

H. BOUASSE

Sur les courbes de déformation des fils

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, tome 3, n° 1 (1901), p. 85-150

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_1_85_0

© Université Paul Sabatier, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

COURBES DE DÉFORMATION DES FILS,

PAR M. H. BOUASSE,
Professeur à l'Université de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE COMPLÈTE DES COURBES DE PREMIÈRE TORSION ET DE PREMIÈRE DÉTORSION
SOUS CHARGE FAIBLE.

J'ai indiqué, dans le dernier Chapitre, la nature des questions que nous avons à trancher par l'expérience. Notre étude va porter, comme précédemment, sur des fils de cuivre, que nous prendrons dans deux états extrêmes, parfaitement recuits ou fortement étirés à la filière : les états intermédiaires donnent des résultats qu'on peut prévoir facilement, à l'aide de ceux que nous obtiendrons. Nous limitons la question aux charges faibles, laissant de côté les phénomènes qui sont liés aux charges allongeant plus ou moins le fil, ou même le modifiant sans l'allonger sensiblement.

Il y avait deux manières de rédiger ce Chapitre : 1° exposer tous les phénomènes d'abord pour les fils recuits, puis pour les fils étirés; 2° pour chaque phénomène, dire ce qui se passe pour les fils recuits et les fils étirés. Bien que la première méthode conduise à écrire deux Mémoires à la suite l'un de l'autre, ne différant que par la matière du fil étudié, nous l'avons préférée comme permettant de suivre plus facilement le détail numérique des résultats. Nous ne nous sommes d'ailleurs pas astreint à répéter parallèlement les mêmes expériences; nous avons insisté pour chacune d'elles plus particulièrement en utilisant seulement l'une des espèces de fils. On trouvera, dans les Chapitres précédents, la description de nos méthodes d'étirage et de recuit des fils.

FILS PARFAITEMENT RECUITS.

1. *Forme générale de la courbe de torsion.* — Diamètre du fil = $0^{\text{mm}},548$: ce diamètre est déduit du poids en admettant la densité 8,92. Torsion par tour centimètre = 172,1 millièmes. Étant donnée la longueur du fil, la torsion par tour vaut 1700 millièmes. On tord de 1 tour en 17 secondes, ce qui donne 100 millièmes seconde pour la vitesse de torsion.

Tours.	Torsion en millièmes.	Couples (Uni. Arb.).	Différence rapportée à 20 tours.
1.....	1,7	720	
5.....	8,5	951	924
10.....	17	1115	676
20.....	34	1391	552
40.....	68	1858	467
60.....	102	2250	392
80.....	136	2591	341
100.....	170	2892	301
120.....	204	3158	266
140.....	238	3396	238
160.....	272	3608	212
180.....	306	3796	188
200.....	340	3966	170
300.....	510	4640	135

2. *Forme générale des courbes de détorsion.* — Tout le long de la courbe de première torsion, le fil se modifie profondément : ce changement que nous avons appelé *écrouissage*, est très rapide au début et ensuite de plus en plus lent. Les courbes de détorsion qui partent des divers points d'une courbe de première

torsion correspondent donc à des matières différentes et, comme le phénomène n'est pas homogène, à des structures différentes.

La torsion se fait avec une vitesse de 100 millionnièmes seconde; la détorsion avec une vitesse de 4,15 millionnièmes seconde (1 tour en 410 secondes). Le tour vaut 1700 millionnièmes; il n'y a pas d'arrêt au bout de la torsion.

1° Les courbes sont d'abord rapportées à la même origine dans le plan des $C\alpha$ (nombres du Tableau) : les variations de couples correspondant à la même détorsion sont d'autant plus grands que la torsion a été plus grande. La première courbe (0 tour) est la courbe de première torsion décrite avec la vitesse 4,15. Les courbes de détorsion, construites en comptant les couples à partir du couple de départ sur la courbe de première torsion pris pour origine, et les azimuts à partir de l'azimut pour lequel commence la détorsion, sont donc les unes au-dessous des autres et ne se coupent pas. On a indiqué, dans les deux premières lignes du Tableau, les coordonnées du point de la courbe de première torsion pour lequel commence la détorsion.

2° Examinons maintenant chacune de ces courbes et prenons comme coordonnées le couple C et la tangente $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$. Comme la vitesse de torsion n'est pas très petite, les phénomènes de déperdition rapide de couple qui sont consécutifs au changement de signe de la vitesse ne sont pas négligeables; le γ moyen au début de la courbe de détorsion, même calculé pour une détorsion assez grande, peut dépasser considérablement le Γ vrai (atteindre, par exemple, plusieurs fois Γ). Ensuite, pour une variation du couple assez grande, on a sensiblement $\gamma = \Gamma$. Puis le γ décroît et tend vers 0. Il résulte de ces variations que les courbes de détorsion construites dans le plan C, γ , présentent toutes un point d'inflexion à tangente sensiblement horizontale au voisinage de $\gamma = \Gamma$.

3° On peut se demander comment varie $\gamma : \Gamma$ pour un couple invariable donné sur l'ensemble des courbes de détorsion et en particulier pour le couple nul.

Pour la courbe de détorsion qui correspond à une torsion nulle, pour le couple nul, $\gamma : \Gamma = 1$; puisque cette courbe n'est pas autre chose que la courbe de première torsion prise en sens inverse. Le rapport $\gamma : \Gamma$ diminue ensuite avec une extrême rapidité quand la torsion croît. Ainsi, pour une torsion de 3 tours, au couple nul sur la courbe de détorsion, $\gamma : \Gamma = 0,637$. Quand la torsion croît davantage, $\gamma : \Gamma$ passe par un minimum et tend ensuite vers une certaine limite. D'après le Tableau, ce minimum doit avoir lieu sur la courbe de détorsion correspondant à une torsion voisine de 50 tours : pour 300 tours, le rapport est remonté à 0,658. Nous sommes loin de la partie rectiligne prévue par J. Thomson et annoncée expérimentalement par Wiedemann.

Il est bien entendu, et je ne répéterai pas indéfiniment, *qu'un fil ne sert qu'une fois d'après la définition même des courbes.*

Torsion en tours.....	0	9	27	98	300
Couple correspondant...	0	1120	1720	2920	4685
Détorsion en tours.					
0,5.....	634	853	881	950	1061
1.....	751	1370	1537	1721	1885
1,5.....		1625	1982	2400	2659
2.....	842		2269	2965	3374
2,5.....			2463	3423	4038
3.....	898			3787	4629
3,5.....				4078	5155
4.....	941			4310	5610
4,5.....					6010
5.....	979				6347
5,5.....					6641
6.....	1015				6894
6,5.....					7114
$\gamma : \Gamma$ au couple nul...	1,000	0,597	0,588	0,605	0,658

3. *Arrêt en un point d'une courbe de torsion : déperdition de couple à azimut constant.* — Voici un Tableau résumant une série d'expériences :

Vitesse de torsion = 100 millionièmes seconde : cette vitesse correspondrait, si le fil était parfaitement élastique, à un accroissement de 10 divisions par seconde (1 centimètre) de l'échelle sur laquelle on mesure les couples; soit 100 unités arbitraires de couple (puisque nous prenons pour unité arbitraire le $\frac{1}{10}$ de millimètre).

Torsion en tours.....	25	50	100	200	300
» en millièmes..	42,5	85	170	340	510
Couple d'arrêt.....	1610	2131	2967	4026	4700

Déperdition
en

30°.....	57	77	109	155	179
1 ^m	69	12	17	28	44
2 ^m	82	13	20	30	52
4 ^m	98	16	23	34	57
8 ^m	114	16	24	37	64
16 ^m	131	17	25	39	68
32 ^m	149	18	25	39	70
64 ^m	167	18	25	39	74
128 ^m	185	18	25	39	
		261	394		

Pour des temps plus longs, on a observé :

Torsion	25 ^t	50 ^t	100 ^t	200 ^t	300 ^t
Temps.....	256 ^m	964 ^m	379 ^m	908 ^m	867 ^m
Déperdition	203 ^u	330 ^u	456 ^u	719 ^u	884 ^u

Ce qui frappe dans ce Tableau, c'est la tendance de la déperdition Δp entre 2 temps, formant deux termes successifs d'une progression géométrique, à atteindre une certaine limite constante, et cela d'autant plus vite que la torsion a été moindre. Bien que la vitesse de torsion ne soit pas bien grande (fil de 1^m environ, 1 tour en 17 secondes), les déperditions sont énormes; en 867 minutes par exemple, un peu plus d'une demi-journée, il se perd 884 unités sur 4700, soit 19 pour 100 pour un fil tordu de 300 tours.

Nous avons cherché à représenter par des formules de la forme

$$p = A \log(t + \tau) - B.$$

Pour la torsion de	25 tours.....	$p = 59 \log(t + 20^s) - 44,$
»	50 tours.....	$p = 83 \log(t + 20^s) - 64,$
»	100 tours.....	$p = 131 \log(t + 22^s) - 116,$
»	200 tours.....	$p = 188 \log(t + 25^s) - 172,$
»	300 tours.....	$p = 242 \log(t + 33^s) - 256.$

Voici maintenant les différences entre le calcul et l'observation : les logarithmes sont usuels, et les temps sont pris en secondes :

	25 t.	50 t.	100 t.	200 t.	300 t.
$t = 0^s$	43 ^u	44 ^u	62 ^u	91 ^u	110 ^u
30 ^s	-1	0	0	0	0
1 ^m	-1	0	-2	0	-3
2 ^m	+1	0	-1	-1	-2
4 ^m	0	-1	0	0	+2
8 ^m	+1	-1	0	-1	+4
16 ^m	+2	-1	-1	-2	+5
32 ^m	+2	-1	-1	-4	+6
64 ^m	+1	-2	-1	-8	+5

Nous avons déjà dit, dans le Chapitre VI, quelle interprétation rationnelle on peut donner de ces résultats singuliers. Les nombres de la première ligne représentent l'ensemble du phénomène que nous avons appelé *déperdition rapide*; bien entendu, la précision de cette détermination indirecte est assez faible.

La constante A de la formule s'exprime en fonction du couple d'arrêt par une formule parabolique à très peu près linéaire : la constante τ varie de 20° à 33°; naturellement, l'incertitude est notable.

4. *Arrêt en un point d'une courbe de première torsion ou de première détorsion.* — La première partie de cette série est identique à l'expérience du n° 3, mais avec une sensibilité du dynamomètre différente; on donne toute la série pour faciliter les comparaisons numériques.

Voici d'abord la courbe de torsion; on donne dans le Tableau suivant les couples et les différences de 20 en 20 tours. Le dernier couple correspond à 260 tours.

C = 0		C = 3576	
	$\Delta C = 1390$		$\Delta C = 224$
1390		3800	
	518		200
1908		4000	
	424		183
2332		4183	
	369		164
2701		4347	
	327		150
3028		4497	
	292		133
3320		4630	
	256		

On arrive au couple $C_1 = 4720$ vers 272 tours. Pour le fil parfaitement élastique, on aurait une torsion de 1824^u par tour, soit $5^u, 07$ par degré, soit 36.480 en 20 tours. Le γ est donc très vite une petite fraction de Γ . On tordait de 1 tour en 17^s , soit de $21^0, 2$ par seconde. Le produit $21^0, 2 \times 5^u, 07 = 107^u, 5$ est la déperdition initiale, consécutive à l'arrêt en un point de la courbe de torsion, par seconde, dès qu'on a dépassé 20 tours.

Le fil pèse $2^{gr}, 143$ par mètre : son diamètre, déduit de la densité conventionnelle $8,92$, est égal à $0^{mm}, 553$; la longueur étant 1^m , le tour de torsion vaut 1737 millionnièmes.

Voici maintenant les dispositions consécutives à l'arrêt en un point de la courbe de torsion défini par son couple :

Couples.	3720.	4320.	4520.	4720.
	141	166	172	177
Temp. = 30 ^s ...	141	166	172	177
	37	40	45	43
1 ^m ...	178	206	217	220
	40	46	49	50
2 ^m ...	218	252	266	270
	43	54	54	55
4 ^m ...	261	306	320	323
	49	56	61	61
8 ^m ...	310	362	381	384
	51	63	66	66
16 ^m ...	361	425	447	450
	54	65	69	71
32 ^m ...	415	490	516	521
	55	65	72	73
64 ^m ...	470	555	588	594
	56	67	76	76
128 ^m ...	526	622	664	670
	55	70	75	75
256 ^m ...	581	692	739	745
		72	75	75
512 ^m ...		764	814	820

La détorsion se fait (sans qu'il y ait arrêt au bout de la torsion) avec une vitesse de 1 tour en 410^s. Pour juger de la grandeur des effets des phénomènes étudiés, on se rappellera que si le fil était parfaitement élastique, une torsion de 1 tour donnerait un $\Delta C = 1824$. Ainsi la perte de couple en 1024^m, qui suit l'arrêt, sur une courbe de détorsion, au couple 3720 (la torsion ayant été préalablement poussée à 4720), équivaut sensiblement à l'effet d'une détorsion de 60°.

Toutes les courbes de détorsion ont leur origine au couple $C_1 = 4720$, la torsion se fait sur la courbe de première torsion avec la vitesse de 1 tour en 17^s. La ligne « couples » donne les couples d'arrêt sur la courbe de détorsion, qui serait unique si tous les fils étaient parfaitement identiques. La ligne γ donne les γ sur cette courbe de détorsion au moment de l'arrêt : si $\gamma = \Gamma$, on écrit $\gamma = 1000$.

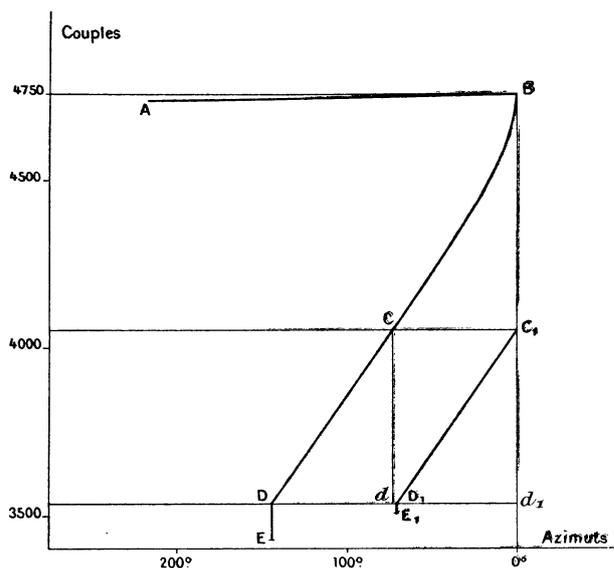
Couples. γ.	4520.	4320. 1086.	4020. 1056.	3720. 1010.	2720. 934.
Temp.=30 ^s ...	49	18	7	2	2
— 49	30	— 18	— 7	— 2	2
1 ^m ..	— 79	12	4	2	1
— 79	40	— 30	— 11	— 4	3
2 ^m ..	— 119	23	10	5	1
— 119	49	— 53	— 21	— 9	4
4 ^m ..	— 168	33	17	8	0
— 168	59	— 86	— 38	— 17	4
8 ^m ..	— 227	43	25	13	— 1
— 227	64	— 129	— 63	— 30	3
16 ^m ..	— 291	52	36	22	— 3
— 291	71	— 181	— 99	— 52	0
32 ^m ..	— 362	60	44	30	— 7
— 362	76	— 241	— 143	— 82	— 7
64 ^m ..	— 438	67	51	38	— 12
— 438	75	— 308	— 194	— 120	— 19
128 ^m ..	— 513	68	56	44	— 17
— 513	75	— 376	— 250	— 164	— 36
256 ^m ..	— 588	69	57	48	— 23
— 588	73	— 445	— 307	— 212	— 59
512 ^m ..	— 661	69	56	48	— 23
— 661	74	— 514	— 363	— 260	— 82
1024 ^m ..	— 735	69	57	48	
— 735		— 583	— 420	— 308	

Couples. γ.	1720. 842.	720. 744.	0. 641.	—1280. 434.	—2280. 191.
Temp.=30 ^s	6	10	13	20	28
6	3	10	13	20	28
1 ^m	9	4	7	10	12
9	2	14	20	30	40
2 ^m	11	5	8	11	16
11	3	19	28	41	56
4 ^m	14	7	9	16	19
14	4	26	37	57	75
8 ^m	18	6	11	16	24
18	2	32	48	73	99
16 ^m	20	8	11	18	24
20	1	40	59	91	123
32 ^m	21	7	11	21	30
21	0	47	70	112	153
64 ^m	21	6	10	22	32
21	— 2	53	80	134	185
128 ^m	19	5	11	23	33
19	— 5	58	91	157	218
256 ^m	14	5	10	22	33
14		63	101	179	251
512 ^m		4	10	22	33
		67	111	191	284
1024 ^m		4	10		33
		71	121		317

Les couples sont marqués — quand il y a décroissance (le mouvement total est direct par rapport au mouvement avant l'arrêt qui était une détorsion); ils sont marqués + s'ils croissent : le mouvement est rétrograde. J'ai donné, dans le Chapitre précédent, l'interprétation de ces Tableaux. On se reportera principalement à ce que j'ai dit (p. 461, C) sur les phénomènes de variation de couples consécutifs à l'arrêt sur les courbes de torsion et de détorsion au voisinage de la torsion maxima, et (p. 461, D) sur l'interversion du sens du mouvement consécutif observé pour l'arrêt au couple 2720 sur la courbe de détorsion.

5. *Déperdition en un point d'une courbe de détorsion avec arrêt variable T au bout de la courbe de torsion.* — Les fils sont tordus avec la vitesse invariable V (courbe AB) jusqu'à un couple invariable : s'ils étaient parfaitement

Fig. 1.



identiques, toutes les courbes se superposeraient et aboutiraient à un point invariable B; cette condition est à peu près réalisée. Pendant l'arrêt T, il y a déperdition suivant BC_1 . On détord alors, avec la vitesse invariable, jusqu'à un couple donné : on arrête et l'on étudie les variations de couples consécutifs à l'arrêt (*fig. 1*).

Rapportons les courbes de détorsion à la courbe BCD qui correspond à $T = 0$; il suffit pour un T donné, et pour chaque couple, de donner la distance azimutale CC_1 . Cette longueur, variable avec T, ne dépend pas du couple. La courbe C_1D_1 s'obtient à peu près rigoureusement en transportant horizontalement CD parallèlement à l'axe des azimuts.

Ce n'est pas tout à fait exact : CC_1 croît légèrement quand les couples décroissent; la courbe de détorsion $T = 0$ est un peu plus incurvée que les autres. En d'autres termes, pour un même couple, γ est d'autant plus petit que T est plus petit.

Il est entendu que les variations de couple après l'arrêt (à azimut constant) sont positives si le mouvement est rétrograde, négatives s'il est direct. Soient D_0 et D_T les déperditions pour un même couple sur deux courbes de détorsion pour lesquelles les arrêts sont 0 et T , $D_0 < D_T$; D croît quand T croît; l'arrêt facilite les variations de couples rétrogrades (accroissements) et diminue les variations directes (diminutions).

Pour un couple donné, γ est sensiblement indépendant de T ; donc, la vitesse de variation du couple au moment même de l'arrêt est indépendante de T . C'est sur les variations qui se font après les premiers instants que porte l'influence de T . Cette influence est d'autant plus grande que le couple d'arrêt est plus voisin de celui du point B. Si l'on prolonge beaucoup les courbes de détorsion, par exemple pour des couples négatifs, l'effet de T , tout en restant net, perd de son importance.

Torsion de 128 tours jusqu'au couple 4750 en unités arbitraires, fil de 1^m de long et de 0^{mm},553 de diamètre. $\Gamma = 7^u,03$ par degré. Vitesse de torsion, 1 tour en 16^s,52; de détorsion, 1 tour en 415^s.

T.	BC ₁ .	Couple d'arrêt.	Détorsion à partir des points C ₁ .	CC ₁ .	Déperdition	
					de 0 ^m à 1 ^m .	de 1 ^m à 64 ^m .
0.....	0				— 8	— 136
143 ^m	678 ^u	3850 ^u		71°	0	— 8
0.....	0				— 3	— 25
180 ^m	697 ^u	2750 ^u		73°	— 5	+ 9
0.....	0		664 ^u		+ 21	+ 56
729 ^m	832 ^u	50 ^u	659°	92°	+ 22	+ 75
0.....	0		988°		+ 31	+ 95
209 ^m	710 ^u	— 1150 ^u	982°	74°	+ 31	+ 110
0.....	0		1405°		+ 41	+ 133
859 ^m	840 ^u	— 2150 ^u	1385°	93°	+ 41	+ 149

D'après ce que nous avons expliqué (Chap. VI, p. 462, E), nous dirons que l'influence de l'arrêt T s'exerce sur ce que nous avons appelé *réactivité* et influe

principalement ensuite sur les phénomènes de déperdition lente que nous attribuons à cette cause.

On recommence les mêmes expériences en multipliant les deux vitesses par le coefficient 2,92. On va au même couple 4750 et l'on s'arrête sur les courbes de détorsion au couple 50. On donne les variations de couples entre les temps 0 et 1^m et les temps 1^m et 64^m.

		Variation de couple.					
Un tour	{	de torsion en 16,52	{	T = 0 ^m	+ 21	+ 56	19
		de détorsion en 415		T = 729 ^m	+ 22	+ 75	
Un tour	{	de torsion en 5,66	{	T = 0 ^m	+ 33	+ 53	27
		de détorsion en 142		T = 853 ^m	+ 38	+ 80	

L'interprétation de ces résultats est assez délicate. Nous voyons d'abord que le changement de vitesse modifie beaucoup les variations de couple pendant la première minute : ce n'est pas que le γ soit beaucoup changé sur les courbes de détorsion ; mais nous savons, d'après l'équation de continuité, que pour un même $\Gamma - \gamma$ la vitesse de variation initiale à l'arrêt est proportionnelle à la vitesse. Évidemment la variation en 1^m n'a qu'un rapport lointain avec la vitesse initiale de variation ; aussi tandis que les vitesses sont multipliées par 2,92, les variations de couple en une minute ne le sont que par 1,6 (comparaison des expériences pour lesquelles $T = 0$). Tout au contraire les variations de couple entre 1^m et 64^m sont très peu modifiées par les changements des vitesses. Elles le sont pourtant et dans le sens que l'on pouvait prévoir ; quand la vitesse de détorsion est plus rapide, toutes choses égales d'ailleurs, l'influence de T sur le phénomène de variation lente augmente.

Ainsi pour augmenter le plus possible le phénomène de (réactivité) variation lente de couple consécutif à l'arrêt, il faut tordre lentement, faire un arrêt prolongé, détordre vite ; en supposant bien entendu que le couple de torsion et le couple d'arrêt soient imposés. Si l'on veut au contraire diminuer ce phénomène (lent), il faut tordre vite, faire $T = 0$, détordre lentement.

6. *Courbe de première torsion décrite en plusieurs fois avec arrêts en divers points.* — Soit (*fig. 2*) AB une courbe de première torsion. On arrête au point B pendant un temps T et l'on parvient à azimut constant au point C. On retord alors dans le sens primitif. L'équation de continuité donne, pour la tangente γ de départ sur la courbe de retorsion Cg,

$$\gamma = \Gamma + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right).$$

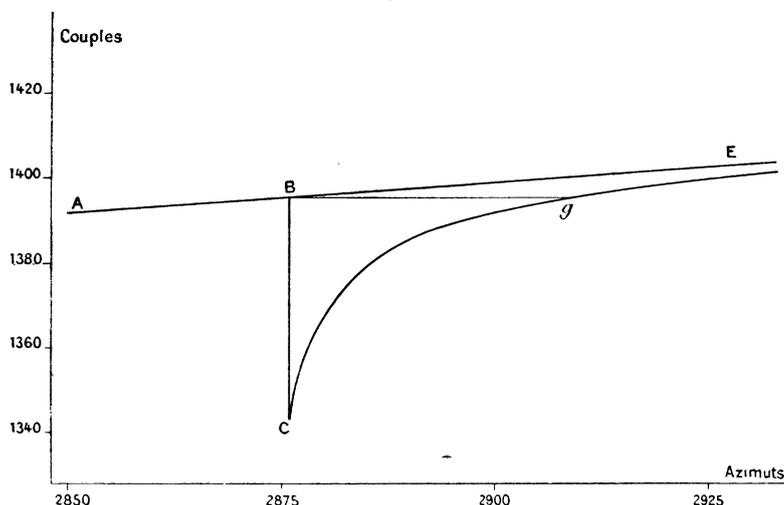
Comme $\frac{\partial C}{\partial t} < 0$, $\gamma < \Gamma$: γ est d'autant plus voisin de Γ que T est plus grand.
Comme $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$ diminue rapidement en fonction de T , pratiquement après un temps d'arrêt assez court, on peut poser

$$\gamma = \Gamma.$$

Nous nous proposons de déterminer la forme de la courbe de retorsion Cg . Nous supposons que la vitesse de torsion est la même sur AB et Cg : nous traiterons plus loin le cas général.

L'expérience montre que la courbe Cg se raccorde presque rigoureusement avec le prolongement de la courbe AB , c'est-à-dire avec ce qu'aurait été la

Fig. 2.



courbe AB , s'il n'y avait pas eu d'arrêt au point B . La difficulté de l'expérience réside en ce que l'on doit opérer sur deux bouts de fils différents et que l'on peut craindre qu'ils ne soient pas identiques. La différence est en tous cas fort petite. Voici des résultats d'expériences :

Fil de 1^m et de $0^{mm}, 553$; 1 tour en 594^s . Une courbe I est tracée sans arrêts, l'autre II avec des arrêts de 15^m . Il faut à peu près $1^h 30^m$ pour décrire l'une et $2^h 30^m$ pour l'autre. $\Gamma = 7^u, 175$ par degré; si le fil était parfaitement élastique, quand à partir du point C sur la courbe Cg , on parcourt 5° , le couple devrait croître de $7,175 \times 5 = 36^u$. L'expérience montre qu'il ne l'est pas. Ceci ne prouve pas que γ n'est pas égal à Γ , sur la courbe Cg au point C lui-même, mais que cette courbe Cg s'infléchit extrêmement vite. On donne pour la courbe II les couples après 30^s et 15^m d'arrêt.

Torsion.	I.	II.	Torsion.	I.	II.	Torsion.	I.	II.
0....	0 ^u		786....		1042 ^u	2161....		1267 ^u
21....	170		806....	1049 ^u	1049	2166....		1277
51....	389		1076....	1103	1106	2176....		1283
81....	558		1256....	1138	1140	2186....		1288
111....	667		1376....	1159	1161	2206....	1292 ^u	1292
141....	733		1436....	1169	1171	2516....	1339	1341
171....	780		»		1155	2786....	1379	1381
231....	840		1436....		1126	2876....	1392	1396
291....	880		1441....		1152	»		1379
351....	911		1446....		1161	2876....		1343
471....	958		1456....		1169	2881....		1370
746....	1033	1037 ^u	1466....		1171	2886....		1381
»		1021	1486....	1178	1178	2896....		1390
»		995	1796....	1229	1230	2906....		1394
751....		1020	2066....	1271	1273	2926....	1400	1400
756....		1030	2156....	1286	1289	3236....	1442	1446
766....		1036	»		1272			
776....		1040	2156....		1239			

On recommence avec un couple d'arrêt et un temps T plus grands. La vitesse de torsion est de 1 tour en 21^s,68.

Voici de 10 en 10 tours, les gains de couples sur la courbe de torsion :

$\Delta C = 1521, 418, 371, 337, 309, 286, 267, 248, 234, 221, 209, 198, 189, 177.$

Au 110^e tour on était parvenu à 4421; au 120^e, on parvient à 4619, $\Delta C = 198$. Si l'on ne donnait que le Tableau précédent, rien ne ferait soupçonner qu'entre le 110^e et le 120^e tour il y a eu 885^m d'arrêt : la courbe qui passe par les points correspondant aux ΔC du tableau est parfaitement régulière. Cependant, aussitôt le 110^e tour effectué, on a arrêté brusquement. Le couple est descendu en 885^m de 4421 à 3661, soit de 760^u. Voici les ΔC de tour en tour pendant la retorsion (courbe Cg) :

727, 55, 28, 26, 22, 20, 20, 20, 20, 20,

$$\Sigma \Delta C = 958, \quad 3661 + 958 = 4619.$$

Il semble donc bien que l'on rattrape le prolongement de la courbe AB, au moins après une retorsion suffisamment prolongée.

Il y a cependant lieu de croire que le raccordement ne se fait pas rigoureusement, que la courbe avec arrêts reste sous l'autre, que l'arrêt produit comme un déplacement de l'origine des azimuts vers la droite. La première des expériences ci-dessus vient à l'appui de cette opinion que d'autres expériences con-

firmement. En effet, le fil qui a donné les courbes II est plus éroui que l'autre. Ainsi, pour 746° , il donne 1037^u au lieu de 1033^u . Or, pour 806° , les couples sont égaux. Si les fils avaient été identiques, la courbe du fil II aurait été alors légèrement sous celle du fil I. Mêmes remarques avant et après les différents arrêts. Les différences, pour petites qu'elles soient, n'en sont pas moins systématiquement dans le sens que nous disons.

7. *Des cycles bouclés ou non bouclés à partir d'un point de la courbe de première torsion.* — Généralisons le problème précédent. La courbe de première torsion ABE est parcourue avec la vitesse V ; à partir d'un de ses points B, on détord suivant BC avec la vitesse v_1 ; puis on tord à nouveau avec la vitesse v_2 , suivant CDE'. Il peut exister des arrêts intermédiaires en B et C. On se propose de déterminer la forme du cycle.

Cherchons d'abord les phénomènes au point C et supposons pour préciser que $v_1 + v_2 = 0$, quel que soit d'ailleurs V , et qu'il n'y a pas d'arrêt en C. L'équation de continuité prend la forme $\gamma_2 + \gamma_1 = 2\Gamma$. Si le point C est assez voisin de B, la tangente en C sur la courbe de détorsion est plus verticale que la tangente caractéristique. La tangente sur la courbe de retorsion CD en C est donc plus horizontale que cette tangente. Le cycle a un point anguleux en C, il n'est pas bouclé.

Si le point C est assez loin de B, la tangente en C sur la courbe de détorsion est plus horizontale que la tangente caractéristique. La tangente sur la courbe de retorsion CD en C est donc plus verticale que cette tangente : il y a un point anguleux en C et le cycle est bouclé.

Enfin, comme intermédiaire, le cycle peut présenter un point de rebroussement.

8. *Cycles bouclés (fig. 3 et 4).* — Toutes les autres conditions expérimentales restant les mêmes, cherchons comment varie la boucle en fonction de la longueur BC de la courbe de détorsion parcourue. L'expérience détermine avec beaucoup de précision la différence des couples Bm (fig. 3) et la différence des azimuts Bg correspondant aux deux passages successifs à l'azimut et au couple du point B. On connaît les courbes de torsion et de retorsion, on calcule aisément la position du point s d'intersection des courbes de détorsion et de retorsion.

L'amplitude du cycle comptée en azimut est supposée $> s'\beta'$. Au point s' correspondrait sur la courbe de détorsion la tangente Γ . Le cycle qui aurait ce point pour extrémité présenterait un point de rebroussement.

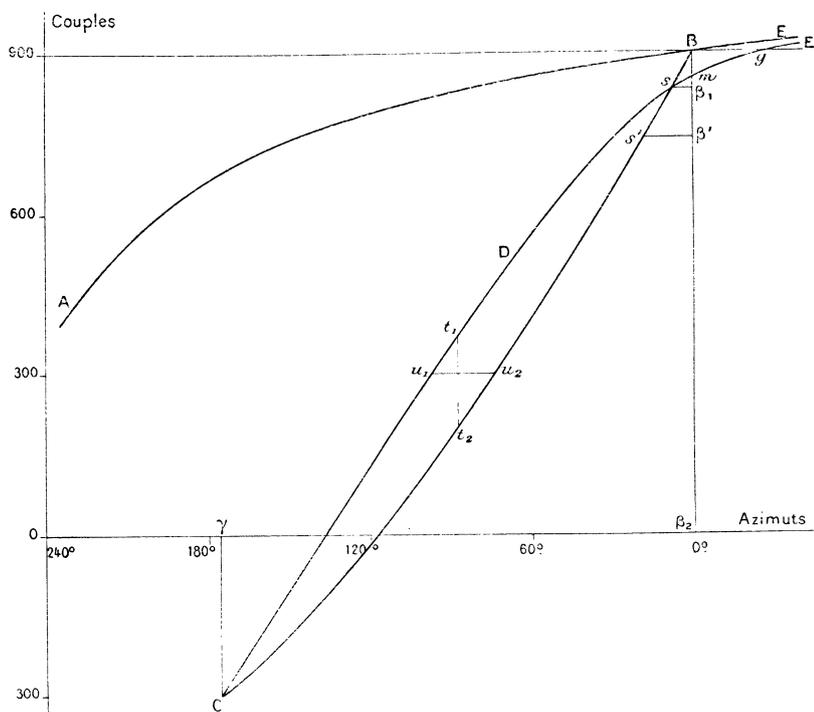
Pour cette amplitude, $s'\beta'$, les points s et s' coïncident. Si l'amplitude croît à partir de cette valeur, s se rapproche de B en se déplaçant toujours dans le même sens. Pour une certaine valeur de l'amplitude, s coïncide avec B. Pour une valeur

plus grande, il devient imaginaire : la courbe de retorsion passe par-dessus la courbe de première torsion (*fig. 4*).

Le point *g* part d'une certaine position correspondant au cycle à point de rebroussement ; il s'éloigne de B, parvient à une distance maxima, puis rétrograde. Il passe en B en même temps que les points *m* et *s*, puis s'éloigne rapidement vers la gauche de B, quand *s* est imaginaire.

Le point *m* fait de même : il commence par descendre, atteint une distance

Fig. 3.



maxima, remonte, passe en B en même temps que *s* et *g*, puis passe au-dessus de B, quand *s* est imaginaire.

Le rapport $\frac{Bm}{Bg}$ décroît quand l'amplitude augmente. Cette diminution, peu rapide quand l'amplitude est voisine de $s'\beta'$, s'accélère ensuite : le rapport, qui conserve toujours le même signe (puisque *m* et *g* passent simultanément en B), a lors de ce passage une valeur encore notable : il tend ensuite vers 0.

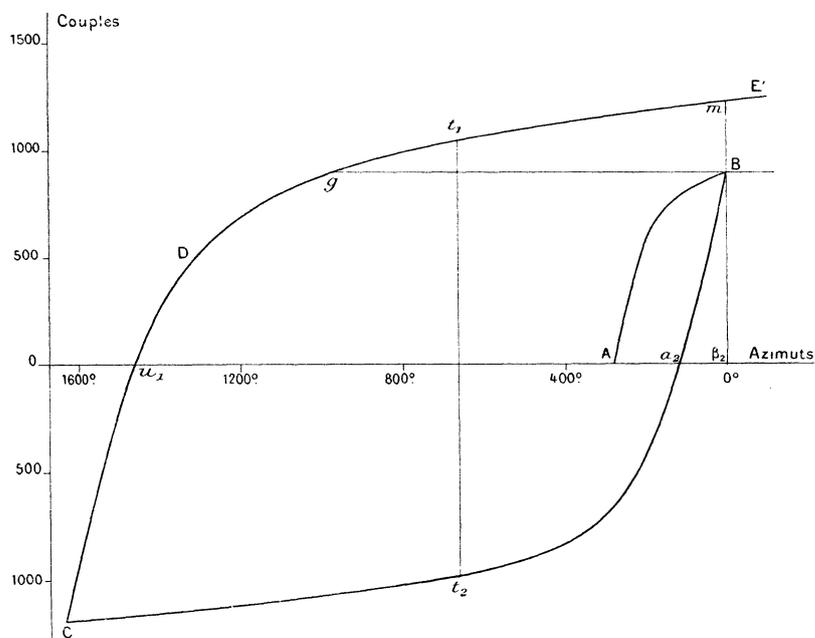
Le rapport de l'épaisseur maxima verticale t_1, t_2 à l'épaisseur horizontale maxima u_1, u_2 décroît quand l'amplitude augmente et tend vers 0.

Le point *s* est toujours réel (*fig. 3*), quel que soit le point B, quand l'extrémité C

correspond à un couple positif ou nul. Quand s est réel, la courbe de retorsion suivant $smgE'$ est plus verticale que la courbe de première torsion BE : il y a tendance au raccordement (si $V = v_2$); nous croyons cependant que la courbe de retorsion reste légèrement au-dessous de la courbe de première torsion. La *fig. 3* représente le cycle du Tableau dont l'amplitude est en couples 1200^u et en azimuts 175^o .

Si le point C (extrémité du cycle) correspond à un couple négatif suffisamment

Fig. 4.



grand, en particulier à un couple négatif égal en valeur absolue au couple du point B , s devient imaginaire (*fig. 4*). La différence de couples mB est sensiblement égale à l'excès en valeur absolue du couple du point C sur le couple du point B . Quand à Bg , sa grandeur peut être considérable. Quand la boucle ne se ferme pas, la courbe de retorsion au voisinage du point m est plus horizontale que la courbe de première torsion.

Les *fig. 3* et *4* ne sont pas à la même échelle : les courbes de première torsion et de première détorsion seraient identiques dans les deux figures si l'échelle était la même. On a dû fortement comprimer la *fig. 4* dans le sens horizontal pour y faire entrer le cycle. Le Tableau numérique donne une série d'expériences : chaque bout de fil ne sert, bien entendu, qu'une seule fois.

$B\beta_2 + C\gamma$	$\gamma\beta_2$	Bm	Bg	$\beta_1 s$	$\frac{Bm}{Bg}$	$t_1 t_2$	$u_1 u_2$	$\frac{t_1 t_2}{u_1 u_2}$
300 ^u	37 ^o	23 ^u	9 ^o	14 ^o	2,55	2 ^u	0,2 ^o	10
600	75	37	15	13	2,46	10	1,25	8
900	118	41	19	10	2,16	47	6	8
1200	175	41	25	8	1,64	173	24	7,2
1500	267	37	34	5	1,09	487	75	6,5
1600	314	29	29	4	1,00	645	108	5,97
1700	368	20	23	2	0,87			
1800	502	— 19	— 25	»	0,76	1134	265	4,28
1900	734	— 90	— 161	»	0,56	1477	504	2,93
2000	1079	— 196	— 441	»	0,45	1778	806	2,21
2100	1647	— 340	— 982	»	0,35	2033	1342	1,51

La courbe de première torsion est tracée jusqu'au couple invariable 900^u (couple du point B); la vitesse identique pour toutes les courbes est 1 tour en 840 secondes : les arrêts aux points B et C sont nuls. Le fil a 1^m de long et 0^{mm},553 de diamètre.

L'épaisseur maxima $t_1 t_2$ correspond sensiblement au milieu du cycle évalué en degrés. C'est vrai jusqu'à 1800^u. Cependant, pour de plus petits cycles, l'azimut de la droite $t_1 t_2$ semble plus voisin de celui du point C que de celui du point B; quand le cycle croît et dépasse 1800^u, la droite $t_1 t_2$ se rapproche nettement de l'azimut du point B. Cette amplitude en couples 1800^u est précisément celle à partir de laquelle le point s devient imaginaire.

Voici, pour fixer les idées, la courbe de détorsion déterminée pour le cycle dont l'amplitude en couples est 2100^u. On donne l'un au-dessus de l'autre les angles de détorsion et les couples.

}	0°	27°	57°	117°	207°	267°	297°	327°	357°	387°
	900 ^u	672 ^u	432 ^u	0 ^u	— 442 ^u	— 619 ^u	— 686 ^u	— 739 ^u	— 781 ^u	— 818 ^u
	447°	507°	627°	747°	927°	1107°	1287°	1467°	1647°	
	— 871 ^u	— 910 ^u	— 969 ^u	— 1010 ^u	— 1060 ^u	— 1100 ^u	— 1136 ^u	— 1170 ^u	— 1200 ^u	

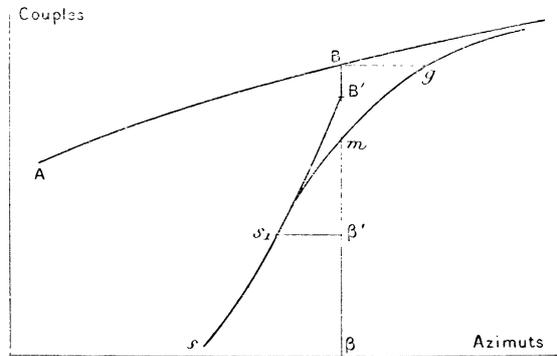
Ce Tableau nous permet de voir à quel point les fils peuvent être considérés comme identiques entre eux. En effet, les deux premières colonnes du Tableau nous donnent les coordonnées des extrémités C des cycles qui doivent se trouver sur la courbe précédente, si les fils sont identiques. Il n'y a, en effet, pour tous les cycles qu'une seule courbe de détorsion. On a calculé avec la courbe ci-dessus les azimuts correspondant aux points C du Tableau; on a trouvé :

Azimuts.....	118°	175°	267°	314°	368°	502°	734°	1079°	1647°
Couples I.....	900 ^u	1185 ^u	1519 ^u	1616 ^u	1695 ^u	1807 ^u	1906 ^u	1996 ^u	2100 ^u
Couples II.....	900 ^u	1200 ^u	1500 ^u	1600 ^u	1700 ^u	1800 ^u	1900 ^u	2000 ^u	2100 ^u

Les couples I sont calculés sur la courbe de torsion correspondant au plus grand cycle. Les couples II sont pris sur les autres cycles. La concordance est très remarquable : elle prouve que ce n'est pas arbitrairement que nous considérons nos fils comme identiques entre eux.

9. *Cycles non bouclés. Position du point de rebroussement (fig. 5).* — Soit V la vitesse de torsion sur la courbe AB de première torsion; soit BB' la perte de

Fig. 5.



couple à azimut constant pendant le temps d'arrêt T; soit B's la courbe de détorsion avec la vitesse $-v_1$; brusquement en s_1 la vitesse de détorsion $-v_1$ est remplacée par la vitesse $+v_2$. L'équation de continuité donne

$$(\Gamma - \gamma_1)v_1 = (\Gamma - \gamma_2)v_2.$$

Quelles que soient les vitesses v_1 et v_2 , il y a rebroussement si le point s_1 est choisi sur la courbe de détorsion de telle manière que $\Gamma - \gamma_1$; on a alors

$$\Gamma = \gamma_2.$$

Vitesse partout la même : cas général du cycle non bouclé (fig. 6). — Appelons γ_1 la tangente en B, γ_2 la tangente en B', γ_3 la tangente en C suivant B'C, γ_4 la tangente en C suivant Cm. Ces lettres représentent les valeurs absolues des tangentes. Soit v la vitesse partout la même. L'équation de continuité nous donne

$$\begin{aligned} \text{En B.} \dots \dots \left(\frac{dC}{dt}\right)_B &= -q = -(\Gamma - \gamma_1)v, & \gamma_1 &= \Gamma - \frac{q}{v}, \\ \text{En B'.} \dots \dots \left(\frac{dC}{dt}\right)_{B'} &= -q' = -(\gamma_2 - \Gamma)v, & \gamma_2 &= \Gamma + \frac{q'}{v}, \\ \text{En C.} \dots \dots \gamma_3 + \gamma_4 &= 2\Gamma, & \gamma_4 &= 2\Gamma - \gamma_3. \end{aligned}$$

Mais l'expérience montre que

$$q' < q, \quad q = q' + \varepsilon^2,$$

$$\gamma_3 < \gamma_2, \quad \gamma_3 = \gamma_2 - \varepsilon'^2;$$

d'où l'on tire

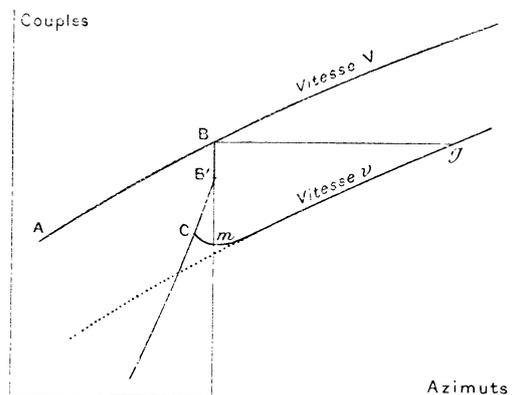
$$\gamma_4 = \gamma_1 + \varepsilon'^2 + \frac{\varepsilon^2}{\nu}.$$

En définitive, quel que soit le temps d'arrêt en B (et même en C), la courbe Cmg part de C plus verticalement qu'elle ne passait en B suivant AB, quand la vitesse de torsion est partout la même. Donc, pour obtenir la disposition de la *fig. 6*, il faut que les vitesses soient différentes sur les courbes AB, B'C, Cg.

Pour que la courbe Cg parte le plus possible vers le bas, il faut augmenter la vitesse suivant AB, diminuer le temps d'arrêt BB', diminuer la distance B'C, diminuer la vitesse suivant Cmg.

Vitesse V suivant AB, arrêts nuls, vitesse v suivant B'C et Cmg (fig. 6). — On demande la condition pour qu'au moment de l'interversion de vitesse en C le

Fig. 6.



couple continue à décroître ou au moins ne croisse pas immédiatement. Puisque la vitesse est la même suivant B'C et Cmg, on a au point C : $\gamma_3 + \gamma_4 = 2\Gamma$. Or, on veut que $\gamma_4 = 0$, donc $\gamma_3 = 2\Gamma$. Admettons qu'il n'y ait pas d'arrêt en B ($BB' = 0$); sur la courbe de détorsion en B' (ou en B), la condition précédente est réalisée, au moins si V est assez grand. Donc, on peut faire en sorte (en parcourant AB avec une vitesse assez grande, en ne faisant pas d'arrêt en B, et en ne décrivant que quelques degrés de la courbe de détorsion B'C) que le rétablissement de la vitesse directe n'amène sur Cmg, tout à fait au début, au point C, aucun accroissement de couple; la tangente est horizontale.

Vitesse V suivant AB, arrêts nuls, vitesse v suivant Cmg. — Cherchons à

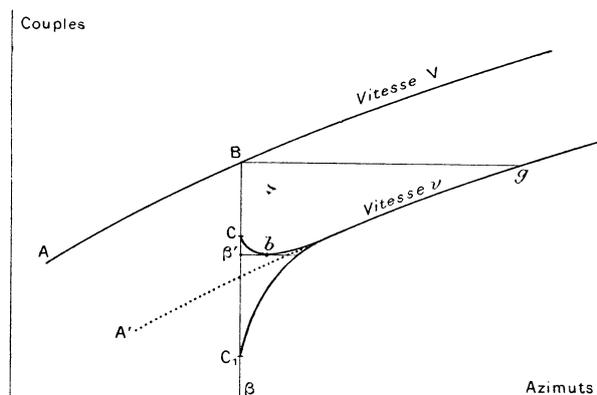
réaliser la condition précédente. L'équation de continuité en C, avec la condition $\gamma_4 = 0$ donne

$$\gamma_3 = \Gamma \left(1 + \frac{v}{V} \right).$$

Si v est petit devant V , il suffit que $\gamma_3 > \Gamma$. On peut observer le phénomène en question sur une plus grande longueur B'C de la courbe de détorsion; on ne gagne pourtant rien au point de vue expérimental, parce que cet espace est parcouru avec une vitesse plus grande.

10. *Détermination des vitesses de perte de couple à azimuth constant au moyen des phénomènes au début d'une courbe de retorsion (fig. 7).* — La torsion s'effectue suivant AB avec la vitesse V . En B on arrête, la déperdition

Fig. 7.



se produit suivant BC. En C on recommence brusquement à tordre avec une vitesse $v < V$. La condition pour que la courbe Cbg parte horizontalement est

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_c = v\Gamma, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_c \text{ est le taux de perte de couple en C suivant BC.}$$

La fig. 7 représente le cas plus général où la vitesse de déperdition en C à azimuth constant est supérieure à $v\Gamma$. On peut admettre que la détermination très facile du minimum b , sur cette courbe, revient à la détermination du point β' , tel que la tangente γ à la courbe de retorsion soit nulle : il faut seulement que $C\beta'$ soit assez petit. Si l'azimut constant β est maintenu assez longtemps, on peut faire en sorte que la courbe de retorsion ait la forme C_1g . Nous verrons plus loin quels sont les rapports entre elles des diverses courbes de retorsion à vitesse v ainsi obtenues, pour des retorsions grandes, c'est-à-dire à une distance assez grande de l'azimut β vers la droite.

Application. — La vitesse sur AB est de 16^s,5 par tour, $V = 21^{\circ}$,8 par

seconde, $V\Gamma = 151^u, 5$. On étudie sur un fil de déperdition à azimut constant : le couple du point B est 1850^u .

Temps	0 ^s	15 ^s	30 ^s	1 ^m	2 ^m	4 ^m
Déperdition = p ...	0 ^u	115 ^u	144 ^u	180 ^u	219 ^u	261 ^u
Différences.....		115 ^u	29 ^u	36 ^u	39 ^u	42 ^u

Ces nombres sont contenus dans la formule

$$p = 11,844 t - 0,3222 t^2 + 0,002914 t^3.$$

Elle donne les résultats suivants :

Temps	20 ^s	21 ^s	22 ^s	30 ^s
Déperdition.....	131 ^u ,3	133 ^u ,7	»	144 ^u ,0
Vitesse.....	2,454	2,067	1,900	1,046

La torsion se faisait avec une vitesse v de 1 tour en 1208^s , d'où $v\Gamma = 2^u, 071$ par seconde.

Donc, pour que la courbe Cbg reparte horizontalement, il faut que C se trouve à une distance de B voisine de 134^u . On indique dans le Tableau suivant le couple C pour lequel on installe la vitesse v et la distance $B\beta'$ du minimum observé. On se rappellera que le couple du point B est 1850 .

C	1850	1750	1730	1720
$B\beta'$	120	123	127	130

Si l'on arrête à 1710, il y a non seulement arrêt brusque dans la déperdition, mais remontée immédiate; on a certainement dépassé le point cherché : la longueur $B\beta'$ est alors $1850 - 1710 = 140$.

Si l'on arrête à 1720, $B\beta' = 130$; la déperdition, aussitôt après l'installation de la vitesse v , est nulle. Le point C cherché se trouve donc un peu au delà de 130^u , mais avant 140^u de distance de B. Or le calcul nous avait fait prévoir que c'était à 134^u . La concordance est d'autant plus remarquable que cette expérience exige au moins 5 fils différents et qu'il y a une série de mesures indépendantes.

11. *Courbes de torsion avec des vitesses différentes.* — Il s'agit de comparer entre elles des courbes de première torsion décrites depuis leur origine avec des vitesses uniformes différentes de l'une à l'autre. Les termes du problème ont été soigneusement pesés; ainsi rien ne dit que si l'on décrit une courbe de torsion en partie avec une vitesse V_1 , puis avec une vitesse V_2 , la partie décrite avec la vitesse V_2 se raccordera avec la courbe décrite depuis l'origine avec la vitesse V_2 .

La question est expérimentalement très délicate, parce qu'il faut nécessairement opérer sur des fils différents, et qu'il peut exister, tant par suite de la température du recuit, que de la torsion pendant ce recuit, que de la vitesse selon laquelle le fil a été préalablement étiré, de petites différences dont il est impossible de tenir compte. Comme les petites différences dans les fils peuvent être considérées comme variant continûment tout le long de la bobine, les expériences avec des vitesses différentes seront convenablement croisées. Malgré toutes les précautions, il y aura toujours un doute impossible à lever.

Dans l'expérience suivante, on a intercalé, sur 5 bouts de fil consécutifs, trois expériences faites avec la vitesse de 1 tour en 5^s,64 et deux expériences faites à la vitesse de 1 tour en 21^s,68. Après le 105^e tour, on installe brusquement, pour tous les fils, la vitesse de 1 tour en 215^s,6 : nous reviendrons plus loin sur cette seconde partie de l'expérience. On donne, dans la colonne Δ , les différences des moyennes expérimentales et les différences calculées en admettant que Δ croît proportionnellement à la torsion. Cette hypothèse est sensiblement vérifiée : les courbes devraient être tangentes tout à fait au début de la torsion, mais c'est là que les erreurs interviennent particulièrement.

Tours.	1 tour en 5 ^s ,64 jusqu'au 105 ^e tour.				1 tour en 21 ^s ,68 jusqu'au 105 ^e tour.				
	Moyenne.				Moyenne.			Δ .	
	u	u	u	u	u	u	u	u	u
10....	1617	1618	1600	1612	1598	1602	1600	12	3
20....	2048	2044	2021	2038	2030	2035	2032	6	7
30....	2426	2420	2398	2415	2404	2409	2406	9	10
40....	2772	2766	2736	2758	2742	2748	2745	13	13
50....	3091	3080	3050	3074	3060	3058	3059	15	16
60....	3387	3373	3339	3366	3350	3346	3348	18	20
70....	3362	3649	3610	3640	3620	3612	3616	24	23
80....	3920	3901	3861	3894	3871	3864	3867	27	26
90....	4161	4142	4100	4134	4110	4100	4105	29	30
100....	4390	4369	4324	4361	4335	4322	4328	33	33
105....	4500	4477	4432	4470	4441	4429	4435	35	35
106....	4419	4397	4351	4389	4405	4391	4398	9	"
110....	4509	4487	4442	4480	4489	4474	4481	1	"

Resterait à déterminer suivant quelle fonction Δ dépend de φ ; la solution est très incertaine; on peut admettre, comme première approximation, que l'on a :

$\Delta = \Delta_0 \log \frac{V_1}{V_2}$, Δ_0 étant une constante, V_1 et V_2 les vitesses de torsion. La distance

des courbes est approximativement la même, lorsque le rapport des vitesses est le même : de plus, la courbe se déplace vers le haut beaucoup moins vite que la vitesse n'augmente. Cette formule perd toute signification quand la vitesse est voisine de 0 : c'est qu'alors l'expérience elle-même n'a plus guère de sens.

12. *Déperdition à azimuth constant sur les courbes décrites depuis leur origine avec des vitesses uniformes et différentes.* — Il est relativement facile de connaître l'influence de la vitesse sur la déperdition du couple à azimuth constant. Cette comparaison peut être faite soit aux points du faisceau (de courbes défini au n° 11) correspondant au même couple, soit aux points de ce faisceau qui correspondent à la même torsion : pratiquement, cette distinction n'a pas d'importance, car les courbes du faisceau sont très voisines.

Voici les règles qui résument ces expériences :

1° La vitesse de déperdition initiale croît quand la vitesse de torsion croît ; on peut admettre, d'après l'équation de continuité, qu'elle est proportionnelle à cette vitesse, puisque les courbes de torsion pour les différentes vitesses sont à peu près rigoureusement parallèles.

2° La vitesse de déperdition après un temps donné est d'autant plus grande que la vitesse de torsion était plus grande. Mais elle devient peu à peu indépendante de cette vitesse.

3° Si l'on représente les couples en fonction du temps, en prenant pour origine des temps pour toutes les courbes le moment où l'on arrête la torsion, ces courbes sont à l'origine d'autant plus élevées que la vitesse de torsion était plus grande (numéro précédent). Bientôt elles se coupent, de manière qu'au bout d'un temps suffisant c'est la courbe qui correspond à la plus grande vitesse qui est la plus basse.

4° Voici dans quel ordre se trouvent les intersections :

Si $v_1, v_2, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_n$ forment une série décroissante, toute courbe de déperdition issue d'une courbe de torsion v_i coupe successivement les courbes de déperdition $v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1}, v_n$. On sait qu'en prenant pour abscisses les logarithmes des temps ces courbes tendent vers des droites parallèles.

5° Les courbes de déperdition construites dans le plan $\frac{dC}{dt}, C$, ne forment pas des morceaux de la même courbe. La loi de déperdition de la chaleur est la même quelle que soit la température de laquelle on part ; en traversant une température déterminée, on trouve une vitesse déterminée. En traversant un couple donné, on ne retrouve pas une vitesse de déperdition déterminée.

Déperdition sur des courbes de vitesses différentes pour la même torsion.

1 tour en	5 ^s ,64.	21 ^s ,65.	139 ^s ,6.
Temps : 0 ^s	4485	4421	4376
» 15 ^s	4288	4299	4320
» 30 ^s	4242	4263	4300
» 1 ^m	4191	4223	4273
» 2 ^m	4135	4178	4243
» 4 ^m	4074	4127	4209
» 8 ^m	4013	4070	4167
» 16 ^m	3951	4010	4119
» 32 ^m	3888	3948	4063
» 64 ^m	3824	3884	4006

Autres expériences. — Dans les deux premières expériences suivantes, on tord jusqu'au couple 4750^u; dans les deux dernières, jusqu'au couple 3750^u; dans le Tableau, ces couples sont pris pour origine des déperditions; Γ est par degré de 5^u,07, $V\Gamma = 320^u,4$ par seconde, $v\Gamma = 107^u,5$: ce sont les vitesses de déperdition initiale d'après l'équation de continuité.

V = 304,7 millionièmes de seconde..... 1 tour en 5^s,70
 v = 102,2 id. 1 tour en 17^s,0

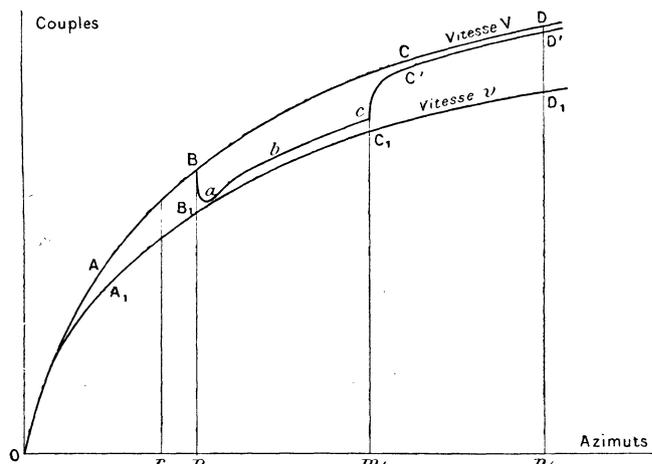
	V.	v.	V.	v.
Temps : 30 ^s ..	253	177	200	141
» 1 ^m ..	308	220	241	178
» 2 ^m ..	368	270	290	218
» 4 ^m ..	431	323	340	261
» 8 ^m ..	500	384	391	310
» 16 ^m ..	570	450	445	361
» 32 ^m ..	644	521	499	415
» 64 ^m ..	719	594	552	470
» 128 ^m ..	793	670	607	526
» 256 ^m ..	''	745	658	581

Dans ma Thèse (*Ann. Phys.*, 1897), j'énonce la règle suivante : « § XXX. —

Influence de la vitesse de rotation. — La loi de déperdition dépend de la vitesse de rotation; si on la représente par la forme $p = A \log(Bt + 1)$ avec la condition $p_{0,5} = 1$ ($\frac{1}{2}$ minute), le paramètre B croît avec la vitesse. Pour des vitesses croissantes, la déperdition est de plus en plus rapide au début. » Nous savons maintenant qu'il n'est pas possible de représenter généralement p par la forme ci-dessus (Chap. VI, p. 458). Quant aux faits expérimentaux, il y a concordance entre ce que nous disions alors et ce que nous venons de préciser.

13. *Remplacement d'une vitesse par une autre vitesse sur la courbe de première torsion (fig. 8).* — Soit $OA_1B_1C_1$ la courbe de première torsion décrite

Fig. 8.



depuis l'origine avec la vitesse uniforme v ; l'azimut du point C_1 est m tours. Soit OAB la courbe analogue décrite avec la vitesse V plus grande; l'azimut du point B est p tours. Installons au point B la vitesse v et faisons $m - p$ tours. Le point atteint est-il alors le point C_1 ? L'expérience donne des résultats assez incertains.

Exemple. — Longueur du fil 1^m ; diamètre $0^{mm},553$; $V = 1$ tour en $5^s,64$, $v = 1$ tour en $139^s,6$; $m = 110$ tours. On donne dans le Tableau suivant les couples C_r pour la torsion $r = 90$ tours, C_p et C_m ; p est la seule variable.

$p = 95$	$C_r = 4110$	$\delta = 52$	$C_p = 4227$	$C_m = 4461$	$C_m - \delta = 4409$
100	4058	0	4289	4414	4414
105	4116	58	4450	4472	4414
108	4090	32	4490	4448	4416

Si les fils étaient identiques, les C_r le devraient être; ils ne le sont pas, ils

varient entre 4058 et 4116, ce qui n'a d'ailleurs rien d'excessif; les différences à l'un d'entre eux sont les nombres δ . Naturellement les C_m ne sauraient être égaux puisque les fils ne sont pas identiques : l'expérience montre que la différence $C_m - \delta$ est approximativement constante. Toutefois $C_m - \delta$ croît un peu quand la branche à vitesse v diminue : nous croyons en effet que le raccordement n'est pas absolu et que, du fait que OAB a été décrit plus vite, bc doit rester un peu au-dessus de $A_1 B_1 C_1$: c est d'autant plus au-dessus de C_1 que $m - p$ est plus petit. Ce mode de correction perd toute valeur si r diffère beaucoup de m . Comme on a nécessairement $r < p$, il faut donc, pour que la correction ait un sens, que $m - p$ ne soit pas trop grand. En particulier, si on fait $p = 0$, on retombe sur le problème traité au n° 11; on n'a plus d'autre méthode de correction que de recommencer un grand nombre de fois, en croisant le mieux possible les expériences.

On peut opérer différemment.

Dans l'expérience précédente, on opère seulement avec deux vitesses V et v ; on fait varier la longueur relative des parcours décrits avec ces vitesses. On peut encore décrire p tours avec des vitesses uniformes mais différentes (p étant constant et V variable), puis $m - p$ tours ($Babc$) avec la même vitesse v . Parvient-on toujours au même point c ? L'expérience du n° 11 répond affirmativement à la question. L'ensemble des résultats nous fait cependant croire que le point c est d'autant plus haut que V est plus grand. Nous reviendrons plus loin sur la forme de la courbe Bab .

14. *Déperdition de couple au point c à azimut constant.* — Reprenons l'expérience du n° 13 sous sa première forme (m, V, v constants; p variable); parvenu en c , maintenons l'azimut constant et étudions la déperdition de couple. On trouve les résultats suivants :

1° La vitesse initiale de déperdition est indépendante de p . Elle ne dépend, en effet, que de la tangente en c sur la courbe abc , qui est certainement indépendante de p , pourvu que $m - p$ ne soit pas trop petit.

2° La vitesse de déperdition tend vers une valeur définitive indépendante de p .

3° La vitesse de déperdition après les premiers instants est d'autant plus grande que p est plus grand, ou que $m - p$ est plus petit.

Ces résultats s'interprètent aisément en les comparant à ceux du n° 12. A mesure qu'on augmente la vitesse de torsion, d'après ce que nous avons vu au n° 12, les vitesses de déperdition lente à l'arrêt en un point de la courbe de torsion doivent croître; elles tendent pourtant vers une limite commune : c'est précisément ce que nous observons ici; la seule différence tient à ce que la vitesse initiale dans l'expérience actuelle est naturellement constante et indépendante de p . En somme, les phénomènes sont d'autant plus dans la dépendance de la courbe OAB que $m - p$ est plus petit.

Il n'y a pas à s'étonner que les phénomènes lents restent relativement beaucoup sous la domination de la branche OAB, tandis que la tangente en c et, par conséquent, la vitesse initiale de déperdition de couple à azimuth constant y échappent rapidement. C'est toujours la grande distinction des phénomènes que nous avons appelés *d'hystérésis* et de ceux que nous désignons sous le nom de *réactivité*. Ces derniers, tout en influant extrêmement peu sur la forme des courbes, précisément parce qu'ils sont lents et ne portent que sur de longs parcours, peuvent avoir une importance considérable, si leurs effets sont accumulés sur un point des parcours, comme, par exemple, lorsqu'on maintient l'azimut ou le couple constant.

$m = 110.$	$p = 0.$	95.	100.	105.	108.
	56	55	55	56	59
Temps = 15 ^s ...	56	55	55	56	59
	20	23	24	24	25
30 ^s ...	76	78	79	80	84
	27	24	26	29	32
1 ^m ...	103	102	105	109	116
	30	35	34	34	38
2 ^m ...	133	137	139	143	154
	34	39	40	42	45
4 ^m ...	167	176	179	185	199
	42	46	46	51	58
8 ^m ...	209	222	225	236	257
	48	51	56	57	61
16 ^m ...	257	273	281	293	318
	56	59	60	64	64
32 ^m ...	313	332	341	357	382
	57	64	63	66	66
64 ^m ...	370	396	404	423	448
			66		
128 ^m ...			470		

V est 1 tour en 5^s, 64; v est 1 tour en 139^s, 6.

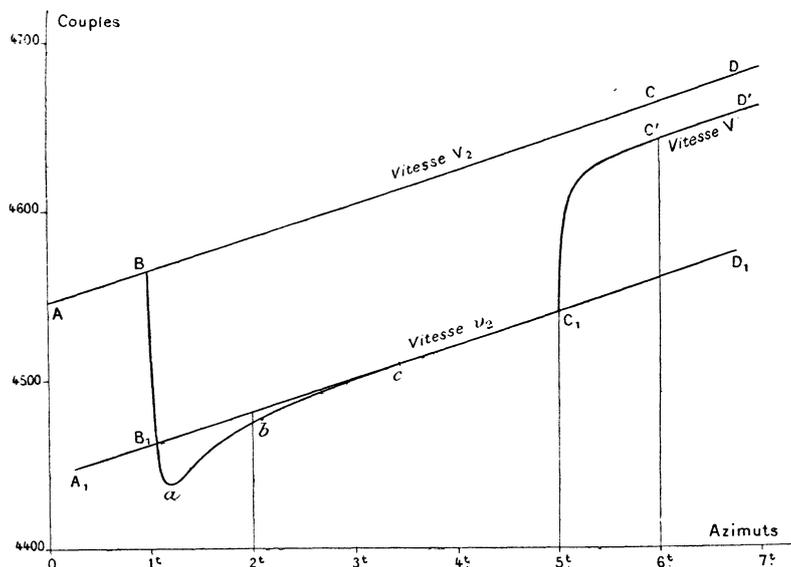
15. *Étude des positions relatives des deux courbes décrites à partir de l'origine avec les vitesses V et v, et de la courbe décrite successivement avec les vitesses V, v, V (fig. 9).* — La courbe ABCD est décrite avec la vitesse V depuis l'origine. En B, on installe subitement la vitesse v ; on décrit BB₁abC₁; on se propose d'étudier la forme de la partie B₁ab. En C₁ on réinstalle la vitesse V; on décrit C₁C'D'. La fig. 9 donne le résultat de l'expérience.

Le point C' est au-dessous du point C. Ainsi supposons tracés les courbes I et II à vitesse V et v à partir de l'origine; la courbe complexe qui commence par une branche à vitesse V et qui, par conséquent, coïncide d'abord avec I, reste

au-dessus de II quand on substitue v , pour rester *au-dessous* de I quand on réinstalle V. C'est là un cas particulier d'une règle générale dont nous verrons des applications en traitant les courbes à vitesses variables.

Nous donnons dans le Tableau suivant le résultat de quelques expériences. Nous connaissons directement la tangente moyenne suivant AB et la tangente moyenne

Fig. 9.



suivant $C'D'$. A partir du point B, calculons la position du point C à l'aide de la tangente moyenne AB (1^{er} calcul) ou de la tangente moyenne $C'D'$ (2^e calcul). Il y a toutes les chances possibles pour que le vrai point C, celui qu'on aurait obtenu en maintenant constamment la vitesse V, soit intermédiaire entre ces deux positions. Or l'expérience montre que le point C' est généralement *au-dessous* de ces deux positions, ou, au plus, coïncide avec la seconde. Sur chaque fil on a fait plusieurs expériences consécutives en alternant les vitesses V et v : cela n'a aucun inconvénient, puisqu'on se propose de déterminer, non la position absolue des courbes, mais seulement l'effet des alternances

$$V_1 = 1 \text{ tour en } 13^{\text{s}},06$$

$$v_1 = 1 \text{ tour en } 215^{\text{s}},6$$

$$V_2 = 1 \text{ tour en } 21^{\text{s}},68,$$

$$v_2 = 1 \text{ tour en } 980^{\text{s}}.$$

C'est d'après la troisième série que la figure a été faite.

PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES. — Vitesses V_1 et v_1 .

Tours en B.....	31 ^t	64 ^t	105 ^t
Couples en B.....	2333 ^u	3345 ^u	4320 ^u
Tangente moyenne AB (déduite de 5 ^t)..	36,0	28,0	21,8
» b_1C (» 4 ^t)..	33,2	27,0	21,7
» $C'D'$ (» 5 ^t)..	33,0	25,8	20,8
Couple en C_1	2471 ^u	3429 ^u	4357 ^u
Couple en C'	2531	3498	4435
Couple en C (premier calcul).....	2549	3513	4451
» (second calcul).....	2531	5500	4445

TROISIÈME SÉRIE.
Vitesses V_2 et v_2 .

DEUXIÈME SÉRIE. — Vitesses V_2 et v_1 .

Tours en B.....	32 ^t	65 ^t	107 ^t	121 ^t
Couples en B.....	2347 ^u	3341 ^u	4323 ^u	4566 ^u
Tangente moyenne AB (déduite de 5 ^t)..	35,7	26,8	21,0	19,8
» bC_1 (» 4 ^t)..	33,3	26,0	20,2	22,3
» $C'D'$ (» 5 ^t)..	32,5	25,6	19,8	20,0
Couple en C_1	2489 ^u	3433 ^u	4371 ^u	4541 ^u
Couple en C'	2542	3493	4440	4642
Couple en C (premier calcul).....	2561	3502	4449	4665
» (second calcul).....	2542	3495	4442	4666

16. *Remarques sur les expériences précédentes.* — Nous savons qu'il se présente des difficultés insurmontables quand on veut déterminer directement la distance des courbes de torsion décrites à partir de l'origine avec des vitesses différentes. Il y a intérêt à chercher indirectement quelques renseignements. Nous savons que $A_1B_1C_1D_1$ (*fig. 9*) ne coïncide pas avec la courbe décrite à partir de l'origine avec la vitesse v , elle est au-dessus; de même, $C'D'$ est au-dessous du prolongement de la courbe AB. Malgré tout, BB, se rapproche beaucoup d'être la distance des deux courbes à vitesses V et v : en faisant cette hypothèse, nous nous exposons à des erreurs bien moindres que si nous cherchions à déterminer cette distance sur des fils différents.

C'est par cette méthode qu'on est parvenu à la formule donnée au n° 11 :

$$\Delta = \Delta_0 \log \frac{V}{v}.$$

Voici une autre remarque fort importante :

Supposons que dans le plan αC soient tracées toutes les courbes à vitesses constantes v_1, v_2, \dots . Arrêtons brusquement en un point de la courbe v_1 : le point figuratif décrit une droite parallèle à l'axe des couples et coupe successivement

toutes les courbes à vitesses constantes plus petites v_2, \dots . Nous nous proposons de chercher quelles sont les $\frac{dC}{dt}$ à azimut constant au moment de l'intersection avec ces courbes, avec celles de vitesse v_2 par exemple.

Le $\frac{dC}{dt}$ au début de la déperdition, au départ de la courbe v_1 , est donné par la formule

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_0 = -v_1(\Gamma - \gamma_1),$$

où γ_1 est la tangente à la courbe de torsion. Laissons le couple diminuer à azimut constant, puis installons brusquement la vitesse v_2 et écrivons que la tangente de départ sur la courbe de rotation est γ_1 ; il viendrait

$$\left(\frac{dC}{dt}\right) = -v_2(\Gamma - \gamma_1), \quad \left(\frac{dC}{dt}\right) : \left(\frac{dC}{dt}\right)_0 = v_1 : v_2.$$

Ainsi, si au passage sur la courbe de la vitesse v_2 , cette condition était réalisée et qu'on installât la vitesse v_2 , on continuerait simplement sur cette courbe. L'expérience montre qu'il n'en est pas ainsi.

Quand, partant de la courbe v_1 , on passe à azimut constant sur la courbe v_2 , la vitesse de déperdition est plus petite que l'indique cette condition. De sorte que, en installant alors la vitesse v_2 , on monte au-dessus de la courbe v_2 , en faisant avec elle un point anguleux. On continue ensuite presque parallèlement à cette courbe, tout en restant au-dessus.

Réciproquement, si l'on installe la vitesse v_2 quand la condition précédente est satisfaite, on est au-dessus de la courbe v_2 : c'est l'un des cas particuliers de l'expérience réalisée au n° 10.

Si, au lieu de remplacer v_1 par la vitesse nulle, puis ensuite d'installer la vitesse v_2 , on remplace immédiatement v_2 par v_1 , on descend moins bas; on reste toujours au-dessus de la courbe de torsion v_2 , et les points anguleux sont remplacés par des parties arrondies.

17. *Courbe de première torsion décrite à vitesse variable.* — Nous supposons que la vitesse de torsion et l'azimut sont donnés par les formules

$$v = \frac{a}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T}\right), \quad \alpha = \frac{a}{2} \left(t + \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T}\right).$$

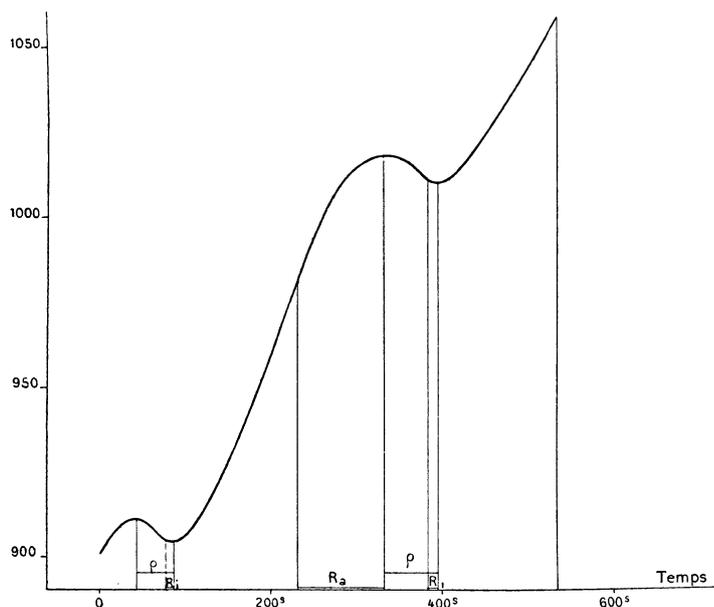
La vitesse varie entre 0 et a : le chemin parcouru pendant la période T est $\varepsilon = \frac{aT}{2}$; il est le même que si la vitesse était constante et moitié de la vitesse maxima.

Nous avons dit que l'appareil produit des signaux à intervalles de temps équidistants 14 fois par période. Ce qui donne 14 points de la courbe des couples en fonction des temps. Un métronome permet de repérer, par rapport à ces signaux, les temps des maxima et des minima de couples.

Pour connaître la courbe des couples en fonction des azimuts, on détermine expérimentalement une fois pour toutes la torsion entre les différents signaux : on peut aussi la calculer à l'aide de la formule en déterminant ε et T ; la différence entre les nombres calculés et expérimentaux est toujours faible.

Courbe représentant les couples en fonction du temps (fig. 10 a, b, c, d).

Fig. 10a.



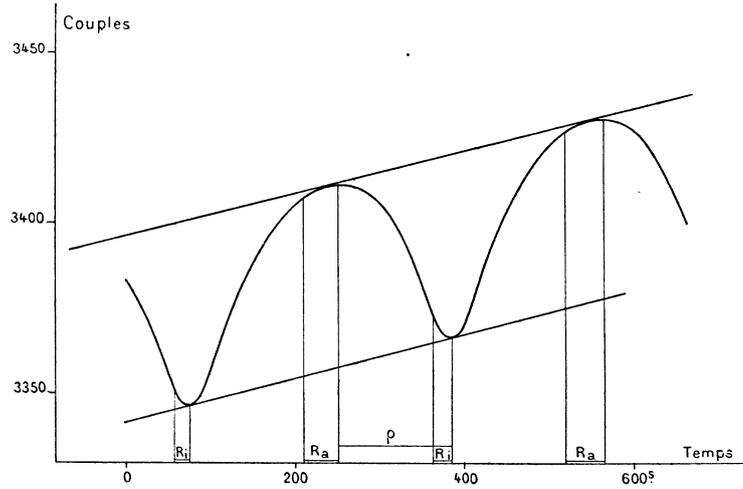
— Fil de 1^m de long et de 0^{mm}, 553 de diamètre. Période $T = 299^s$. Vitesse minima nulle. Vitesse maxima : 1 tour en 199^s. Vitesse en degrés par seconde = 1°, 809, en millièmes seconde = 8, 72 ; ε calculé par α et $T = 270^\circ$, expérimental = 262°. Ces deux nombres donnent une idée de la précision avec laquelle le mouvement sinusoïdal est obtenu.

Au début de la courbe de première torsion, si le fil était élastique, on aurait $C = \Gamma \alpha$, $\frac{dC}{dt} = \Gamma v$. La courbe des couples en fonction du temps serait donc, dans notre hypothèse particulière, ondulée et comprise entre deux droites parallèles et inclinées : elle présenterait à chaque période une tangente horizontale et une tangente $\Gamma \alpha$ la plus verticale possible. La tangente à l'origine dépendrait de la phase du mouvement sinusoïdal au départ. On sait que le fil n'est pas parfaite-

ment élastique, même au début : le phénomène entre donc presque instantanément dans sa seconde phase.

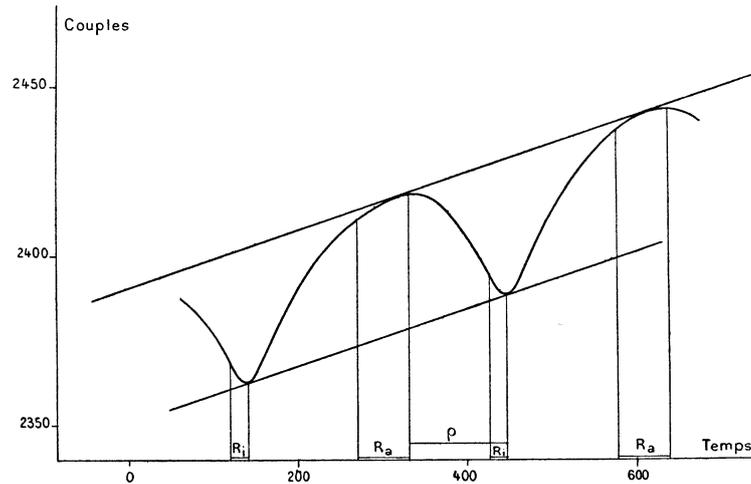
La courbe présente bientôt des minima et des maxima relatifs.

Fig. 10 b.



Les minima et maxima du couple se produisent après les minima et maxima de la vitesse. Nous désignerons par R_i et R_a les retards *en temps* d'un minimum

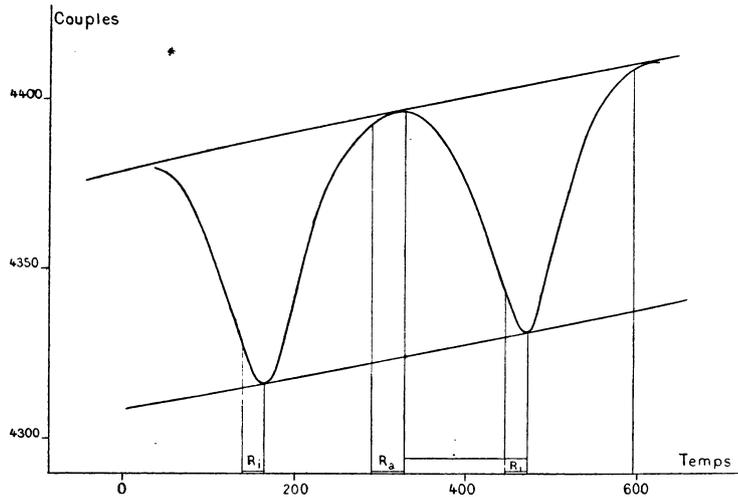
Fig. 10 c.



(ou d'un maximum) de couple par rapport au minimum (ou au maximum) de vitesse immédiatement antérieur : ρ est l'écart en temps d'un maximum relatif au minimum suivant.

Variation de R_i . — R_i croît quand les couples croissent : nul au moment où les minima commencent à se produire, il est voisin de 32^s pour les plus grands couples utilisés. Ces 32^s ne sont qu'une variation azimutale faible, puisqu'on est au voisinage d'un minimum nul de vitesse; elles correspondent à 3^o environ. La

Fig. 10 d.



détermination de R_i est naturellement assez incertaine; elle ne peut se faire qu'à 2^s ou 3^s près.

Variations de R_a . — $R_a = \frac{T}{2}$ quand les minima commencent à se produire, les minima et maxima coïncident. Quand les couples croissent, R_a diminue.

Valeurs du couple maximum.....	1018 ^u	2419 ^u	3411 ^u	4396 ^u
R_a	100 ^s	52 ^s	42 ^s	38 ^s

$T = 299^s = 2 \times 149^s, 5$. Pour les grands couples, R_a devient constant.

L'intervalle ρ part de 0 pour tendre asymptotiquement vers une valeur limite constante voisine de $\frac{T}{2}$.

18. *Courbe représentant les couples en fonction des azimuts (fig. 11).* — *Distance en couples des maxima et des minima.* — Soient

$$C_a, C'_a, C''_a, C'''_a, \dots,$$

et

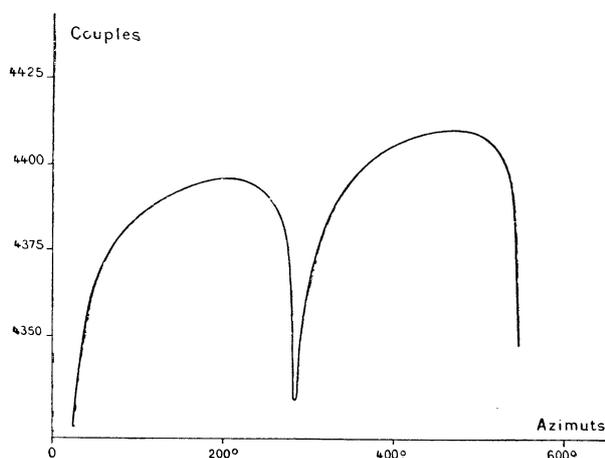
$$C_i, C'_i, C''_i, \dots,$$

les valeurs des couples maxima et minima, intercalés comme le montre la disposition des lettres.

Les différences $C'_a - C_a$, $C''_a - C'_a$, ... vont en diminuant d'abord beaucoup, puis de moins en moins et tendent vers 0. Il en est de même des différences $C'_i - C_i$, $C''_i - C'_i$, ...

Les différences $C_a - C_i$, $C'_a - C'_i$, ... partent de 0 et tendent vers un maxi-

Fig. 11.



um en croissant toujours. Les différences $C'_a - C_i$, $C''_a - C'_i$, ... suivent une loi plus compliquée : elles ont au début une valeur grande ; elles décroissent, passent par un minimum pour recroître ensuite ; elles tendent alors vers un maximum qui est la limite des autres différences $C_a - C_i$, ...

Exemple :

Couples moyens	960"	1100"	1200"	2500"	3400"	4300"
$C_a - C_i$	8	10	12	28	46	62
$C'_a - C_i$	114	67	56	56	66	76

Définition des courbes φ_1 , φ_2 , φ_m , φ'_1 , φ'_2 et leur disposition relative. — Considérons le cas le plus général où la vitesse est prise sous la forme $v = \frac{a}{2} \left(1 + b \cos \frac{2\pi t}{T} \right)$ avec la condition $b < 1$; elle varie entre un maximum et un minimum de même signe.

Nous appellerons φ_1 , φ_2 , φ_m les courbes de torsion décrites à partir de l'origine avec des vitesses uniformes égales aux vitesses maxima, minima et moyenne, du mouvement sinusoïdal. La courbe φ ondulée, obtenue avec la vitesse variable v , est tangente à deux courbes φ'_1 qui a tous ses points au-dessus de φ (sauf les

points de tangence) et φ'_2 qui a tous ses points au-dessous (sauf les points de tangence).

A l'origine les cinq courbes $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_m, \varphi'_2, \varphi_2$ sont tangentes entre elles; elles divergent ensuite, forment un faisceau en éventail et sont disposées dans l'ordre où l'on vient de les écrire. Dans le cas où $b = 1$, φ_2 correspondrait à une vitesse nulle, il devient impossible de la tracer.

Supposons maintenant que, toutes choses restant égales, on modifie seulement la période T . Les trois courbes $\varphi_1, \varphi_m, \varphi_2$ restent les mêmes. A mesure que la période devient plus courte φ'_1 et φ'_2 se rapprochent de φ_m . Si la période tend vers 0, elles tendent à se confondre avec φ_m . Ce mouvement limite n'est au fond que le mouvement réel : ce que nous appelons *mouvement uniforme* est probablement une succession d'impulsions rapides avec des temps d'arrêt. Il est possible de donner une période très courte en prenant pour roue d'entraînement un disque polygonal.

Quand T augmente, φ'_1 et φ'_2 s'écartent de part et d'autre de φ_m . Pour un couple ou un azimut donné, φ'_1 et φ'_2 sont à une distance d verticale fonction de la période. Quand T croît indéfiniment, d tend vers une limite finie qui est la distance des courbes φ_1 et φ_2 . Mais alors le phénomène dépend de la phase du mouvement à vitesse variable : dire que la période est infinie, c'est dire que le mouvement est uniforme. On peut donc obtenir suivant cette phase toutes les courbes comprises entre φ_1 et φ_2 et, en particulier, ces deux courbes elles-mêmes.

19. *Distribution des couples dans la section droite pendant la détorsion.* — J'ai expliqué dans le Chapitre précédent la méthode générale. Tout se passe comme si l'on employait des fils de diamètres différents : 1000, 893, 807, ... (voir le Tableau). On les tord tous de 300 tours avec la même vitesse de 1 tour en 10^s,66; puis sans arrêt au bout, on les détord avec une vitesse de 1 tour en 402^s,4. On a pris comme détorsion 10 celle qui ramène le fil de rayon 1000 au couple total nul : dans ces conditions la détorsion unité est de 106°,2. La torsion par tour est pour le fil de rayon 1000 de 1700 millièmes; 300 tours font donc pour ce fil une torsion de 510 millièmes. J'ai expliqué comment ces expériences peuvent se faire sur des fils de même diamètre, grâce à l'hypothèse fondamentale qu'une couche cylindrique ajoutée à un fil ne change pas les phénomènes dans le cylindre initial. Le Tableau numérique donné ci-après, déduit des expériences, a exactement le même rôle que celui qui a été calculé dans le Chapitre VI, § II.

r	1000	893	807	737	647	577	487
Détorsion.							
0.....	4807	3306	2340	1720	1105	740	413
	760	502	335	236	141	91	47
1.....	4047	2804	2005	1484	964	649	366
	538	348	230	164	94	62	30
2.....	3509	2456	1775	1320	870	587	336
	514	328	220	156	95	59	30
3.....	2995	2128	1555	1164	775	528	306
	491	320	214	149	90	56	30
4.....	2504	1808	1341	1015	685	472	276
	473	309	207	146	87	56	28
5.....	2031	1499	1134	869	598	416	248
	451	295	198	141	84	52	28
6.....	1580	1204	936	728	514	364	220
	428	284	192	135	81	52	26
7.....	1152	920	744	593	433	312	194
	412	266	182	129	80	50	27
8.....	740	654	562	464	353	262	167
	385	256	174	124	74	48	25
9.....	355	398	388	340	279	214	142
	355	239	166	118	72	47	24
10.....	0	159	222	222	207	167	118
	329	223	154	110	68	44	23
11.....	— 329	— 64	68	112	139	122	95
	305	206	146	106	65	42	22
12.....	— 634	— 270	— 78	6	74	81	73
	283	193	132	98	62	40	22
13.....	— 917	— 463	— 210	— 92	12	41	51
	255	180	127	90	58	38	20
14.....	— 1172	— 643	— 337	— 182	— 46	3	31
	235	161	118	87	55	30	20
15.....	— 1407	— 804	— 455	— 269	— 101	— 27	11
	215	152	106	79	50	30	18
16.....	— 1622	— 956	— 561	— 348	— 151	— 67	— 7
	193	139	100	74	48	31	18
17.....	— 1815	— 1095	— 661	— 422	— 199	— 98	— 25
	184	126	93	69	46	30	17
18.....	— 1999	— 1221	— 754	— 491	— 245	— 128	— 42
	163	117	86	65	41	28	15
19.....	— 2162	— 1338	— 840	— 556	— 286	— 156	— 57
	149	108	79	58	40	27	15
20.....	— 2311	— 1446	— 919	— 614	— 326	— 183	— 72

Détorsion amenant la couche superficielle ou plus généralement la couche de rayon r à une tension tangentielle nulle. — Pour savoir à quel moment la couche de rayon r exerce un couple nul, il faut déterminer la détorsion pour laquelle le couple est maximum en fonction de r . Ce qui revient au même, il faut

déterminer le lieu des intersections successives des diverses courbes de détorsion correspondant à des r très voisins. On trouve par exemple, en utilisant les deux premières colonnes du Tableau,

$$r \dots \left\{ \begin{array}{l} 1000 \\ 893 \end{array} \right\} \text{moyenne} \dots 946 \quad \text{Détorsion} \dots 8,66;$$

en faisant de même pour les courbes deux à deux, on trouve

$r \dots \dots \dots$	946	850	772	692	612
Détorsion.....	8,66	9,20	10,00	10,34	11,72

D'où, par interpolation,

$r \dots \dots \dots$	1000	893	807	737	647	577
Détorsion.....	8,50	8,92	9,50	10,10	11,16	12,30

Détorsion amenant le couple total à être nul pour les différents fils. — Les fils de différents rayons n'ont pas été tordus du même nombre de millièmes, puisqu'ils l'ont été du même nombre de tours et que le rayon n'est pas le même. On a calculé d'après le Tableau : 1° les torsions en millièmes; 2° les détorsions D_1 ramenant le couple total à être nul; 3° les détorsions D_2 en u arbitraires ramenant la couche superficielle à une tension nulle; 4° le rapport de ces deux détorsions $\frac{D_2}{D_1}$.

Rayon.....	1000	893	807	737	647	577
Torsion.....	510	456	411	376	320	294
$D_1 \dots \dots \dots$	10	10,71	11,46	12,06	13,21	14,10
$D_2 \dots \dots \dots$	8,50	8,92	9,50	10,10	11,16	12,30
$\frac{D_2}{D_1} \dots \dots \dots$	0,85	0,83	0,83	0,88	0,84	0,87

Ainsi quand on détord, la couche superficielle revient au couple nul sensiblement lorsque les 0,85 de la détorsion nécessaire pour ramener au couple nul ont eu lieu. Les torsions ont varié dans ces expériences de 294 millièmes à 510 millièmes : elles ont donc toujours été fort grandes. Nous avons calculé dans le Chapitre précédent ce rapport : dans l'hypothèse de J. Thomson, il est toujours inférieur à 0,75; dans l'hypothèse de la forme parabolique pour la courbe des f , il peut atteindre 0,833. La coïncidence est remarquable.

Distribution des forces au couple nul dans la section droite. — Déterminons la position du cylindre creux infiniment mince qui ne supporte aucune tension quand le couple total est nul : il revient au même de déterminer pour quel cylindre plein le couple est maximum. En particulier, pour le fil $r = 1000$, le couple total nul est atteint pour une détorsion 10 : si nous consultons la ligne

correspondant à cette détorsion nous trouvons deux couples égaux à 222 pour les rayons 807 et 737. Le cylindre creux infiniment mince de couple nul a pour rayon un rayon voisin de la moyenne de ces nombres, soit 772.

Les parties du fil dont la distance à l'axe est supérieure aux 0,77 du rayon exercent des actions dans un sens, les autres exercent des couples dans l'autre sens.

La valeur exacte de ce rayon est impossible à déterminer, puisqu'il s'agit d'un maximum : la valeur de ce maximum est, au contraire, facile à connaître : il est de $222 : 4807 = 0,046$ du couple total au moment de la détorsion. Dans l'hypothèse d'une courbe de J. Thomson, pour une grande torsion, ce rapport serait 0,106 ; dans l'hypothèse d'une courbe des f parabolique, il serait 0,055 ; si le fil était parfaitement élastique, il serait nul. Le résultat obtenu est bien dans le sens qu'il était facile de prévoir.

Variation simultanée des couples pendant la détorsion. — Nous savons que dans le système des hypothèses J. Thomson-Duguet, les diminutions simultanées de couples, pour les cylindres pleins de rayon r , doivent être comme r^4 . Ce qui revient à dire que pendant la détorsion les courbes des f sont homologues. L'expérience montre, au contraire, que pendant la détorsion, pour le même angle de détorsion, la diminution relative des couples est plus grande pour les couches cylindriques minces intérieures que pour celles qui sont plus superficielles.

On a calculé d'après les rayons r des cylindres pleins, à une puissance de 10 près, les valeurs de r^4 , et pour la suite des détorsions de 0 à 1, 1 à 2, etc., les diminutions de couples rapportées à la diminution de couple pour le cylindre de rayon 1000.

Ainsi, prenons ce qui se rapporte à la détorsion de 2 à 3 (la détorsion 10 ramentant comme il est convenu le cylindre total au couple nul). Nous trouvons, pour les diminutions de couples,

514, 328, 220, 156, 95, 57, 30;

nous rapportons tout à 1000 et nous avons

1000, 640, 429, 304, 185, 115, 58.

Si la règle de la quatrième puissance était vraie, ces nombres devraient être

1000, 634, 424, 295, 175, 111, 56.

La diminution est donc plus grande pour les parties intérieures que pour les parties superficielles.

Dans le Tableau suivant on a fait les moyennes des rapports trois par trois : par exemple, la première ligne donne le rapport moyen déduit de la moyenne

des rapports des trois détorsions 0 à 1, 1 à 2, 2 à 3, etc. La dernière ligne donne donc ce rapport moyen pour les détorsions 12 à 13, 13 à 14, 14 à 15 :

r	1000	893	807	737	647	577	487
r^3	1000	634	424	295	175	111	56
	1000	643	431	306	182	117	59
	1000	653	438	308	185	116	61
	1000	658	446	317	192	122	64
	1000	676	471	338	208	135	70
	1000	691	490	357	227	139	80

20. *Analyse de la distribution variable des couples à azimuth constant en un point de la courbe de première torsion.* — J'ai montré comment la méthode générale du § III, Chapitre VI, permet de résoudre ce problème : on s'y reportera pour la signification des notations employées. La torsion pour $r = 1000$ était de 300 tours avec une vitesse de 1 tour en 10^s, 66. Une torsion purement élastique de 1° correspond à 5^u, 07.

Tandis que le Tableau du n° 19 donne ce que nous appelons les C_m , le Tableau ci-dessous donne les C'_m et les P'_m , c'est-à-dire les nombres directement déterminés par l'expérience. D'après nos notations $P_m = m^3 P'_m$, $C_m = m^3 C'_m$. On a d'ailleurs généralement

$$C_m = 2\pi \int_0^m r^2 f dr, \quad P_m = 2\pi \int_0^{mR} r^2 \Delta f dr,$$

Δf étant la perte de couple qui s'effectue à azimuth constant en un temps donné :

r	1000	893	807	737	677	583	483
Temps 0 ^s .	4780	4623	4432	4269	4116	3864	3560
30 ^s .	4569	4423	4249	4099	3957	3722	3436
1 ^m .	4520	4379	4206	4058	3919	3687	3403
2 ^m .	4467	4326	4156	4010	3873	3647	3368
4 ^m .	4407	4269	4100	3959	3826	3600	3327
8 ^m .	4340	4204	4040	3901	3773	3551	3281
16 ^m .	4270	4138	3976	3840	3717	3499	3234
32 ^m .	4195	4066	3909	3777	3656	3442	3183
64 ^m .	4119	3993	3838	3713		3385	3132
128 ^m .	4040	3920	3769			3328	
0 ^s à 32 ^m .	585	557	523	492	460	422	377

On pourrait faire sur la déperdition deux hypothèses que nous allons discuter :

A. On pourrait d'abord supposer que les Δf sont proportionnels à r , ce qui revient à dire que les différentes courbes des f à azimut constant peuvent s'obtenir les unes des autres, comme par une détorsion parfaitement élastique. On devrait alors avoir

$$P_m = 2\pi \int_0^{mR} K r^3 dr = \frac{2\pi K}{4} m^4 R^4,$$

d'où

$$m^3 P'_m = \frac{\pi K}{2} m^4 R^4, \quad K = \frac{2}{\pi R^4} \frac{P'_m}{m}.$$

Calculons ce rapport $P'_m : m$ pour les déperditions en 30° et en 32^m . On trouve à un facteur près

211	224	227	231	235	244	256
585	624	648	667	679	724	781

On voit que les nombres croissent : les P'_m sont donc trop importants pour les couches intérieures : l'hypothèse n'est pas vérifiée. On comparera ce résultat à ce qui est dit à la fin du n° 19.

B. On peut supposer que Δf est proportionnel à f . On doit avoir

$$P_m : C_m = P'_m : C'_m = \text{const.}$$

On trouve, pour les déperditions en 30° et 32^m ,

441	432	413	398	386	367	348
1224	1205	1180	1152	1118	1092	1059

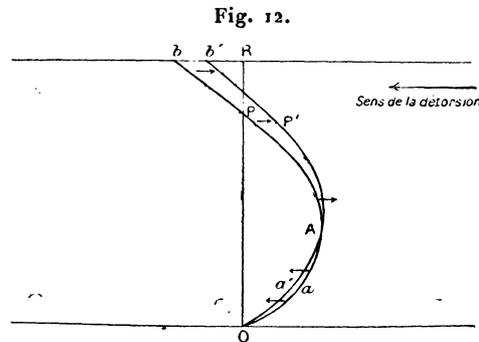
Les quotients sont nettement décroissants : ce résultat était facile à prévoir, puisque les expériences se font (suivant la méthode générale) à des vitesses différentes et décroissantes avec r (voir Chap. VI, § III).

En définitive, si nous revenons à la section droite du cylindre vrai, les variations Δf ne se font pas proportionnellement aux forces tangentielles actuelles : elles sont plus petites au centre que ne l'indiquerait cette loi. D'autre part, elles ne se font pas comme s'il y avait détorsion élastique ; elles sont plus grandes au centre que ne l'indiquerait cette loi.

21. *Analyse de la distribution variable des couples à azimut constant au couple total nul (fig. 12).* — Nous pouvons démontrer, en nous appuyant sur les résultats précédents, la proposition suivante :

Si la torsion a été suffisante, pendant la variation *lente* de couple consécutive

à l'arrêt à azimut constant après retour au couple total nul, les cylindres creux infiniment minces centraux et les cylindres superficiels produisent des variations de f de sens contraire. Nous savons déjà que les f sont de sens contraire; il s'agit de démontrer que les Δf sont aussi de sens contraire: nous ne voulons cependant pas dire que les f et les Δf correspondants sont de même signe: en d'autres termes,



il peut se faire que ce ne soit pas le même cylindre creux infiniment mince qui serve de limite aux f et aux Δf qui sont de sens contraire.

Tordons un fil jusqu'au couple C_1 et détordons-le jusqu'au couple C_2 ; étudions la variation de couple *lente* à azimut constant consécutive à l'arrêt. Posons $s = \frac{C_2}{C_1}$. Reportons-nous au n° 4.

Dans cette expérience, la torsion avait été poussée jusqu'à $4720^u = C_1$. Si s est voisin de 1, la variation *lente* consécutive à l'arrêt est directe. Si s est voisin de 0 et *a fortiori* < 0 , la variation *lente* est rétrograde. Le passage d'un cas à l'autre se fait pour certaines valeurs de s (fonctions de C_1 et des conditions de l'expérience) pour lesquelles la variation est d'abord rétrograde, puis directe. Ainsi pour $C_2 = 3720$, $s = 0,79$, la variation est directe; pour $C_2 = 2720$, $s = 0,57$, elle est rétrograde, puis directe; pour $C_2 = 1720$, $s = 0,37$, elle est immédiatement rétrograde.

Appliquons maintenant la méthode générale du § III, Chapitre VI et cherchons quelles vont être en fonction de m les valeurs de s .

Prenons un fil de rayon R , tordons-le d'un angle α_1 jusqu'au couple C_1 ; ramè-nons au couple nul par une détorsion α_2 : posons $\alpha_2:\alpha_1 = \sigma$. Le rapport s est nul. La variation de couple à azimut constant est sûrement rétrograde.

Faisons maintenant l'expérience qui doit nous apprendre comment intervient dans le phénomène le cylindre plein de rayon mR . Avec une vitesse convenable, tordons de $m\alpha_1$ et détordons de $m\alpha_2$: le rapport σ reste le même. Le rapport s varie; il augmente à mesure que m diminue.

Cherchons ce qu'il devient pour $m = 0$; ce fil peut être considéré comme par-

faitement élastique; on a

$$C_1 = \Gamma m \alpha_1, \quad C_2 = \Gamma m (\alpha_1 - \alpha_2), \quad s = 1 - \sigma.$$

Si la torsion a été grande, σ est petit, s est très voisin de 1. Donc certainement pour les cylindres pleins tels que m soit assez petit, la variation sera directe. Et la tendance à ce que le mouvement soit direct est d'autant plus grande que m est plus petit.

En définitive au couple total nul, si $OaPb$ (*fig. 12*) représente la courbe des f au moment de l'arrêt, cette courbe tend à azimuth constant à se transformer dans la courbe $Oa'P'b'$. Les points qui se trouvent dans la région A peuvent avoir d'ailleurs un mouvement d'abord direct, puis rétrograde.

Voici le résultat d'une expérience qui éclaire ce qui vient d'être dit : on donne les C'_m et P'_m directement déterminés par l'expérience :

α_1 (tours)...	300 ^t	145 ^t	100 ^t	50 ^t	10 ^t
r	1000	483	333	166	33,3
α_2 (degrés)...	1055 ^o	510 ^o	342 ^o	176 ^o	34 ^o
C_1	4780 ⁿ	3560 ⁿ	2950 ⁿ	2060 ⁿ	1047 ⁿ
C_2	0	1031	1177	1140	830
s	0	0,289	0,399	0,562	0,793
Temps 0 ^s ...	0	1031	1177	1140	830
	13	5	2	1	-1
30 ^s ...	13	1036	79	41	29
	7	3	1	1	-1
1 ^s ...	20	39	80	42	28
	9	1	1	0	-2
2 ^s ...	29	40	81	42	26
	9	2	2	0	-3
4 ^s ...	38	42	83	42	23
	9	5	2	-1	-3
8 ^s ...	47	47	85	41	20
	11	3	2	-1	-4
16 ^s ...	58	50	87	40	16
	11	3	1	-1	-6
32 ^s ...	69	53	88	39	10
	11	3	-2	-4	-7
64 ^s ...	80	56	86	35	803
			-2	-4	-6
128 ^s ...			84	31	797
			-4	-4	
256 ^s ...			80	27	
			-3	-5	
512 ^s ...			77	22	

On remarquera qu'au couple nul il faut faire intervenir des cylindres creux de faible rayon qui n'ont aucune influence pour des torsions grandes.

FILS FORTEMENT ÉTIRÉS A LA FILIÈRE.

22. Courbes de torsion. — Nous savons, d'après le Chapitre IV, n° 6, quelle est la forme générale des courbes de torsion. Le couple tend rapidement vers une limite, atteinte d'autant plus vite que la déformation à la filière a été plus grande. Si on prolonge la torsion, le couple, après avoir crû, décroît; le couple limite est donc en réalité un couple maximum. Le maximum se produit pour des torsions différentes suivant les bouts de fil : il semble donc qu'il est dû à un défaut d'homogénéité du fil qui se désagrège en quelqu'un de ses points. Quoiqu'il en soit, ce maximum en fonction de la torsion va se présenter pour un certain nombre de phénomènes : il est impossible de ne pas en tenir compte.

Pour éviter des calculs longs et inutiles, on exprime les torsions en degrés et tours. Le fil, employé dans les expériences qui suivent, pèse, recuit tel que le livre de commerce, 2^{sr}, 535 par mètre : avec la densité conventionnelle 8,92, il a donc un diamètre de 0^{mm}, 602 : il nous a été livré comme ayant un diamètre de 0^{mm}, 600. Après deux passes à la filière (filière en saphir, trous 0^{mm}, 540 et 0^{mm}, 480) il pèse 1^{sr}, 607 : ce qui lui donne un diamètre de 0^{mm}, 479. L'allongement par les deux passes est de 580 millièmes. Je n'insiste pas pour le moment sur les perfectionnements que j'ai apportés à l'étirage des fils; j'aurai l'occasion, dans un Mémoire ultérieur, de revenir sur les effets de la filière.

La torsion par tour-mètre est de 1, 505 millièmes : la charge totale est de 500^{sr}, juste suffisante pour tendre le fil.

On donne plus loin plusieurs courbes de torsion : la vitesse était de 5^s, 64 par tour; le maximum de couple se produisait entre 30 et 40 tours, soit pour une torsion de 53 millièmes. Pour certains fils on a pu aller jusqu'à 200 tours sans que le couple diminuât.

23. Courbes de torsion pour des vitesses différentes. — Traçons les courbes de torsion pour chaque vitesse dans le plan des Cx et mesurons les distances verticales ΔC. Ces différences ΔC, nulles tant que le fil est presque élastique, croissent ensuite d'abord rapidement, puis lentement, passent par un maximum et décroissent ensuite lentement et à peu près proportionnellement à la torsion. Pour les vitesses employées (de 1 tour en 5^s, 64 à 1 tour en 534^s, soit de la vitesse 266,8 millionième seconde à 2, 82), les maximum des différences des courbes successives correspondent à la même torsion voisine de 9 tours, soit 13, 5 millièmes.

Au moins comme première approximation, on peut poser

$$\Delta C = f(\alpha) \log \frac{v_2}{v_1},$$

$f(\alpha)$ étant indépendant de v_1 et de v_2 . L'expérience est trop incertaine pour qu'il soit possible d'aller plus loin.

On donne, dans le Tableau suivant, les résultats de quatre expériences et les différences ΔC entre deux courbes consécutives. Les couples sont donnés de tour en tour; pour la première seulement de deux tours en deux tours.

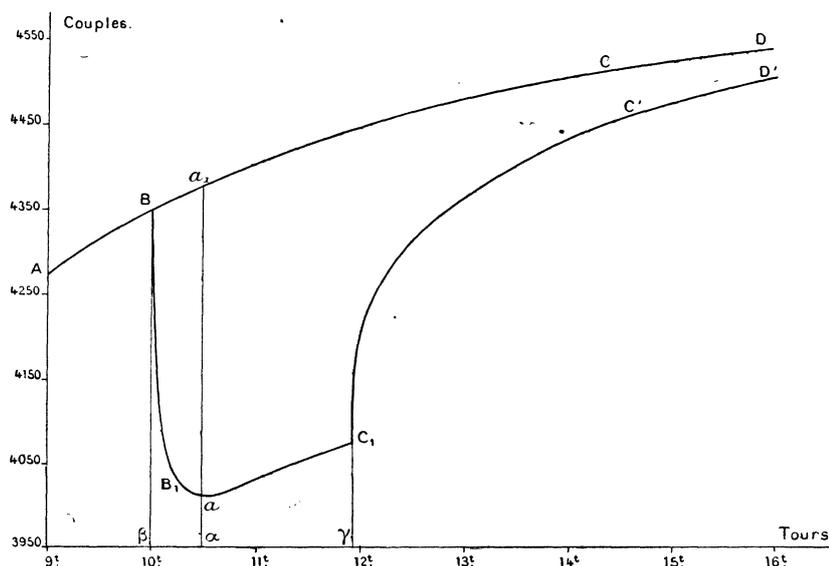
L'influence de la vitesse est considérablement plus grande pour les fils étirés que pour les fils recuits : n'est-il pas prodigieux que, pour des vitesses en somme très faibles, les couples puissent varier de $\frac{1}{8}$ de leur valeur? Que penser de théories qui ne tiennent pas compte de ces effets?

Durée du tour : 5 ^h ,64. Vitesse : 266,8.		21 ^h ,50. 70,0.		139 ^h ,0. 10,83.		534 ^h . 2,82.
	»	980	25	555		»
1893	73	1820	70	1750	73	1677
		2530	123	2407		»
3250	155	3095	168	2927	157	2770
		3515	199	3316	186	3130
3983	168	3815	218	3597	202	3395
		4022	222	3800	211	3589
4340	170	4170	226	3944	214	3730
		4277	224	4053	217	3836
4517	165	4352	218	4134	221	3913
		4411	214	4197	219	3978
4607	153	4454	211	4243	217	4026
		4490	209	4281	215	4066
4657	143	4514	203	4311	213	4098
		4534	200	4334	212	4122
4791	140	4551	198	4353	210	4143
		4563	195	4368	208	4161
4711	136	4575	192	4383	206	4177
		4583	190	4393	204	4189
4724	129	4595	192	4403	203	4200

24. *Remplacement d'une vitesse par une autre vitesse sur la courbe de première torsion (fig. 13 à comparer avec la fig. 8 du n° 13).* — Sur la courbe de première torsion, décrite avec la vitesse V , on installe pendant n tours la vitesse v , puis on réinstalle la vitesse V . On maintient V , v , n constants, et l'on déplace seulement, sur la courbe de torsion, le point où la vitesse v est installée.

Nous sommes amenés à comparer la courbe obtenue $ABB_1 \alpha C, C'D'$ à la courbe AB supposée prolongée suivant BCD . Pour obtenir ce prolongement avec le moins d'erreur possible, on décrit avec un autre fil la courbe complète; elle se trouve, suivant les différences que présentent les bouts de fils, un peu au-dessus ou au-

Fig. 13.



dessous de AB ; on transporte le point dont l'azimut est β sur le point B par un déplacement d'ensemble vertical de la courbe: on admet que la partie BCD ainsi déterminée est le prolongement de AB .

On détermine, en fonction de la position du point B sur la courbe de torsion, la longueur aa_1 : l'expérience montre qu'elle suit la même loi de variation que le ΔC entre les deux courbes parcourues tout entières avec les vitesses V et v . Nulle quand B est près de l'origine de la courbe AB , elle croît rapidement, passe par un maximum et décroît ensuite.

V , durée du tour = $21^s,5$, v , durée du tour = 534^s .

Azimut du point β en tours.	5 ^t	10 ^t	15 ^t	20 ^t	100 ^t	200 ^t
aa_1	372 ^u	367 ^u	357 ^u	334 ^u	249 ^u	212 ^u
$\alpha\beta$	73°	176°	260°	260°	260°	

Les valeurs de $\alpha\beta$ ne sont données qu'à titre d'indication.

Si l'on recommence l'opération avec deux vitesses V et v qui soient dans le même rapport que les précédentes, mais 3,81 fois plus grandes, on trouve des longueurs aa_1 peu différentes des précédentes, mais un peu plus petites. On peut

admettre comme première approximation que aa_1 est donné par la formule

$$\overline{aa_1} = f_1(\alpha) \log \frac{v_2}{v_1},$$

$f_1(\alpha)$ étant indépendant de v_1 et de v_2 .

Enfin, il semble bien que $C'D'$ ne se raccorde pas à CD , mais à une courbe parallèle à CD située légèrement au-dessous. De toute manière, le raccordement ne se ferait que très loin.

25. *Déperdition à azimuth constant à partir des divers points de la courbe de torsion.* — La torsion s'effectue avec la vitesse de 1 tour en 21^s,68; la longueur du fil est 1^m.

On appelle p_0 la déperdition à azimuth constant en 30^s; p_t la déperdition entre les temps 0 et t ; Δp_n la déperdition entre les temps formant deux termes consécutifs de la progression géométrique de raison 4,

$$30^s - 2^m - 32^m - 128^m - 512^m - \dots$$

On donne, dans le Tableau suivant, les résultats pour des couples inférieurs au maximum qui est voisin de 4600^u; bien entendu, chaque fil ne sert qu'une fois.

Couples.	p_0 .	p_{64} .	Δp_1 .	Δp_2 .	Δp_3 .	Δp_4 .
850.....	32	121	19	23	29	36
1350.....	59	237	43	48	56	
1850.....	82	334	59	69	79	86
2350.....	117	483	83	103	117	
2850.....	159	622	109	134	150	158
3350.....	198	783	137	171	188	
3850.....	221	929	166	203	222	237
4350.....	252	1070	188	233	261	272

Courbe de torsion du fil employé par tours :

$$1090, 2010, 2780, 3380, 3815, 4120, 4330, \\ 4480, 4587, 4663, 4720, 4762, 4795, 4820.$$

On peut poser, comme première approximation,

$$p_t = AF(t), \quad A = aC + bC^2,$$

$F(t)$ étant indépendant du couple d'arrêt.

Ainsi, les quotients de Δp_1 et Δp_2 par Δp_3 sont indépendants du couple d'arrêt aux erreurs d'expérience près. Cependant, le rapport $\frac{p_0}{\Delta p_3}$ décroît légèrement

quand C croît; la déperdition dans les 30 premières secondes semble perdre de son importance par rapport aux déperditions suivantes à mesure que le couple croît.

$$p : \Delta p_3 = 1,10 - 1,05 - 1,04 - 1,00 - 1,00 - 1,00 - 1,00 - 0,96.$$

D'autre part, les quotients $\Delta p(1 - 8) : \Delta p(8 - 64)$ sont

$$0,702 - 0,786 - 0,807 - 0,816 - 0,843 - 0,850 - 0,859 - 0,841.$$

Il semble donc, quand le couple croît, que le phénomène de déperdition rapide perde de son importance vis-à-vis du phénomène lent; mais que, d'autre part, les Δp_n atteignent plus rapidement leur limite.

Reste à déterminer la forme $F(t)$; on peut poser

$$p = A[\log(t + \tau) - \log \tau],$$

à condition de ne pas chercher à représenter ce qui se passe dans les premiers instants, la première minute, par exemple. Comme nous l'avons déjà expliqué, le phénomène se décompose en deux.

Lorsque la torsion est très grande, c'est elle et non plus le couple qu'il faut considérer comme paramètre variable. Dans les expériences suivantes, les couples restent à peu près constants et indépendants de la torsion. Ils seraient égaux et voisins de 4620^u si les fils étaient identiques. Dans l'expérience où la torsion a été de 200 tours, seule, on a atteint, pour le couple, un maximum vers 73 tours; à la torsion de 200 tours, le couple avait baissé de 11^u .

	p_0	Δp_1	Δp_2	Δp_3	Δp_4	Δp_5	p_{312}
10.....	246 ^u	188 ⁿ	240 ^u	276 ^u	292 ^u	292 ^u	1532 ^u
20.....	235	183	248	290	306	306	1568
40.....	219	163	233	286	312	312	1525
60.....	209	157	221	280	317	324	1508
100.....	195	145	204	268	299	306	1417
200.....	181	134	185	247	283	295	1325

Ainsi, en 512^m , moins d'une demi-journée, la déperdition à azimut constant peut s'élever à 1568^u sur 4620^u , avec la vitesse de torsion cependant petite de 1 tour en $21^s,68$.

Δp_n tend vers une limite constante, à peu près indépendante de la torsion.

$$p_0 : \Delta p_3 = 0,89 - 0,81 - 0,76 - 0,74 - 0,73 - 0,73,$$

résultat qui complète ce qui a été trouvé pour des torsions plus petites. Par contre,

on a

$$\Delta p(1-8) : \Delta p(8-64) = 0,817 - 0,785 - 0,730 - 0,708 - 0,685 - 0,677.$$

Ainsi, les Δp_n qui, pour des torsions petites, variaient, comme première approximation, suivant une loi indépendante du couple [d'arrêt, comme seconde approximation, atteignaient leur limite d'autant plus vite que le couple était plus grand, ont, pour de grandes torsions, une loi de variation qui dépend notablement de la torsion : ils atteignent leur limite d'autant moins vite que la torsion est plus grande. On tirerait la même conclusion de la comparaison des quotients $\Delta p_1 : \Delta p_5, \dots, \Delta p_4 : \Delta p_5$.

Pour de grandes torsions, la formule

$$p = A [\log(t + \tau) - \log \tau]$$

ne représente plus les déperditions lentes qu'avec une approximation de moins en moins satisfaisante, à mesure que la torsion croît. La constante τ , qui diminue à mesure que le couple augmente, croît quand, au couple maximum et au delà de ce couple, la torsion croît.

26. *Déperdition de couple à azimuth constant après une torsion invariable effectuée sur la courbe de première torsion parcourue avec des vitesses uniformes différentes d'une expérience à l'autre.* — La torsion est de 5 tours = 7,52 millièmes; on donne la durée du tour :

	5°,64.	21°,5.	139°.	534°.
0°.....	3800 ^u	3706 ^u	3447 ^u	3281 ^u
	260	153	48	18
15°.....	3540	3553	3399	3263
	80	62	29	12
30°.....	3460	3491	3370	3251
	88	73	41	21
1 ^m	3372	3418	3329	3230
	93	87	56	31
2 ^m	3279	3331	3273	3199
	99	93	69	46
4 ^m	3180	3238	3204	3153
	104	102	83	59
8 ^m	3076	3136	3121	3094
	106	106	92	73
16 ^m	2970	3030	3029	3021
	108	110	101	84
32 ^m	2862	2920	2928	2937
	109	111	108	97
64 ^m	2753	2809	2820	2840

Soient, dans le plan des C , t , les courbes de déperdition à azimut constant (le temps d'arrêt étant pris pour origine), issues, après une torsion toujours la même, des courbes à vitesse constante $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$. Appelons courbe de déperdition v_i celle qui est issue de la courbe de torsion décrite depuis l'origine avec la vitesse v_i . Soient les vitesses v_1, v_2, \dots rangées par ordre de grandeurs décroissantes. La courbe de déperdition v_i coupe les autres dans l'ordre $v_1, v_2, v_{i-1}, v_{i+1}, v_n$. Si l'on prend pour abscisses les logarithmes des temps, les courbes tendent à se confondre avec des droites parallèles. Pour un même temps, $\frac{dC}{dt}$ est d'autant plus grand que la vitesse v correspondante était plus grande.

Revenons dans le plan de αC . Les courbes de déperdition sont des droites verticales. Cherchons quelle est la vitesse de déperdition après arrêt sur la courbe de torsion v_i , quand on traverse la courbe v_n ($v_n < v_i$), et comparons cette vitesse à la vitesse initiale de déperdition à partir de la courbe de torsion v_n . L'expérience montre que, partant de la courbe v_i , on traverse la courbe v_n avec une vitesse plus petite que la vitesse initiale de déperdition à partir de v_n . Au-dessous de la courbe v_n , les vitesses de déperdition, pour les phénomènes issus des deux courbes, deviennent égales; puis ce sont les vitesses de déperdition pour le phénomène issu de la courbe v_i qui l'emportent sur les vitesses pour le phénomène issu de la courbe v_n .

Calculons, par exemple, la vitesse initiale de déperdition pour la courbe 139^s : $\Gamma = 3^u, 11$ par degré ou 1120^u par tour. Or, pour 5 tours de torsion, sur la courbe de torsion 139^s,

$$\begin{aligned} \gamma &= 335^u \text{ par tour,} & \Gamma - \gamma &= 785^u \text{ par tour} = 2^u, 18 \text{ par degré,} \\ v(\Gamma - \gamma) &= 5^u, 65 \text{ par seconde.} \end{aligned}$$

On trouverait de même, pour la courbe 534^s,

$$\gamma = 315, \quad \Gamma - \gamma = 805^u \text{ par tour} = 2^u, 24 \text{ par degré.}$$

Une vitesse de 1 tour en 534^s donne par seconde 0^o, 674.

$$v(\Gamma - \gamma) = 1^u, 51 \text{ par seconde.}$$

Considérons maintenant la courbe de déperdition 5^s, 64 et cherchons quelle est la vitesse au passage par les couples 3447 et 3281, c'est-à-dire à l'intersection des courbes de torsion 139^s et 534^s; on trouve, par interpolation,

$$4,00 \text{ et } 1,15 \quad \text{au lieu de} \quad 5,65 \text{ et } 1,51.$$

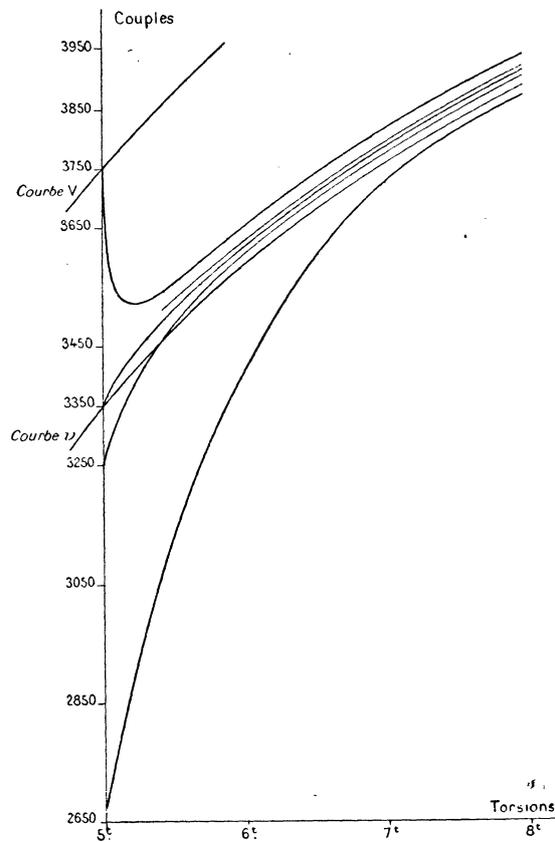
Comparons maintenant les vitesses de déperdition pour le même couple assez éloigné du point d'arrêt sur les trois courbes de déperdition.

Pour le couple

3128	sur la courbe de déperdition	5°,64	$\left\{ \begin{array}{l} \text{on a une vitesse moyenne} \\ \text{exprimée en unités arbi-} \\ \text{traires u par seconde} \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} = 0,43 \\ = 0,32 \\ = 0,25 \end{array} \right\}$
3124		139°		
3124		534°		

27. Relation des courbes de torsion v_i et v_n et passage de l'une à l'autre (fig. 14). — Sur la courbe décrite avec la vitesse V de 1 tour en 21°,5, on va dans toutes les expériences au point dont les coordonnées sont 5 tours et 3750^u. On arrête et l'on maintient l'azimut constant jusqu'à obtenir une déperdition ΔC

Fig. 14.



variable d'une expérience à l'autre. On installe alors la vitesse de 1 tour en 534°. La fig. 14 donne le résultat de l'expérience : on la rapprochera de ce qui est dit au n° 16, dont elle peut servir de commentaire. On a seulement corrigé, sur la fig. 14, les petites différences qui résultaient de la non parfaite identité des bouts de fils. Un arrêt à azimut constant déplace la courbe de torsion vers la droite. Tout se passe comme si l'origine des azimuts était modifié par l'arrêt.

La figure donne aussi la courbe à vitesse constante de 1 tour en 534^s décrite depuis l'origine.

28. *Déperditions successives à azimuth constant quand on ramène plusieurs fois au même couple.* — On amène le fil au couple 4150^u avec une vitesse de 1 tour en 143^s.

On arrête, on attend 8^m. On ramène au couple 4150^u, . . . , ainsi de suite douze fois. On donne les déperditions p_{15} , p_{30} , Δp_1 , Δp_2 , p_8 et le nombre de degrés dont il faut retordre :

Retorsion.	p_{15} .	p_{30} .	Δp_1 .	Δp_2 .	p_8 .
» ^o	54 ^u	87 ^u	103 ^u	169 ^u	359 ^u
365.....	50	78	90	144	312
274.....	47	71	82	136	289
217.....	47	70	75	124	271
195.....	45	68	72	119	259
177.....	42	66	67	116	249
166.....	41	62	67	110	239
154.....	40	60	65	106	231
143.....	40	60	61	102	223
137.....	39	58	61	100	219
128.....	39	57	59	96	212
127.....	38	56	56	97	209

On attend 160^m et l'on descend ainsi de 641^u; on remonte à 4150^u par une torsion de 471^o; et l'on continue :

Retorsion.	p_{15} .	p_{30} .	Δp_1 .	Δp_2 .	p_8 .
471.....	46 ^u	69 ^u	69 ^u	101 ^u	239 ^u
156.....	40	60	61	96	217
134.....	39	58	54	94	206
121.....	38	55	55	89	199
114.....	36	52	54	86	192

Discutons les résultats de cette expérience.

Calculons la tangente moyenne à la courbe de retorsion : il faut diviser la déperdition p_8 par la retorsion suivante : on trouve ainsi des nombres croissants qui (évalués en u par degré) varient de 0,984 à 1,724. La courbe se redresse donc, mais tant s'en faut qu'elle soit parfaitement élastique tout de son long : pour le fil parfaitement élastique, le rapport devrait être 3,030. Aussi les déperditions initiales en 15^s et en 30^s restent-elles toujours grandes.

Les rapports $p_{30} : p_8$, calculés quatre expériences par quatre expériences pour

avoir des moyennes, donnent

$$0,249 - 0,257 - 0,268 - 0,276,$$

nombres peu variables.

Les rapports $\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}$ ont pour moyenne 1,660; les écarts à cette moyenne sont de l'ordre des erreurs d'expérience.

En définitive, on a sensiblement

$$p = Af(t),$$

$f(t)$ étant indépendant du numéro d'ordre de l'expérience et englobant les deux phénomènes : A varie dans les dix-sept expériences dans le rapport 359 : 192 ou 1,87 : 1. Ce résultat est incompatible avec une représentation mécanique telle que celle que nous avons développée au § IV du Chapitre VI (molécules à élasticité retardée). Sans recourir à l'équation différentielle, on voit facilement que, quelles que soient les conditions initiales, il n'y a à azimut constant qu'une seule courbe de déperdition (couple, temps). Le changement des conditions initiales ne fait que changer la portion de cette courbe qu'on utilise, ou, ce qui revient au même, l'origine des temps. Or, il n'y a qu'une seule fonction $y = e^{at}$, telle qu'on ait

$$y = e^{a(t-\tau)} = e^{-a\tau} e^{at},$$

qui satisfasse simultanément à la condition théorique et à l'expérience, c'est-à-dire telle que le changement d'origine de la variable revienne à une dilatation des ordonnées. Mais cette fonction ne représente pas du tout l'ensemble du phénomène de déperdition. On pourrait facilement déterminer les propriétés générales des systèmes mécaniques qui seraient éliminés du coup par des considérations de cet ordre et resserrer ainsi le champ où se trouvent les théories acceptables.

29. *Courbes de détorsion.* — La vitesse de torsion ou de détorsion était de 10,83 millièmes seconde (1 tour en 139^s, le tour vaut 1,505 millièmes). Il n'y a pas d'arrêt au moment de changement de sens. Dans le Tableau, les courbes de détorsion sont données au moyen des couples comptés en descendant à partir du couple d'arrêt pris pour origine, et des détorsions évaluées en tours à partir de l'azimut de détorsion.

Si tous les fils étaient identiques, les courbes de torsion se superposeraient : naturellement elles ne le font pas.

1° Jusqu'à une torsion voisine de 10 tours, les courbes de détorsion rapportées au point de départ sur la courbe de torsion comme origine sont les unes au-dessus des autres, d'autant plus hautes que la torsion a été plus grande. C'est une règle que nous avons déjà rencontrée avec les fils recuits.

La variation totale de couple, pour une même détorsion sur les différentes courbes de détorsion, varie d'abord beaucoup avec la torsion, puis de moins en moins. Ce résultat explique certaines différences apparentes constatées entre les deux bouts consécutifs du fil. Si l'on a tordu le fil en l'installant dans le dynamomètre, on obtient, au lieu d'une courbe de première torsion, une courbe de première détorsion qui peut différer notablement de la première.

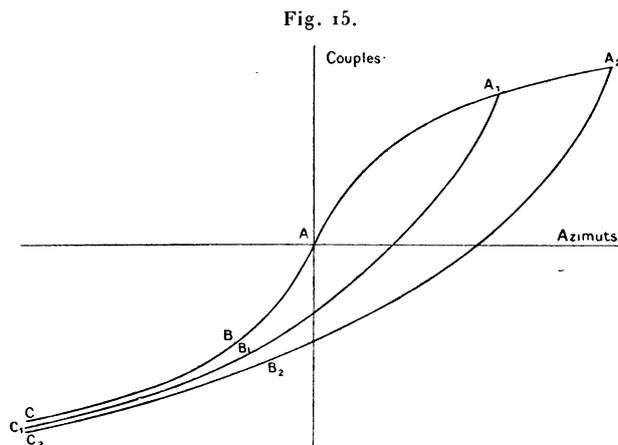
Pour des torsions plus grandes que 10 tours, il semble que la courbe de détorsion s'abaisse légèrement. Il est difficile, dans le phénomène constaté, de faire la part des différences entre les fils.

2° Prenons comme coordonnées C et γ ; les courbes de détorsion présentent un point d'inflexion : même résultat que pour les fils recuits.

3° Comparons le quotient $\gamma : \Gamma$ pour un même couple sur toutes les courbes de détorsion : l'expérience montre qu'il diminue quand la torsion sur la courbe de première torsion croît : il tend vers une limite (qui est pratiquement atteinte pour des torsions assez faibles, 10 tours, par exemple).

En particulier, *pour le couple nul* : pour la courbe de détorsion qui correspond à une première torsion nulle, $\gamma : \Gamma = 1$; puis le rapport diminue et tend vers une limite qui doit être voisine de 0,70, nombre obtenu pour une torsion de 50 tours.

4° Enfin, on peut construire l'ensemble du faisceau des courbes de première torsion et de détorsions en leur laissant leur position absolue. La *fig. 15* repré-



sente schématiquement ce qu'on obtiendrait. La courbe de première torsion est AA_1A_2 ; la courbe de détorsion à torsion nulle est la symétrique ABC . On a tracé deux autres courbes de détorsion $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. Il faut, pour obtenir cette disposition, tenir compte des différences que présentent les fils. La distance des points B, B_1, B_2 ou C, C_1, C_2 est d'ailleurs très faible.

Torsion.	0°.	1°.	2°.	3°.	5°.	10°.	20°.	30°.	60°.
1....		971	992	1007	998	997	1003	971	»
2....			1807	1829	1824	1828	»	»	»
3....				2500	2507	2515	»	»	»
4....					3040	3049	»	»	»
5....					3432	3444	3454	3321	»
10....						4239	4259	4144	4188
20....							4512	4424	4447
30....								4479	4496
40....									4512
50....									4521

Détorsion.

1....	986	1039	1091	1120	1145	1152	1147	1107	1117
2....	1802	1958	2057	2106	2138	2158	2130	2059	2082
3....	2478	2749	2940	3003	3045	3041	3031	2929	2967
4....	3004	3406	3727	3827	3881	3869	3862	3727	3776
5....	3394	3925	4390	4560	4640	4620	4610	4453	4508
6....	3675	4313	4910	5180	5314	5288	5271	5096	5150
7....	3872	4591	5296	5670	5892	5868	5840	5649	5700
8....	4018	4792	5568	6031		6361	6320	6119	6161
9....	4123	4935	5760	6291		6775	6720	6510	6547
10....	4203	5042	5899	6474				6827	6861
11....		5122	6003	6609					7121
12....		5182	6078	6708					

30. *Variations de couple à azimuth constant à partir des divers points d'une courbe de détorsion.* — On tord à 15 tours avec une vitesse de 1 tour en 21^s,5; sans arrêt, on détord avec une vitesse de 1 tour en 139^s. On donne les couples C sur la courbe de torsion (ils devraient être identiques, si les fils étaient identiques), les couples C_t d'arrêt sur la courbe de détorsion, les variations de couple à azimuth constant entre les temps 0 — 15^s — 30^s,

C.....	4396 ^u	4522 ^u	4511 ^u	4540 ^u	4559 ^u	4492 ^u	4506 ^u
C ₁	0	850	1350	1850	2350	2850	3350
0.....							
15 ^s	20	14	12	10	8	3	0
30 ^s	11	8	7	4	2	2	- 1
1 ^m	15	11	9	6	4	1	- 6
2 ^m	19	13	10	7	4	- 2	- 9
4 ^m	24	15	10	6	2	- 5	- 20
8 ^m	23	15	9	5	- 2	- 11	- 35
16 ^m	26	14	7	2	- 8	- 25	- 58
32 ^m	26	12	6	- 5	- 15	- 39	- 78
64 ^m	25	9	0	- 11	- 26	- 55	- 93
128 ^m	21	5	- 5	- 17	- 40	- 69	
256 ^m		1		- 23	- 52	- 81	
512 ^m		- 2		- 26			
1024 ^m		- 7		- 29			

31. *Variations de couple à azimut constant à partir du couple nul sur le faisceau des courbes de détorsion.* — On indique les couples C jusques auxquels la courbe de torsion a été poussée. La vitesse sur toutes les courbes était de 1 tour en 139^s. Pas d'arrêt au bout de la torsion. On donne les gains de couple entre les temps : 0^m à 1^m, 1^m à 8^m, 8^m à 64^m, 64^m à 512^m.

C.	958 ^u .	1350 ^u .	1850 ^u .	2350 ^u .	2850 ^u .	3350 ^u .	4062 ^u .	4270 ^u .	4464 ^u .
Torsion en tours.	»	»	»	»	»	5	10	20	40
0 ^m à 1 ^m	9	13	20	27	31	40	50	51	51
1 ^m à 8 ^m	5	12	20	32	43	55	74	79	78
8 ^m à 64 ^m	5	11	17	25	38	54	79	90	90
64 ^m à 512 ^m	»	»	»	»	29	»	61	»	64

Le phénomène est évidemment très compliqué, parce que les couches cylindriques concentriques produisent des variations de sens contraires, suivant qu'elles sont centrales ou superficielles.

32. *Variations de couple à azimuth constant, à partir du couple nul sur les courbes de détorsion issues d'un même point de la courbe de détorsion avec des arrêts T variables au bout de la torsion.* — Voici les conclusions qu'on peut tirer des expériences :

Il est impossible de représenter les variations par une formule telle que

$$p = f_1(T)f_2(t),$$

t étant compté, comme toujours, à partir de l'arrêt.

La vitesse de variation initiale est indépendante de T; ce qu'on pouvait aisément prévoir, puisque γ est sensiblement indépendant de T. Cela ne paraît pas sur le Tableau, parce que les variations en 1^m ne sont pas les variations initiales. Les variations en 15^s sont bien les mêmes, quel que soit T, même pour T = 0. Les courbes de variation, d'abord tangentes, se séparent en un faisceau; pour un temps t donné, leur distance croît d'abord proportionnellement à T, puis de moins en moins vite.

Voici, par exemple, les gains pour les courbes T = 0, T = 702^m, et, pour les intervalles plus rapprochés que ceux du Tableau, 0 à 15^s, 15^s à 30^s, 30^s à 1^m, ..., ces intervalles étant, sauf le premier, les termes d'une progression géométrique de raison 2.

On donne aussi la distance d des deux courbes au bout de ces intervalles.

T = 702 ^m .	20,	12,	19	21,	29,	32	37,	39,	40	40
T = 0....	20,	11,	15	19,	24,	23	26,	26,	25	21
d	0,	1,	5	7,	12,	21	32,	45,	60	79

On voit que, sur chaque courbe, les variations dans chaque intervalle de temps formant progression géométrique passent par un maximum; le temps t du maximum diminue quand T diminue.

Torsion, 15 tours avec la vitesse de 1 tour en 21^s, 5; couple d'arrêt = C (il devrait être le même si les fils étaient identiques); déperdition pendant l'arrêt T = ΔC . Détorsion jusqu'au couple nul avec la vitesse 1 tour en 139^s.

T.	C.	ΔC .	0 ^m à 1 ^m .	1 ^m à 8 ^m .	8 ^m à 64 ^m .
0..... ^m	4396 ^u	0 ⁿ	46 ^u	66 ^u	77 ^u
2.....	4541	428	48	71	79
4.....	4561	540	50	71	81
8.....	4600	671	50	75	85
16.....	4551	807	50	80	90
32.....	4429	939	50	79	94
145.....	4458	1252	49	82	109
702.....	4498	1566	51	82	116

Le couple d'arrêt sur la courbe de détorsion est arbitraire. Il est bien évident *a priori* que l'influence du temps d'arrêt T est d'autant plus grande que le couple d'arrêt sur la courbe de détorsion est plus voisin du couple d'arrêt sur la courbe de torsion (origine des courbes de détorsion).

Rien autre n'étant changé dans l'expérience précédente, on fait l'arrêt sur les courbes de détorsion au couple $- 2200^u$ très éloigné du couple C.

T.	C.	$\Delta C.$	0^m à $1^m.$	1^m à $8^m.$	8^m à $64^m.$	64^m à $512^m.$
0^m	4444^u	» ^u	98^u	171^u	245^u	236^u
2^m	4369	839	99	176	256	257
785^m	4409	1669	99	180	279	300

L'influence de T a diminué.

Enfin, il est important de connaître l'influence du temps T lorsque le couple d'arrêt sur la courbe de détorsion se fait au voisinage de couples tels que la variation, après l'arrêt, soit d'abord rétrograde, puis directe. Nous avons choisi pour l'arrêt le couple $+ 2500^u = C_1$.

Dans ces conditions, la variation est d'abord rétrograde; le couple croît, passe de C_1 à un maximum C'_1 ; la variation est ensuite directe; le couple décroît à partir de C'_1 avec une vitesse d'abord nulle (au maximum); puis croissante en valeur absolue, puis décroissante jusqu'à 0.

Nous avons dit que l'accroissement de T tend à faciliter les mouvements rétrogrades, mais toutes choses égales d'ailleurs. Or ici une circonstance complique le phénomène, la variation de γ au point d'arrêt sur la courbe de détorsion.

On s'arrête sur la courbe de torsion au couple C; pendant le temps T, le couple devient $C - \Delta C$. On s'arrête au couple C_1 sur la courbe de détorsion: la longueur de la courbe de détorsion parcourue est donc $(C - C_1) - \Delta C$; elle décroît avec T. Si ΔC est assez petit, γ est à peu près indépendant de T. Donc $C'_1 - C_1$ doit croître quand T croît. Mais si T augmente beaucoup, $(C - C_1) - \Delta C$ peut devenir assez petit pour que γ ne soit pas indépendant de T; γ croît, la tendance au mouvement rétrograde dans les premiers instants (vitesse initiale de déperdition) décroît. Donc $C'_1 - C_1$ passe par un maximum. Les temps t_1 sont ceux qui s'écoulent entre l'arrêt du couple C_1 et le moment du maximum C'_1 . Les temps t_2 comptés à partir de la même origine jusqu'au moment où, après le maximum, on revient au couple C_1 , et les temps t_3 où la vitesse négative de variation passe par un maximum, suivent les mêmes lois que t_1 . Ils croissent d'abord très vite à mesure que T croît, puis de plus en plus lentement.

T.	0 ^m .	2 ^m .	4 ^m .	8 ^m .	16 ^m .	64 ^m .	720 ^m .
C.....	4389 ^u	4431 ^u	4454 ^u	4520 ^u	4402 ^u	4379 ^u	4477 ^u
ΔC	0	433	556	612	832	1138	1670
t_1	2 ^m	4 ^m	5 ^m	6 ^m	8 ^m	16 ^m	48 ^m
$C_1 - C_1$	12	15	19	21	22	23	12
ΔC_1 en 64 ^m	-82	-58	-39	-20	-10	+14	+12

33. *Variations de couples à azimut constant à partir du couple nul sur une courbe de détorsion sur des points variables de laquelle on a déjà produit des arrêts de longueur constante.* — Torsion de 15 tours à la vitesse de 1 tour en 21^s, 2; détorsion à la vitesse de 1 tour en 139^s. Arrêt intermédiaire au couple C_1 pendant 32^m; déperdition correspondante ΔC_1 .

Variation de couple à partir de couple nul à azimut constant dans les intervalles 0^m à 1^m, 1^m à 8^m, 8^m à 64^m.

C.....	4572 ^u	4512 ^u	4543 ^u	4569 ^u	4594 ^u	4562 ^u
C_1	Sans arrêt	4512	3000	1500	1000	500
ΔC_1	0	-952	-101	+61	+96	+131
0 ^m à 1 ^m ..	49	51	49	47	44	36
1 ^m à 8 ^m ..	69	82	74	67	63	53
8 ^m à 64 ^m ..	77	97	88	79	75	66

Excepté si C_1 est très voisin de 0, la variation initiale à partir du couple nul est indépendante de C_1 ; si C_1 est voisin de 0, la variation initiale diminue.

Pour $C_1 > 1500^u$, l'arrêt intermédiaire augmente le phénomène; il le diminue pour $C_1 < 1500^u$.

34. *Variations de couple à azimut constant à partir du couple nul sur une courbe de détorsion pour une torsion constante, mais coupée par un arrêt intermédiaire de position variable.* — La torsion totale est de 15 tours (excepté dans deux expériences qui servent de termes de comparaison); elle est coupée par un arrêt intermédiaire de 32^m qui se fait après la torsion α_1 (α_1 pouvant être 0, il n'y a plus d'arrêt; ou à 15, l'arrêt se fait au bout de la torsion). On détord jusqu'au couple nul. Les vitesses sont 1 tour en 21^s, 5 et en 139^s.

Le résultat de cette expérience ne prend son intérêt que par la comparaison avec les deux expériences de comparaison. Dans la première, après la torsion de 10 tours et l'arrêt de 32^m (au lieu de faire encore 5 tours pour parfaire les 15) on détord. Dans la seconde, c'est après la torsion de 13 tours.

Donc les 5 tours ou les 2 tours supplémentaires de torsion qui suivent l'arrêt détruisent au moins en partie l'effet de cet arrêt.

α_1 .	0 ^t .	3 ^t , 5.	6 ^t , 3.	10 ^t .	10 ^t en tout.	13 ^t .	13 ^t en tout.	15 ^t .
C_1	0 ^u	3000 ^u	4000 ^u	4521 ^u	4493 ^u	4583 ^u	4604 ^u	4512 ^u
ΔC_1	0	-581	-870	-973	-974	-984	-994	-952
C	4572	4608	4611	4647	»	4508	»	»
0 ^m à 1 ^m ...	49	49	50	50	51	51	53	51
1 ^m à 8 ^m ...	69	71	72	76	81	80	86	82
8 ^m à 64 ^m ...	77	79	81	84	94	90	100	97
0 ^m à 64 ^m ...	195	199	203	210	226	221	239	230

On a repris systématiquement cette expérience.

Dans le Tableau suivant, on donne : 1° les variations à partir du couple nul pour une torsion de 9 tours avec un arrêt $T = 0$ au bout ou un arrêt $T = 60$; 2° les mêmes variations pour une torsion de 20 tours; 3° ces variations pour une torsion de 9 tours, un arrêt intermédiaire de 60^m, une torsion supplémentaire de n tours, un arrêt nul et la détorsion jusqu'au couple nul.

Les expériences des colonnes 2, 5, 6, 7 forment une série : les variations à partir du couple nul décroissent. Voici les déperditions de 1^m à 64^m : 179, 169, 163, 159. A mesure que n croît, l'effet de l'arrêt $T = 60$ après 9 tours (qui avait fait passer la variation dans l'intervalle 1^m à 64^m de 136 à 179) décroît régulièrement.

Comparons maintenant les expériences des colonnes 3 et 7.

Dans l'expérience 3, on tord de 20 tours sans arrêt; la variation de 1^m à 64^m est 152. Dans la septième, on tord de 20 tours avec un arrêt intermédiaire de 60^m après le neuvième tour; la variation de 1^m à 64^m est 159, soit à peine plus grande. Si l'arrêt avait lieu après les 20 tours, on trouverait 196.

Cette expérience est incompatible avec les systèmes mécaniques analogues à nos molécules à élasticité retardée.

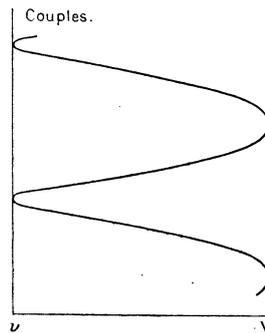
Torsions.	9 tours.		20 tours.		9 tours, puis arrêt de 60 ^m , puis retorsion.		
	$T = 0^m$.	$T = 60^m$.	$T = 0^m$.	$T = 60^m$.	$n = 3$.	$n = 6$.	$n = 11$.
C_1	4370 ^u	4380 ^u	4690 ^u	4591 ^u	4230 ^u	4362 ^u	4347 ^u
ΔC_1	»	1110	»	1132	1091	1105	1110
C_2	»	»	»	»	4300	4555	4643
0 ^m à 1 ^m .	49	51	50	54	50	50	50
1 ^m à 8 ^m .	66	81	72	87	79	77	74
8 ^m à 64 ^m .	70	98	80	109	90	86	85
1 ^m à 64 ^m .	136	179	152	196	169	163	159

35. *Courbe de première torsion décrite à vitesse systématiquement variable.* — Au n° 17, nous avons étudié le phénomène pour les fils recuits. Avec

les fils étirés à la filière, nous insisterons sur ce qui se passe quand la torsion a été prolongée assez longtemps. La vitesse varie sinusoïdalement en fonction du temps et *conserve toujours le même signe*: V et v désignent les vitesses maxima et minima; T la période en temps du phénomène; E la torsion effectuée pendant une période. Nous portons les vitesses en abscisses et les couples en ordonnées: les courbes sont donc comprises dans une bande limitée par deux droites verticales d'abscisses V et v . Nous avons déjà employé ce mode de représentation au § XLII de notre thèse (*Ann. Phys.*, 1897) où est figuré un cas particulier des courbes que nous étudions.

Au début de la courbe de torsion, où le fil peut être considéré comme élastique, la courbe des couples en fonction des vitesses se compose d'une série d'ondulations représentées *fig. 16*. C'est une courbe transcendante différente d'une

Fig. 16.



sinusoïde. Lorsque v se rapproche de V , cette courbe se rapproche de la sinusoïde qui en est une forme limite. L'autre forme limite est donnée par la condition $v = 0$; la courbe présente alors pour la vitesse $v = 0$ des points de rebroussement avec tangente horizontale. Quand le fil cesse d'être parfaitement élastique, les phénomènes qui dépendent du temps apparaissent. La courbe se boucle au voisinage de la vitesse minima (*fig. 17*); simultanément, la distance verticale de deux points A, A_1, \dots, A_n de même abscisse V , distants d'une période, diminue. Le point d'intersection C , d'abord confondu avec B , se déplace vers la droite.

Les temps R_a et R_i (n° 17) ont une représentation simple sur la figure. Comptons les distances des points D' et E' à partir des points d et e , positivement vers la gauche. On a

$$R_a = \frac{T}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{dD'}{dD_1} \right), \quad R_i = \frac{T}{4} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{eE'}{eE} \right).$$

Quand les boucles commencent à se former,

$$dD' = eE' = eE;$$

on a donc

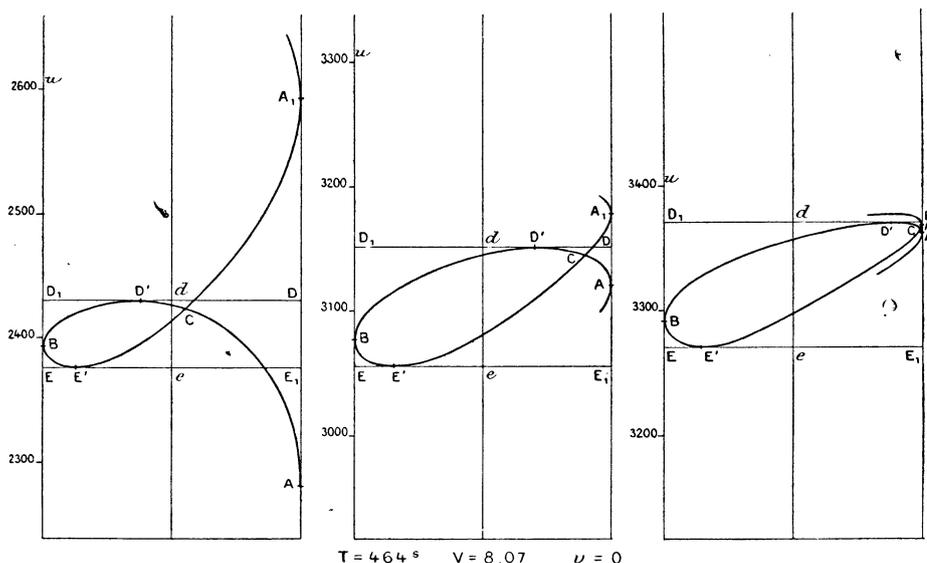
$$R_a = \frac{T}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin 1 \right) = \frac{T}{2}$$

et

$$R_i = \frac{T}{4} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin 1 \right) = 0.$$

A mesure que le point C s'éloigne vers la droite, les points E' et D' se déplacent eux-mêmes vers la droite. R_a diminue et R_i augmente. Le temps que nous avons appelé ρ (temps nécessaire à parcourir l'espace D'BE') est d'abord nul; il croît

Fig. 17.



ensuite. Il tend vers une valeur qui est égale à une demi-période si R_a et R_i ont les mêmes valeurs limites, qui est plus grande (ou plus petite) qu'une demi-période, suivant que la valeur limite de R_a est plus petite (ou plus grande) que la valeur limite de R_i .

Enfin, si la torsion est suffisamment prolongée, les différentes périodes de la courbe tendent à se confondre; la courbe se ferme pratiquement; ce sont ces formes limites fermées que nous nous proposons d'étudier.

Elles s'expliquent à l'aide de deux propositions générales :

1° Supposons que nous décrivions depuis l'origine, sur des fils n'ayant jamais servi, les courbes de torsion à vitesse constante. Elles aboutissent à des paliers horizontaux dont la hauteur est une fonction de la vitesse. Nous savons que les valeurs des couples sur ces paliers ne croissent pas proportionnellement à la

vitesse, mais qu'on peut poser approximativement

$$C = A \log v + B,$$

où A et B sont deux constantes. La courbe où C est ordonnée et v abscisse est donc rapidement croissante pour les petites vitesses, puis s'infléchit horizontalement. Si donc les couples ne dépendaient que des vitesses actuelles et non des vitesses antérieures, les courbes fermées que nous obtiendrions seraient des arcs de cette courbe unique,

$$C = A \log v + B.$$

Les cycles seraient infiniment aplatis et embrasseraient une aire nulle.

2° Mais les vitesses antérieures influent sur le couple atteint; la courbe qui limite le cycle s'écartera donc d'autant plus d'être formée par deux arcs superposés de la courbe

$$C = A \log v + B$$

que la période T sera plus courte.

Nous appelons *branche ascendante* du cycle fermé celle qui est comprise entre le minimum de couple et le maximum de vitesse; *branche descendante*, celle qui est comprise entre le maximum de couple et le minimum de vitesse. Le cycle se ferme au moyen de deux autres branches qu'il est inutile de désigner plus particulièrement. Nous appelons ΔC , l'écart entre le couple maximum et le couple minimum; ΔC_m , l'épaisseur verticale du cycle mesurée entre deux passages consécutifs à la vitesse moyenne.

Dans tous les cas, la *branche descendante* tourne sa convexité vers l'extérieur du cycle: elle est convexe. La *branche ascendante*, dans sa partie médiane, est tantôt convexe, tantôt concave, suivant les valeurs relatives de V, v , T qui sont les paramètres de l'expérience.

Supposons tracées les courbes désignées au n° 18 par φ_1 , φ_2 , φ_m , décrites à partir de l'origine sur des fils différents avec les vitesses uniformes V, v et leur moyenne. Soient C_1 , C_2 , C_m les couples constants correspondant à leur palier horizontal. Appelons C'_1 et C'_2 les couples maximum et minimum du cycle. L'expérience montre que l'on a

$$C_1 > C'_1 > C_m > C'_2 > C_2,$$

avec la condition

$$C'_1 - C_m < C_m - C'_2.$$

Le cycle est donc à cheval sur l'horizontale d'ordonnée C_m ; il se prolonge davantage au-dessous de C_m qu'il ne fait au-dessus. Quand T diminue, le cycle s'aplatit et tend à se confondre avec l'horizontale d'ordonnée C_m . Le couple, le

long du cycle, tend à devenir égal au couple constant qui correspond à une même torsion moyenne dans le même temps, effectuée d'un mouvement uniforme.

La différence entre le couple correspondant au maximum de vitesse et le couple maximum C'_1 est plus petite que la différence entre le couple correspondant au minimum de vitesse et le couple minimum C'_2 .

Étudions quelques cas particuliers.

36. On se donne V et v , on fait varier T ; comme cas particulier, on a pris $v = 0$. — L'expérience donne les résultats suivants :

ΔC croît quand T augmente; pour $T = 0$, on peut admettre par continuité que $\Delta C = 0$ et $\frac{d}{dt}(\Delta C) = \infty$. A mesure que T croît, ΔC croît de moins en moins vite. Il tend vers une limite indépendante de T , quand T devient très grand. Les valeurs réalisées pour T variaient entre 1 minute et 50 minutes; pour $T = 1^m$, ΔC est loin d'être nul; donc cette période ne peut pas être considérée comme très petite; pour $T = 50^m$, ΔC n'a pas atteint sa limite; donc cette période ne peut pas être considérée comme très grande.

Le rapport $\Delta C_m : \Delta C$, qu'on peut considérer comme égal à 1 pour $T = 0$, tend vers 0 quand T augmente. Enfin ΔC_m , nul pour $T = 0$, croît d'abord très vite, puis plus lentement, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'à 0 quand T augmente indéfiniment.

Voici un exemple numérique pour fixer les idées.

$V = 8,91$ millionièmes seconde; $v = 0$.

$T = 76^s$	$\Delta C = 36^u$	$\Delta C_m = 30^u$	$\Delta C_m : \Delta C = 0,82$
156	62	46	0,73
230	77	55	0,71
476	110	60	0,55
2928	208	52	0,25

Pour la vitesse uniforme moyenne $4,45$ millionièmes seconde, on atteint un couple voisin de 3400^u : avec les vitesses employées, on peut donc obtenir un ΔC qui atteint le $\frac{1}{17}$ du couple total; comme on voit, ce ne sont pas là des phénomènes difficiles à mettre en évidence ni dont on puisse contester l'importance.

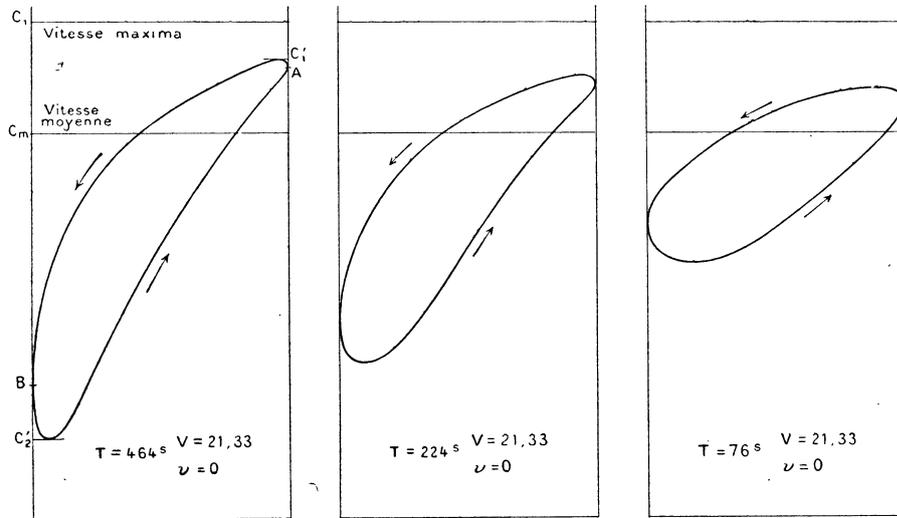
La branche descendante du cycle est toujours convexe. La branche ascendante est convexe pour les petites valeurs de T ; la courbe fermée ressemble à une ellipse; elle est concave pour les grandes; la courbe fermée ressemble à un crois-sant dont les bouts seraient arrondis. Comme intermédiaire, pour une certaine période, la branche ascendante est rectiligne, sauf à ses extrémités.

Les retards R_a et R_i sont très difficiles à déterminer avec quelque exactitude.

Ils sont peu différents l'un de l'autre ; il semble qu'on ait $R_a < R_i$; d'où $2\varphi > T$. Ils croissent quand la période croît, mais les rapports $R_i : T$ et $R_a : T$ décroissent au contraire quand T augmente. Par exemple, pour une période $T = 230^s$, $R_a = R_i = 30^s$ environ avec $V = 8,91$; le retard en temps atteint les 0,13 de la période, ce qui est énorme. Pour une période $T = 2928^s$ et les mêmes conditions de vitesses, le retard est de 210^s ; ce qui ne fait plus que les 0,07 de la période.

La *fig.* 18 représente une série de trois courbes définies par les paramètres :

Fig. 18.



$V = 21,33$; $\nu = 0$ et des valeurs T égales à 464^s , 224^s et 76^s . On a marqué par deux traits horizontaux quels seraient les couples correspondant à la vitesse uniforme $V = 21,33$ et à la vitesse moyenne $10,66$.

On se donne $V - \nu$ et T ; on fait varier la vitesse moyenne $\frac{V + \nu}{2}$. — Cette condition est très facile à réaliser expérimentalement avec notre appareil.

ΔC croît à mesure que décroît la vitesse moyenne. Puisque nous imposons la condition que les vitesses soient toujours de même signe, la vitesse moyenne ne peut pas être inférieure à la moitié de la différence $V - \nu$ qui est un paramètre constant. A partir de cette valeur, quand la vitesse croît, ΔC décroît d'abord très vite, puis de plus en plus lentement, pour tendre vers 0 quand les deux vitesses deviennent très grandes. Ainsi, pour $T = 225^s$, $V - \nu = 5,21$, on a trouvé :

Vitesse moyenne.....	2,60	3,50	5,68	7,14
ΔC	50"	42"	31"	27"

Ce résultat se déduit immédiatement de la forme de la relation entre les couples limites et les vitesses.

La période reste constante, on multiplie toutes les vitesses par un même facteur. — D'après la forme de la relation au moins approchée

$$C = A \log v + B,$$

on peut prévoir que la forme et l'amplitude du cycle ne seront pas sensiblement modifiées. C'est, en effet, ce que montre l'expérience. Le rapport $V : v$ des vitesses maxima et minima restait égal à 2,204; dans trois expériences, on a trouvé :

V	18,80	8,95	4,30	millionièmes seconde.
V — v	10,27	4,88	2,35	
ΔC	29 ^u ,0	27 ^u ,5	25 ^u ,5	

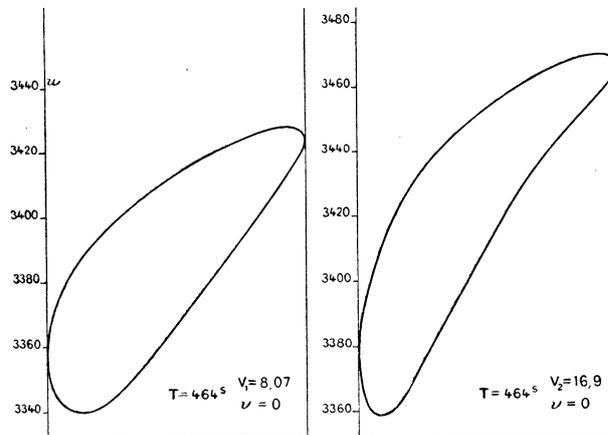
Ainsi, quand les vitesses diminuent toutes dans un même rapport, ΔC décroît, mais extrêmement peu.

Vitesse V variable, $v = 0$, T constant. — Ce cas peut être considéré comme un cas limite du précédent; quand V varie, v restant égal à 0, toutes les vitesses varient dans le même rapport. Il est vrai qu'alors la formule

$$C = A \log v + B$$

n'a plus aucun sens; il y a donc lieu de faire l'expérience. La *fig. 19* en donne le

Fig. 19.



résultat : $T = 464^s$, $v = 0$, $V_1 = 8,07$, $V_2 = 16,9$; de la première à la seconde expérience, toutes les vitesses sont multipliées par 2,10. La différence ΔC croît quand toutes les vitesses augmentent; le résultat précédent subsiste, mais consi-

dérablement amplifié. De plus, tandis qu'il était difficile, dans le cas général, de montrer une variation nette de forme du cycle, cela est très facile dans le cas où $\nu = 0$; la branche ascendante, qui est sensiblement rectiligne dans sa partie médiane pour les petites vitesses, se creuse et devient concave pour les grandes.

En comparant les résultats du présent Chapitre à ceux exposés dans notre Thèse (*Ann. Phys.*, 1897), on s'apercevra du chemin parcouru depuis cette publication. Toutefois, dans ce premier Travail, la vraie méthode était fixée; il suffisait d'un peu de patience pour en tirer les résultats actuels. Nous avons bon espoir qu'en l'appliquant strictement nous parviendrons à débrouiller les phénomènes si complexes à l'étude desquels nous nous sommes dévoué.

