Annales de la faculté des sciences de Toulouse

P. Duhem

Sur les équations de l'hydrodynamique. Commentaire à un mémoire de Clebsch

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 3, nº 2 (1901), p. 253-279
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_2_253_0>

SUR LES

ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE.

COMMENTAIRE A UN MÉMOIRE DE CLEBSCH.

PAR M. P. DUHEM.

Clebsch a donné [1], des équations de l'Hydrodynamique, une transformation extrêmement remarquable. Cette transformation repose sur l'obtention de trois intégrales premières des équations de Lagrange; ces intégrales s'obtiennent par l'application de la méthode de Jacobi à un système canonique.

Ce Mémoire de Clebsch étant quelque peu délaissé, nous avons jugé qu'il serait utile d'en donner une sorte de commentaire. On trouvera, dans ce commentaire, une justification directe et très élémentaire de la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations canoniques de la Dynamique; à la vérité, le cas traité correspond au mouvement d'un système qui dépend d'un seul paramètre; mais les démonstrations données s'étendraient sans peine au cas où le nombre de paramètres serait quelconque. On y trouvera également l'établissement des relations qui existent entre les intégrales obtenues par Clebsch et les intégrales obtenues antérieurement par Cauchy. L'étude de ces relations nous permettra de retrouver les propositions obtenues par Clebsch, sans faire usage du théorème de Jacobi sur l'intégration des équations canoniques.

1 [2]. Soient $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ trois fonctions des variables x, y, z, que nous pouvons regarder comme les composantes, au temps t et au point (x, y, z), de la vitesse d'un point matériel appartenant à un fluide.

La *ligne de flux* qui passe par un point vérifie les relations

$$\frac{dx}{U(x, y, z)} = \frac{dy}{V(x, y, z)} = \frac{dz}{W(x, y, z)}, \tag{1}$$

[1] A. CLEBSCH, *Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd LVI, p. 1; 1859).

[2] La démonstration donnée en ce § 1 est inspirée de C. NEUMANN, *Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik*, p. 118 (Leipzig, 1893).

que l'on peut encore écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V(x, y, z)}{U(x, y, z)}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{W(x, y, z)}{U(x, y, z)}. \tag{2}$$

Intégré, ce système de deux équations différentielles simultanées donne

$$\begin{cases} y = f(x, a, b), \\ z = g(x, a, b), \end{cases} \tag{3}$$

a et b étant deux constantes arbitraires. Résolvons les équations (3) par rapport à ces deux constantes; nous obtenons les équations des lignes de flux sous la forme

$$\begin{cases} \varpi(x, y, z) = a, \\ p(x, y, z) = b. \end{cases} \tag{4}$$

Si dx, dy, dz sont les composantes d'un élément linéaire pris sur une ligne de flux, on aura, selon ces égalités (4),

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varpi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varpi}{\partial z}dz = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = 0$$

et comme dx, dy, dz vérifient en même temps les égalités (1), on aura

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varpi}{\partial x}U + \dfrac{\partial\varpi}{\partial y}V + \dfrac{\partial\varpi}{\partial z}W = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x}U + \dfrac{\partial p}{\partial y}V + \dfrac{\partial p}{\partial z}W = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ces égalités (5) exigent qu'il existe une fonction $\lambda(x, y, z)$ telle que l'on ait

$$\begin{cases} U = \lambda\left(\dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial\varpi}{\partial y} - \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\varpi}{\partial z}\right), \\ V = \lambda\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\varpi}{\partial z} - \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial\varpi}{\partial x}\right), \\ W = \lambda\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\varpi}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\varpi}{\partial y}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Supposons, en particulier, que les trois fonctions U, V, W vérifient en tout point l'égalité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Moyennant les égalités (6), cette égalité (7) devient,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varpi}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varpi}{\partial z}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varpi}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varpi}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varpi}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varpi}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial z}=0$$

ou bien, en vertu des égalités (6),

$$\mathrm{U}\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\mathrm{V}\frac{\partial \lambda}{\partial y}+\mathrm{W}\frac{\partial \lambda}{\partial z}=0$$

ou bien enfin, en désignant par dx, dy, dz un élément linéaire pris sur une ligne de flux et en tenant compte des égalités (1),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}dx+\frac{\partial \lambda}{\partial y}dy+\frac{\partial \lambda}{\partial z}dz=0.$$

La fonction λ ne varie donc pas lorsque le point (x, y, z) parcourt une ligne de flux. Or, selon les équations (4), pour que le point (x, y, z) parcoure une ligne de flux, il faut et il suffit que les deux fonctions $\varpi(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ gardent des valeurs invariables. Donc $\lambda(x, y, z)$ ne varie pas, lorsque x, y, z varient de telle sorte que $\varpi(x, y, z)$, $p(x, y, z)$ demeurent constants; λ ne dépend des variables x, y, z que par l'intermédiaire des fonctions ϖ et p :

$$\lambda(x,y,z)=\chi[p(x,y,z),\varpi(x,y,z)]. \tag{8}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial \mathrm{Q}(p,\varpi)}{\partial \varpi}=\chi(p,\varpi),\\&\mathrm{Q}[p(x,y,z),\varpi(x,y,z)]=q(x,y,z).\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Nous aurons

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\chi\frac{\partial \varpi}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}=\chi\frac{\partial \varpi}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

et, par conséquent, en tenant compte de l'égalité (8),

$$\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z}=\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varpi}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varpi}{\partial z}\right).$$

Comparée à la première des égalités (6), cette égalité donne la première des égalités

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z},\\ V &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x},\\ W &= \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

D'où cette proposition, due à Jacobi :

Si trois fonctions $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ *vérifient l'égalité* (7), *on peut trouver deux fonctions* $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ *qui permettent d'écrire les égalités* (10).

Soient maintenant $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ trois fonctions quelconques. Les trois composantes du *vortex*

$$(11)\qquad U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},\qquad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\qquad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

vérifient évidemment l'égalité (7) ; on peut donc les mettre sous la forme (10). Ces égalités (10) peuvent s'écrire alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z},\\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x},\\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(v - p\frac{\partial q}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(w - p\frac{\partial q}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(w - p\frac{\partial q}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(u - p\frac{\partial q}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(u - p\frac{\partial q}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v - p\frac{\partial q}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Les trois quantités

$$u - p\frac{\partial q}{\partial x},\quad v - p\frac{\partial q}{\partial y},\quad w - p\frac{\partial q}{\partial z}$$

sont donc les trois dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z. Si nous désignons par φ cette fonction, nous pourrons écrire

$$(12)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial q}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + p\dfrac{\partial q}{\partial y}, \\ w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + p\dfrac{\partial q}{\partial z}. \end{cases}$$

Donc, *étant données trois fonctions quelconques* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, *on peut toujours trouver trois autres fonctions* $\varphi(x, y, z)$, $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ *qui permettent d'écrire les égalités* (12).

2. Dans tous les cas où l'on sait les traiter, les équations de l'Hydrodynamique se laissent ramener à la forme suivante :

$$(13)\qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \gamma_x = 0, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial y} + \gamma_y = 0, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial z} + \gamma_z = 0,$$

Λ étant une certaine fonction de x, y, z, t et γ_x, γ_y, γ_z les trois composantes de l'accélération du point matériel qui se trouve en x, y, z à l'instant t.

Dans le système d'Euler, on sait que l'on a

$$(14)\qquad \begin{cases} \gamma_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Mettons u, v, w sous la forme (12). La première des égalités (14) deviendra

$$\begin{aligned} \gamma_x = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial t} \\ & + v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - w\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{\partial q}{\partial x} \\ & - \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial x} \\ = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + \frac{dp}{dt}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{dq}{dt}\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Posons

$$(15) \qquad P = \Lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

et la première des égalités (13) deviendra la première des égalités

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{dp}{dt}\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{dq}{dt}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{dp}{dt}\dfrac{\partial q}{\partial y} - \dfrac{dq}{dt}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{dp}{dt}\dfrac{\partial q}{\partial z} - \dfrac{dq}{dt}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

3. Passons maintenant des variables x, y, z, t d'Euler aux variables a, b, c, t de Lagrange, a, b, c étant, à l'instant fixe t_0, les coordonnées du point matériel qui se trouve en x, y, z à l'instant t. Remarquons que si, par ce changement de variables, la fonction $f(x, y, z, t)$ se transforme en une fonction que nous continuerons à désigner par $f(a, b, c, t)$, on a identiquement

$$(17) \qquad \frac{d}{dt} f(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(a, b, c, t).$$

Multiplions respectivement les égalités (16) par $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ et ajoutons-les membre à membre, en tenant compte de l'identité (17); nous trouvons la première des égalités

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial a} + \dfrac{\partial p}{\partial t}\dfrac{\partial q}{\partial a} - \dfrac{\partial q}{\partial t}\dfrac{\partial p}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial b} + \dfrac{\partial p}{\partial t}\dfrac{\partial q}{\partial b} - \dfrac{\partial q}{\partial t}\dfrac{\partial p}{\partial b} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial c} + \dfrac{\partial p}{\partial t}\dfrac{\partial q}{\partial c} - \dfrac{\partial q}{\partial t}\dfrac{\partial p}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Adoptons les notations

$$(19) \qquad \begin{cases} df = \dfrac{\partial f}{\partial a}da + \dfrac{\partial f}{\partial b}db + \dfrac{\partial f}{\partial c}dc + \dfrac{\partial f}{\partial t}dt, \\ Df = \dfrac{\partial f}{da}Da + \dfrac{\partial f}{\partial b}Db + \dfrac{\partial f}{\partial c}Dc. \end{cases}$$

Les égalités (18) pourront s'écrire

$$(20) \qquad DP = \frac{\partial q}{\partial t}Dp - \frac{\partial p}{\partial t}Dq.$$

P ne varie pas lorsqu'on laisse t invariable et lorsqu'on fait varier a, b, c de façon que p et q ne varient pas; P ne dépend donc des variables a, b, c, t que par l'intermédiaire de p, q, t.

Il existe donc une fonction de p, q, t, $H(p, q, t)$ *telle que l'égalité*

$$P(a, b, c, t) = H(p, q, t) \tag{21}$$

se transforme en identité lorsqu'on y remplace p *et* q *par les fonctions* $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$.

En outre, la comparaison des égalités (20) et (21) montre que *les égalités*

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q} = -\frac{\partial p}{\partial t} \tag{23}$$

doivent, elles aussi, se transformer en identités lorsqu'on y remplace p *et* q *par les fonctions* $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$.

Les égalités (22) et (23) ont la même forme que les équations canoniques de la Dynamique.

Nous allons transformer la dernière proposition 3. Les équations différentielles (22) et (23) déterminent les fonctions $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$ lorsque l'on connaît les valeurs $m(a, b, c)$, $n(a, b, c)$ que prennent respectivement ces fonctions pour $t = t_0$.

Il est donc clair que ces fonctions peuvent être obtenues de la manière suivante :

Considérons les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial \chi} = \frac{d\psi}{dt}, \qquad \frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial \psi} = -\frac{d\chi}{dt}. \tag{24}$$

Elles déterminent les fonctions χ et ψ de t si l'on y joint la condition que pour $t = t_0$, χ prend la valeur m et ψ la valeur n, ces deux valeurs étant arbitraires. En d'autres termes, il existe deux fonctions

$$\chi(t, m, n), \quad \psi(t, m, n)$$

des variables indépendantes t, m, n telles qu'en les substituant dans les équations

$$\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial \chi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial \psi} = -\frac{\partial \chi}{\partial t}, \tag{26}$$

on obtienne deux identités vérifiées quels que soient t, m, n, et que l'on ait, en outre, quels que soient t, m et n,

$$\chi(t_0, m, n) = m, \qquad \psi(t_0, m, n) = n.$$

Il est clair que si à m, n nous substituons $m(a, b, c)$, $n(a, b, c)$, nous obtenons deux fonctions de a, b, c, t

$$(27) \qquad \begin{cases} \chi[t,\ m(a, b, c),\ n(a, b, c)] = p(a, b, c, t), \\ \psi[t,\ m(a, b, c),\ n(a, b, c)] = q(a, b, c, t). \end{cases}$$

Ces fonctions vérifient évidemment les équations (22) et (23); en outre, pour $t = t_0$, elles se réduisent respectivement à $m(a, b, c)$, $n(a, b, c)$; ce sont donc les fonctions cherchées.

La recherche des fonctions $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$ équivaut donc à la recherche des fonctions $\chi(t, m, n)$, $\psi(t, m, n)$.

4. Considérons l'équation

$$(28) \qquad \psi(t, m, n) = \psi$$

comme définissant un changement de variables et permettant de passer des variables indépendantes t, m, n aux variables indépendantes t, m, ψ; à cet effet, résolvons-la par rapport à n sous la forme

$$(29) \qquad n = \nu(t, m, \psi).$$

Dans le système des variables t, m, n, on a $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$; l'égalité (29) donne donc, dans ce système de variables, l'identité

$$(30) \qquad \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial \nu}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

vérifiée quels que soient t, m, n. Cette identité sera encore une identité si l'on y fait le changement de variable que représente l'égalité (29); si nous désignons par $\overline{f}$ ce que devient $f(t, m, n)$ par ce changement de variable, l'identité (30) se transformera en l'identité

$$(31) \qquad \frac{\partial \nu(t, m, \psi)}{\partial t} + \frac{\partial \nu(t, m, \psi)}{\partial \psi}\,\overline{\frac{\partial \psi}{\partial t}} = 0,$$

vérifiée quels que soient t, m, ψ.

Si, dans la fonction $\chi(t, m, n)$, nous faisons le changement de variables que définit l'égalité (29), nous obtenons une fonction $\theta(t, m, \psi)$ que définit l'identité

$$\overline{\chi} = \theta(t, m, \psi). \tag{32}$$

Cette identité (32) nous donne à son tour les deux identités

$$\frac{\partial\,\theta(t, m, \psi)}{\partial\psi} = \overline{\frac{\partial\chi}{\partial n}}\,\frac{\partial\,\nu(t, m, \psi)}{\partial\psi}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial\,\theta(t, m, \psi)}{\partial t} = \overline{\frac{\partial\chi}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial\chi}{\partial n}}\,\frac{\partial\,\nu(t, m, \psi)}{\partial t}. \tag{34}$$

Les identités (31), (33) et (34) donnent l'identité

$$\frac{\partial\,\theta(t, m, \psi)}{\partial\psi}\,\overline{\frac{\partial\psi}{\partial t}} + \frac{\partial\,\theta(t, m, \psi)}{\partial t} - \overline{\frac{\partial\chi}{\partial t}} = 0. \tag{35}$$

Mais si l'on remplace ψ et χ par $\psi(t, m, n)$, $\chi(t, m, n)$, les égalités (25) et (26) se transforment en identités vérifiées quels que soient t, m, n; par le changement de variables que définit l'égalité (29), ces identités restent des identités; si l'on remarque que, par ce changement de variables, χ se transforme en $\theta(t, m, \psi)$, on peut dire que les égalités

$$\frac{\partial\,\mathrm{H}(\theta, \psi, t)}{\partial\theta} = \overline{\frac{\partial\psi}{\partial t}}, \tag{25 bis}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{H}(\theta, \psi, t)}{\partial\psi} = -\overline{\frac{\partial\chi}{\partial t}} \tag{26 bis}$$

se transforment en identités vérifiées, quels que soient t, m, ψ, si l'on y remplace θ par $\theta(t, m, \psi)$. En comparant ce résultat à l'identité (35), on voit que l'égalité

$$\frac{\partial\,\mathrm{H}(\theta, \psi, t)}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \frac{\partial\,\mathrm{H}(\theta, \psi, t)}{\partial\psi} + \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \tag{36}$$

se transforme en identité vérifiée quels que soient t, m, ψ, si l'on y substitue à θ la fonction $\theta(t, m, \psi)$. D'où la proposition suivante :

Si l'on connaît un système

$$\chi(t, m, n), \quad \psi(t, m, n)$$

d'intégrales générales des équations différentielles simultanées (24), *on sait, par de simples résolutions d'équations, former une intégrale complète*

$$\theta(t, m, \psi) + \mathrm{C},$$

où C *est une quantité indépendante de* t, m, ψ, *de l'équation aux dérivées partielles* (36).

5. Posons

$$\mathrm{H}[\theta(t, m, \psi), \psi, t] = \mathrm{F}(t, m, \psi). \tag{37}$$

Déterminons une fonction $\mathrm{V}(t, m, \psi)$ par les conditions suivantes :

1° On a, quels que soient t, m, ψ,

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial t} + \mathrm{F}(t, m, \psi) = 0. \tag{38}$$

2° Pour $t = t_0$, on a, quels que soient m et ψ,

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi} - \theta(t, m, \psi) = 0. \tag{39}$$

Cette détermination se ramène à une quadrature; à la fonction V ainsi déterminée, on peut toujours ajouter une quantité quelconque indépendante de t, m, ψ sans qu'elle cesse de vérifier les conditions (38) et (39).

Nous aurons identiquement, quels que soient t, m, ψ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi} - \theta\right) &= \frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= -\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \psi} + \frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'identité (36),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi} - \theta(t, m, \psi)\right] = 0.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (39), montre que l'on a, quels que soient t, m, ψ,

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi} - \theta(t, m, \psi) = 0. \tag{40}$$

Les égalités (38), (40) et (39), qui ont lieu quels que soient t, m, ψ, donnent l'égalité, vraie quels que soient t, m, ψ,

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial t} + \mathrm{H}\left[\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi}, \psi, t\right] = 0, \tag{41}$$

en sorte que la fonction $\mathrm{V}(t, m, \psi)$, qui dépend d'une quantité arbitraire m, indépendante des variables t et ψ, est une intégrale de l'*équation de Jacobi :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}, \psi, t\right) = 0. \tag{42}$$

Nous pouvons regarder l'égalité (28) comme représentant un changement de variables et comme permettant de repasser des variables t, m, ψ aux variables t, m, n; par ce changement de variables, une fonction $g(t, m, \psi)$ devient une fonction de t, m, n que nous représenterons par $\overline{\overline{g}}$.

Supposons qu'une fonction $f(t, m, n)$ ait été transformée, au moyen de l'égalité (29), en une fonction des variables t, m, ψ, que nous sommes convenus de représenter par $\overline{f}$; si, dans cette dernière fonction, nous faisons le changement de variables représenté par l'égalité (28), nous devons retomber sur la fonction $f(t, m, n)$; d'où l'identité

$$\overline{\overline{\overline{f}}} = f(t, m, n). \tag{43}$$

L'identité (40) demeurera une identité si l'on y fait le changement de variables défini par l'égalité (28). Or, selon l'identité (32),

$$\overline{\overline{\theta(t, m, \psi)}} = \overline{\overline{\overline{\chi}}};$$

et, selon l'identité (43), le second membre n'est autre chose que $\chi(t, m, n)$. On a donc l'identité

$$\overline{\overline{\frac{\partial V}{\partial \psi}}} = \chi(t, m, n), \tag{44}$$

vraie quels que soient t, m, n.

Calculons maintenant $\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\frac{\partial V}{\partial m}}}$. Nous avons successivement, selon (38), (39) et (37),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{\frac{\partial V}{\partial m}}} &= \overline{\overline{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial m}}} + \overline{\overline{\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial V}{\partial m}}}\,\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} \\
&= \overline{\overline{\frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial V}{\partial t}}} + \overline{\overline{\frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial V}{\partial \psi}}}\,\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} \\
&= -\overline{\overline{\frac{\partial F}{\partial m}}} + \overline{\overline{\frac{\partial \theta}{\partial m}}}\,\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} \\
&= -\overline{\overline{\frac{\partial H}{\partial \theta}}}\,\overline{\overline{\frac{\partial \theta}{\partial m}}} + \overline{\overline{\frac{\partial \theta}{\partial m}}}\,\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} \\
&= \left[\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} - \overline{\overline{\frac{\partial H}{\partial \theta}}}\right]\overline{\overline{\frac{\partial \theta}{\partial m}}}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Mais l'on a, quels que soient t, m, ψ, l'identité

$$\frac{\overline{\partial\psi}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{H}[\theta(t, m, \psi), \psi, t]}{\partial\theta} = 0. \tag{25 bis}$$

Si l'on y fait le changement de variables défini par l'égalité (28), en tenant compte de l'égalité (43), on trouve

$$\frac{\partial \psi(t, m, n)}{\partial t} - \frac{\overline{\overline{\partial \mathrm{H}}}}{\partial\theta} = 0$$

et l'identité (45) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\overline{\partial \mathrm{V}}}}{\partial m} = 0. \tag{46}$$

En d'autres termes, il existe une fonction μ des seules variables m, n telle que l'on ait, quels que soient t, m, n,

$$\frac{\overline{\overline{\partial \mathrm{V}}}}{\partial m} = \mu(m, n). \tag{47}$$

Les identités (44) et (47) nous enseignent que les deux équations

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial\psi} = \chi, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial m} = \mu(m, n) \tag{49}$$

deviennent deux identités lorsqu'on y substitue respectivement à ψ et à χ les fonctions $\psi(t, m, n)$, $\chi(t, m, n)$.

Si donc

$$\psi(t, m, n), \quad \chi(t, m, n)$$

forment un système d'intégrales générales des équations différentielles (25) *et* (26), *on peut, par des résolutions d'équations et une quadrature, trouver une intégrale* $\mathrm{V}(t, m, \psi)$, *dépendant d'une quantité arbitraire m, de l'équation* (42) *de Jacobi; on peut, en outre, trouver une fonction* $\mu(m, n)$ *telle que les fonctions* $\psi(t, m, n)$, $\chi(t, m, n)$, *s'obtiennent en résolvant les équations* (48) *et* (49).

6. *Réciproquement, soit* $\mathrm{V}(t, m, \psi)$ *une intégrale de l'équation de Jacobi* (42), *intégrale qui dépend autrement que par simple addition d'une quantité m indépendante de t et de ψ; soit en outre μ une quantité indépen-*

dante de t et de ψ. Les deux équations

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial m} = \mu, \tag{49 bis}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi} = \chi, \tag{48 bis}$$

définissent deux fonctions $\psi(t, m, \mu)$, $\chi(t, m, \mu)$, qui, substituées à ψ et à χ dans les équations différentielles (25) *et* (26), *les transforment en identités.*

Soit f une expression qui dépend de ψ, ou de χ, ou de ces deux quantités; désignons par $\overline{f}$ le résultat que l'on obtient en y substituant à ψ et à χ les fonctions $\psi(t, m, \mu)$, $\chi(t, m, \mu)$.

Selon l'égalité (49 *bis*), qui définit la fonction $\psi(t, m, \mu)$, on a identiquement, quels que soient t, m, μ,

$$\overline{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial m}} = \mu,$$

partant

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial m}} &= \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial t\, \partial m}} + \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \psi\, \partial m}}\,\frac{\partial \psi(t, m, \mu)}{\partial t} \\ &= \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial t}} + \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial \psi}}\,\frac{\partial \psi(t, m, \mu)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{50}$$

Mais, par hypothèse, la fonction $\mathrm{V}(t, m, \psi)$ intègre l'équation de Jacobi (42); on a donc, quels que soient t, m, ψ,

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi}, \psi, t\right) = 0,$$

partant

$$\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial t} + \frac{\partial}{\partial \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi}}\mathrm{H}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \psi}, \psi, t\right)\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial \psi} = 0.$$

Cette égalité, ayant lieu quel que soit t, m, ψ, a encore lieu si l'on remplace ψ par $\psi(t, m, \mu)$; mais alors, selon l'égalité (48 *bis*), $\dfrac{\partial \mathrm{V}(t, m, \psi)}{\partial \psi}$ se réduit à $\chi(t, m, \mu)$; l'égalité précédente devient donc

$$\overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial t}} + \overline{\frac{\partial \mathrm{H}(\chi, \psi, t)}{\partial \chi}}\,\overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial \psi}} = 0.$$

Jointe à l'égalité (50), elle donne

$$\left[\overline{\frac{\partial \mathrm{H}(\chi, \psi, t)}{\partial \chi}} - \frac{\partial \psi(t, m, \mu)}{\partial t}\right]\overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial m\, \partial \psi}} = 0. \tag{51}$$

Peut-il arriver que l'on ait

$$\overline{\frac{\partial^2 V}{\partial m\, \partial\psi}} = \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\, \partial m}} = 0? \tag{52}$$

La fonction $\psi(t, m, \mu)$ est racine de l'équation (49 *bis*); si l'égalité (52) était vérifiée, elle en serait *racine double;* si nous excluons cette hypothèse, l'égalité (51) nous montre que nous avons identiquement, quels que soient t, m, μ,

$$\overline{\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial\chi}} = \frac{\partial \psi(t, m, \mu)}{\partial t}. \tag{25 ter}$$

Selon l'égalité (48 *bis*), qui définit la fonction $\chi(t, m, \mu)$, on a, quels que soient t, m, μ,

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial\psi}} = \chi(t, m, \mu),$$

partant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi(t, m, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\frac{\partial V}{\partial\psi}} &= \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial\psi}} + \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}}\,\frac{\partial\psi(t, m, \mu)}{\partial t} \\ &= \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\, \partial t}} + \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}}\,\frac{\partial\psi(t, m, \mu)}{\partial t}.\end{aligned} \tag{53}$$

Mais l'équation de Jacobi (42) se transforme en identité lorsqu'on y remplace la lettre V par la fonction $V(t, m, \psi)$. On a donc, quels que soient t, m, ψ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\, \partial t} + \frac{\partial}{\partial \frac{\partial V}{\partial\psi}} H\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}, \psi, t\right)\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} + \frac{\partial}{\partial\psi} H\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}, \psi, t\right) = 0.$$

Dans cette identité, substituons $\psi(t, m, \mu)$ à ψ; selon l'égalité (48 *bis*), $\frac{\partial V}{\partial\psi}$ devient $\chi(t, m, \mu)$; on a donc, quels que soient t, m, μ, l'identité

$$\overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\, \partial t}} + \overline{\frac{\partial H(\psi, \psi, t)}{\partial\chi}}\,\overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}} + \overline{\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial\psi}} = 0.$$

Rapprochée de l'identité (53), elle donne, quels que soient t, m, μ, l'identité

$$\frac{\partial\chi(t, m, \mu)}{\partial t} = -\overline{\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial\psi}} - \left[\overline{\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial\chi}} - \frac{\partial\psi(t, m, \mu)}{\partial t}\right]\overline{\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}},$$

que l'identité (25 *ter*) transforme en

$$\overline{\frac{\partial H(\chi, \psi, t)}{\partial\psi}} = -\frac{\partial\chi(t, m, \mu)}{\partial t}. \tag{26 ter}$$

Les identités (25 *ter*) et (26 *ter*) démontrent le théorème énoncé.

7. On peut, dans tout ce qui précède, remplacer les arbitraires m, n par des fonctions $m(a, b, c)$, $n(a, b, c)$; la fonction $\mu(m, n)$ qui figure au n° 5 devient alors une fonction $\mathrm{M}(a, b, c)$; à l'arbitraire μ, qui figure au n° 6, on peut également substituer une fonction de a, b, c, qu'il est loisible de désigner par $\mathrm{M}(a, b, c)$. Les fonctions $\chi(t, m, n)$, $\psi(t, m, n)$ se transforment en deux fonctions de t, a, b, c, que l'on peut représenter par $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$; il en est de même des fonctions $\psi(t, m, \mu)$, $\chi(t, m, \mu)$. Dès lors, au lieu de dire, comme au n° 2, que les deux fonctions $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$, transforment en identités, quels que soient a, b, c, t, les égalités (22) et (23), il revient au même de dire que *l'on peut trouver une intégrale* $\mathrm{V}(t, m, q)$ *de l'équation de Jacobi*

$$(42\ bis)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \mathrm{H}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}, q, t\right) = 0,$$

intégrale qui dépend d'une arbitraire m autrement que par simple addition, et deux grandeurs $m(a, b, c)$, $\mathrm{M}(a, b, c)$, *indépendantes de t, de telle sorte que les fonctions* $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$ *s'obtiennent en résolvant les deux équations en p et q* :

$$(49\ ter)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}[t, m(a, b, c), q]}{\partial\, m(a, b, c)} = \mathrm{M}(a, b, c),$$

$$(48\ ter)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}[t, m(a, b, c), q]}{\partial q} = p.$$

Selon l'égalité (21), la fonction $\mathrm{H}(p, q, t)$ doit se réduire à $\mathrm{P}(a, b, c, t)$ lorsqu'on y remplace les lettres p et q par $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$, ce que l'on peut exprimer par l'égalité

$$(21\ bis)\qquad \overline{\mathrm{H}(p, q, t)} = \mathrm{P}(a, b, c, t).$$

Mais, selon l'égalité (48 *ter*), on a identiquement

$$\overline{\frac{\partial \mathrm{V}[t, m(a, b, c), q]}{\partial q}} = \bar{p},$$

en sorte que l'égalité (21 *bis*) équivaut à celle-ci :

$$(54)\qquad \overline{\mathrm{H}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}, q, t\right)} = \mathrm{P}(a, b, c, t),$$

$\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial q}$ étant mis par abréviation pour $\dfrac{\partial \mathrm{V}[t, m(a, b, c), q]}{\partial q}$. Mais la fonction $\mathrm{V}(t, m, q)$ vérifie l'égalité (22 *bis*), quels que soient t, m, q; on a donc, quels que soient t, a, b, c, q,

$$\frac{\partial V[t, m(a, b, c), q]}{\partial t} + H\left\{\frac{\partial V[t, m(a, b, c), q]}{\partial q}, q, t\right\} = 0$$

et, par conséquent,

$$\overline{\frac{\partial V[t, m(a, b, c), q]}{\partial t}} + \overline{H\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right)} = 0.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (54), nous montre que l'on a, quels que soient a, b, c, t,

$$P(a, b, c, t) + \overline{\frac{\partial V[t, m(a, b, c), q]}{\partial t}} = 0. \tag{55}$$

8. Remplaçons dans les fonctions $p(a, b, c, t)$, $q(a, b, c, t)$, $m(a, b, c)$, $M(a, b, c)$, les variables a, b, c, t de Lagrange par les variables x, y, z, t d'Euler; ces fonctions deviennent $p(x, y, z, t)$, $q(x, y, z, t)$, $m(x, y, z, t)$, $M(x, y, z, t)$.

Dans le système de Lagrange, les grandeurs m, M sont indépendantes de t; cela exige que l'on ait, dans le système de variables d'Euler, les deux identités, vérifiées quels que soient x, y, z, t,

$$\frac{\partial m}{\partial t} + u\frac{\partial m}{\partial x} + v\frac{\partial m}{\partial y} + w\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \tag{56}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial x} + v\frac{\partial M}{\partial y} + w\frac{\partial M}{\partial z} = 0. \tag{57}$$

Posons

$$\overline{V[t, m(a, b, c), q]} = U(a, b, c, t) = W(x, y, z, t). \tag{58}$$

Nous aurons les égalités

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et les égalités

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \overline{\frac{\partial V}{\partial m}}\frac{\partial m}{\partial a} + \overline{\frac{\partial V}{\partial q}}\frac{\partial q}{\partial a},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Selon les égalités (48 *ter*) et (49 *ter*), ces dernières égalités nous donnent

$$\frac{\partial U}{\partial a} = M(a, b, c)\frac{\partial m}{\partial a} + p(a, b, c)\frac{\partial q}{\partial a},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et les premières deviennent

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} = {} & M\left(\frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right)\\ & + p\left(\frac{\partial q}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right),\end{aligned}$$

....

ou bien

$$(59)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x} = M\dfrac{\partial m}{\partial x} + p\dfrac{\partial q}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial y} = M\dfrac{\partial m}{\partial y} + p\dfrac{\partial q}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial z} = M\dfrac{\partial m}{\partial z} + p\dfrac{\partial q}{\partial z}.\end{cases}$$

Si nous posons alors

$$(60)\quad \Phi(x, y, z, t) = -\varphi(x, y, z, t) - W(x, y, z, t),$$

les égalités (12) et (59) deviendront

$$(61)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - M\dfrac{\partial m}{\partial x},\\[2mm] v = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - M\dfrac{\partial m}{\partial y},\\[2mm] w = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - M\dfrac{\partial m}{\partial z}.\end{cases}$$

Les égalités (56) et (57) prennent alors la forme

$$(62)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial m}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial m}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial m}{\partial t} = 0,$$

$$(63)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial M}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial M}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial t} = 0.$$

Considérons l'expression, formée au moyen des variables d'Euler,

$$(64)\quad \Omega = \Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - M\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}.$$

Les égalités (15) et (60) permettent de lui donner la forme

$$(65)\quad \Omega = P + \frac{\partial W}{\partial t} - p\frac{\partial q}{\partial t} - M\frac{\partial m}{\partial t}.$$

Or, l'égalité (58) donne

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} w,$$

égalité d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} &- \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\left(u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}\right) \\ &- \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial b}\left(u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z}\right) \\ &- \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial c}\left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

La première égalité (58) donne à cette égalité la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = \frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial t} &+ \frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial q} \frac{\partial q(a, b, c, t)}{\partial t} \\ &- \left(\frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial a} + \frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial a}\right)\left(u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z}\right) \\ &- \left(\frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial b} + \frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial b}\right)\left(u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z}\right) \\ &- \left(\frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial c} + \frac{\overline{\partial \mathrm{V}}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial c}\right)\left(u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z}\right),\end{aligned}$$

qui devient, en vertu des égalités (49 *ter*), (48 *ter*) et (55),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = &- \mathrm{P}(a, b, c, t) \\ &- \mathrm{M}\Big[\left(\frac{\partial m}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x}\right) u \\ &\qquad + \left(\frac{\partial m}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y}\right) v \\ &\qquad + \left(\frac{\partial m}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}\right) w\Big] \\ &+ p\Big[\frac{\partial q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x}\right) u \\ &\qquad - \left(\frac{\partial q}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y}\right) v \\ &\qquad - \left(\frac{\partial q}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}\right) w\Big].\end{aligned}$$

Si l'on exprime les fonctions P, M, m, p, q, au moyen des variables d'Euler, cette égalité devient

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = -\mathrm{P}(x, y, z, t) - \mathrm{M}\left(\frac{\partial m}{\partial x}u + \frac{\partial m}{\partial y}v + \frac{\partial m}{\partial z}w\right) + p\left[\frac{\partial q}{\partial t} - \left(\frac{\partial q}{\partial x}u + \frac{\partial q}{\partial y}v + \frac{\partial q}{\partial z}w\right)\right]$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (56),

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = -\mathrm{P}(x, y, z, t) + \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + p\frac{\partial q}{\partial t}.$$

L'égalité (65) devient alors

$$\Omega = 0,$$

ce que l'égalité (64) permet d'écrire

$$\Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = 0 \tag{66}$$

ou, plus explicitement, en vertu des égalités (61),

$$\Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial z}\right)^2\right] = 0. \tag{67}$$

Cette égalité est la généralisation du théorème de Daniel Bernoulli.

Nous pouvons désormais énoncer le théorème suivant :

Les trois équations (13), *fournies par le principe de d'Alembert, entraînent l'existence de trois fonctions* $\Phi(x, y, z, t)$, $\mathrm{M}(x, y, z, t)$, $m(x, y, z, t)$, *qui vérifient les équations* (62), (63) *et* (67), *et auxquelles les composantes* u, v, w *de la vitesse sont liées par les égalités* (61).

9. *Réciproquement, si les trois fonctions* Φ, M, m *vérifient, quels que soient* x, y, z, t, *les équations* (62), (63) et (67), *les fonctions* u, v, w, *formées par les égalités* (61), *vérifieront les égalités* (13).

En effet, de l'égalité (67) on tire, en la différentiant en x,

$$\begin{aligned}
o = & \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + M\frac{\partial m}{\partial t}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right) \\
= & \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right) \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right) \\
& + \frac{\partial m}{\partial x}\left[\frac{\partial M}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial M}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial M}{\partial z}\right] \\
& - \frac{\partial M}{\partial x}\left[\frac{\partial m}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + M\frac{\partial m}{\partial y}\right)\frac{\partial m}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + M\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial m}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

Or, selon l'égalité (63), l'avant-dernier terme devient

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial m}{\partial x},$$

tandis que selon l'égalité (62), le dernier terme devient

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + M\frac{\partial m}{\partial x}\right)\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Si donc on tient compte des égalités (61), l'égalité précédente prend la forme

$$o = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

où l'on reconnaît la première des égalités (13). Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

10. On remarquera que la transformation des équations de l'Hydrodynamique qui vient d'être exposée ne fait nullement intervenir l'*équation de continuité;* si ρ est la densité du fluide, cette équation s'écrit, dans le système des variables d'Euler,

$$(68)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

Moyennant les égalités (61), elle peut s'écrire

$$(69)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial y}\right)\right]&\\ -\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial z}\right)\right]&=0.\end{aligned}$$

11. Ramenées aux variables de Lagrange, les deux fonctions M, m ne dépendent pas de t; de ce résultat établi par Clebsch, nous allons chercher à déduire ceux que Cauchy avait obtenus dès 1815 et qui, d'une autre manière, conduisent à des intégrales premières des équations de Lagrange.

Les deux fonctions M et m dépendant de a, b, c et non point de t, nous pouvons poser

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial b}-\frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial c}&=\mathrm{A}(a,b,c),\\ \frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial c}-\frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}&=\mathrm{B}(a,b,c),\\ \frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}-\frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial b}&=\mathrm{C}(a,b,c).\end{aligned}\right.$$

D'autre part, les trois composantes du tourbillon

$$(71)\qquad \xi=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \eta=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z},\qquad \zeta=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}$$

peuvent s'écrire, en vertu des égalités (61),

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned}\xi&=\frac{\partial m}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z},\\ \eta&=\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}-\frac{\partial m}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x},\\ \zeta&=\frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}-\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial x}&=\frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},\\ \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}&=\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

Les trois égalités (72) se transforment en trois égalités que la notation des déterminants fonctionnels permet d'écrire sous la forme

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{D(b,c)}{D(y,z)}A + \frac{D(c,a)}{D(y,z)}B + \frac{D(a,b)}{D(y,z)}C,\\ \eta &= \frac{D(b,c)}{D(z,x)}A + \frac{D(c,a)}{D(z,x)}B + \frac{D(a,b)}{D(z,x)}C,\\ \zeta &= \frac{D(b,c)}{D(x,y)}A + \frac{D(c,a)}{D(x,y)}B + \frac{D(a,b)}{D(x,y)}C. \end{aligned}\right.$$

Selon la notation posée en la seconde égalité (19), on peut écrire

$$\begin{aligned} Da &= \frac{\partial a}{\partial x}Dx + \frac{\partial a}{\partial y}Dy + \frac{\partial a}{\partial z}Dz,\\ Db &= \frac{\partial b}{\partial x}Dx + \frac{\partial b}{\partial y}Dy + \frac{\partial b}{\partial z}Dz,\\ Dc &= \frac{\partial c}{\partial x}Dx + \frac{\partial c}{\partial y}Dy + \frac{\partial c}{\partial z}Dz. \end{aligned}$$

De ces équations nous tirons

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{D(a,b,c)}{D(x,y,z)}Dx &= \frac{D(b,c)}{D(y,z)}Da + \frac{D(c,a)}{D(y,z)}Db + \frac{D(a,b)}{D(y,z)}Dc,\\ \frac{D(a,b,c)}{D(x,y,z)}Dy &= \frac{D(b,c)}{D(z,x)}Da + \frac{D(c,a)}{D(z,x)}Db + \frac{D(a,b)}{D(z,x)}Dc,\\ \frac{D(a,b,c)}{D(x,y,z)}Dz &= \frac{D(b,c)}{D(x,y)}Da + \frac{D(c,a)}{D(x,y)}Db + \frac{D(a,b)}{D(x,y)}Dc. \end{aligned}\right.$$

Observons que, selon la règle de multiplication des deux déterminants,

$$\frac{D(a,b,c)}{D(x,y,z)} \times \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = 1$$

et identifions les équations (74) aux équations

$$\begin{aligned} Dx &= \frac{\partial x}{\partial a}Da + \frac{\partial x}{\partial b}Db + \frac{\partial x}{\partial c}Dc,\\ Dy &= \frac{\partial y}{\partial a}Da + \frac{\partial y}{\partial b}Db + \frac{\partial y}{\partial c}Dc,\\ Dz &= \frac{\partial z}{\partial a}Da + \frac{\partial z}{\partial b}Db + \frac{\partial z}{\partial c}Dc. \end{aligned}$$

Nous trouvons neuf égalités dont la première est

$$\frac{D(b,c)}{D(y,z)} = \frac{1}{\dfrac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}}\frac{\partial x}{\partial a}.$$

Les égalités (73) deviennent alors

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\xi &= A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c},\\ \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\eta &= A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c},\\ \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\zeta &= A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}\right.$$

En ces égalités (75) on reconnaît des égalités déjà écrites par Cauchy [1]; Cauchy en a tiré la première démonstration rigoureuse du théorème de Lagrange; plus tard, G. Kirchhoff [2] s'en est servi pour démontrer les théorèmes fondamentaux sur le mouvement tourbillonnaire, obtenus d'une autre manière par Helmholtz.

12. Réciproquement, des trois équations (73) données par Cauchy, il est aisé de déduire tous les résultats de Clebsch.

En effet, dans la première des équations (73), faisons $t = t_0$; x, y, z se réduisent respectivement à a, b, c;

$$\frac{D(b,c)}{D(y,z)},\quad \frac{D(c,a)}{D(y,z)},\quad \frac{D(a,b)}{D(y,z)}$$

deviennent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial b}\frac{\partial c}{\partial c} - \frac{\partial b}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} &= 1,\\ \frac{\partial c}{\partial b}\frac{\partial a}{\partial c} - \frac{\partial c}{\partial c}\frac{\partial a}{\partial b} &= 0,\\ \frac{\partial a}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial c} - \frac{\partial a}{\partial c}\frac{\partial b}{\partial b} &= 0; \end{aligned}$$

$A(a,b,c)$ est la valeur de ξ pour $t = t_0$. Si donc on désigne par $u_0(a,b,c)$, $v_0(a,b,c)$, $w_0(a,b,c)$ les valeurs de u, v, w pour $t = t_0$, on aura la première

---

(1) Cauchy, *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie,* sujet remis au concours en septembre 1815 [*Mémoires des Savants étrangers : Sciences mathématiques et physiques,* t. I; 1827. — *Œuvres de Cauchy,* 1re série, t. I, p. 40, formule (16)].

(2) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik; Mechanik.* XVte Vorlesung, égalités (15).

des égalités

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial v_0}{\partial c}-\frac{\partial w_0}{\partial b}=\mathrm{A}(a,b,c),\\ &\frac{\partial w_0}{\partial a}-\frac{\partial u_0}{\partial c}=\mathrm{B}(a,b,c),\\ &\frac{\partial u_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial a}=\mathrm{C}(a,b,c),\end{aligned}\right.$$

qui sont dues à Cauchy; les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Les trois quantités A, B, C sont donc trois fonctions des seules variables a, b, c qui vérifient la relation

$$(77)\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial b}+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial c}=0.$$

Dès lors, selon le lemme de Jacobi démontré au n° 1 [égalités (7) et (10)], il existe deux fonctions $m(a,b,c)$, $\mathrm{M}(a,b,c)$ des seules variables a, b, c telles que l'on ait les égalités

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial b}-\frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial c}=\mathrm{A},\\ &\frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial c}-\frac{\partial m}{\partial c}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}=\mathrm{B},\\ &\frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}-\frac{\partial m}{\partial a}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial b}=\mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

Si nous repassons des variables de Lagrange aux variables d'Euler, les fonctions $m(a,b,c)$, $\mathrm{M}(a,b,c)$ deviendront des fonctions $m(x,y,z,t)$, $\mathrm{M}(x,y,z,t)$ qui vérifieront les équations

$$(56)\quad \frac{\partial m}{\partial t}+u\frac{\partial m}{\partial x}+v\frac{\partial m}{\partial y}+w\frac{\partial m}{\partial z}=0,$$

$$(57)\quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}=0.$$

Mais si, dans les équations (73), nous reportons les expressions (70) de A, B, C, ces équations prendront la forme (72); si, dans ces dernières, on remplace les composantes ξ, η, ζ du tourbillon par leurs définitions (71), on obtient des égalités que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(v+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(w+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial z}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(w+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(u+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial x}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(u+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(v+\mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Ces égalités nous enseignent qu'il existe une fonction $\Phi(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(61)\quad \begin{cases} u + \mathrm{M}\dfrac{\partial m}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v + \mathrm{M}\dfrac{\partial m}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ w + \mathrm{M}\dfrac{\partial m}{\partial z} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Moyennant ces égalités (61), les égalités (56) et (57) prennent les formes (62) et (63).

Considérons la quantité

$$\begin{aligned} \gamma_x = \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2+v^2+w^2}{2} \\ &\qquad + v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - w\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Les égalités (61) permettent de lui donner la forme

$$\begin{aligned} \gamma_x = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t}\right) \\ & + \left(\frac{\partial m}{\partial t} + u\frac{\partial m}{\partial x} + v\frac{\partial m}{\partial y} + w\frac{\partial m}{\partial z}\right)\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} \\ & - \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\right)\frac{\partial m}{\partial x} \end{aligned}$$

et les égalités (56) et (57) la forme

$$\gamma_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t}\right).$$

La première des égalités (13) devient ainsi la première des égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^3}{2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Ces égalités équivalent à la suivante :

$$(78) \qquad \Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} = f(t).$$

Mais la fonction Φ, définie par les égalités (61), n'est définie qu'à une fonction près de t; posons

$$(79) \qquad \mathrm{F}(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$$

et, à la fonction Φ, substituons la somme $\Phi + \mathrm{F}(t)$, que nous désignerons encore par Φ; les équations (61), (62), (63) demeureront inaltérées, tandis que l'équation (78) deviendra

$$(80) \qquad \Lambda - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mathrm{M}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} = 0,$$

forme que les égalités (61) ramènent à la forme (67).

13. Les résultats obtenus par Clebsch se déduisent donc sans peine de ceux qui ont été trouvés par Cauchy; et comme ceux-ci ne supposent pas l'emploi du théorème de Jacobi touchant les équations canoniques, on voit que les propositions de Clebsch peuvent être établies sans aucun recours à ce théorème.

D'ailleurs, au lieu de suivre, pour établir les égalités (73), la méthode indiquée par Cauchy, on peut en suivre une autre qui repose sur les propositions établies au n° **2**.

Les égalités (18), en effet, exigent que l'on ait

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial c}\right) = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial a}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial b}\right).$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial c}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial q}{\partial a}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial q}{\partial b}\right) = 0$$

ou bien

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial q}{\partial b}-\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial c}=\mathrm{A}(a, b, c),\\
&\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial q}{\partial c}-\frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial q}{\partial a}=\mathrm{B}(a, b, c),\\
&\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial a}-\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial q}{\partial b}=\mathrm{C}(a, b, c).
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si u, v, w sont mis sous la forme (12), les composantes ξ, η, ζ du tourbillon prennent la forme

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\zeta=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial z},\\
&\eta=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial x},\\
&\xi=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Mais, si nous remarquons que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},\\
&\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

nous voyons sans peine que les égalités (81) et (82) donnent les égalités (73), qui sont celles de Cauchy.