n \geq \nu,$$

\mathbf{D}_i désignant le volume du domaine (\mathbf{D}_i).

Supposons que $\varphi(m)$ reste continue dans (D).

Soit m un point quelconque du domaine donné (D).

Écrivons autour de m , comme centre, une sphère (σ) de rayon ρ , suffisamment petit.

Choisissant convenablement ρ , on aura

$$\varphi = \varphi(m) + \eta \quad \text{à l'intérieur de } (\sigma)$$

où

$$|\eta| < \varepsilon,$$

pour tous les points intérieurs à (σ).

On aura donc

$$\int_{D_i} \varphi d\tau = \varphi(m) D_i + \int_{D_i} \eta d\tau,$$

d'où

$$\left| \int_{D_i} \varphi d\tau - \varphi(m) D_i \right| < \varepsilon D_i.$$

Par conséquent, en vertu de (54),

$$\left| \varphi(m) - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^n B_k \int_{D_i} V_k d\tau \right| < 2\varepsilon.$$

Or, l'équation (53) donne

$$(55) \quad B_k = \lambda_k A_k,$$

où l'on a posé

$$A_k = \int p f V_k d\tau.$$

On trouve donc finalement

$$\left| \varphi(m) - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \int_{D_i} V_k d\tau \right| < 2\varepsilon.$$

Cette inégalité permet de calculer la valeur de la fonction cherchée $\varphi(m)$ en tout point m du domaine (D) avec l'approximation donnée à l'avance 2ε , si nous supposons seulement que $\varphi(m)$ reste continue dans (D).

Dans le cas plus général, où $\varphi(m)$ n'est que bornée et intégrable dans (D), nous obtiendrons, en tenant compte de (54) et (55),

$$\left| \frac{1}{D_i} \int_{D_i} \varphi d\tau - \frac{1}{D_i} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k \int_{D_i} V_k d\tau \right| < \varepsilon,$$

l'inégalité qui permet de calculer la valeur moyenne de la fonction cherchée $\varphi(m)$ dans tout domaine (D_i) , intérieur à (D) , avec l'approximation donnée à l'avance ε .

27. Faisons encore une remarque sur le problème suivant :

Soit $\varphi(m)$ une fonction vérifiant l'équation (53), où $f(m)$ est une fonction donnée; trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_{D_i} \varphi \psi \, d\tau,$$

où ψ est une autre fonction donnée, bornée et intégrable dans (D) .

Supposant, comme précédemment, que $G(m, m_1)$ appartient au groupe (A) , on trouve

$$\int_{D_i} \varphi \psi \, d\tau = \int_{D_i} p \varphi \frac{\psi}{p} \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k C_k,$$

où l'on a posé

$$B_k = \int p \varphi V_k \, d\tau, \quad C_k = \int \psi V_k \, d\tau.$$

C_k sont les constantes connues; il ne reste qu'à trouver les valeurs de B_k .

Or, nous avons vu que [l'égalité (55)]

$$B_k = \lambda_k \int p f V_k \, d\tau.$$

On a donc

$$\int_{D_i} \varphi \psi \, d\tau = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int p f V_k \, d\tau \int \psi V_k \, d\tau + r_n,$$

où

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k C_k.$$

Choisissant convenablement le nombre n , nous aurons approximativement

$$\int_{D_i} \varphi \psi \, d\tau = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int p f V_k \, d\tau \int \psi V_k \, d\tau,$$

avec l'approximation donnée à l'avance ε , car on peut toujours choisir un nombre n

de façon que l'on ait

$$|r_n| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geq \nu.$$

Le problème proposé est donc résolu.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA THÉORIE GÉNÉRALE A LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

1. Les résultats généraux des recherches précédentes peuvent avoir plusieurs applications dans l'Analyse ainsi que dans la Physique mathématique.

Ces applications sont si nombreuses qu'il est presque impossible d'en donner un aperçu détaillé et complet.

Il suffit de se borner aux exemples les plus simples et les plus importants qui permettent de faire comprendre le mieux la portée de la théorie générale développée plus haut.

2. Prenons pour la fonction génératrice la fonction de Green.

On sait que

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions (a), (b), (c) du n° 4 du Chapitre I ainsi qu'à l'inégalité (19), car

$$\Delta H = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D)}.$$

Donc, la solution de l'équation

$$(1) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) G(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m),$$

où $G(m, m_1)$ désigne maintenant la fonction de Green, se représente sous la forme de la série

$$v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots + \lambda^k v_k + \dots,$$

où v_k ($k = 1, 2, \dots$) sont les fonctions du point m s'annulant sur (S), car

$$v_k = \int p(m_1) G(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau'$$

et $G(m, m_1)$ s'annule sur (S).

On a donc dans le cas considéré

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds = 0$$

[comparer la formule (19₂) du n° 12 du Chapitre I].

La théorie générale du Chapitre I s'applique immédiatement au cas particulier qui nous intéresse et conduit au théorème suivant :

La fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (1), où $G(m, m_1)$ désigne la fonction de Green, est une fonction méromorphe en λ , n'ayant que des pôles simples et réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales ayant pour fonction génératrice la fonction de Green.

Ces fonctions fondamentales V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) satisfont aux équations

$$(2) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

ou aux équations

$$(3) \quad \Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D),}$$

$$(4) \quad V_k = 0 \quad \text{sur (S).}$$

Il est aisé de s'assurer que la fonction de Green appartient à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs (voir n° 25 du Chapitre I).

Soit, en effet, φ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

Posons

$$u = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'.$$

La fonction u reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} \Delta u + p\varphi &= 0 \quad \text{dans (D),} \\ u &= 0 \quad \text{sur (S).} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int p(m) \varphi(m) \left(\int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= - \int u \Delta u d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau > 0, \end{aligned}$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

La condition (78) du n° 25 du Chapitre I est satisfaite.

Donc, tous les nombres caractéristiques λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont positifs.

L'existence des fonctions V_k satisfaisant aux conditions (3) et (4) est donc démontrée (comparer H. POINCARÉ, *Rendiconti di Palermo*, 1894).

3. Montrons maintenant que la fonction $\mathbf{G}(m, m_1)$ de Green appartient au groupe (A).

La fonction de Green se représente sous la forme

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mu = 1$, $\mathbf{H}(m, m_1)$ est une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta \mathbf{H}(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D).}$$

D'autre part, $\mathbf{G}(m, m_1)$ s'annule sur (S).

Il est évident que la fonction de Green satisfait à toutes les conditions du théorème du n° 22 du Chapitre précédent.

Dans ce cas, l'équation (39) se réduit à

$$\psi = -\Delta f,$$

d'où

$$\varphi = -\frac{\Delta f}{p}.$$

On trouve donc, moyennant le théorème du n° 22 du Chapitre précédent,

$$(5) \quad f(m) = - \int p(m_1) \mathbf{G}(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)} d\tau' \quad \text{dans (D),}$$

quelle que soit la fonction $f(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) et satisfaisant à la condition

$$(52_1) \quad |\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^\beta,$$

a et $\beta < 1$ étant des nombres fixes ne dépendant pas de la position des points m' et m'' dans (D) , ρ désignant la distance $m'm''$.

Donc, la fonction $G(m, m_1)$ de Green appartient au groupe (A) .

4. Nous pouvons appliquer au cas considéré la théorie générale du Chapitre II et en déduire le théorème suivant :

Soient $f(m)$ une fonction bornée et intégrable dans (D) , $\varphi(m)$ une autre fonction qui peut devenir infinie en certains points isolés intérieurs à (D) mais telle que les intégrales

$$\int_{D_i} p \varphi^2 d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau, \quad \int_{D_i} p f \varphi d\tau$$

aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$(6) \quad \int_{D_i} p \varphi f d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k,$$

$$A_k = \int p f V_k d\tau, \quad B_k = \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau,$$

où $V_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ sont les fonctions satisfaisant aux conditions (3) et (4).

5. Supposons maintenant que la fonction $f(m)$ s'annulant sur (S) n'admette que les dérivées des deux premiers ordres et que les dérivées du second ordre restent bornées et intégrables à l'intérieur de (D) .

Appliquons le théorème précédent à la fonction

$$u = f(m) + \int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{\rho(m_1)} d\tau',$$

en posant dans (6)

$$(D_i) = (D), \quad \varphi = f = u.$$

On trouve

$$\int p u^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2,$$

où l'on a posé

$$B_k = \int p u V_k d\tau = \int p(m) \left(f(m) + \int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{\rho(m_1)} d\tau' \right) V_k(m) d\tau$$

$$= A_k + \int p(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{\rho(m_1)} d\tau' \right) V_k d\tau,$$

et

$$A_k = \int p f V_k d\tau.$$

Or, en vertu de (2),

$$\begin{aligned} & \int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)} d\tau' \right) d\tau \\ &= \int \Delta f(m_1) \left(\int p(m) G(m, m_1) V_k(m) d\tau' \right) d\tau = \frac{1}{\lambda_k} \int \Delta f(m) V_k(m) d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les hypothèses faites sur la fonction $f(m)$, on trouve, eu égard à (3) et (4),

$$\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\tau = - \int f \Delta V_k d\tau = - \int V_k \Delta f d\tau = + \lambda_k \int p f V_k d\tau = + \lambda_k A_k.$$

Par conséquent,

$$\int p(m) V_k(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \frac{\Delta f(m_1)}{p(m_1)} d\tau' \right) d\tau = - A_k$$

et

$$B_k = 0.$$

On trouve donc

$$\int p u^2 d\tau = 0,$$

d'où

$$u = f(m) + \int G(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau' = 0 \quad \text{dans (D)},$$

car la fonction u reste continue, la fonction $p(m)$ continue et positive dans (D).

Donc, l'équation (5) a lieu toutes les fois que la fonction $f(m)$ reste continue, admet les dérivées des deux premiers ordres dans (D) et s'annule sur (S).

6. Appliquons maintenant le théorème général du n° 17 aux fonctions fondamentales satisfaisant aux équations (3) et (4).

On obtient immédiatement ce théorème :

Toute fonction f continue admettant les dérivées des deux premiers ordres dans (D) et s'annulant sur (S) se développe dans (D) en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions V_k , définies par les équations (3) et (4),

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau.$$

Les théorèmes que nous venons de signaler permettent de résoudre le problème suivant de la théorie de la chaleur :

Trouver une fonction U dépendant du temps t et de coordonnées x, y, z, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \Delta U \quad \text{à l'intérieur du domaine (D),}$$

K désignant le coefficient de conductibilité, et aux conditions

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{sur (S),} \\ U &= f(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0. \end{aligned}$$

Nous avons déjà exposé les principes de la méthode dans l'Introduction à ce Mémoire.

7. Prenons maintenant pour fonction génératrice la fonction suivante :

$$G(m, m_1) = J(m, m_1),$$

où

$$J(m, m_1) = J_1(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

$J_1(m, m_1)$ étant une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

Elle reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D);

Elle satisfait à l'équation

$$(7) \quad \Delta J_1 = \frac{1}{D} \quad \text{à l'intérieur de (D),}$$

D désignant le volume de (D);

Elle satisfait à la condition

$$(8) \quad \frac{\partial J_{1i}}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2} \quad \text{sur (S),}$$

où φ désigne l'angle que fait la droite, dirigée du point m_1 du domaine (D) vers un point m de (S), avec la normale n à (S) en m .

Soit J_{10} une fonction quelconque satisfaisant à ces conditions. Il est évident que toute fonction

$$J_1 = J_{10} + C(m_1),$$

$C(m_1)$ désignant une fonction arbitraire du point m_1 , satisfera aux mêmes conditions.

Choisissons $C(m_1)$ de façon que l'on ait

$$(9) \quad \int J_1(m, m_1) d\tau = \int [J_{10} + C(m_1)] d\tau = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} d\tau.$$

Nous obtiendrons une fonction $J_1(m, m_1)$ bien déterminée et satisfaisant aux conditions (7), (8) et (9).

J'ai établi l'existence d'une telle fonction dans mon travail : *Sur les équations différentielles de la Physique mathématique*, publié en 1896 dans le *Recueil mathématique de Moscou* ⁽¹⁾ (en russe). J'y ai montré que $J_1(m, m_1)$, ainsi définie, est symétrique en m et m_1 [condition (a) du n° 4 du Chapitre I].

Il est aisé de s'assurer ensuite que $J_1(m, m_1)$ satisfait aux conditions (b) et (c) du n° 4 du Chapitre I.

Il est évident enfin que

$$\int (\Delta J_1)^2 d\tau' < L^2,$$

car, en vertu de (7),

$$\int (\Delta J_1)^2 d\tau' = \frac{1}{D}.$$

Quant à la fonction $J(m, m_1)$, elle satisfait à la première des inégalités (19) du n° 11 du Chapitre I, ainsi qu'aux conditions suivantes

$$(10) \quad \frac{\partial J_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S),$$

$$(11) \quad \int J(m, m_1) d\tau = 0.$$

8. Formons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(11) \quad V(m) = \lambda \int p(m_1) J(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m)$$

et la série correspondante

$$V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m_1) + \dots + \lambda^k v_k(m) + \dots,$$

où

$$v_k = \int p(m_1) J(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau'.$$

⁽¹⁾ Voir aussi W. STEKLOFF, *Sur les problèmes fondamentaux, etc. (Annales de l'École normale, 1902, p. 258).*

On a donc, eu égard à (10),

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

[voir la formule (19₂) du Chapitre I].

On voit, par ce qui précède, que la théorie générale du Chapitre I s'applique au cas considéré, où la fonction génératrice $G(m, m_1)$ se réduit à $J(m, m_1)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La solution de l'équation (11) représente une fonction méromorphe en λ n'ayant que des pôles simples et réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales vérifiant les équations

$$(12) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m) J(m, m_1) V_k(m_1) d\tau'$$

ou

$$(13) \quad \Delta V_k + \lambda_k p V_k - \int p V_k d\tau = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D),}$$

$$(14) \quad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S),}$$

$$(15) \quad \int V_k d\tau = 0.$$

L'existence des fonctions fondamentales, correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$, est donc démontrée.

Il importe de remarquer que ces fonctions n'admettent que des nombres caractéristiques positifs.

Soit φ une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D).

La fonction

$$u = \int p(m_1) J(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

satisfait aux conditions

$$\Delta u = -p\varphi + \frac{1}{D} \int p\varphi d\tau \quad \text{dans (D),}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur (S).}$$

On a donc, eu égard à (11),

$$\int p(m) \varphi(m) \left(\int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right) d\tau = - \int u \Delta u d\tau > 0.$$

Donc, tous les nombres λ_k sont positifs (n° 25 du Chapitre I).

9. Montrons que la fonction $J(m, m_1)$ et, par suite, les fonctions fondamentales correspondantes appartiennent au groupe (A).

La fonction $J(m, m_1)$ se représente sous la forme

$$J(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où

$$\mu = 1, \quad H(m, m_1) = J_1(m, m_1);$$

d'où, eu égard à (7),

$$\Delta H(m, m_1) = \Delta J_1(m, m_1) = \frac{1}{D}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial J_i}{\partial n} = 0.$$

Il est évident que $J(m, m_1)$ ne représente qu'un cas particulier des fonctions $G(m, m_1)$, définies au n° 23 du Chapitre précédent.

L'équation (39) du Chapitre précédent se réduit à

$$\psi(m) = \frac{1}{D} \int \psi(m) d\tau - \Delta f(m) = - \Delta f(m) + C_1,$$

C_1 désignant une constante.

Le théorème du n° 23 s'applique donc à la fonction $J(m, m_1)$.

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D), vérifiant l'inégalité (52₁) et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

Le théorème du n° 23 conduit à l'équation

$$\begin{aligned} (16) \quad C + f(m) &= - \int J(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau' + C_1 \int J(m, m_1) d\tau \\ &= - \int J(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau', \end{aligned}$$

car

$$\int \mathbf{J}(m, m_1) d\tau' = \int \mathbf{J}(m, m_1) d\tau = 0.$$

L'équation (16) donne

$$\mathbf{CD} + \int f(m) d\tau = 0.$$

Posant

$$f_1(m) = f(m) - \frac{1}{\mathbf{D}} \int f(m) d\tau,$$

on aura

$$(17) \quad u = f_1(m) + \int \mathbf{J}(m, m_1) \Delta f_1(m_1) d\tau' = 0.$$

Donc, $\mathbf{J}(m, m_1)$ appartient au groupe (A).

Le nombre k dans les conditions intérieures (a) (voir n° 9, Chapitre II) se réduit à $k = 2$, les conditions aux limites (b) se réduisent à

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

10. Appliquant au cas considéré la théorie générale du Chapitre précédent, on obtient le théorème suivant :

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D). Posons

$$f_1 = f + C,$$

et choisissons la constante C de façon que l'on ait

$$(18) \quad \int (f + C) d\tau = 0.$$

Soit φ une autre fonction qui peut devenir infinie en certains points isolés d'un domaine quelconque (\mathbf{D}_i), intérieur au domaine donné (D), mais telle que les intégrales

$$\int_{\mathbf{D}_i} p \varphi f_1 d\tau, \quad \int_{\mathbf{D}_i} p \varphi^2 d\tau, \quad \int_{\mathbf{D}_i} p \varphi \mathbf{V}_k d\tau,$$

\mathbf{V}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) étant les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $\mathbf{J}(m, m_1)$, aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on aura

$$(19) \quad \int_{\mathbf{D}_i} p \varphi f_1 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k,$$

$$\mathbf{A}_k = \int p f_1 \mathbf{V}_k d\tau, \quad \mathbf{B}_k = \int_{\mathbf{D}_i} p \varphi \mathbf{V}_k d\tau.$$

11. Considérons le cas le plus simple

$$p(m) = 1.$$

On aura, eu égard à (12), (13), (14) et (15),

$$(12_1) \quad V_k(m) = \lambda_k \int J(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

$$(13_1) \quad \Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de } (D),$$

$$(14_1) \quad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S),$$

$$(15_1) \quad \int V_k d\tau = 0.$$

Démontrons que l'équation (17) a lieu toujours, pourvu que la fonction f reste continue avec ses dérivées du premier ordre et admette les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans (D) .

Posons, dans (19),

$$p = 1, \quad \varphi = f_1 = u, \quad (D_i) = (D).$$

On trouve

$$\int u^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2, \quad B_k = \int u V_k d\tau.$$

Or, en vertu de (12₁),

$$\begin{aligned} \int u V_k d\tau &= \int f_1(m) V_k(m) d\tau + \int V_k(m) \left(\int J(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= A_k + \frac{1}{\lambda_k} \int \Delta f(m) V_k(m) d\tau, \end{aligned}$$

où l'on peut poser, eu égard à (15₁),

$$A_k = \int f V_k d\tau.$$

D'autre part, en vertu de (13₁) et (14₁),

$$\int \Delta f(m) V_k(m) d\tau = -\lambda_k \int f V_k d\tau.$$

Par conséquent,

$$u = 0 \quad \text{dans } (D).$$

L'équation (17) a donc lieu toutes les fois que la fonction f , continue avec ses dérivées du premier ordre et admettant les dérivées du second ordre,

bornées et intégrables dans (D), satisfait à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0.$$

12. De cette proposition nous déduisons immédiatement, à l'aide du théorème général du n° 17 du Chapitre précédent, le théorème suivant :

Toute fonction f , continue dans (D), avec ses dérivées du premier ordre, admettant les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans (D), et satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0,$$

se développe dans (D) en série uniformément convergente, de la forme

$$f = \frac{1}{D} \int f d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int f V_k d\tau,$$

V_k étant les fonctions fondamentales, définies par les équations (13₁) et (14₁).

Les théorèmes que nous venons de démontrer permettent de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction U du temps t et de coordonnées x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = K \Delta U, \quad K > 0,$$

jointe aux conditions

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S),$$

$$U = f(x, y, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \varphi(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

f et φ étant des fonctions données satisfaisant aux conditions énoncées au début de ce numéro.

Le lecteur trouvera les indications nécessaires sur ce sujet au n° 2 de l'Introduction de ce Mémoire.

13. Considérons encore la fonction $H(m, m_1)$, dont nous avons déjà parlé au n° 3 de l'Introduction.

C'est une fonction se représentant sous la forme suivante

$$H(m, m_1) = H_1(m, m_1) + \frac{1}{4\pi r},$$

où $H_1(m, m_1)$ est une fonction satisfaisant aux conditions

$$\Delta H_1 = \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dans (D)},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2} - \frac{h}{4\pi r} - h H_1 \quad \text{sur (S)},$$

h étant une constante positive, différente de zéro. L'existence de cette fonction est établie dans mon Mémoire : *Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique* (*Annales de l'École normale*, juillet 1902, p. 248 et suiv.).

Il est aisé de démontrer, par la méthode connue de Riemann, que $H(m, m_1)$ et, par suite, $H_1(m, m_1)$ sont symétriques en $m(x, y, z)$ et $m(\xi, \eta, \zeta)$.

Moyennant l'expression analytique de la fonction $H_1(m, m_1)$ que fournit la méthode de Neumann, appliquée à la détermination de $H_1(m, m_1)$, on peut s'assurer que $H_1(m, m_1)$ satisfait aux conditions (b) et (c) du n° 4 du Chapitre I.

Il est évident ensuite que [inégalité (19) du Chapitre I]

$$\int [\Delta H_1(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2,$$

car

$$\Delta H_1(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D)}.$$

Quant à la fonction $H(m, m_1)$, elle satisfait aux conditions

$$(20) \quad \Delta H(m, m_1) = 0 \quad \text{dans (D)},$$

$$(21) \quad \frac{\partial H}{\partial n} + h H = 0 \quad \text{sur (S)}$$

et

$$\int H^2(m, m_1) d\tau < A_i^2$$

pour tous les points de tout domaine (D_i) , intérieur à (D) , A_i étant un nombre fixe ne dépendant que de (D_i) [comparez l'inégalité (22) du Chapitre I].

14. Prenons cette fonction $H(m, m_1)$ pour fonction génératrice et envisageons l'équation (n° 5, Chapitre I)

$$(22) \quad V(m) = \lambda \int \rho(m_1) H(m, m_1) V(m_1) d\tau' + f(m).$$

On a, comme au n° 5 du Chapitre I,

$$V(m) = v_0(m) + \lambda v_1(m) + \lambda^2 v_2(m) + \dots + \lambda^k v_k(m) + \dots,$$

Fac. de T., 2^e S., VI.

où

$$v_k(m) = \int p(m_1) \mathbf{H}(m, m_1) v_{k-1}(m_1) d\tau'.$$

On trouve, eu égard à (21),

$$\frac{\partial v_{ki}}{\partial n} + h v_k = 0 \quad \text{sur } (\mathbf{S})$$

et, par suite,

$$\int v_{ki} \frac{\partial v_{ki}}{\partial n} ds = -h \int v_{ki}^2 ds < 0.$$

La condition (19₂) du n° 12 du Chapitre I est donc satisfaite.

15. On voit, par ce qui précède, que la théorie générale, exposée dans le Chapitre I, s'applique à l'équation (22) et conduit immédiatement au résultat suivant :

La fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (22) est une fonction méromorphe en λ , n'ayant que des pôles simples et réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots,$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $\mathbf{H}(m, m_1)$ qui vérifie les équations (20) et (21).

Ces fonctions fondamentales V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) satisfont aux équations

$$V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) \mathbf{H}(m, m_1) V_k(m_1) d\tau'$$

ou

$$(23) \quad \Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{dans } (\mathbf{D}),$$

$$(24) \quad \frac{\partial V_{ki}}{\partial n} + h V_{ki} = 0 \quad \text{sur } (\mathbf{S}).$$

Il est aisé de s'assurer que *tous les nombres caractéristiques λ_k des fonctions fondamentales correspondant à la fonction $\mathbf{H}(m, m_1)$ sont positifs.*

Posons, en effet,

$$u = \int p(m_1) \mathbf{H}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau',$$

$\varphi(m)$ étant une fonction quelconque, continue avec ses dérivées du premier ordre dans (\mathbf{D}) .

La fonction u satisfait aux conditions

$$\Delta u = -p\varphi \quad \text{dans } (\mathbf{D}),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} + hu_i = 0 \quad \text{sur } (\mathbf{S}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \int p(m) \varphi(m) \left(\int p(m_1) \mathbf{H}(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \right) d\tau \\ &= - \int u \Delta u d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau + h \int u^2 ds > 0, \end{aligned}$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$.

Donc, tous les nombres λ_k sont positifs (voir n° 25 du Chapitre I).

16. Montrons que $\mathbf{H}(m, m_1)$ appartient au groupe (A).

La fonction $\mathbf{H}(m, m_1)$ se représente sous la forme

$$\mathbf{H}(m, m_1) = \mathbf{H}_1(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mu = 1$, $\mathbf{H}_1(m, m_1)$ est une fonction vérifiant l'équation

$$\Delta \mathbf{H}_1(m, m_1) = 0.$$

D'autre part, $\mathbf{H}(m, m_1)$ satisfait à la condition

$$\frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial n} + h\mathbf{H}_i = 0 \quad \text{sur } (\mathbf{S}).$$

La fonction $\mathbf{H}(m, m_1)$ ne représente qu'un cas particulier des fonctions $\mathbf{G}(m, m_1)$ que nous avons considérées au n° 24 du Chapitre précédent.

L'équation (39) (Chapitre II) se réduit à

$$\psi(m) = -\Delta f(m).$$

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D) satisfaisant à l'inégalité (52₁) ainsi qu'à la condition

$$\frac{\partial f_i}{\partial n} + hf_i = 0 \quad \text{sur } (\mathbf{S}).$$

Appliquant le théorème du n° 24 du Chapitre précédent au cas considéré, on obtient l'équation

$$f(m) = - \int \mathbf{H}(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau' \quad \text{dans } (\mathbf{D}),$$

ayant lieu quelle que soit la fonction $f(m)$ satisfaisant aux conditions tout à l'heure indiquées.

Donc, $H(m, m_1)$ appartient au groupe (A).

17. Appliquant au cas considéré la théorie générale (Chapitre II), on obtient ce théorème :

Soit f une fonction bornée et intégrable dans (D), soit φ une autre fonction pouvant devenir infinie en certains points isolés d'un domaine quelconque (D_i) , intérieur au domaine donné (D), mais telle que les intégrales

$$\int_{D_i} p \varphi^2 d\tau, \quad \int_{D_i} p f \varphi d\tau, \quad \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau$$

aient un sens bien déterminé.

Ces conditions étant remplies, on a

$$(25) \quad \int_{D_i} p \varphi f d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k,$$

$$A_k = \int p f V_k d\tau, \quad B_k = \int_{D_i} p \varphi V_k d\tau,$$

où V_k ($k=1, 2, 3, \dots$) sont les fonctions fondamentales satisfaisant aux équations (23) et (24).

18. Posant dans (25)

$$\varphi = f = u, \quad (D_i) = (D),$$

$$u = f(m) + \int H(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau',$$

et répétant presque textuellement les raisonnements du n° 5 (ou du n° 11), on s'assure que l'équation

$$f(m) + \int H(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau' = 0$$

a lieu toutes les fois que la fonction f , continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D), admet les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans (D), et satisfait à la condition

$$(26) \quad \frac{\partial f_i}{\partial n} + h f_i = 0 \quad \text{sur (S)}.$$

19. Cette proposition étant établie, on en conclut immédiatement, moyennant le théorème général du n° 17 du Chapitre précédent, que toute fonction f continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D), admettant les dérivées du second ordre, bornées et intégrables dans (D), et satisfaisant à la condition (26), se développe dans (D) en série uniformément convergente

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont les fonctions fondamentales, définies par les équations (23) et (24).

20. Les théorèmes établis aux n°s 16 et 19 permettent de résoudre ce problème général de la théorie de la chaleur :

Trouver une fonction U de variables t (temps) et x, y, z (coordonnées) satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \Delta U,$$

où K est une fonction positive et ne s'annulant pas dans le domaine donné (D), jointe aux conditions

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} + h U_i = 0 \quad \text{sur (S)},$$

h étant une constante positive, différente de zéro,

$$U = f(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0,$$

f étant une fonction satisfaisant aux conditions du théorème du numéro précédent. (Comparer l'Introduction, n° 2.)

21. Considérons enfin le cas le plus simple, en posant

$$\mathbf{H}(m, m_1) = 0, \quad \mu = 1$$

dans l'expression générale

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

de la fonction génératrice [voir n° 3 du Chapitre I, l'égalité (3)].

La fonction $\mathbf{G}(m, m_1)$ se réduit à

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r};$$

l'équation (4) du n° 5 du Chapitre I se réduit à la suivante :

$$(27) \quad V(m) = \frac{\lambda}{4\pi} \int p(m_1) \frac{1}{r} V(m_1) d\tau' + f(m).$$

Les fonctions v_k dans la série

$$V(m) = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots + \lambda^k v_k + \dots$$

se représentent sous la forme du potentiel newtonien et satisfont à la condition (19₃) du n° 12 du Chapitre I.

Il est évident que la théorie générale s'applique immédiatement au cas considéré et conduit au théorème suivant :

La fonction $V(m)$ vérifiant l'équation (27) est une fonction méromorphe en λ admettant une infinité de pôles simples et réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k, \dots,$$

dont les résidus correspondants sont les fonctions fondamentales $V_k(m)$ satisfaisant aux équations

$$V_k(m) = \frac{\lambda_k}{4\pi} \int p(m_1) \frac{1}{r} V_k(m_1) d\tau' \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Ces équations montrent que les fonctions V_k ainsi définies restent continues avec leurs dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admettent les dérivées du second ordre, continues dans (D) et dans (D') [dans l'espace, extérieur à (D)], se comportent à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfont aux équations

$$(28) \quad \Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{à l'intérieur de (D),}$$

$$(29) \quad \Delta V_k = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D) [dans (D')].}$$

L'existence des fonctions appelées, par M. A. Korn, *fonctions universelles*, est donc établie.

On voit que ces fonctions ne représentent qu'un cas très particulier des fonctions fondamentales générales dont nous avons démontré l'existence dans le Chapitre I de ce Mémoire.

Il est aisé de s'assurer que la fonction

$$G(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r}$$

appartient à la classe des fonctions génératrices qui n'admettent que les nombres caractéristiques positifs (n° 23 du Chapitre I).

La fonction

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{p(m_1) \varphi(m_1)}{r} d\tau'$$

satisfait aux conditions

$$\Delta U + p\varphi = 0 \quad \text{dans } (D),$$

$$\Delta U = 0 \quad \text{dans } (D'),$$

quelle que soit la fonction $\varphi(m)$ continue avec ses dérivées du premier ordre dans (D) , et reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier.

On a donc

$$\begin{aligned} & \int p(m) \varphi(m) \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{p(m_1) \varphi(m_1)}{r} d\tau' \right) d\tau \\ &= - \int u \Delta u d\tau = - \int u \Delta u dT = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dT > 0. \end{aligned}$$

Donc, tous les nombres caractéristiques de fonctions universelles sont positifs.

22. On peut démontrer que la fonction $\frac{1}{4\pi r}$ appartient au groupe (A) , de sorte que le théorème général du n° 13 du Chapitre II s'applique aux fonctions V_k satisfaisant aux conditions (28) et (29).

Or, nous pouvons démontrer un théorème analogue directement, par une autre méthode, qui s'applique toutes les fois que la fonction $H(m, m_1)$, dans l'expression générale de la fonction génératrice, satisfait aux conditions suivantes (comparer n° 25 du Chapitre précédent) :

La fonction $H(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m , le point m_1 étant situé à l'intérieur du domaine (D) , reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, elle admet les dérivées du second ordre, continues dans (D) et (D') , se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et satisfait à l'équation

$$\Delta H(m, m_1) = 0 \quad \text{dans } (D').$$

Nous allons reproduire cette démonstration dont j'ai déjà exposé les principes dans ma Note, insérée aux *Comptes rendus* du 4 juillet 1904.

23. Soit $f(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D) .

Posons

$$(30) \quad \begin{aligned} f &= A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_n V_n + R_n, \\ A_k &= \int p f V_k d\tau \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont des fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

$H(m, m_1)$ étant une fonction jouissant des propriétés que nous venons d'énoncer (numéro précédent).

Les fonctions V_k satisfont aux équations

$$(31) \quad V_k(m) = \lambda_k \int p(m_1) G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

restent continues avec leurs dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, admettent les dérivées du second ordre, continues dans (D), se comportent à l'infini comme un potentiel newtonien et vérifient l'équation

$$(32) \quad \Delta V_k(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D)}.$$

Reprenons maintenant l'inégalité (7) du n° 5 du Chapitre précédent

$$(33) \quad \frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1},$$

où

$$J_0 = \int p(m) v_0^2(m) d\tau = \int p R_n^2 d\tau,$$

$$J_1 = \int p(m) v_1^2(m) d\tau,$$

$$(34) \quad v_1(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) v_0(m_1) d\tau' = \int p G R_n d\tau'.$$

Cette expression de $v_1(m)$ montre que la fonction v_1 reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien et vérifie l'équation

$$(35) \quad \Delta v_1(m) = 0 \quad \text{à l'extérieur de (D) [dans D']}. \quad \cdot$$

On a donc

$$(36) \quad \frac{\partial v_{1i}}{\partial n} = \frac{\partial v_{1e}}{\partial n}, \quad v_{1i} = v_{1e} \quad \text{sur (S)}.$$

24. Supposons maintenant que f reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien.

Il en sera de même de la fonction R_n , comme le montre l'équation (30).

Ces conditions étant remplies, on trouve, d'après le théorème de Green [voir les égalités (35) et (36)],

$$\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT = - \int R_n \Delta v_1 d\tau,$$

où, en vertu de (34),

$$(37) \quad \Delta v_1 = -\mu p R_n + \int p(m_1) \Delta H(m, m_1) R_n(m_1) d\tau'.$$

On a donc

$$\mu \int p R_n^2 d\tau = \mu J_0 = \int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT + \int R_n \left(\int p \Delta H R_n d\tau' \right) d\tau.$$

L'inégalité de Schwarz donne

$$(38) \quad P^2 = \left(\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT \right)^2 \leq \int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT,$$

$$(39) \quad Q^2 = \left[\int R_n \left(\int p \Delta H R_n d\tau' \right) d\tau \right]^2 \leq \int R_n^2 d\tau \int \left(\int p \Delta H R_n d\tau' \right)^2 d\tau.$$

Or, en vertu de (37),

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT = - \int v_1 \Delta v_1 d\tau = \mu \int p v_1 R_n d\tau - \int v_1 \left(\int p \Delta H R_n d\tau' \right) d\tau,$$

d'où, en répétant les raisonnements du n° 12 du Chapitre I,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT < \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} \right) \sqrt{J_0} \sqrt{J_1}.$$

D'autre part,

$$Q^2 = \left[\int R_n \left(\int p \Delta H R_n d\tau' \right) d\tau \right]^2 < L^2 \frac{\beta D}{\alpha} J_0^2.$$

Par conséquent,

$$P^2 + Q^2 < L^2 \frac{\beta D}{\alpha} J_0^2 + \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}} \right) \sqrt{J_0} \sqrt{J_1} \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT.$$

Or,

$$\mu^2 J_0^2 < 2(P^2 + Q^2).$$

On a donc

$$\left(\mu^2 - 2L^2 \frac{\beta D}{\alpha}\right) J_0^2 < 2 \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}}\right) \sqrt{J_0} \sqrt{J_1} \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\Gamma.$$

Faisons maintenant une seule supposition que la constante μ satisfasse à l'inégalité

$$(40) \quad \mu^2 > 2L^2 \frac{\beta D}{\alpha},$$

et posons

$$\frac{2 \left(\sqrt{\mu} + L \sqrt{\frac{\beta D}{\alpha}}\right)}{\mu^2 - 2L^2 \frac{\beta D}{\alpha}} = N,$$

N désignant un nombre fixe positif ne dépendant pas de n .

On aura

$$J_0^2 < N \sqrt{J_0} \sqrt{J_1} \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\Gamma,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} < N \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\Gamma}{J_0}.$$

Cette inégalité et (33) conduisent à la suivante :

$$(41) \quad \int p R_n^2 d\tau = J_0 < \frac{N \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\right)^2 d\Gamma}{l_{n+1}}.$$

25. Supposons enfin que la fonction, jouissant des propriétés indiquées plus haut, satisfait encore à la condition

$$(42) \quad f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

$\varphi(m)$ étant une certaine fonction du point m , bornée et intégrable dans (D).

Dans ce cas, on trouve, eu égard à (31),

$$R_n = \int p(m_1) G(m, m_1) U_n(m_1) d\tau',$$

où l'on a posé

$$U_n = \varphi(m_1) - \lambda_1 A_1 V_1(m_1) - \lambda_2 A_2 V_2(m_1) - \dots - \lambda_n A_n V_n(m_1).$$

On trouve donc, comme au n° 22 du Chapitre I (*voir* aussi n° 12, Chap. I),

$$(43) \quad \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT < N \int p(m) U_n^2(m) d\tau.$$

Or, il est aisé de s'assurer que l'intégrale

$$\int p(m) U_n^2(m) d\tau$$

décroit, lorsque n croît indéfiniment, de sorte qu'elle ne surpasse pas un certain nombre fixe A , ne dépendant pas de n .

En effet, l'égalité (42) donne, en vertu de (31),

$$\lambda_k A_k = B_k = \int p \varphi V_k d\tau.$$

On a donc

$$\int p U_n^2 d\tau = \int p \varphi^2 d\tau - \sum_{k=1}^n B_k^2 < \int p \varphi^2 d\tau,$$

car

$$\int p V_k^2 d\tau = 1, \quad \int p V_n V_m d\tau = 0 \quad \text{pour } n \gtrsim m.$$

L'inégalité (43) montre que

$$(44) \quad \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT < Q = N \int p \varphi^2 d\tau,$$

Q étant un nombre fixe ne dépendant pas de n .

26. Cela posé, revenons à l'inégalité (41) ayant lieu quel que soit le nombre n . Cette inégalité donne, en vertu de (44),

$$\int p R_n^2 d\tau < \frac{NQ}{l_{n+1}}.$$

Supposant que n croisse indéfiniment et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n=\infty} \int p R_n^2 d\tau = 0,$$

car l_n croît indéfiniment avec l'indice n .

Le théorème suivant est donc établi :

THÉORÈME. — *Quelle que soit la fonction $f(m)$ continue avec ses dérivées du*

premier ordre dans l'espace tout entier, se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien et se représentant sous la forme de l'intégrale

$$f(m) = \int p(m_1) G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

on a toujours

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales qui correspondent à la fonction génératrice

$$(45) \quad G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$ satisfait aux conditions, énoncées au n° 2 (1), et la constante μ satisfait à l'inégalité (40).

Remarquons que ce théorème peut être exprimé d'une manière un peu plus générale.

En effet, il est évident qu'il sera vrai toutes les fois que l'inégalité (44) aura lieu.

27. Supposons maintenant que $f(m)$ admette les dérivées du second ordre dans (D) et (D') et vérifie l'équation

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans (D')}.$$

Supposons encore que $f(m)$ et $H(m, m_1)$ satisfont aux conditions

$$(46) \quad |\Delta f(m') - \Delta f(m'')| < a\rho^3,$$

$$(46_1) \quad |\Delta H(m', m_1) - \Delta H(m'', m_1)| < a\rho^3,$$

quelle que soit la position des points m' et m'' dans (D).

Ces conditions étant remplies, on aura, eu égard au théorème du n° 25 du Chapitre précédent,

$$f(m) = \int \psi(m_1) G(m, m_1) d\tau' \quad \text{dans (D)},$$

(1) Voir W. STEKLOFF, *Sur une égalité générale commune, etc.* (Comptes rendus, 4 juillet 1904).

où $\psi(m)$ est une fonction, bien déterminée dans (D), se représentant sous la forme de la série (41) du Chapitre précédent.

Rappelons que l'égalité précédente a lieu toujours, pourvu que la fonction $\mathbf{H}(m, m_1)$ dans l'expression

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r}$$

jouisse des propriétés du potentiel newtonien et satisfasse à l'inégalité (46₁), et la constante μ satisfasse à l'inégalité

$$\mu^2 > \mathbf{DL}^2.$$

28. Supposons maintenant que μ satisfasse à l'inégalité (40) qui entraîne l'inégalité (50), car

$$2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} > 1.$$

Dans ce cas, le théorème du n° 26 s'applique à toute fonction f , ayant les propriétés indiquées au numéro précédent, et conduit immédiatement à ce théorème :

Quelle que soit la fonction f , jouissant des propriétés du potentiel newtonien et satisfaisant à la condition (46), on a toujours

$$\int pf^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^2, \quad \Lambda_k = \int pf \mathbf{V}_k d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$\mathbf{G}(m, m_1) = \mathbf{H}(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $\mathbf{H}(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m , a les mêmes propriétés que f , et la constante μ vérifie l'inégalité (40).

29. Il est aisé de généraliser le résultat obtenu.

Soit $f(m)$ une fonction quelconque assujettie à une seule condition qu'elle reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D).

Posons

$$\psi(m) = \int \frac{\varphi(m_1)}{r} d\tau',$$

$\varphi(m)$ étant une fonction quelconque, et formons une fonction $f_1(m)$, continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de (D) et satisfaisant

sur (S) aux conditions suivantes

$$f_i = \psi_i,$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i,$$

et ainsi de suite pour y et z .

Il existe une infinité de telles fonctions.

Soit (S_i) une surface parallèle à la surface donnée (S), soit δ la distance de deux points correspondants de (S_i) et (S) (voir n° 10).

Choisissons $f_i(m)$ de façon que l'on ait

$$f_1 = f + \eta \quad \text{dans } (D_i),$$

où

$$|\eta| < \varepsilon,$$

pour tous les points du domaine (D_i) , limité par (S_i) .

Ces conditions étant remplies, on aura, en choisissant convenablement le nombre δ ,

$$\int (f - f_1)^2 d\tau < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, donné à l'avance.

Prenons maintenant la fonction $P(m)$ satisfaisant aux conditions

$$P = \psi \quad \text{à l'extérieur de } (D),$$

$$P = f_1 \quad \text{à l'intérieur de } (D).$$

Il est évident que la fonction P , ainsi définie, reste continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comporte à l'infini comme un potentiel newtonien, admet les dérivées du second ordre dans (D) et satisfait à l'équation de Laplace à l'extérieur de (D) [dans le domaine (D')] (¹).

Donc le théorème précédent s'applique à la fonction $P(m)$.

D'autre part, $P(m)$ satisfait à l'inégalité

$$\int (f - P)^2 d\tau < \varepsilon.$$

Répétant presque textuellement les raisonnements du n° 10 du Chapitre II, on

(¹) Remarquons que la condition restrictive (46) n'a aucune influence sur l'exactitude des raisonnements que nous employons ici.

s'assure que l'égalité

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

a lieu pour toute fonction f qui reste continue avec ses dérivées des deux premiers ordres dans (D).

Cette proposition étant établie, on démontre ensuite, comme aux nos 11 et 12 du Chapitre II, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Quelle que soit la fonction f , bornée et intégrable dans le domaine donné (D), on a toujours*

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau$$

pour toutes les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice

$$G(m, m_1) = H(m, m_1) + \frac{\mu}{4\pi r},$$

où $H(m, m_1)$, considérée comme une fonction du point m (1), est une fonction ayant les propriétés du potentiel newtonien, μ est une constante satisfaisant à l'inégalité

$$\mu^2 > 2L^2 \frac{D\beta}{\alpha},$$

D désignant le volume de (D), β et α le maximum et le minimum de la fonction positive $p(m)$ dans (D), L^2 la constante qui figure dans l'inégalité

$$\int [\Delta H(m, m_1)]^2 d\tau' < L^2.$$

30. De ce théorème résulte presque immédiatement un théorème plus général, analogue à celui du n° 13 du Chapitre II, qui conduit de son côté (voir n° 27) au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fonction $f(m)$, jouissant des propriétés du potentiel newtonien jointes à la condition (46), se développe dans (D) en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions fondamentales satisfaisant aux conditions du théorème du numéro précédent.*

(1) Rappelons que le point m_1 reste toujours à l'intérieur de (D),

31. Revenons au cas où la fonction génératrice se réduit à

$$\frac{1}{4\pi r}.$$

Il est évident que cette fonction satisfait à toutes les conditions des nos 26 et 27.

On obtient donc immédiatement les propositions suivantes :

A. *Quelle que soit la fonction f , bornée et intégrable dans (D), on a le développement*

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

où V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont les fonctions universelles de M. A. Korn.

B. *Toute fonction se représentant sous la forme du potentiel newtonien se développe dans (D) en série uniformément convergente procédant suivant les fonctions universelles de M. A. Korn* (1).

32. Les théorèmes énoncés résultent comme des cas particuliers des théorèmes plus généraux, établis plus haut.

Si nous appliquons les raisonnements des nos 23, 24 et 25 de ce Chapitre immédiatement aux fonctions de M. Korn, la démonstration se simplifiera essentiellement, comme nous le verrons tout de suite.

Les fonctions V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) de M. Korn satisfont aux conditions

$$(47) \quad \Delta V_k + \lambda_k p V_k = 0 \quad \text{dans (D)};$$

$$(48) \quad \Delta V_k = 0 \quad \text{dans (D')};$$

$$(49) \quad \int p V_n V_m d\tau = 0, \quad n \geq m.$$

On peut poser encore

$$(50) \quad \int p V_k^2 d\tau = 1.$$

Posons, comme au n° 23,

$$(51) \quad f = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_n V_n + R_n,$$

f désignant une fonction, continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

(1) Voir A. KORN, *Le problème mathématique des vibrations universelles*. (Communications de la Société mathématique de Kharkow, 1903.)

Reprenons l'inégalité

$$(52) \quad \frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} > l_{n+1} = \lambda_{n+1} \quad (1),$$

en conservant les notations du n° 23.

On trouve

$$\int \sum \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial R_n}{\partial x} dT = - \int R_n \Delta v_1 d\tau = \int \rho R_n^2 d\tau = J_0,$$

car dans le cas considéré

$$v_1(m) = \int \frac{\rho R_n}{r} d\tau'.$$

Par conséquent,

$$J_0 \leq \int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT.$$

D'autre part,

$$\int \sum \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 dT = - \int v_1 \Delta v_1 d\tau = \int \rho v_1 R_n d\tau \leq \sqrt{J_0} \sqrt{J_1}.$$

On a donc

$$\frac{\sqrt{J_0}}{\sqrt{J_1}} \leq \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT}{J_0},$$

d'où, en vertu de (52),

$$(53) \quad J_0 < \frac{\int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT}{\lambda_{n+1}}.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$K_n = \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 dT.$$

On trouve, eu égard à (51),

$$\begin{aligned} K_n = & \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dT - 2 \sum_{k=1}^n A_k \int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} dT \\ & + \sum_{k=1}^n A_k^2 \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 dT + 2 \sum A_n A_m \int \sum \frac{\partial V_n}{\partial x} \frac{\partial V_m}{\partial x} dT. \end{aligned}$$

(1) Rappelons que dans le cas considéré $\lambda_k = l_k (k = 1, 2, 3, \dots)$.

Or, en vertu de (47), (48), (49) et (50),

$$\begin{aligned}\int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\Gamma &= - \int f \Delta V_k d\tau = \lambda_k A_k, \\ \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\Gamma &= - \int V_k \Delta V_k d\tau = \lambda_k, \\ \int \sum \frac{\partial V_n}{\partial x} \frac{\partial V_m}{\partial x} d\Gamma &= - \int V_n \Delta V_m d\tau = 0 \quad \text{pour } n \geq m.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$K_n = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\Gamma - \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k^2,$$

d'où

$$K_n < \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\Gamma = Q.$$

On trouve donc, eu égard à (53),

$$J_0 < \frac{Q}{\lambda_{n+1}},$$

d'où l'on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int p R_n^2 d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int p f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \quad A_k = \int p f V_k d\tau,$$

quelle que soit la fonction f continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier et se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien.

La généralisation de cette proposition ne présente aucune difficulté et conduit au théorème du n° 31.

Le théorème B n'est qu'une simple conséquence de la proposition tout à l'heure démontrée.

33. J'ai déjà indiqué l'application du théorème A à la démonstration du théorème de Poisson, classique dans la théorie d'attraction, ainsi qu'à la solution du problème inverse d'attraction, dans mon *Mémoire : Sur certaines égalités communes à plusieurs, etc.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, mars 1904, p. 25 et suiv.).

Je me permets de ne pas reproduire l'analyse en renvoyant au *Mémoire* cité.

Ici, je me bornerai à la remarque suivante :

Soit $f(m)$ une fonction continue avec ses dérivées du premier ordre dans l'espace tout entier, se comportant à l'infini comme un potentiel newtonien, admettant les dérivées de trois premiers ordres, continues dans le domaine (D), et vérifiant l'équation

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans (D')}.$$

Ces conditions étant remplies, on a identiquement

$$f + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau' = 0$$

pour tous les points de l'espace.

Le théorème A permet de généraliser cette proposition, bien connue.

Démontrons que la condition de la continuité des dérivées de trois premiers ordres de la fonction $f(m)$ n'a rien d'essentiel et que l'identité précédente a lieu toujours, pourvu que $f(m)$ admette les dérivées des deux premiers ordres, bornées et intégrables dans (D), et satisfasse à toutes les autres conditions indiquées plus haut.

Appliquons le théorème A à la fonction

$$u = f(m) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau',$$

qui reste continue dans (D).

On trouve, en posant $p(m) = 1$,

$$\int u^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2,$$

où

$$\begin{aligned} B_k &= \int \left(f(m) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau' \right) V_k d\tau \\ &= A_k + \frac{1}{4\pi} \int V_k \left(\int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau' \right) d\tau. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int V_k \left(\int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau' \right) d\tau &= \int \Delta f(m_1) \left(\int \frac{V_k(m)}{r} d\tau \right) d\tau' \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \int V_k(m_1) \Delta f(m_1) d\tau' \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \int V_k(m) \Delta f(m) d\mathbf{T}; \end{aligned}$$

car, d'après l'hypothèse faite sur $f(m)$,

$$\Delta f(m) = 0 \quad \text{dans } (D').$$

Or, le théorème de Green donne

$$\begin{aligned} \int V_k(m) \Delta f(m) dT &= \int f(m) \Delta V_k(m) dT \\ &= \int f(m) \Delta V_k(m) d\tau = -\lambda_k \int f(m) V_k(m) d\tau = -\lambda_k A_k, \end{aligned}$$

car V_k satisfait aux équations

$$\begin{aligned} \Delta V_k + \lambda_k V_k &= 0 \quad \text{dans } (D), \\ \Delta V_k &= 0 \quad \text{dans } (D'). \end{aligned}$$

On a donc, quel que soit l'indice k ,

$$B_k = 0$$

et, par suite,

$$\int u^2 d\tau = 0,$$

d'où l'on conclut, en se rappelant que u reste continue dans (D) ,

$$u = f(m) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau' = 0.$$

Cette identité conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *S'il existe une fonction $f(m)$ telle que la densité $\varphi(m)$ du potentiel newtonien*

$$\int \frac{\varphi(m_1)}{r} d\tau'$$

se représente sous la forme

$$(54) \quad \varphi(m) = \frac{\partial^2 f(m)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(m)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(m)}{\partial z^2},$$

on a toujours

$$\Delta \int \frac{\varphi(m_1)}{r} d\tau' = -4\pi \varphi(m)$$

sous la seule supposition que la fonction $\varphi(m)$, assujettie à la condition (54), reste bornée et intégrable dans (D) .

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES
A LA SOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES DES MINIMA.

34. Soit $G(m, m_1)$ une fonction appartenant à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs (voir n° 25 du Chapitre I).

Soit $\varphi(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (D).

Supposons que l'intégrale

$$\int G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

soit différente de zéro et posons

$$f(m) = \int G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'.$$

On obtient une fonction $f(m)$ continue dans (D) et différente de zéro.

Désignons par V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) les fonctions fondamentales définies par les relations

$$V_k(m) = \lambda_k \int G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau',$$

en supposant, pour plus de simplicité, que la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Appliquons le théorème du n° 13 du Chapitre précédent à l'intégrale

$$(55) \quad \int \varphi f d\tau.$$

On trouve

$$(56) \quad \int \varphi f d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2,$$

car

$$B_k = \int \varphi V_k d\tau = \lambda_k \int f V_k d\tau = \lambda_k A_k.$$

Il s'ensuit que l'intégrale (55) reste toujours positive et différente de zéro, quelle que soit la fonction $\varphi(m)$.

Si l'on pose, en effet,

$$(57) \quad \int \varphi f d\tau = 0,$$

on aura, eu égard à (56),

$$A_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

car tous les λ_k sont positifs.

Or, d'après le théorème du n° 8 du Chapitre I, on a toujours

$$(58) \quad \int f^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

On en conclut que la condition (57) entraîne la suivante

$$\int f^2 d\tau = 0,$$

d'où

$$(59) \quad f = 0,$$

car f reste continue dans (D).

La condition (59) est incompatible avec l'hypothèse faite sur φ .

Donc, l'intégrale (55) est différente de zéro.

Le rapport

$$\frac{\int f \varphi d\tau}{\int f^2 d\tau}$$

admet donc un minimum.

La théorie des fonctions fondamentales permet de résoudre le problème suivant :

Soit $G(m, m_1)$ une fonction appartenant à la classe de fonctions génératrices, auxquelles correspondent les fonctions fondamentales n'ayant que des nombres caractéristiques positifs; soit $\varphi(m)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans le domaine donné (D) et telle que l'intégrale

$$f(m) = \int G(m, m_1) \varphi(m_1) d\tau'$$

soit différente de zéro.

Trouver la limite inférieure précise du rapport

$$K = \frac{\int \varphi f d\tau}{\int f^2 d\tau}.$$

Les égalités (56) et (58) donnent

$$K = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2},$$

d'où l'on tire immédiatement, en supposant que les nombres λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) soient rangés dans l'ordre croissant de grandeur,

$$(60) \quad K \geq \lambda_1,$$

λ_1 désignant le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $G(m, m_1)$ et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Il est évident que λ_1 représente la limite inférieure précise du rapport K .

Posant, en effet,

$$\varphi(m) = V_1(m),$$

on obtient

$$K = \lambda_1.$$

35. Considérons quelques cas particuliers.

Prenons pour $G(m, m_1)$ la fonction

$$G(m, m_1) = \frac{1}{4\pi r}.$$

Soit $f(m)$ une fonction quelconque jouissant des propriétés du potentiel newtonien.

Le théorème du n° 33 donne

$$f(m) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(m_1)}{r} d\tau'.$$

Posons, dans le rapport K ,

$$\varphi = -\Delta f(m).$$

On trouve

$$K = \frac{-\int f \Delta f d\tau}{\int f^2 d\tau} = \frac{-\int f \Delta f d\Gamma}{\int f^2 d\tau},$$

car, d'après l'hypothèse faite sur f ,

$$\Delta f = 0 \quad \text{dans } (D').$$

On a donc

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\Gamma}{\int f^2 d\tau} \geq \lambda_1,$$

où λ_1 est le plus petit des nombres caractéristiques correspondant aux fonctions fondamentales de M. Korn.

Donc : *Le rapport*

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\Gamma}{\int f^2 d\tau},$$

où f est un potentiel newtonien, reste toujours supérieur ou au moins égal au plus petit des nombres caractéristiques correspondant aux fonctions universelles appartenant au domaine donné (D) [sous la supposition que $p(m) = 1$].

36. Désignons maintenant par $G(m, m_1)$ la fonction de Green, par V_k les fonctions fondamentales satisfaisant aux conditions

$$V_k(m) = \lambda_k \int G(m, m_1) V_k(m_1) d\tau'.$$

Soit $f(m)$ une fonction quelconque continue, admettant les dérivées des deux premiers ordres dans (D) et s'annulant sur (S).

On peut écrire, eu égard au théorème du n° 5,

$$f = - \int G(m, m_1) \Delta f(m_1) d\tau'.$$

Posons, dans le rapport K,

$$\varphi = - \Delta f.$$

On trouve

$$K = \frac{- \int f \Delta f d\tau}{\int f^2 d\tau} = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int f^2 d\tau}.$$

L'inégalité générale (60), appliquée au cas considéré, donne

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int f^2 d\tau} \geq \lambda_1,$$

ce qui démontre la proposition suivante :

Le rapport

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int f^2 d\tau}$$

reste toujours supérieur ou au moins égal à λ_1 , λ_1 étant le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions fondamentales correspondant à la fonction de Green et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$, quelle que soit la fonction $f(m)$ continue, admettant les dérivées des deux premiers ordres dans (D) et s'annulant sur (S).

37. Il est aisé de s'assurer que l'existence des dérivées du second ordre de la fonction $f(m)$ n'a rien d'essentiel : *Le théorème précédent reste vrai toujours, pourvu que la fonction continue $f(m)$ s'annule sur (S) et admette les dérivées du premier ordre dans (D).*

Pour s'en assurer, posons

$$f = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_n V_n + R_n,$$

d'où l'on tire

$$(61) \quad \int \sum \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau - 2 \sum_{k=1}^n A_k \int \sum \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} d\tau \\ + \sum_{k=1}^n A_k^2 \int \sum \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} \right)^2 d\tau + 2 \sum A_n A_m \int \sum \frac{\partial V_n}{\partial x} \frac{\partial V_m}{\partial x} d\tau.$$

Cette égalité donne

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2.$$

On a donc

$$K \geq \lambda_1,$$

quelle que soit la fonction $f(m)$ ayant les propriétés indiquées au début de ce numéro.

38. Entendons enfin par V_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) les fonctions fondamentales correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$ du n° 7 et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$.

Soit $f(m)$ une fonction quelconque continue et admettant les dérivées du premier ordre dans (D).

Reprenons l'égalité (61) du numéro précédent.

En se rappelant que V_k satisfont aux conditions

$$\Delta V_k + \lambda_k V_k = 0 \quad \text{dans } (D),$$

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (S),$$

on trouve, comme au numéro précédent,

$$\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2.$$

D'autre part, appliquant à la fonction $f(m)$ le théorème du n° 10, on obtient

$$\int f^2 d\tau = \frac{1}{D} \left(\int f d\tau \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Par suite,

$$K = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int f^2 d\tau} \geq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + \frac{1}{D} \left(\int f d\tau \right)^2}.$$

En supposant que

$$\int f d\tau = 0,$$

on aura

$$K \geq \lambda_1,$$

ce qui démontre la proposition suivante :

Le rapport

$$\frac{\int \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 d\tau}{\int f^2 d\tau}$$

reste toujours supérieur ou au moins égal au plus petit des nombres caractéristiques correspondant à la fonction génératrice $J(m, m_1)$ et à la fonction caractéristique $p(m) = 1$, quelle que soit la fonction $f(m)$ continue, admettant les dérivées du premier ordre et satisfaisant à la condition

$$\int f d\tau = 0.$$

C'est un lemme analogue au lemme fondamental de M. H. Poincaré que nous

avons pris pour le point de départ de nos recherches; il importe de remarquer seulement que *le lemme que nous venons d'établir assigne une limite inférieure précise du rapport K* ⁽¹⁾.

39. La méthode, analogue à celle que nous avons employée dans les recherches précédentes, s'applique aussi à la démonstration des fonctions fondamentales $W_k(m)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) d'une autre espèce, définies par les équations

$$W_k(m) = \mu_k \int q(m_1) J(m, m_1) W_k(m_1) ds',$$

où l'intégrale, prise par rapport aux variables $m_1(\xi, \eta, \zeta)$, s'étend à la surface donnée (S) tout entière, $q(m)$ et $J(m, m_1)$ sont les fonctions analogues aux fonctions $p(m)$ et $G(m, m_1)$, μ_k sont des constantes caractéristiques des fonctions fondamentales $W_k(m)$.

Nous allons exposer la théorie générale de ces fonctions dans la seconde Partie de ce Mémoire.

⁽¹⁾ Comparer mon Mémoire: *Sur le développement d'une fonction donnée en série procédant suivant les fonctions harmoniques* (Communications de la Société mathématique de Kharkow, Kharkow, 1897).

