Annales de la faculté des sciences de Toulouse

T.-J. Stieltjes

Recherches sur les fractions continues

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 4 (1894), p. J1-J122
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_4_J1_0>

RECHERCHES

SUR

LES FRACTIONS CONTINUES,

PAR M. T.-J. STIELTJES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude de la fraction continue

$$(1)\qquad \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \ddots + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \ddots}}}}},$$

dans laquelle les a_i sont des nombres réels et positifs, tandis que z est une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

En désignant par $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite qui ne dépend que des n premiers coefficients a_i, nous chercherons dans quels cas cette réduite tend vers une limite pour $n = \infty$ et nous aurons à approfondir la nature de cette limite considérée comme une fonction de z.

Nous allons résumer le résultat le plus essentiel de cette étude. Il y a deux cas à distinguer.

Premier cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est convergente.

Dans ce cas, on a, pour toute valeur finie de z,

$$\begin{aligned}
\lim \mathrm{P}_{2n}(z) &= p(z),\\
\lim \mathrm{Q}_{2n}(z) &= q(z),\\
\lim \mathrm{P}_{2n+1}(z) &= p_1(z),\\
\lim \mathrm{Q}_{2n+1}(z) &= q_1(z),
\end{aligned}$$

$p(z), q(z), p_1(z), q_1(z)$ étant des fonctions holomorphes dans tout le plan qui satisfont à la relation

$$q(z)p_1(z) - q_1(z)p(z) = +1.$$

Ces fonctions sont du genre zéro et n'admettent que des zéros simples qui sont réels et négatifs.

Les réduites d'ordre pair et les réduites d'ordre impair tendent donc chacune vers une limite, mais ces limites sont différentes et peuvent se mettre aussi sous la forme d'une série de fractions simples

$$\begin{aligned}
\frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} + \ldots,\\
\frac{p_1(z)}{q_1(z)} &= \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \frac{\nu_1}{z+\theta_2} + \ldots + \frac{\nu_k}{z+\theta_k} + \ldots,
\end{aligned}$$

$\mu_k, \lambda_k, \nu_k, \theta_k$ étant des nombres réels et positifs.

Second cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est divergente.

Dans ce cas, les réduites tendent vers une limite finie quelle que soit la valeur de z; il faut excepter seulement les valeurs réelles et négatives de z, et considérer ainsi la partie négative de l'axe réel comme une coupure. Cette limite est une fonction analytique de z qui peut se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\,\Phi(u)}{z+u}.$$

Ici $\Phi(u)$ est une fonction réelle et croissante (non analytique, en général) qui croît de $\Phi(0) = 0$ jusqu'à $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$. Cette fonction $\Phi(u)$ peut d'ailleurs présenter des sauts brusques en nombre fini ou infini. La coupure sera ainsi une ligne de singularités essentielles dans le cas où $\Phi(u)$

présente des discontinuités dans tout intervalle (ce qu'il faut considérer comme le cas général) ou même lorsqu'elle est seulement non analytique.

On rencontre souvent sous des formes un peu différentes des fractions continues qui rentrent réellement dans le type (I) et auxquelles on peut ainsi appliquer nos théorèmes. D'abord, en posant

$$b_0 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

la fraction continue (I) peut s'écrire

$$(\mathrm{I}^a) \qquad \cfrac{b_0}{z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z + \cfrac{b_3}{1 + \cfrac{b_4}{z + \ldots}}}}},$$

et pour $tz = 1$

$$(\mathrm{I}^b) \qquad \cfrac{b_0 t}{1 + \cfrac{b_1 t}{1 + \cfrac{b_2 t}{1 + \cfrac{b_3 t}{1 + \ldots}}}}$$

A l'aide de l'identité

$$z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{\lambda}} = z + b_1 - \frac{b_1 b_2}{b_2 + \lambda},$$

la fraction continue (I^a) pourra se transformer en (I^c)

$$(\mathrm{I}^c) \qquad \cfrac{b_0}{z + b_1 - \cfrac{b_1 b_2}{z + b_2 + b_3 - \cfrac{b_3 b_4}{z + b_4 + b_5 - \ldots}}};$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite de (I^c) est identique avec la $2n^{\text{ième}}$ réduite de (I) ou de (I^a). Cette fraction (I^c) est de la forme

$$(\mathrm{I}^d) \qquad \cfrac{\lambda_0}{z + \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z + \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z + \alpha_3 - \cfrac{\lambda_3}{z + \alpha_4 - \ldots}}}},$$

avec des valeurs positives des λ_i, α_i. Cette forme (I^d) se rencontre assez souvent; dès lors, il y a de l'intérêt à savoir si elle peut se mettre sous la forme (1^c) avec des valeurs *positives* des b_i, en sorte que nos théorèmes soient applicables. En identifiant on a

$$\begin{array}{ll} b_0 = \lambda_0, & b_1 = \alpha_1, \\ b_1 b_2 = \lambda_1, & b_2 + b_3 = \alpha_2, \\ b_3 b_4 = \lambda_2, & b_4 + b_5 = \alpha_3, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

d'où l'on tire successivement b_0, b_1, b_2, ..., et généralement

$$b_{2n} = \cfrac{\lambda_n}{\alpha_n - \cfrac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \ddots - \cfrac{\lambda_1}{\alpha_1}}},$$

puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$.

Cependant, il peut arriver que le calcul de ces b_i devienne compliqué et, puisqu'il s'agit seulement de savoir si ces quantités sont toutes positives ou non, on pourra quelquefois avec avantage se servir de la proposition suivante.

Les quantités b_i sont certainement toutes positives si l'on peut trouver une fonction positive de n, P_n ($P_1 = 0$), telle que

$$P_n < \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}.$$

En effet, $b_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$ est positif et ne surpasse pas $\frac{\lambda_1}{\alpha_1 - P_1} \leqq P_2$. Or, si b_{2n-2} est compris entre o et P_n, on en conclura à cause de

$$b_{2n} = \frac{\lambda_n}{\alpha_n - b_{2n-2}},$$

que b_{2n} est positif, plus petit que $\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}$.

Donc on aura généralement

$$0 < b_{2n} \leqq P_{n+1},$$

et puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$ est aussi positif.

En particulier les b_i sont tous positifs dans les deux cas suivants :

1° Lorsque $\alpha_n \geqq 1 + \lambda_n$, puisque la proposition énoncée s'applique alors en prenant $P_n = 1$;

2° Lorsque $\alpha_{n+1} \geqq 1 + \lambda_n$, il suffit alors de prendre $P_n = \lambda_{n-1}$.

Considérons, par exemple, la fraction continue étudiée par Laguerre qui est de la forme (I^d) avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = n^2 \qquad (n \geqq 1),$$
$$\alpha_n = 2n - 1.$$

Le calcul des b_i n'offre ici aucune difficulté et l'on trouve

$$b_0 = 1,$$
$$b_{2n-1} = b_{2n} = n \qquad (n \geqq 1),$$

puis

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n}.$$

Laguerre, en supposant z réel positif, a montré que la fraction continue est convergente et égale à

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

Il résulte maintenant de notre théorie que cette proposition s'étend à toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, en faisant exception pour les valeurs réelles et négatives.

Considérons, en second lieu, la fraction continue que nous avons rencontrée dans ces *Annales,* t. III, et qui est encore de la forme I^d, abstraction faite du changement de z en z^2. On a

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)k^2,$$
$$\alpha_n = (2n-1)^2(1+k^2),$$

k^2 étant une quantité positive. Le calcul des b_i se complique ici. Mais si l'on prend

$$\mathrm{P}_n = \frac{n-1}{2n-1}\alpha_n, \qquad \alpha_n - \mathrm{P}_n = \frac{n}{2n-1}\alpha_n,$$

l'inégalité

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - \mathrm{P}_n} \leqq \mathrm{P}_{n+1}$$

se réduit à

$$4k^2 \leqq (1+k^2)^2,$$

et se trouve donc satisfaite. La fraction continue considérée appartient donc encore au type que nous avons étudié.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES POLYNOMES $P_n(z)$, $Q_n(z)$.

1. Considérons une suite de nombres $N, N_1, N_2, \ldots$, liés par les relations

$$\begin{gathered} N = a_1 N_1 + N_2, \\ N_1 = a_2 N_2 + N_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_{k-1} = a_k N_k + N_{k+1}. \end{gathered}$$

On pourra exprimer successivement N par N_1 et N_2, par N_2 et N_3, par N_3 et N_4, etc.

$$N = (a_1 a_2 + 1) N_2 + a_1 N_3 = (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) N_3 + (a_1 a_2 + 1) N_4 + \ldots.$$

Introduisons un symbole

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

déterminé par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} [a_1] = a_1, \qquad [a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] a_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}], \end{cases}$$

on aura

$$(2) \qquad N = [a_1, a_2, \ldots, a_k] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+1}.$$

Il est clair que N, N_k, N_{k+l} sont liés par une relation linéaire et homogène. Il est facile d'obtenir cette relation. Multiplions (2) par a_{k+1} et remplaçons $a_{k+1} N_{k+1}$ par $N_k - N_{k+2}$, on aura

$$[a_{k+1}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}] N_k - [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+2};$$

multiplions par a_{k+2} et ajoutons, membre à membre, à (2), il vient

$$[a_{k+1}, a_{k+2}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+3},$$

et il est clair qu'on aura généralement

$$(3) \qquad \begin{aligned} &[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+l-1}] N \\ &\quad = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+l-1}] N_k + (-1)^{l+1} [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+l}. \end{aligned}$$

De là, nous allons déduire une identité dont nous aurons besoin dans la suite. En remplaçant k par α, l par $\beta+\gamma+1$, on a

$$(4)\quad [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N} = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_\alpha + (-1)^{\beta+\gamma}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}.$$

D'autre part, en éliminant $\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1}$ entre les formules

$$[a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N} = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N}_\alpha + (-1)^\beta[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1},$$
$$[a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N} = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1} + (-1)^{\gamma+1}[a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

on obtient la relation entre N, N_α, $\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}$ sous la forme

$$(5)\quad \Delta\mathrm{N} = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]\{[a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_\alpha + (-1)^{\beta+\gamma}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}\},$$

où

$$\begin{aligned}\Delta = {} & [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \\ & + (-1)^{\beta+1}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].\end{aligned}$$

La comparaison de (4) et (5) montre qu'on a identiquement

$$\Delta = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Nous avons donc cette relation

$$(\mathrm{A})\quad \begin{aligned}& [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \\ & = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \\ & \quad + (-1)^\beta[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].\end{aligned}$$

Il est utile de noter certains cas particuliers. Pour $\beta = 0$, on a

$$(\mathrm{B})\quad \begin{aligned}[a_1, \ldots, a_{\alpha+\gamma}] = {} & [a_1, \ldots, a_\alpha] \\ & \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\gamma}] + [a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+2}, \ldots, a_{\alpha+\gamma}],\end{aligned}$$

et pour $\alpha = \gamma = 1$,

$$(\mathrm{C})\quad [a_1, \ldots, a_{\beta+2}] \times [a_2, \ldots, a_{\beta+1}] = [a_1, \ldots, a_{\beta+1}] \times [a_2, \ldots, a_{\beta+2}] + (-1)^\beta.$$

Pour $\gamma = 1$, la relation (B) reproduit la loi de récurrence (1); pour $\alpha = 1$, il vient

$$(6)\quad [a_1, \ldots, a_{\gamma+1}] = a_1[a_2, \ldots, a_{\gamma+1}] + [a_3, \ldots, a_{\gamma+1}].$$

On en conclut facilement

$$\frac{[a_1, \ldots, a_k]}{[a_2, \ldots, a_k]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}},$$

tandis que, d'après (1),

$$\frac{[a_1, \ldots, a_k]}{[a_1, \ldots, a_{k-1}]} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1}}.$$

D'après ce qui précède, cette dernière fraction continue est aussi égale à $\dfrac{[a_k, \ldots, a_1]}{[a_{k-1}, \ldots, a_1]}$, d'où il est facile de conclure

$$(7) \qquad [a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Il est clair que le symbole $[a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n]$ est linéaire par rapport à un quelconque des éléments a_k et, à l'aide de (B), on trouve facilement

$$(8) \qquad [a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-1}] \times [a_{k+1}, \ldots, a_n] a_k + \mathfrak{R},$$

où $\mathfrak{R}$ est indépendant de a_k et peut se mettre sous les formes

$$\mathfrak{R} = [a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1} + a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n].$$

Enfin, on s'assure encore facilement des relations suivantes, où m est un nombre quelconque,

$$(9) \quad \begin{cases} \left[ma_1, \dfrac{a_2}{m}, ma_3, \dfrac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \dfrac{a_{2n}}{m}\right] = [a_1, a_2, \ldots, a_{2n}], \\ \left[ma_1, \dfrac{a_2}{m}, ma_3, \dfrac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \dfrac{a_{2n}}{m}, ma_{2n+1}\right] = m \times [a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}], \end{cases}$$

2. Il est clair, d'après ce qui précède, que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de notre fraction continue s'expriment de la façon suivante à l'aide du symbole $[a_1, \ldots, a_n]$ que nous avons introduit

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots a_{2n-1} z, a_{2n}], \\ Q_{2n}(z) &= [a_1 z, a_2, a_3 z, \ldots, a_{2n}], \\ P_{2n+1}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1} z], \\ Q_{2n+1}(z) &= [a_1 z, a_2, \ldots, a_{2n+1} z]. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $P_n^k(z)$, $Q_n^k(z)$ ce que deviennent $P_n(z)$, $Q_n(z)$ lorsqu'on remplace partout a_i par a_{i+k}. Les formules du n° 1 donneront ainsi des relations identiques entre ces polynomes en changeant a_i en $a_i z$, lorsque i est impair. On a ainsi les formules

$$\begin{aligned} Q_{2n}(z) &= a_{2n} Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z), \\ Q_{2n+1}(z) &= a_{2n+1} z Q_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z). \end{aligned}$$

On s'aperçoit facilement qu'on a généralement

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 z + \ldots + \mathcal{A}_{n-1} z^{n-1}, \\ Q_{2n}(z) &= \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 z + \ldots + \mathcal{B}_n z^n, \\ P_{2n+1}(z) &= \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 z + \ldots + \mathcal{C}_n z^n, \\ Q_{2n+1}(z) &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 z + \ldots + \mathcal{D}_{n+1} z^{n+1}, \end{aligned}$$

les coefficients étant des polynomes des a_i. La loi générale de ces coefficients est un peu compliquée; elle ne nous serait d'ailleurs d'aucune utilité, mais on reconnaît facilement les quelques expressions suivantes qui nous seront utiles.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= a_2 + a_4 + \ldots a_{2n}, \\
\mathcal{A}_{n-2} &= \mathcal{A}_{n-1}\left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}\right), \\
\mathcal{A}_{n-1} &= a_2 a_3 \ldots a_{2n}, \\
\mathcal{B}_0 &= 1, \\
\mathcal{B}_1 &= \sum_1^n (a_1 + a_3 + \ldots a_{2k-1}) a_{2k}, \\
\mathcal{B}_{n-1} &= \mathcal{B}_n \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}\right), \\
\mathcal{B}_n &= a_1 a_2 \ldots a_{2n}, \\
\mathcal{C}_0 &= 1, \\
\mathcal{C}_1 &= \sum_1^n (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1}, \\
\mathcal{C}_{n-1} &= \mathcal{C}_n \left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}}\right), \\
\mathcal{C}_n &= a_2 a_3 \ldots a_{2n+1}, \\
\mathcal{D}_0 &= 0, \\
\mathcal{D}_1 &= a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}, \\
\mathcal{D}_n &= \mathcal{D}_{n+1} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}}\right), \\
\mathcal{D}_{n+1} &= a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}.
\end{aligned}$$

A cause de la relation identique

$$Q_{2n}(z)P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n+1}(z) = 1,$$

on a

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_0\mathcal{D}_1.$$

3. Nous allons établir maintenant quelques propositions sur les racines des équations qu'on obtient en annulant les polynomes P et Q. Les polynomes P, du reste, ne diffèrent pas essentiellement des polynomes Q, et nous insisterons surtout sur ces derniers. Dans la relation (A) du n° 1, posons

$$\alpha = 2n-3, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

il viendra, en changeant toujours a_i en $a_i z$ lorsque i est impair,

$$a_{2n-2}Q_{2n}(z) = [a_{2n-2}, a_{2n-1}z, a_{2n}]Q_{2n-2}(z) - a_{2n}Q_{2n-4}(z);$$

on voit que

$$Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), Q_{2n-4}(z) \ldots Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Pour $z = -\infty$, cette suite présente n variations de signe, pour $z = 0$ il n'y a aucune variation. On en conclut que les n racines de

$$Q_{2n}(z) = 0,$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $Q_{2n-2}(z) = 0$. Lorsque z passe en croissant par une racine de $Q_{2n}(z) = 0$, le rapport $Q_{2n-2}(z) : Q_{2n}(z)$ saute de $= -\infty$ à $+\infty$.

Posons maintenant dans la relation (A),

$$\alpha = 2n-2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

on aura

$$a_{2n-1}\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = [a_{2n-1}, a_{2n}z, a_{2n+1}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - a_{2n+1}\frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm. Les n racines de

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = 0$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Le rapport $Q_{2n-1}(z) : Q_{2n+1}(z)$ saute toujours de $-\infty$ à $+\infty$. Prenons maintenant

$$\alpha = 2n-2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

on aura

$$a_{2n-1}Q_{2n}(z) = [a_{2n-1}z, a_{2n}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$Q_{2n}(z), \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-3}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm : les racines des $Q_{2i}(z) = 0$ sont séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Posons enfin

$$\alpha = 2n-1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

il viendra

$$a_{2n}Q_{2n+1}(z) = [a_{2n}, a_{2n+1}z]Q_{2n}(z) - Q_{2n-2}(z);$$

donc

$$Q_{2n+1}(z), Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), \ldots, Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Les racines de $Q_{2i+1}(z) = 0$ sont séparées par celles de $Q_{2n}(z) = 0$.

Nous venons de voir que les racines de

$$\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = [a_1, a_2z, a_3, \ldots, a_{2n-2}z, a_{2n-1}] = 0$$

séparent les racines de

$$Q_{2n}(z) = [a_1, a_2z, a_3, \ldots a_{2n-1}, a_{2n}z] = 0.$$

Donc aussi les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1}z, a_{2n-2} \ldots a_3z, a_2] = 0$$

sépareront les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1}z, a_{2n-2}, \ldots a_3z, a_2, a_1z] = 0,$$

ce qui revient à dire que les racines de $P_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n}(z) = 0$.

De même, on verra que la proposition que les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$ ne diffère pas au fond de celle-ci : les racines de $P_{2n+1}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$.

Il résulte de là que dans les décompositions en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$
$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \frac{N_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n};$$

les quantités M_i, N_i sont toutes positives. (Il va sans dire que les x_i ne sont pas les mêmes dans les deux formules.)

4. Les racines de l'équation $Q_n(z) = 0$ sont évidemment des fonctions des n premiers nombres a_i. Peut-il arriver cependant qu'une telle racine ne dépende point d'un de ces a_i? C'est ce que nous allons examiner. On a d'après la formule (B) du n° 1, en employant la notation que nous avons expliquée au commencement du n° 2,

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z), \tag{1}$$
$$Q_{2n+2n'+1}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'+1}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'+1}^{2n}(z). \tag{2}$$

Nous savons que les deux polynomes $Q_n(z)$, $P_n(z)$ ne s'annulent jamais pour une même valeur de z, de même $Q_n(z)$ et $Q_{n-1}(z)$. Cela étant, il est facile de conclure de la formule (1) :

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{2n}(z)$, cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $Q_{2n'}^{2n}(z)$ cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Dans le second membre de (1), c'est le polynome $Q_{2n'}^{2n}(z)$ seul qui dépend de a_{2n+1}; en mettant en évidence ce coefficient, il vient

$$Q_{2n+2n'}(z) = a_{2n+1}\,z\,Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z) + R(z), \tag{3}$$

où $R(z)$ est un polynome qui ne dépend point de a_{2n+1}. Il est clair maintenant que les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui ne dépendent point de a_{2n+1}

doivent satisfaire aux équations

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z)=0,$$
$$R(z)=0.$$

Une telle racine doit donc annuler l'un des deux polynomes $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{2n}(z)$, mais, d'après ce qu'on vient de voir, elle annule alors aussi l'autre. Réciproquement, une valeur $z=a$ qui annule $Q_{2n}(z)$ et $P_{2n'}^{2n}(z)$ annulera aussi $Q_{2n+2n'}(z)$ d'après la formule (1), puis aussi R d'après la formule (3), et sera par conséquent une racine de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui est indépendante de a_{2n+1}. Ainsi les racines de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z)=0, \qquad P_{2n'}^{2n}(z)=0.$$

Et il est clair que ces équations peuvent, en effet, avoir des racines communes, car la première ne dépend que des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, la seconde des paramètres $a_{2n+2}, a_{2n+3}, \ldots, a_{2n+2n'}$. Mais on voit aussi qu'en général, c'est-à-dire lorsque les a_i ne satisfont pas à certaines conditions particulières, ces racines n'existent pas.

On établira de la même façon que les racines de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z)=0, \qquad Q_{2n'}^{2n}(z)=0.$$

La formule (2) donne lieu à des conclusions analogues qu'il suffira d'énoncer.

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z)=0, \qquad Q_{2n'+1}^{2n}(z)=0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z)=0, \qquad P_{2n'+1}^{2n}(z)=0.$$

5. Nous allons établir maintenant les propositions suivantes qui complètent celles obtenues au n° 3.

Les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z) = 0,$$

et également par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) : z = 0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) : z = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n'+1}^{2n}(z) : z^2 = 0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'+1}^{2n}(z) = 0.$$

Pour $n' = 0$ ou $= 1$ on retrouve les propositions du n° 3.

Il suffira de développer la démonstration de la première proposition.

Reprenons la relation

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z),$$

et désignons les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante par

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \alpha''' < \ldots;$$

de même les racines de $P_{2n'}^{2n}(z) = 0$ par

$$\beta < \beta' < \beta'' < \ldots$$

et l'ensemble des racines α et β par

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+n'-1}.$$

Cela étant, la proposition énoncée revient à ceci : la suite des quantités

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n + n'),$$

où $x_0 = -\infty$ et $x_{n+n'} = 0$, ne présente que des variations de signe.

D'abord $Q_{2n+2n'}(x_0)$ a le signe de $(-1)^{n+n'}$; quant à $Q_{2n+2n'}(x_1)$ deux cas sont à distinguer selon qu'on a $x_1 = \alpha$ ou $x_1 = \beta$.

Dans le premier cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n-1}(\alpha)\,P_{2n}^{2n}(\alpha);$$

dans le second cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n}(\beta)\, Q_{2n'}^{2n}(\beta).$$

Or, on voit facilement que dans le premier cas $Q_{2n-1}(\alpha)$ a le signe de $(-1)^n$ et $P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car α est plus petit que la plus petite racine de $Q_{2n-1}(z) = 0$ et aussi plus petit que β.

Dans le second cas, on voit de même que $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $(-1)^n$, $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car β est compris dans l'intervalle des deux plus petites racines de $Q_{2n'}^{2n}(z) = 0$. On voit que, dans tous les cas, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ a le signe de $(-1)^{n+n'+1}$; ainsi $Q_{2n+2n'}(x_0)$, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ présentent une variation.

Supposons maintenant que, dans la suite des x_i, deux racines consécutives x_k et x_{k+1} soient des racines α. On aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha')\, P_{2n'}^{2n}(\alpha'). \end{aligned}$$

Or, α et α' étant deux racines consécutives de $Q_{2n}(z) = 0$ comprennent une racine et une seule de $Q_{2n-1}(z) = 0$: donc $Q_{2n-1}(\alpha)$ et $Q_{2n-1}(\alpha')$ ont des signes contraires.

D'autre part, entre α et α' il n'y a par hypothèse aucune racine β de $P_{2n'}^{2n}(z) = 0$. Donc $P_{2n}^{2n}(\alpha)$ et $P_{2n'}^{2n}(\alpha')$ ont même signe, et il s'ensuit que $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation. Dans le cas où $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \beta'$, on aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\, Q_{2n'}^{2n}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta')\, Q_{2n'}^{2n}(\beta'). \end{aligned}$$

$Q_{2n}(\beta)$ et $Q_{2n}(\beta')$ ont même signe, $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ et $Q_{2n'}^{2n}(\beta')$ ont des signes contraires; $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

On arrive à la même conclusion dans les deux cas qui restent à discuter, $x_k = \alpha$, $x_{k+1} = \beta$ et $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \alpha$; dans le premier cas,

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta)\quad Q_{2n'}^{2n}(\beta). \end{aligned}$$

$Q_{2n-1}(z) : z$ a par rapport à $Q_{2n}(z)$ les propriétés de la dérivée $Q'_{2n}(z)$; ensuite $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $Q_{2n}(\alpha+\varepsilon)$, $Q_{2n-1}(\alpha)$ le signe de $Q_{2n-1}(\alpha+\varepsilon)$ (ε positif très petit).

On en conclut aisément que le rapport $Q_{2n-1}(\alpha):Q_{2n}(\beta)$ est négatif. Ensuite $P_{2n'}^{2n}(z)$ a par rapport à $Q_{2n'}^{2n}(z)$ les propriétés de la dérivée; $P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ a le signe de $P_{2n'}^{2n}(\beta-\varepsilon)$; $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ le signe de $Q_{2n'}^{2n}(\beta-\varepsilon)$. Le rapport $P_{2n'}^{2n}(\alpha):Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ a donc le signe de

$$P_{2n'}^{2n}(\beta-\varepsilon):Q_{2n'}^{2n}(\beta-\varepsilon),$$

et ce signe est $+$, si l'on remarque que β est une racine de $P_{2n'}^{2n}(z)=0$ qui est comprise entre deux racines consécutives de $Q_{2n'}^{2n}(z)=0$. Ainsi $Q_{2n+2n'}(x_k)$, $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

Enfin, si l'on a

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\; Q_{2n'}^{2n}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \end{aligned}$$

on constate que $Q_{2n}(\beta):Q_{2n-1}(\alpha)$ est positif, puis $Q_{2n'}^{2n}(\beta):P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ est négatif.

Les $n+n'$ premiers termes de la suite

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i=0,1,2,\ldots,n+n')$$

ne présentent donc que des variations et l'avant-dernier terme est donc négatif, tandis que le dernier terme est positif. La proposition énoncée se trouve ainsi établie.

Nous avons supposé dans ce raisonnement qu'aucune racine α n'est égale à une racine β. C'est ce qui arrive en général, mais la nature même de la proposition montre qu'il peut en être autrement dans des cas exceptionnels. En effet, d'après notre proposition, chacun des $n+n'-1$ intervalles formés par les racines de

$$Q_{2n+2n'}(z)=0,$$

renferme une racine α ou bien une racine β. Mais on ne saurait dire *a priori* quels sont les intervalles qui renferment une racine α et quels sont ceux qui contiennent une racine β. En effet, cette distribution des racines α et β dans les différents intervalles varie d'un cas à l'autre selon les valeurs des a_i.

Les coefficients a_i variant d'une façon continue (tout en restant positifs), il doit donc arriver des cas exceptionnels, au moment où la distribution des racines α et β dans les intervalles subit un changement. Et il est clair que cela ne peut arriver que de la façon suivante : deux intervalles consécutifs renfermant le premier une racine α, le second une racine β, la racine α peut passer dans le second intervalle, tandis qu'en même temps la racine β entre dans le premier intervalle. Au moment critique, les racines α et β sont confondues avec une racine de

$$Q_{2n+2n'}(z) = 0.$$

C'est, on le voit, le cas exceptionnel étudié au n° 4.

6. Nous pouvons établir maintenant, très facilement, la proposition suivante. Soit x_k une racine de

$$Q_n(z) = 0.$$

x_k peut être considérée comme une fonction de a_i et *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_i}$$

ne peut jamais être négative.

Pour la démonstration, il faut distinguer quatre cas selon la parité de n et de i : il suffira de développer le raisonnement dans un seul cas. Supposons

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = a_{2n+1} x_k\, Q_{2n}(x_k)\, P_{2n'}^{2n}(x_k) + R(x_k) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{2n+1}} = -\frac{x_k\, Q_{2n}(x_k)\, P_{2n'}^{2n}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}.$$

Or, nous avons démontré que $Q_{2n}(z)\, P_{2n'}^{2n}(z)$ a par rapport à $Q_{2n+2n'}(z)$ les propriétés de la dérivée ; donc

$$\frac{Q_{2n}(x_k)\, P_{2n'}^{2n}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}$$

est positif et, puisque x_k n'est pas positif, la propriété énoncée se trouve démontrée dans le cas de n pair, i impair. Exceptionnellement, la dérivée peut être nulle.

CHAPITRE II.

LE DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DESCENDANTES DE z.

7. La formule

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)}-\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=\frac{(-1)^n}{Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)},$$

où $Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)$ est un polynome du degré $n+1$, montre qu'en développant les réduites

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)},\qquad \frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)},$$

suivant les puissances descendantes de z, les n premiers termes de ces développements sont les mêmes. En écrivant

$$(1)\quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n}+(-1)^n\frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}}+(-1)^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}}+\ldots,$$

on définira donc une suite de quantités

$$c_0,\quad c_1,\quad c_2,\quad c_3,\quad \ldots$$

qui sont parfaitement déterminées et qu'on pourra prolonger aussi loin que l'on voudra. Les c_i sont évidemment des fonctions rationnelles des a_i, et, si l'on introduit les b_i (*voir* l'Introduction), les c_i sont des polynomes à coefficients entiers et positifs des b_i.

La manière la plus élégante pour obtenir les expressions des c_i par les b_i nous paraît être la suivante, que nous avons obtenue dans le Mémoire publié dans le tome III de ces *Annales*.

On calcule d'abord les quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ par les formules

$$\alpha_{0,0}=1,\qquad \alpha_{i,0}=0\ \text{ lorsque } i>0;$$

$$\begin{aligned}
\beta_{0,k}&=\alpha_{0,k}+b_2\alpha_{1,k},\\
\beta_{1,k}&=\alpha_{1,k}+b_4\alpha_{2,k},\\
\beta_{2,k}&=\alpha_{2,k}+b_6\alpha_{3,k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{i,k}&=\alpha_{i,k}+b_{2i+2}\alpha_{i+1,k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,k+1} &= b_1\beta_{0,k},\\
\alpha_{1,k+1} &= b_3\beta_{1,k} + \beta_{0,k},\\
\alpha_{2,k+1} &= b_5\beta_{2,k} + \beta_{1,k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_{i,k+1} &= b_{2i+1}\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k}.
\end{aligned}$$

Il en résulte qu'on a $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = 0$ lorsque $i > k$.

Les expressions $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ obtenues, on peut calculer un coefficient c_n quelconque de plusieurs manières par l'une ou l'autre des formules

$$\begin{aligned}
c_{i+k} &= b_0\alpha_{0,i}\alpha_{0,k} + b_0b_1b_2\alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + b_0b_1b_2b_3b_4\alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \ldots,\\
c_{i+k+1} &= b_0b_1\beta_{0,i}\beta_{0,k} + b_0b_1b_2b_3\beta_{1,i}\beta_{1,k} + b_0b_1b_2b_3b_4b_5\beta_{2,i}\beta_{2,k} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les coefficients c_n étant définis, nous considérons la série infinie

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots,$$

et nous dirons que c'est là le *développement de la fraction continue suivant les puissances descendantes de z*. C'est une définition purement formelle; nous verrons bientôt que la série est souvent divergente quelle que soit la valeur de z : aussi ne faut-il l'envisager pour le moment que sous le point de vue purement formel.

Les c_n sont des fonctions rationnelles des a_n; nous donnerons un peu plus loin les formules qui expriment réciproquement les a_n au moyen des c_n. A l'aide de ces formules, on pourra donc réduire *formellement* une série procédant suivant les puissances descendantes de z en une fraction continue.

8. On a

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_0(z)\,Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(z)\,Q_2(z)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z)\,Q_n(z)},$$

et, en développant suivant les puissances descendantes de z les termes du second membre :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Q_0(z)\,Q_1(z)} &= \frac{\varepsilon_1^1}{z},\\
-\frac{1}{Q_1(z)\,Q_2(z)} &= -\frac{\varepsilon_2^2}{z^2}+\frac{\varepsilon_3^2}{z^3}-\frac{\varepsilon_4^2}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^2}{z^5}-\ldots,\\
+\frac{1}{Q_2(z)\,Q_3(z)} &= +\frac{\varepsilon_3^3}{z^3}-\frac{\varepsilon_4^3}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^3}{z^5}-\ldots,\\
-\frac{1}{Q_3(z)\,Q_4(z)} &= -\frac{\varepsilon_4^4}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^4}{z^5}-\ldots,\\
+\frac{1}{Q_4(z)\,Q_5(z)} &= +\frac{\varepsilon_5^5}{z^5}-\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En ajoutant les n premières séries, on obtient le développement de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$. Or, si l'on remarque que

$$Q_{n-1}(z)\,Q_n(z) = cz(z+x_1)(z+x_2)\ldots(z+x_{n-1}),$$

où c, x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1} sont des nombres *positifs*, on voit facilement que tous les coefficients ε_k^i sont *positifs*, et l'on en conclut que, dans le développement (1) de

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

les n premiers coefficients c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1} sont *positifs*, et que les coefficients suivants α_n^n, α_{n+1}^n, α_{n+2}^n, $\ldots$ sont *plus* petits que c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, $\ldots$ respectivement.

On peut obtenir le développement d'une réduite en la décomposant d'abord en fractions simples. Posons, comme au n° 3,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1}+\frac{M_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{M_n}{z+x_n},$$

on en conclura

$$c_k = \sum_1^n M_i x_i^k \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (2n-1)].$$

Ensuite, en considérant une réduite d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z}+\frac{N_1}{z+x_1}+\frac{N_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{N_n}{z+x_n},$$

d'où

$$c_k = \sum_0^n N_i x_i^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)\,(x_0 = 0),$$

ces expressions donnent lieu à la conséquence suivante :

La forme quadratique

$$\sum_0^{m-1} \sum_0^{m-1} c_{p+i+k} X_i X_k$$

est une forme *définie* et *positive*, en sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & c_{p+3} & \ldots & c_{p+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

est *positif*.

En effet, si nous prenons un nombre n tel que

$$p + 2m - 2 \leqq 2n - 1,$$

il est clair que la forme quadratique considérée peut s'écrire

$$\sum_1^n M_i x_i^p (X_0 + X_1 x_i + X_2 x_i^2 + \ldots + X_{m-1} x_i^{m-1})^2.$$

9. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}},$$

c'est-à-dire le rapport $c_{n+1} : c_n$ croît avec n. Deux cas peuvent donc se présenter : ou bien ce rapport croît au delà de toute limite, et alors la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

est toujours divergente; ou bien ce rapport tend vers une limite finie λ, et alors la série est convergente pour $|z| > \lambda$.

D'autre part, nous savons que la plus grande racine de

$$Q_n(-z) = 0$$

croît aussi avec n. Nous allons montrer que, dans le premier cas, cette racine croît aussi au delà de toute limite, et, dans le second cas, elle tend vers la limite λ.

Posons, sans distinguer les valeurs paires ou impaires de n,

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_1^{n'} \frac{m_i}{z + x_i},$$

$n' = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ et $x_{n'}$ étant la plus grande racine, on aura

$$\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} = \frac{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-1}}{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-2}} < x_{n'}.$$

Donc, si $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ croît au delà de toute limite, il en sera de même de $x_{n'}$. Mais supposons

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda;$$

la limite de $x_{n'}$ ne pourra pas être $< \lambda$: je dis qu'elle est égale à λ. Pour cela, il suffira de montrer que $x_{n'}$ ne peut pas devenir plus grand que λ. Supposons en effet $x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, ε étant positif, et considérons les deux séries

$$(1) \qquad \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

$$(2) \qquad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}} + \ldots.$$

Nous savons que la série (2) est convergente pour $|z| > x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, mais *divergente* pour $|z| < x_{n'}$, et donc en particulier pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

Or, puisque $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda$, la série (1) est convergente pour $|z| > \lambda$ et, puisqu'on a $\alpha_n^n < c_n$, $\alpha_{n+1}^n < c_{n+1}$, ..., la série (2) sera aussi *convergente* pour les mêmes valeurs de z et, en particulier, pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

La même série (2) serait donc en même temps convergente et divergente pour $\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon$. Cette contradiction montre que la supposition que $x_{n'}$ peut croître au delà de λ est inadmissible et l'on a bien

$$\lim x_{n'} = \lambda \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Mais la fraction continue étant donnée, comment peut-on reconnaître si $c_{n+1} : c_n$ croît au delà de toute limite ou tend vers une limite finie? La réponse est très simple. Considérons les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si ces nombres ne sont pas limités supérieurement, $c_{n+1} : c_n$ croîtra au delà de toute limite. Mais, si ces nombres ont une limite supérieure l, le rapport $c_{n+1} : c_n$ tendra vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

Les nombres b_n n'ayant pas de limite supérieure, cela veut dire, quelque grand que soit un nombre M, on pourra trouver toujours un entier m tel que

$$b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}} > \mathrm{M}.$$

Posons, selon le cas, $m = 2n$ ou $m = 2n + 1$, et rangeons par ordre de grandeur croissante les racines des équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad Q_{2n+2}(-z) = 0,$$

en les désignant par

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_{n+1}, \end{array}$$

on aura, d'après le n° 2,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1}, \\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1} &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\beta_{n+1} - (\alpha_n - \beta_n) - (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) - \ldots - (\alpha_1 - \beta_1) = b_{2n} + b_{2n+1}.$$

Les différences $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n$ étant positives, il est clair que

$$\beta_{n+1} > b_{2n} + b_{2n+1} > \mathrm{M}.$$

On voit donc que la plus grande racine de $Q_{2n}(-z) = 0$, et, par conséquent, aussi le rapport $c_{n+1} : c_n$, croît au delà de toute limite.

Si les nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ont une limite supérieure l, choisissons un nombre C tel que $Cl > b_0$ et considérons la fraction continue

$$\cfrac{Cl}{z + \cfrac{l}{1 + \cfrac{l}{z + \cfrac{l}{1 + \ldots}}}}$$

Les c_n étant des polynomes à coefficients positifs des b_n, il est clair que si l'on réduit en série cette fraction continue, les coefficients seront plus grands que les coefficients correspondants de la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots.$$

Or, on s'assure facilement que la série obtenue est identique à celle qu'on obtient en développant la fonction algébrique

$$\frac{C}{2}\left\{\sqrt{1 + \frac{4l}{z}} - 1\right\},$$

qui est convergente pour $|z| > 4l$. Donc le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

sera aussi convergent pour $|z| > 4l$, d'où l'on conclut que le rapport $c_{n+1} : c_n$ tend vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

11. Le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

et celui de $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ ne diffèrent que par les termes en

$$\frac{1}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{z^{n+2}}, \quad \ldots.$$

On en conclut que le développement de

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right)$$

ne diffère de $P_n(z)$ que par des termes en

$$\frac{1}{z^{n-n'+1}},\quad \frac{1}{z^{n-n'+2}},\quad \ldots,$$

n' étant le degré de $Q_n(z)$. Par conséquent, dans le produit

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots\right),$$

les termes en

$$\frac{1}{z},\quad \frac{1}{z^2},\quad \ldots,\quad \frac{1}{z^{n-n'}}$$

manquent. Cette condition détermine $Q_n(z)$, à un facteur constant près. Supposons d'abord n pair et posons

$$Q_{2n}(-z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\alpha_n z^n;$$

en écrivant que les termes en

$$\frac{1}{z},\quad \ldots,\quad \frac{1}{z^n}$$

manquent dans le produit par

$$\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}+\ldots,$$

il vient

$$\text{(1)}\qquad \alpha_0 c_k+\alpha_1 c_{k+1}+\ldots+\alpha_n c_{k+n}=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1),$$

et, si l'on remarque que $Q_{2n}(0)=1$, on obtient

$$\text{(2)}\qquad Q_{2n}(-z)=\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour exprimer plus simplement les formules (1), nous introduirons un symbole $Sf(u)$ dont voici la définition : $f(u)$ étant un polynome, $Sf(u)$ sera le résultat obtenu en remplaçant dans $f(u)$ les diverses puissances de u, u^0, u^1, u^2, ... par c_0, c_1, c_2, ... respectivement. On aura donc

$$\text{(3)}\qquad S\{u^k Q_{2n}(-u)\}=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Dans le cas de n impair, soit

$$Q_{2n+1}(-z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_{n+1} z^{n+1},$$

il viendra

$$(4) \qquad S\{u^k Q_{2n+1}(-u)\} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Le terme constant dans le produit de $Q_{2n+1}(-z)$ par

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

est égal au terme constant de $-P_{2n+1}(-z)$, c'est-à-dire $= -1$, donc

$$(5) \qquad S\left\{\frac{Q_{2n+1}(-u)}{u}\right\} = -1.$$

Cette relation détermine le facteur constant que les formules (4) laissaient indéterminé et

$$(6) \qquad Q_{2n+1}(-z) = -\begin{vmatrix} z & z^2 & \ldots & z^{n+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}.$$

Les coefficients des plus hautes puissances de z dans $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ sont connus d'après les formules du n° 2.

La comparaison avec (2) et (6) donne dès lors

$$a_1 a_2 \ldots a_{2n} = A_n : B_n,$$
$$a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} = B_n : A_{n+1};$$

si nous introduisons les notations

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (A_0 = B_0 = 1),$$

on en conclut

$$(7) \qquad a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}.$$

Ce sont les formules qui expriment les a_i par les c_i.

Le coefficient de z dans $Q_{2n+1}(z)$ étant $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$ (*voir* n° 2), il vient, d'après la formule (6),

$$(8) \qquad a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{C_n}{A_{n+1}},$$

en posant

$$C_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}, \qquad C_0 = 1.$$

12. Les expressions des numérateurs $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ sont un peu plus compliquées, mais s'obtiennent encore aisément par cette remarque que la partie entière de

$$f(z)\left\{\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots\right\}$$

s'exprime par

$$S\left\{\frac{f(z) - f(u)}{z - u}\right\}.$$

Il suffit de vérifier cela dans le cas $f(z) = z^k$.

On aura ainsi

$$P_n(-z) = -S\left\{\frac{Q_n(-z) - Q_n(-u)}{z - u}\right\}.$$

Des formules (2) et (6) on déduit alors facilement les expressions suivantes. Posons

$$\begin{aligned} R_0 &= c_0, \\ R_1 &= c_0 z + c_1, \\ R_2 &= c_0 z^2 + c_1 z + c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_k &= c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k, \end{aligned}$$

on aura

$$(9) \qquad P_{2n}(-z) = -\begin{vmatrix} 0 & R_0 & R_1 & \ldots & R_{n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n,$$

$$(10) \qquad P_{2n+1}(-z) = \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} : A_{n+1}.$$

Pour $z = 0$, on conclut de la formule (9)

$$(11) \qquad a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = - \begin{vmatrix} 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n.$$

A l'égard du symbole S, nous ferons cette remarque à peu près évidente que, $V_n(u)$ étant un polynome du degré n, la valeur de

$$S\{V_n(u)\}$$

est égale au coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de

$$V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)},$$

en supposant $m \geqq n+1$, ce que nous écrirons

$$S\{V_n(u)\} = \text{Rés.}\left\{V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)}\right\}.$$

D'après cela, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} S\{Q_{2n}^2(-u)\} &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}^2(u)\frac{P_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}(u)\frac{1 + P_{2n}(u)\,Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{\frac{Q_{2n}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} = \frac{1}{a_{2n+1}}. \end{aligned}$$

Nous rassemblons ici quelques formules de ce genre

$$S\{Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}},$$

$$S\{u\,Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}}\left(\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}} + \frac{1}{a_{2n+1}a_{2n+2}}\right),$$

$$S\left\{\frac{1}{u}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = \frac{1}{a_{2n+2}},$$

$$S\left\{\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$

$$S\left\{\frac{[Q_{2n}(-u)-1]^2}{u}\right\} = -S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

Voici enfin une dernière remarque : supposons

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_i}{z+x_i},$$

on aura

$$S\{V_n(u)\} = \sum_1^n M_i\,V_n(x_i),$$

d'où l'on voit que, si le polynome $V_n(u)$ ne devient pas négatif pour $u > 0$, la valeur du symbole

$$S\{V_n(u)\}$$

est toujours *positive*.

CHAPITRE III.

OSCILLATION ET CONVERGENCE D'UNE FRACTION CONTINUE. CAS OU LA PARTIE RÉELLE DE z EST POSITIVE.

---

13. Supposons $z = 1$ et écrivons P_n, Q_n au lieu de $P_n(1)$, $Q_n(1)$. Les relations

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

montrent que l'on a

$$P_1 < P_3 < P_5 < \ldots,$$
$$P_0 < P_2 < P_4 < \ldots,$$
$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < \ldots,$$
$$Q_0 < Q_2 < Q_4 < \ldots,$$

en sorte que dans le second membre de

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n},$$

les termes vont en diminuant.

On en conclut que les réduites d'ordre impair vont en diminuant, sans devenir jamais plus petites qu'une réduite quelconque d'ordre pair. Les réduites d'ordre pair vont en augmentant sans surpasser jamais une réduite quelconque d'ordre impair. Ainsi les réduites d'ordre impair tendront toujours vers une limite finie, et il en est de même des réduites d'ordre pair.

$$\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1,$$
$$\lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L,$$

et

$$L_1 \geqq L.$$

Si la quantité croissante $Q_{n-1} Q_n$ croît au delà de toute limite, on aura

$$L_1 = L;$$

si, au contraire, $Q_{n-1}Q_n$ tend vers une limite λ, on aura

$$L_1 = L + \frac{1}{\lambda}.$$

Or on voit facilement que $Q_{2n} > 1$, donc

$$Q_{2n+1} = a_{2n+1}Q_{2n} + Q_{2n-1} > Q_{2n-1} + a_{2n+1},$$

d'où

$$Q_{2n+1} > a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}.$$

Ensuite on conclura

$$Q_{2n} = a_{2n}Q_{2n-1} + Q_{2n-2} > Q_{2n-2} + a_1 a_{2n},$$

d'où

$$Q_{2n} > a_1(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}).$$

Donc, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente,* l'une au moins des quantités Q_{2n}, Q_{2n+1} croîtra au delà de toute limite et

$$L_1 = L.$$

Nous dirons, dans ce cas, que la fraction continue est *convergente.*

D'autre part, ayant

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

on en conclut

$$Q_{n-1} + Q_n = (1 + a_n)Q_{n-1} + Q_{n-2} < (1 + a_n)(Q_{n-2} + Q_{n-1}),$$

donc

$$Q_{n-1} + Q_n < (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

Or, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente,* le produit

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots$$

l'est aussi et ne croît pas au delà d'une limite finie.

Dans ce cas donc, Q_{2n} et Q_{2n+1} tendront aussi vers des limites finies et l'on aura

$$L_1 > L.$$

La fraction continue, dans ce cas, est *oscillante*. Si l'on pose, dans ce cas,

$$s = \sum_{1}^{\infty} a_n,$$

on aura

$$Q_{n-1} + Q_n < e^s, \quad Q_{n-1} Q_n < \frac{1}{4} e^{2s},$$
$$L_1 - L > 4e^{-2s}.$$

Les propositions sur la convergence et l'oscillation de la fraction continue ont été obtenues depuis longtemps par M. Stern (*Journal de Crelle*, t. 37).

Dans le cas d'oscillation nous venons de voir que Q_{2n} et Q_{2n+1} tendent vers des limites finies; il est clair qu'il en est de même de P_{2n} et P_{2n+1}.

14. Supposons maintenant $z = x$ réel et positif. On aura, d'après ce qui précède,

$$\lim \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} = F_1(x),$$
$$\lim \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = F(x),$$
$$F_1(x) \geqq F(x).$$

Il y aura oscillation ou convergence selon que la série

$$a_1 x + a_2 + a_3 x + a_4 + \dots$$

est convergente ou divergente. Mais il est clair que cela ne dépend en aucune façon de la valeur particulière de x, et l'on arrive à cette conclusion : si la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

est *convergente*, la fraction continue est *oscillante* pour toute valeur positive de x, et l'on a

$$F_1(x) > F(x);$$

si au contraire la série est *divergente*, la fraction continue est *convergente*, et l'on a

$$F_1(x) = F(x) = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}.$$

15. Passons aux valeurs imaginaires de z. Pour étudier séparément les

réduites d'ordre pair et celles d'ordre impair, nous remarquerons que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{a_2}{Q_0(z)\,Q_2(z)} + \frac{a_4}{Q_2(z)\,Q_4(z)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{Q_{2n-2}(z)\,Q_{2n}(z)},$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} - \frac{a_3 z}{Q_1(z)\,Q_3(z)} - \frac{a_5 z}{Q_3(z)\,Q_5(z)} - \ldots - \frac{a_{2n+1} z}{Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n+1}(z)}.$$

Il s'agit donc de l'étude de la convergence des séries

$$(1) \qquad \sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^\infty \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k+1}(z)}.$$

Supposons $z = x + yi$, la partie réelle de z étant positive, et considérons un domaine quelconque S dans lequel x admet une limite inférieure λ qui soit *positive*. Je dis que dans ce domaine la série (1) est uniformément convergente; en effet

$$\left| \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} \right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,|}.$$

Or il est clair que

$$Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z) = C(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_{2k-1}),$$

C et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k-1}$ étant des constantes *positives*. Pour $z = x + y_i$, x étant *positif*, on a évidemment

$$|\,z+\alpha_i\,| > x + \alpha_i,$$

donc

$$|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,| > Q_{2k-2}(x)\,Q_{2k}(x),$$

et puisque $x \geqq \lambda$, à plus forte raison

$$|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,| > Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda);$$

donc

$$\left| \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} \right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda)}.$$

Or la série

$$\sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda)} = F(\lambda) = \lim \frac{P_{2n}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)},$$

est *convergente;* par conséquent on peut déterminer un nombre ν tel que pour $n \geqq \nu$

$$\sum_{n}^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda)} < \varepsilon,$$

quel que soit n', ε étant aussi petit qu'on le voudra.

Pour les mêmes valeurs de n on aura donc aussi

$$\left| \sum_{n}^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} \right| < \varepsilon,$$

et puisque z est un point quelconque du domaine S, cela montre que la série (1) est *uniformément convergente* dans S. Comme, d'autre part, les termes de cette série sont holomorphes dans S, il s'ensuit, d'après un théorème connu, que

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

est aussi holomorphe dans S.

On voit facilement que les mêmes raisonnements s'appliquent presque sans modification à la série (2), et il suffira d'énoncer le résultat suivant. La série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k+1}\,z}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k+1}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans S et $F_1(z)$ est holomorphe dans ce même domaine.

Ainsi, dans toute la partie du plan où la partie réelle de z est positive, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z), \qquad \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z),$$

$F(z)$, $F_1(z)$ étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions ne sont pas identiques dans le cas où la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

est *convergente;* elles sont identiques dans le cas où cette série est *divergente.* Supposons $z = x$ réel positif, et faisons tendre x vers zéro, on conclut aisément des expressions de $F(x)$, $F_1(x)$ par les séries

$$\lim_{x=0} F(x) = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots,$$
$$\lim_{x=0} x F_1(x) = 1 : (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

Si la série

$$\Sigma a_{2n}$$

est divergente, $F(x)$ croît au delà de toute limite. Si la série

$$\Sigma a_{2n-1}$$

est divergente, $x F_1(x)$ tend vers zéro.

Remarquons que

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_1^n \frac{M_k}{x + x_k}$$
$$= \sum_1^n \left\{ \frac{M_k}{x} - \frac{M_k x_k}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{M_k x_k^{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{M_k x_k^p}{x^p (x + x_k)} \right\},$$
$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1);$$

on aura donc aussi

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1),$$

et de même

$$F_1(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi' c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi' < 1).$$

16. Il faut étendre maintenant ces résultats au cas où la partie réelle de z est négative. On y arrive facilement à l'aide d'une proposition de la théorie des fonctions que nous établirons plus loin. Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons examiner le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. On peut traiter ce cas par une méthode particulière, grâce à cette circonstance que les polynomes

$$P_{2n}(x), \quad Q_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(x), \quad Q_{2n+1}(x)$$

tendent vers des limites finies.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU CAS OU LA SÉRIE Σa_n EST CONVERGENTE.

17. On a identiquement

$$P_{2n}(z) = \sum_1^n a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$Q_{2n}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$P_{2n+1}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$Q_{2n+1}(z) = \sum_0^n a_{2k+1} z Q_{2k}(z).$$

Par conséquent, en supposant que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

soit convergente, les séries

$$\sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$\sum_0^\infty a_{2k+1} z Q_{2k}(z),$$

sont convergentes lorsque z est réel positif.

Considérons un domaine quelconque S dans lequel le module de z admet une limite supérieure λ qui soit finie. Je dis que les séries précédentes sont *uniformément convergentes* dans S, et, puisque leurs termes sont holomorphes dans S, il s'ensuit qu'elles représentent dans S des fonctions holomorphes. Il suffira de considérer la première série. On a

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\,|\mathrm{P}_{2k-1}(z)|.$$

Or $\mathrm{P}_{2k-1}(z)$ est un polynome à coefficients positifs; donc

$$|\mathrm{P}_{2k-1}(z)| < \mathrm{P}_{2k-1}(|z|) \leqq \mathrm{P}_{2k-1}(\lambda),$$

puisque

$$|z| \leqq \lambda,$$

donc

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(\lambda).$$

Or, la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(\lambda)$$

étant *convergente*, on peut déterminer un nombre ν tel que, pour $n \geqq \nu$,

$$\sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(\lambda) < \varepsilon,$$

quel que soit n', ε étant aussi petit qu'on le voudra. Pour les mêmes valeurs de n, on aura donc aussi

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(z)\right| < \varepsilon,$$

et, puisque z est un point quelconque du domaine S, cela montre que la série considérée est *uniformément convergente* dans S.

D'après cela, nous avons

$$\begin{aligned}
p(z) &= \phantom{1+{}}\sum_{1}^{\infty} a_{2k}\mathrm{P}_{2k-1}(z) = \lim \mathrm{P}_{2n}(z),\\
q(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k}\mathrm{Q}_{2k-1}(z) = \lim \mathrm{Q}_{2n}(z),\\
p_1(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k+1}z\mathrm{P}_{2k}(z) = \lim \mathrm{P}_{2n+1}(z),\\
q_1(z) &= \phantom{1+{}}\sum_{0}^{\infty} a_{2k+1}z\mathrm{Q}_{2k}(z) = \lim \mathrm{Q}_{2n+1}(z),
\end{aligned}$$

les quatre fonctions $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ étant holomorphes dans tout le plan. Elles sont liées évidemment par la relation

$$p_1(z)q(z) - p(z)q_1(z) = +1.$$

18. Il est clair, d'après ce qui précède, que la série

$$\sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z)$$

est *absolument convergente,* et même que la nouvelle série, obtenue en remplaçant $P_{2k-1}(z)$ par son expression comme polynome de z, est absolument convergente. Dès lors, dans la nouvelle série, il est permis d'ordonner suivant les puissances de z, ce qui donnera

$$p(z) = \sum_0^\infty \alpha_k z^k$$

et le coefficient α_k sera la limite du coefficient $\mathcal{A}_k$ de z^k dans $P_{2n}(z)$ (n° 2). Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment à $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$.

Nous venons de voir que $P_{2n}(z)$ tend *uniformément* vers $p(z)$, et il est clair que $p(z)$ est une fonction *continue* de z. On peut en conclure que,

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots$$

étant une suite infinie de nombres et $\lim z_n = Z$ (pour $n = \infty$), on aura aussi

$$\lim_{n=\infty} P_{2n}(z_n) = p(Z).$$

En effet, entourons le point limite Z (supposé fini) par un cercle C. A partir de $n \geqq \nu$, z_n sera à l'intérieur du cercle et, à cause de la convergence uniforme, on aura

$$(1) \qquad |P_{2n}(z) - p(z)| < \varepsilon,$$

pour $n \geqq \nu'$, z étant un point *quelconque* situé à l'intérieur de C. D'autre part, z_n tendant vers Z, on aura aussi

$$|p(z_n) - p(Z)| < \varepsilon,$$

à partir de $n \geqq \nu''$. Or,

$$|P_{2n}(z_n) - p(Z)| < |P_{2n}(z_n) - p(z_n)| + |p(z_n) - p(Z)|,$$

et dans la formule (1) il est permis de remplacer z par z_n; dès lors, on conclut

$$|P_{2n}(z_n) - p(Z)| < 2\varepsilon,$$

pour $n \geqq N$, N étant le plus grand des nombres ν, ν', ν''. Enfin on trouvera facilement, par la considération de la série

$$p(z+h) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z+h),$$

qu'il est permis d'ordonner le second membre suivant les puissances de h, et d'en tirer la conclusion qu'il est permis de différentier autant de fois qu'on le voudra la série

$$p(z) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z);$$

on a donc

$$p'(z) = \lim P'_{2n}(z),$$

et la convergence de $P'_{2n}(z)$ vers $p'(z)$ est *uniforme* dans tout domaine S où $|z|$ est limité. Supposant $\lim z_n = Z$, on aura aussi

$$\lim P'_{2n}(z_n) = p'(Z).$$

19. Nous allons obtenir maintenant les fonctions $p(z)$, etc., sous forme de produits infinis, en nous bornant à développer le raisonnement dans le cas de

$$q(z) = \lim Q_{2n}(z).$$

Les polynomes P ne diffèrent pas au fond des polynomes Q, on a remarqué déjà (n° 3, à la fin) que

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{z} Q^1_{2n-1}(z),$$

$$P_{2n+1}(z) = Q^1_{2n}(z),$$

et dès lors il sera facile d'étendre le résultat que nous allons établir pour $q(z)$ aux fonctions $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$. On a

$$Q_{2n}(z) = \left(1 + \frac{z}{x_1}\right)\left(1 + \frac{z}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{x_n}\right).$$

Nous supposerons les x_k rangés par ordre de grandeur croissante,

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\mathfrak{B}_1<\beta_1,$$

β_1 étant le coefficient de z dans le développement

$$q(z)=\sum_0^\infty \beta_k z^k.$$

Lorsqu'on remplace n par $n+1$, nous savons que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ décroissent, mais il est clair qu'on aura toujours

$$x_k>\frac{1}{\beta_1}.$$

Par conséquent, pour $n=\infty$, x_k tendra vers une limite *positive* que nous désignerons par λ_k, et

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4 \;\ldots.$$

Je dis d'abord que la série

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\ldots$$

est *convergente*. En effet, soit k un nombre fini quelconque, en prenant $n>k$, on aura

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}>\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k},$$

puisque x_i tend vers λ_i en *diminuant* toujours. Mais, d'autre part, λ_i étant la limite de x_i, on peut supposer n assez grand pour que la différence

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}\right)-\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}\right)$$

soit inférieure à ε, et alors

$$\frac{1}{\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_k}+\varepsilon<\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<\beta_1+\varepsilon.$$

Ceci prouve que la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ est *convergente* et que la somme de cette série ne saurait surpasser β_1.

Puisque x_k tend vers λ_k, on a

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}(-x_k) = 0 = q(-\lambda_k);$$

les λ_k sont des zéros de la fonction $q(-z)$.

20. Peut-il arriver que plusieurs λ soient égaux, qu'on ait par exemple

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}, \ldots = \lambda_{k+i},$$

λ_k étant $< \lambda_{k+1}$; $\lambda_{k+i+1} > \lambda_{k+i}$? Il faut d'abord remarquer que i sera nécessairement fini puisque la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

est convergente. Ensuite, nous pouvons prendre n assez grand pour que

$$x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+i}, \quad x_{k+i+1}$$

diffèrent aussi peu qu'on le voudra de leurs limites

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+i}, \quad \lambda_{k+i+1}.$$

Nous pouvons donc supposer que

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_{k+i}$$

soient tous dans l'intervalle $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+i+1})$.

Ensuite, nous pourrons trouver un nombre n' tel que les racines

$$x'_{k+1}, \quad x'_{k+2}, \quad \ldots, \quad x'_{k+i}$$

de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0$$

se trouvent toutes dans l'intervalle

$$(\lambda_{k+1}, \quad x_{k+1}),$$

x'_{k+i+1} restant toujours supérieur à λ_{k+i+1}.

De cette façon, on voit que l'intervalle

$$(x'_{k+i}, \quad x'_{k+i+1}$$

de deux racines consécutives de $Q_{2n+2n'}(-z) = 0$ renferme les racines

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_{k+i}$$

de $Q_{2n}(-z) = 0$. Or nous avons vu (n° 5) que, dans l'intervalle de deux racines consécutives de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0,$$

il se trouve soit *une* racine de $Q_{2n}(-z) = 0$, soit *une* racine de $P_{2n'}^{2n}(-z) = 0$. On a donc nécessairement $i = 1$, c'est-à-dire parmi les nombres

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$$

il n'y en a point qui soient égaux.

21. Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra; le produit

$$\mathfrak{P} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{1}$$

étant convergent pour toute valeur finie de z, il est possible de déterminer un nombre m tel que

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

Nous supposons ici que z ait quelque valeur finie fixe. Soit

$$\mathrm{M} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right),$$

il est clair que

$$\left| \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| < \mathrm{M},$$

et puis aussi

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

A cause de

$$\mathfrak{P} = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \times \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

on en conclut facilement

$$\mathfrak{P} = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) + M\varepsilon', \tag{2}$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

Considérons, d'autre part, pour $n > m$ l'expression

$$Q_{2n}(z) = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) \times \prod_{m+1}^n \left(1 + \frac{z}{x_k}\right),$$

il est clair qu'on aura encore

$$\left|\prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right)\right| < M,$$

$$\left|\prod_{m+1}^n \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) - 1\right| < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut

$$Q_{2n}(z) = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) + M\varepsilon'', \tag{3}$$

le module de ε'' étant inférieur à ε.

En faisant croître n indéfiniment,

$$\prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right)$$

tendra vers

$$\prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Dès lors la comparaison des formules (2) et (3) montre que l'on a

$$\lim Q_{2n}(z) = \mathfrak{P},$$

c'est-à-dire la fonction holomorphe $q(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Ainsi, la fonction $q(z)$ est du genre zéro, elle n'admet point d'autres zéros que les $-\lambda_k$ qui sont des zéros simples. On arrive pour $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ à des conclusions toutes semblables.

22. Pour toute valeur de z qui n'annule pas $q(z)$ ou $q_1(z)$, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)},$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}.$$

Nous allons obtenir ces limites encore sous la forme d'une série de fractions simples. Pour cela, considérons la décomposition en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$

$$M_k = \frac{P_{2n}(-x_k)}{Q'_{2n}(-x_k)}.$$

Pour $n=\infty$, x_k tend vers λ_k, il s'ensuit que M_k tendra aussi vers une limite finie $\mu_k \geqq 0$,

$$\mu_k = \frac{p(-\lambda_k)}{q'(-\lambda_k)}.$$

Il est clair que μ_k est *positif*, car, à cause de la relation

$$p_1(z)\,q(z) - p(z)\,q_1(z) = +1,$$

les fonctions $p(z)$ et $q(z)$ ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur $z = -\lambda_k$.

La série

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$$

est *convergente*. En effet, prenant n suffisamment grand,

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$$

différera aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k;$$

donc

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_k + \varepsilon,$$

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < \mathbf{M}_1 + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{M}_n + \varepsilon = \frac{1}{a_1} + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty \mu_k$$

est convergente et que la somme de cette série ne saurait surpasser $\frac{1}{a_1}$.

Cela étant, et puisque les nombres

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

croissent au delà de toute limite, il est clair que la série

$$\mathcal{S} = \sum_1^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k}$$

définit une fonction méromorphe dans tout le plan.

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra, puisque λ_k croît au delà de toute limite, on pourra trouver un entier m tel que

$$\lambda_{m+1} - |z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

et l'on aura alors, à plus forte raison,

$$\lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où l'on conclut

$$|\lambda_{m+i} + z| > \lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{|\lambda_{m+i} + z|} < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

En écrivant

$$\mathcal{S} = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k},$$

on aura

$$\left| \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} \right| < \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{|z + \lambda_k|} < \varepsilon \sum_{m+1}^\infty \mu_k < \frac{\varepsilon}{a_1},$$

donc

$$(4) \qquad \mathcal{S} = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \frac{\varepsilon'}{a_1},$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

D'autre part,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z + x_k} + \sum_{m+1}^{n} \frac{M_k}{z + x_k},$$

et, si l'on se souvient que $x_k > \lambda_k$, on conclut

$$\left| \sum_{m+1}^{n} \frac{M_k}{z + x_k} \right| < \sum_{m+1}^{n} \frac{M_k}{|z + x_k|} < \varepsilon \sum_{m+1}^{n} M_k < \frac{\varepsilon}{a_1},$$

donc

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z + x_k} + \frac{\varepsilon''}{a_1}, \tag{5}$$

le module de ε'' étant inférieur à ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z + x_k} = \sum_{1}^{m} \frac{\mu_k}{z + \lambda_k},$$

et dès lors la comparaison des formules (4) et (5) montre qu'on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)} = \mathcal{S}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

23. Nous venons de voir que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_k$$

est convergente; plus généralement, on a

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_k \lambda_k^i = c_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

D'abord la série considérée est bien convergente, car la somme

$$\mu_1 \lambda_1^i + \mu_2 \lambda_2^i + \ldots + \mu_k \lambda_k^i$$

diffère aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1 x_1^i + M_2 x_2^i + \ldots + M_k x_k^i;$$

par conséquent, elle sera inférieure à

$$M_1 x_1^i + \ldots + M_k x_k^i + \varepsilon,$$

et, à plus forte raison, inférieure à $c_i + \varepsilon$, puisque

$$c_i = \sum_1^n \mathrm{M}_k x_k^i.$$

Soit donc

$$\sigma = \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^i.$$

On aura $\sigma \leqq c_i$. Déterminons un nombre m tel que

$$\frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra, on aura

$$\sigma = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i + \varepsilon', \tag{6}$$

ε' étant plus petit que ε. En effet,

$$\sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^i < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} \leqq \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i,$$

et il est clair que

$$\sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i < \frac{1}{x_{m+1}} \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^{i+1} < \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

donc

$$c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \varepsilon'', \tag{7}$$

ε'' étant plus petit que ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i;$$

dès lors la comparaison des formules (6) et (7) montre qu'on a

$$\sigma = c_i \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. Il suffira d'énoncer les conclusions analogues résultant de l'étude de la formule

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n},$$

en cherchant ce qu'elle devient pour $n = \infty$. On aura

$$\nu_k = \lim N_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\theta_k = \lim x_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \sum_1^\infty \frac{\nu_k}{z+\theta_k},$$

$$c_0 = \sum_0^\infty \nu_k,$$

$$c_i = \sum_1^\infty \nu_k \theta_k^i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considérons sur une droite infinie OX... une distribution de masse (positive), la masse m_i se trouvant concentrée à la distance ξ_i de l'origine O. La somme

$$\Sigma\, m_i \xi_i^k$$

peut être appelée le *moment* d'ordre k de la masse par rapport à l'origine.

Il résulte alors des formules précédentes que le système des masses

$$(\mu_i, \lambda_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

a pour moment d'ordre k la valeur c_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

De même, le système des masses

$$(\nu_i, \theta_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\theta_0 = 0$, aura les mêmes moments c_k.

Nous appellerons *problème des moments* le problème suivant :

Trouver une distribution de masse positive sur une droite $(O\infty)$, *les moments d'ordre* k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *étant donnés.*

Désignons ces moments par c_k, et remarquons d'abord que ces données de la question doivent satisfaire à certaines inégalités.

En effet, nous supposons qu'il soit possible de trouver des m_i, ξ_i tels que

$$c_k = \Sigma\, m_i \xi_i^k;$$

il s'ensuit (*voir* la fin du n° 8) que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{p+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p+m-1} & c_{p+m} & \cdots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

doivent être positifs et, en particulier, les déterminants A_n, B_n du n° 11. On en conclut que, si l'on réduit en fraction continue la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

on doit obtenir une fraction continue du type que nous étudions avec des valeurs *positives* des a_i.

Cela étant, nous distinguerons deux cas dans le problème des moments, le cas *déterminé* et le cas *indéterminé*.

Le cas *indéterminé* a lieu lorsque les données c_k sont telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*.

Il est facile de justifier cette dénomination : en effet, nous venons de voir que dans ce cas le problème admet au moins deux solutions, soit par le système des masses (μ_i, λ_i), soit par le système des masses (ν_i, θ_i), et, dès lors, il est facile de voir qu'il y a une infinité de solutions. Nous montrerons plus loin qu'il y a même toujours une infinité de solutions dans lesquelles la masse est distribuée sur l'axe d'une façon continue avec une *densité* finie en chaque point.

Le cas *déterminé* a lieu lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente*. Nous montrerons en effet que, dans ce cas, le problème des moments admet toujours une solution et une seule.

CHAPITRE V.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS, ET LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DE NOTRE FRACTION CONTINUE.

---

25. Soit

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad f_3(z),\quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions analytiques, toutes holomorphes dans un cercle C tracé autour de l'origine avec un rayon R.

On aura donc

$$f_k(z) = \sum_0^\infty A_i^k z^i,$$

ces séries étant convergentes tant que $|z| < R$.

Considérons la série

$$\sum_1^\infty f_k(z),$$

nous la supposerons *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$, c'est-à-dire à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 tracé autour de l'origine avec un rayon R_1 plus petit que R.

Soit encore R′ un nombre plus petit que R, mais pouvant différer de R aussi peu qu'on le voudra. Nous supposerons encore que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure L, quel que soit n et quelle que soit la valeur de z à l'intérieur ou sur le contour du cercle C′, tracé autour de l'origine avec le rayon R′. Il peut arriver, du reste, que ce nombre fini L croisse au delà de toute limite lorsque R′ tend vers R.

Dans ces conditions, nous allons démontrer le théorème suivant :

La série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $|z| \leqq R'$.

Et l'on peut ajouter, d'après un théorème connu de M. Weierstrass, que nous avons appliqué déjà plus d'une fois (nos 15, 17), que cette série représente une fonction holomorphe dans le cercle C. C'est du reste ce qui résultera aussi de notre démonstration.

26. Rappelons d'abord ce lemme :

Si la série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_i z^i$$

est uniformément convergente pour $|z| = \mathrm{R}$, *on aura*

$$|\alpha_i| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^i},$$

M *étant le maximum du module de* $f(z)$ *pour* $|z| = \mathrm{R}$.

Et l'on sait que l'uniformité de convergence de la série pour $|z| = \mathrm{R}$ est assurée, lorsque le rayon de convergence de la série surpasse R.

On aurait pu considérer une série

$$f(z) = \sum_{-\infty}^\infty \alpha_i z^i;$$

la limitation

$$|\alpha_i| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^i}$$

aura lieu alors pour les valeurs positives et négatives de i.

La série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

étant uniformément convergente pour $|z| \leqq \mathrm{R}_1$, cela veut dire qu'étant donné un nombre ε aussi petit qu'on le voudra, il est possible de trouver un entier n tel que

$$\sum_n^{n+n'} f_k(z) \Bigg| < \varepsilon,$$

quel que soit n', et cela pour toutes les valeurs de z dont le module ne surpasse pas R_1.

Cette somme

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)$$

est une somme d'un nombre fini de séries

$$\sum_{0}^{\infty} A_i^k z^i$$

toutes convergentes dans le cercle C. Elle pourra donc se mettre aussi sous la forme d'une telle série

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{n}^{n+n'} A_i^k \right).$$

En appliquant à cette série le lemme rappelé plus haut, en posant $|z| = R_1$, il vient

$$\left| \sum_{n}^{n+n'} A_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i}.$$

Cette limitation montre que la série

$$\sum_{1}^{\infty} A_i^k$$

est *convergente;* nous posons

$$c_i = \sum_{1}^{\infty} A_i^k.$$

27. A l'intérieur, ou sur le contour du cercle C′, on a

$$|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)| < L,$$

mais cette somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

peut se mettre encore sous la forme d'une série

$$\sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{1}^{n} A_i^k \right),$$

convergente dans le cercle C. En appliquant le lemme pour $|z| = R'$, on conclut

$$\left|\sum_{1}^{n} A_i^k\right| < \frac{L}{R'^i}.$$

Cette limitation a lieu quel que soit n. Or nous savons déjà qu'en faisant croître indéfiniment n,

$$\sum_{1}^{n} A_i^k$$

tend vers une limite finie c_i. On en conclut

$$|c_i| \leqq \frac{L}{R'^i},$$

et l'on voit par là que la série

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} c_i z^i$$

est convergente dans le cercle C, puisqu'elle l'est dans le cercle C' qui diffère aussi peu qu'on le veut de C.

28. Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra; nous avons vu qu'on peut déterminer un nombre n tel que

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} A_i^k\right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

donc aussi

$$\left|\sum_{n}^{\infty} A_i^k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

et puisque

$$\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k = \sum_{n}^{\infty} A_i^k - \sum_{n}^{n+n} A_i^k,$$

on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i}.$$

Nous obtenons une autre limitation, pour la même expression, par le raisonnement suivant. D'après l'hypothèse admise on a

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z)\right| < 2\mathrm{L},$$

tant que $|z| \leqq \mathrm{R}'$. Or

$$\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z_i \left(\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} \mathrm{A}_i^k\right).$$

En appliquant le lemme pour $|z| = \mathrm{R}'$, il viendra

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{n+n'+n''} \mathrm{A}_i^k\right| < \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}'^i};$$

donc, en faisant croître indéfiniment n'',

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} \mathrm{A}_i^k\right| \leqq \frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{R}'^i}.$$

29. Nous allons démontrer maintenant le théorème énoncé, en faisant voir en même temps que la somme de la série est $\mathrm{F}(z)$.

Pour cela considérons l'expression

$$\mathrm{F}(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z),$$

et soit R'' un nombre un peu inférieur à R', la différence $\mathrm{R}' - \mathrm{R}''$ étant d'ailleurs aussi petite qu'on le voudra.

Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra ; nous allons faire voir qu'on peut trouver toujours un entier n tel que

$$\left|\mathrm{F}(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon,$$

quel que soit n' et quelle que soit la valeur de z dont le module seulement ne doit pas surpasser R''.

Voici en effet comment on obtiendra ce nombre n. Déterminons d'abord un entier p tel que

$$2\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \dfrac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'}} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Cela est possible puisque $R'' < R'$. Soit ensuite

$$M = 1 + \frac{R''}{R_1} + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_n^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $|z| \leqq R_1$. Cette détermination est encore possible parce qu'on suppose que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$.

D'après les n^os^ 26 et 28 on peut en conclure

$$\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i},$$

$$\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right| \leqq \frac{2L}{R'^i}.$$

Or on a

$$F(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z) = \sum_0^\infty z^i\left(c_i - \sum_1^{n+n'} A_i^k\right),$$

c'est-à-dire, si l'on se rappelle la définition de c_i,

$$F(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z) = \sum_0^\infty z^i\left(\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right).$$

On en conclut, tant que $|z| \leqq R''$,

$$\left|F(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z)\right| < \sum_0^\infty R''^i\left|\sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k\right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_0^p R''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_0^p R''^i \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \frac{2L}{R'^i},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \dfrac{R''}{R'}},$$

c'est-à-dire enfin inférieure à ε.

Notre théorème se trouve ainsi démontré, car la substitution de R'' au lieu de R' n'a aucune importance.

30. Considérons maintenant une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots,$$

holomorphes dans une aire quelconque S, dont nous désignerons le contour par s. Nous supposerons que la série

$$\sum_1^{\infty} f_k(z)$$

soit uniformément convergente à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 décrit autour d'un point z_0 de S comme centre avec un rayon R_1, ce domaine de convergence n'ayant aucun point commun avec s.

Nous supposerons ensuite que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n dans toute aire S′ intérieure à S et sans point commun avec s.

La série

$$F(z) = \sum_1^{\infty} f_k(z)$$

est uniformément convergente dans S′ *et représente une fonction holomorphe dans* S.

Il est aisé de déduire ce théorème de celui qu'on vient de démontrer. Décrivons autour de z_0, comme centre, un cercle C avec le plus grand rayon possible qui ne déborde point en dehors de S. Soient $R > R_1$ le rayon de ce cercle, $R' < R$ le rayon d'un cercle concentrique C' qui ne déborde pas en dehors de S'. Il est clair alors que nous pouvons appliquer le théorème démontré et conclure que la série considérée est uniformément convergente dans C', et représente une fonction holomorphe dans C. De cette façon on a *étendu* le domaine de convergence de la série du cercle C_1 au cercle C'. Soit maintenant z'_0 un point quelconque à l'intérieur de C', décrivons autour de ce point un cercle C'_1 avec un rayon R'_1 qui soit entièrement à l'intérieur de C'. Alors on voit que la série est uniformément convergente pour $|z - z'_0| \leqq R'_1$. On pourra donc répéter le même raisonnement que nous avons fait pour le point z_0 et le cercle C_1, et, en continuant de cette façon, il est clair qu'on finira par reconnaître que la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente* dans toute aire S'' intérieure à S' et sans point commun avec le contour de S'. En même temps il est évident que $F(z)$ est holomorphe. C'est là le théorème énoncé, la substitution de S'' au lieu de S' étant sans conséquence.

On sait que le maximum du module de $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ dans S' a toujours lieu sur le contour de S'. Dans l'énoncé de notre théorème on aurait donc pu exiger seulement que le module $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ sur le contour de S' reste inférieur à un nombre fixe.

Enfin, il serait facile de généraliser notre théorème au cas où il s'agit d'une série dont les termes sont des fonctions de deux variables imaginaires.

31. On peut donner à notre premier théorème une forme un peu plus générale en considérant une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots$$

holomorphes pour $r < |z| < R$ et par conséquent développables en séries

$$f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_i^k z^i,$$

convergentes pour

$$r < |z| < \mathrm{R}.$$

Quoique les raisonnements soient absolument analogues à ceux que nous avons exposés, nous devons cependant les indiquer rapidement, parce qu'ils donnent lieu à une remarque qui nous sera indispensable dans la suite.

Nous supposerons que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

soit *uniformément convergente* pour $r_1 \leqq |z| \leqq \mathrm{R}_1$

$$r < r_1 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R},$$

et ensuite si r' est un nombre quelconque surpassant r, R' un nombre quelconque inférieur à R,

$$r < r' < r_1 < \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}' < \mathrm{R},$$

nous supposerons que pour $r' \leqq |z| \leqq \mathrm{R}'$ le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n. Cela étant, on peut affirmer que *la série*

$$\mathrm{F}(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $r' \leqq |z| \leqq \mathrm{R}'$.

En même temps $\mathrm{F}(z)$ est holomorphe pour $r < |z| < \mathrm{R}$. On peut d'abord déterminer un nombre n tel que

$$\left| \sum_n^{n+n'} f_k(z) \right| < \varepsilon,$$

pour $r_1 \leqq |z| \leqq \mathrm{R}_1$. On en conclut

$$\left| \sum_n^{n+n'} \mathrm{A}_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{R}_1^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_n^{n+n'} \mathrm{A}_i^k \right| < \frac{\varepsilon}{r_1^i},$$

d'où l'on voit que la série

$$c_i = \sum_1^\infty A_i^k$$

est *convergente*.

Pour $r' \leqq |z| \leqq R'$, on a

$$\left| \sum_1^n f_k(z) \right| < L,$$

d'où

$$\left| \sum_1^n A_i^k \right| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_1^n A_i^k \right| < \frac{L}{r'^i}$$

et ensuite

$$|c_i| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad |c_i| < \frac{L}{r'^i}.$$

On voit par là que la série

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

est convergente pour $r < |z| < R$ puisqu'elle est convergente pour $r' < |z| < R'$.

Ensuite il est facile de voir que, ε étant un nombre aussi petit qu'on le voudra, on aura

$$\left| \sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k \right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k \right| < \frac{2\varepsilon}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left| \sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k \right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n+n'+1}^\infty A_i^k \right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

32. On pourra maintenant, par un choix convenable de n et pour $r'' \leqq |z| \leqq R''$ ($r' < r''$, $R'' < R'$), rendre

$$F(z) - \sum^{n+n'} f_k(z) \;\; < \varepsilon.$$

Pour cela on déterminera d'abord les entiers p et q par les conditions

$$2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1-\frac{R''}{R'}} < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1-\frac{r'}{r''}} < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Soit ensuite M le plus grand des deux nombres

$$1+\frac{R''}{R_1}+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

$$\frac{r_1}{r''}+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^2+\ldots+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^q,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $r_1 \leqq z \leqq R_1$.

Pour faire voir que ce choix de n satisfait, en effet, à la condition énoncée, remarquons d'abord qu'on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

Ensuite il vient

$$F(z)-\sum_{1}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z^i\left(\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right).$$

Pour $r'' \leqq |z| \leqq R''$, on aura donc

$$\left| F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z) \right| < \sum_{0}^{\infty} R''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| + \sum_{-1}^{-\infty} r''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_{0}^{p} R''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right|$$
$$+ \sum_{-1}^{-q} r''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_{0}^{p} R''^i \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \frac{2L}{R'^i} + \sum_{-1}^{-q} r''^i \frac{2\varepsilon'}{r_1^i} + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \frac{2L}{r'^i},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \frac{R''}{R'}} + 2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1 - \frac{r'}{r''}},$$

c'est-à-dire inférieure à ε.

Il résulte de cette démonstration que dans le développement

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\sum_{1}^{n} f_k(z),$$

pour $n = \infty$. Cette remarque nous sera utile plus tard.

33. Nous avons vu (n° 15) que, tant que la partie réelle de z est positive, la réduite

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{n} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)}$$

tend pour $n = \infty$ vers une limite $F(z)$ qui est une fonction holomorphe de z. La série

$$\sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S dans lequel la partie réelle de z admet une limite inférieure qui soit positive.

Posons

$$f_k(z) = \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)},$$

on aura

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n f_k(z),$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n f_k(z) = \sum_1^n \frac{M_i}{z + x_i}.$$

Admettons que z ait une valeur quelconque non sur la coupure, on aura

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < \sum_1^n \frac{M_i}{|z + x_i|}.$$

Je désigne par (z) le *minimum* du module de $z + u$ lorsque u varie de o à ∞ en passant par toutes les valeurs réelles et positives. Il est clair que, lorsque la partie réelle de z est *positive* ou *nulle*, on aura

$$(z) = |z|,$$

mais si, dans $z = \alpha + \beta i$, α est négatif, on aura

$$(z) = |\beta|.$$

On voit que (z) est positif, non nul tant que le point z n'est pas sur la coupure. Puisque, par définition, on a

$$|z + x_i| \geqq (z),$$

il viendra

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < \frac{1}{(z)} \sum_1^n M_i,$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum^n f_k(z)\right| < \frac{1}{a_1(z)}.$$

Considérons maintenant un domaine quelconque S qui reste à distance finie de la coupure; dans ce domaine (z) il y aura une limite inférieure λ qui sera positive. Dans tout le domaine S on aura alors

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < \frac{1}{a_1\lambda},$$

et cette limite supérieure est *indépendante* de n.

Soit maintenant a un point quelconque du plan non sur la coupure; nous allons montrer que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est *convergente* pour $z = a$, et que la convergence est *uniforme* dans le voisinage de a, c'est-à-dire dans un cercle C décrit autour de a avec un rayon assez petit pour n'avoir pas de point commun avec la coupure.

Prenons arbitrairement un point z_0 et un cercle C_1 dont z_0 est le centre et qui soit tout entier dans la partie du plan où la partie réelle de z est positive.

Nous pouvons alors construire encore d'une infinité de manières un domaine S englobant les cercles C et C_1 et qui reste à distance finie de la coupure. Dans ce domaine S le module de la somme

$$\sum_1^n f_k(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n, comme on vient de le voir. D'autre part, nous savons que dans le cercle C_1 la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente*. Nous pouvons donc appliquer le théorème du n° 30 et affirmer que cette série est *uniformément convergente* dans S et partant dans C_1. Et, en même temps, nous savons que $F(z)$ est holomorphe dans S.

Cela revient donc à dire que les réduites

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n f_k(z)$$

tendent vers une fonction holomorphe $F(z)$, tant que z n'est pas sur la coupure.

34. L'étude des réduites d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_{1}^{n} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)}$$

se fait de la même manière et conduit au même résultat. Nous savons que la série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S où la partie réelle de z admet une limite inférieure *positive*. Or, à l'aide du théorème du n° 30, on peut conclure que la série est convergente dans tout le plan hors de la coupure, et représente une fonction holomorphe. Ce théorème, en effet, s'applique grâce à la limitation

$$\left|\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right| < \frac{1}{a_1(z)},$$

qu'on obtient sans difficulté.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu à distinguer les deux cas où la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

est *convergente* ou *divergente*. Dans le premier cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont distinctes, mais nous n'apprenons rien de nouveau, ce cas ayant été déjà étudié d'une manière plus approfondie.

Mais, dans le second cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont évidemment identiques et l'on peut écrire pour un point quelconque du plan non sur la coupure

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage du point considéré.

La nature de la fonction $F(z)$ se trouve ainsi mise en lumière; le seul point obscur qui reste à éclaircir, c'est la nature de la coupure. Pour cela, nous allons obtenir pour cette fonction $F(z)$ une autre expression analytique, plus explicite que la série par laquelle nous l'avons définie jusqu'ici. Mais cette recherche rencontre encore de sérieuses difficultés et exige des considérations assez délicates.

35. Étudions d'abord un cas particulier dans lequel un segment de la coupure ne présente aucune espèce de singularité pour la fonction $F(z)$.

Soit

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_k$$

une suite infinie de nombres entiers, positifs, croissants. On aura évidemment, *n parcourant la suite de ces nombres,*

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z),$$

et la convergence sera encore uniforme dans le voisinage du point z. Soient a et b $(a < b)$ deux nombres positifs, nous supposons que pour $n = \nu_k$ l'équation

$$Q_{2n}(z) = 0$$

n'admet jamais une racine comprise entre $-b$ et $-a$.

Considérons un cercle C dont le centre est le point $-\frac{a+b}{2}$ et dont le rayon R est un peu inférieur à $\frac{b-a}{2}$. On constate facilement que pour tous les points à l'intérieur ou sur le contour de ce cercle, on aura

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right| < \frac{1}{a_1\left(\frac{b-a}{2} - R\right)},$$

en supposant toujours $n = \nu_k$. Il est aisé d'en conclure, d'après notre théorème, que si l'on pose $(n = \nu_k)$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z),$$

la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente dans tout le cercle C et représente une fonction holomorphe. Donc la fonction $F(z)$ est holomorphe dans ce cas, même dans un domaine qui comprend à son intérieur une partie de la coupure, et sur le segment de la coupure entre $-b$ et $-a$ la fonction $F(z)$ n'a point de singularités. Cependant il faut remarquer que, dans ce cas, si z est sur la coupure entre $-b$ et $-a$, la relation

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z)$$

n'a lieu que tant que n parcourt les nombres ν_k.

Soient r_1, R_1 ($r_1 < R_1$) deux nombres compris entre a et b. Les fonctions $f_k(z)$ sont toutes holomorphes pour

$$a < |z| < b;$$

ensuite pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$ la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente, comme cela résulte aisément de ce qui vient d'être dit et de ce que nous avons démontré déjà antérieurement.

Dès lors il est facile de voir que nous sommes dans les conditions exigées par le théorème du n° 31, et nous pouvons conclure : la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

représente pour $a < |z| < b$ une fonction holomorphe qui peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

et, d'après la remarque à la fin du n° 32, le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \qquad (n = \nu_k).$$

La valeur de c_{-1} est donc la limite du coefficient de z^{-1} dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n}.$$

Si l'on suppose $x_p \leqq a$, $x_{p+1} \geqq b$, ce coefficient est évidemment

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_p,$$

car on a pour $a < |z| < b$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^p M_k\left(\frac{1}{z} - \frac{x_k}{z^2} + \frac{x_k^2}{z^3}\cdots\right)$$
$$+ \sum_{p+1}^n M_k\left(\frac{1}{x_k} - \frac{z}{x_k^2} + \frac{z^2}{x_k^3}\cdots\right).$$

36. Nous allons exprimer ce résultat un peu autrement en introduisant une fonction croissante, discontinue $\varphi_n(u)$ qui jouera un rôle important dans la suite de nos raisonnements.

Ayant posé

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_k}{z + x_k},$$

nous définissons la fonction $\varphi_n(u)$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ll}
\varphi_n(u) = 0, & 0 \leqq u < x_1, \\
\varphi_n(u) = M_1, & x_1 \leqq u < x_2, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2, & x_2 \leqq u < x_3, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + M_3, & x_3 \leqq u < x_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}, & x_{n-1} \leqq u < x_n, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, & x_n \leqq u < \infty.
\end{array}$$

Soit c un nombre compris entre a et b, on aura

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_p = \varphi_n(c).$$

Ainsi dans le cas particulier que nous considérons on a

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

tant que $a < |z| < b$ et la valeur de c_{-1} s'exprime par

$$c_{-1} = \lim \varphi_n(c),$$

n parcourant toujours les nombres ν_k.

CHAPITRE VI.

REMARQUES SUR LES FONCTIONS CROISSANTES ET LES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

37. Le problème des moments que nous avons posé au n° 24 nous conduira à considérer une distribution de masse quelconque sur une droite Ox. Une telle distribution sera parfaitement déterminée si l'on sait calculer la masse totale, répandue sur le segment Ox. Ce sera évidemment une fonction croissante de x, et réciproquement, étant donnée une fonction croissante de x, on pourra toujours imaginer qu'elle représente, de la manière indiquée, une distribution de masse. Ceci nous amène à faire quelques remarques sur les fonctions croissantes. Soit donc $\varphi(x)$ une fonction croissante définie dans l'intervalle (a, b),

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro.

Les nombres

$$\varphi(x+\varepsilon_n) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

seront aussi décroissants, mais ils resteront $\geqq \varphi(x)$. Ces nombres tendent donc vers une limite déterminée A. Soit

$$\varepsilon'_1, \quad \varepsilon'_2, \quad \varepsilon'_3, \quad \ldots$$

une autre suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro, on aura encore

$$\lim \varphi(x+\varepsilon'_n) = \mathrm{B} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Mais il est facile de voir que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, et nous pourrons dire que $\varphi(x+\varepsilon)$ tend vers une limite déterminée, dès que la quantité positive ε tend vers zéro, d'une façon quelconque. Nous écrirons

$$\lim \varphi(x+\varepsilon) = \overset{+}{\varphi}(x),$$

et il est clair que de même $\varphi(x-\varepsilon)$ tend vers une limite que nous désignerons par $\overset{-}{\varphi}(x)$. On a évidemment

$$\overset{-}{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x).$$

Lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) = \overset{-}{\varphi}(x)$, nous dirons que x est un point de *continuité;* lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) > \overset{-}{\varphi}(x)$, x est un point de discontinuité, et $\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$ est la mesure de la discontinuité.

Dans tout intervalle (α, β), il y a des points de continuité.

En effet, soit

$$\lambda = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

et choisissons quatre nombres p, q, r, s, de façon que

$$\alpha < p < q < r < s < \beta;$$

il est clair que l'une au moins des deux différences

$$\varphi(q) - \varphi(p), \quad \varphi(s) - \varphi(r)$$

sera $< \frac{\lambda}{2}$. Supposons, par exemple, que ce soit la première de ces différences qui soit plus petite que $\frac{\lambda}{2}$.

Écrivons $p = \alpha'$, $q = \beta'$, nous aurons maintenant un intervalle (α', β'), tel que

$$\varphi(\beta') - \varphi(\alpha') < \frac{\lambda}{2}$$

et

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$

De même, en partant de l'intervalle (α', β'), on pourra trouver un intervalle (α'', β''), tel que

$$\varphi(\beta'') - \varphi(\alpha'') < \frac{\lambda}{4},$$
$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'.$$

En continuant ainsi, on obtient une infinité d'intervalles

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'), \quad (\alpha'', \beta''), \quad \ldots, \quad (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}), \quad \ldots,$$

tels que

$$\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)}) < \frac{\lambda}{2^n}.$$

On pourra faire en sorte que

$$\lim \alpha^{(n)} = \lim \beta^{(n)} = \gamma \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Or il est clair que γ sera nécessairement un point de continuité, car

$$\overset{+}{\varphi}(\gamma) - \overset{-}{\varphi}(\gamma)$$

ne peut pas être plus grand que $\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)})$, quel que soit n : cette différence est donc nulle. Il est à peu près évident que la somme des discontinuités que peut présenter $\varphi(x)$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) ne peut jamais surpasser $\varphi(b) - \varphi(a)$. Donc le nombre des discontinuités qui surpassent un nombre donné est fini, et il est clair par là qu'on peut ranger les discontinuités par ordre de grandeur décroissante.

Les points de discontinuité de l'intervalle (a, b) peuvent donc être rangés dans une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots.$$

Cela est vrai même lorsque l'intervalle considéré s'étend à l'infini; on le divisera en intervalles

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, d), \quad (d, e), \quad \ldots.$$

On trouvera une suite infinie de discontinuités pour chaque intervalle; l'ensemble des discontinuités constituera une suite à double entrée, qu'on sait ranger comme une suite simple. De là on peut conclure de nouveau, d'après un théorème de M. Cantor, qu'il y a des points de continuité dans tout intervalle. A la vérité, ce théorème se trouve démontré par les considérations précédentes.

38. Si maintenant, à cette notion d'une fonction croissante, on veut associer l'image d'une distribution de masse, on sera conduit à dire qu'en un point de discontinuité il y a une condensation d'une masse finie. Un tel point est un point matériel de masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$; et, superposé à ces masses condensées dans des points, il y aura une distribution continue de masse. Il convient de regarder toujours $\varphi(b) - \varphi(a)$ comme la masse comprise dans l'intervalle (a, b). L'intervalle $(\mathrm{O}x)$ contient alors la masse $\varphi(x) - \varphi(\mathrm{o})$ ou $\varphi(x)$ simplement, si l'on suppose $\varphi(\mathrm{o}) = \mathrm{o}$. On voit alors que $\varphi(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$ est la partie de la masse concentrée au point x, qui est

censée faire partie de l'intervalle Ox, tandis que la masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \varphi(x)$ est censée faire partie de l'intervalle (x, x'), $(x' > x)$. En changeant donc la valeur de $\varphi(x)$ dans un point de discontinuité $\left[\text{naturellement il faut qu'on ait toujours } \overset{-}{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x)\right]$, on ne change en rien la distribution de masse, on fait seulement une nouvelle convention, relative à la façon de compter une masse concentrée en x, comme appartenant aux intervalles $(0, x)$ et (x, x').

Considérons maintenant le moment d'une telle distribution de masse par rapport à l'origine. Posons $a = x_0$, $b = x_n$, et intercalons entre x_0 et x_n, $n - 1$ valeurs

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Ensuite prenons n nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tels que

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k.$$

La limite de la somme

$$\xi_1[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \xi_2[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \xi_n[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})]$$

sera le moment, par définition. Considérons plus généralement la somme

$$\text{(A)}\quad \mathrm{f}(\xi_1)[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \mathrm{f}(\xi_2)[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \mathrm{f}(\xi_n)[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})],$$

elle aura encore une limite que nous désignerons par

$$\int_a^b \mathrm{f}(u)\, d\varphi(u).$$

Nous aurons à considérer seulement quelques cas très simples comme $\mathrm{f}(u) = u^k$, $\mathrm{f}(u) = \frac{1}{z+u}$, et il n'y a pas intérêt à donner toute sa généralité à la fonction $f(u)$. Ainsi il suffira, par exemple, de supposer la fonction $f(u)$ continue, et alors la démonstration ne présente aucune difficulté, et nous n'avons pas besoin de la développer, puisqu'elle se fait comme dans le cas ordinaire d'une intégrale définie.

La valeur d'une telle intégrale ne change pas, si l'on change la valeur de $\varphi(x)$ aux points de discontinuité qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (a, b). Et, en effet, puisqu'il y a des points de continuité dans tout intervalle, rien n'empêche de supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ soient toujours des points de continuité. Il faut remarquer seulement que a et b aussi pourront être des points de discontinuité, mais un changement de valeur de $\varphi(x)$ dans ces points-là affecte la valeur de l'intégrale, puisque $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ figurent explicitement dans la définition de l'intégrale comme limite de l'expression (A).

Posons $a=\xi_0$, $b=\xi_{n+1}$, l'expression (A) peut s'écrire

$$\begin{aligned}f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)&-\varphi(x_0)[f(\xi_1)-f(\xi_0)]\\&-\varphi(x_1)[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&-\varphi(x_n)[f(\xi_{n+1})-f(\xi_n)],\end{aligned}$$

et l'on a

$$\xi_k \leqq x_k \leqq \xi_{k+1}.$$

En passant à la limite, on a donc

$$\int_a^b f(u)\,d\varphi(u)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\int_a^b \varphi(u)\,df(u).$$

Dans le cas $f(u)=\dfrac{1}{u+x}$, $a=0=\varphi(0)$,

$$\int_0^b \frac{d\varphi(u)}{u+x}=\frac{\varphi(b)}{b+x}+\int_0^b \frac{\varphi(u)\,du}{(u+x)^2}.$$

Faisons croître b indéfiniment, en supposant que $\varphi(b)$ reste finie, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{u+x}=\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{(u+x)^2}.$$

Il importait de ne laisser subsister aucun doute sur la légitimité de l'intégration par parties dans les circonstances actuelles.

39. Soit toujours $\varphi(u)$ une fonction croissante

$$\varphi(0)=0,\qquad \varphi(\infty)=c,$$

et posons

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}.$$

On définit ainsi une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la coupure, qui se compose de la partie négative de l'axe réel. Cette fonction $\varphi(u)$ caractérise une certaine distribution de la masse totale c sur une droite OX.

Soit $\varphi_1(u)$ une fonction de même nature que $\varphi(u)$,

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1(\infty) = c_1,$$

et posons

$$F_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}.$$

Nous allons montrer que, si les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont identiques, on peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même distribution* de masse; ces fonctions ne peuvent différer qu'aux points de discontinuité, et peuvent être considérées comme identiques si l'on n'a en vue que la distribution de masse.

Il est aisé d'abord de voir qu'on peut écrire

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

puis que $F(z) = \Phi'(z)$ si l'on pose

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right)\varphi(u)\,du.$$

Soient maintenant x un nombre positif, ε un nombre positif que nous allons faire tendre vers zéro; considérons, d'après l'exemple de M. Hermite, la différence

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Nous allons voir que, pour $\lim \varepsilon = 0$, cette expression a une limite finie. Décomposons l'intégrale en deux

$$\int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Je dis qu'on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i \overset{-}{\varphi}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_x^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i \overset{+}{\varphi}(x).$$

En effet, écrivons

$$\int_0^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

on aura

$$\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} < c\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = c\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

donc

$$\lim \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 0.$$

D'autre part, dans l'intégrale

$$\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

la fonction $\varphi(u)$ pour $x-\sqrt{\varepsilon} \leqq u < x$ prend des valeurs qui sont infiniment voisines de $\bar{\varphi}(x)$. Il est vrai que la valeur de $\varphi(x)$ peut surpasser $\bar{\varphi}(x)$ d'une quantité finie, mais cette valeur de $\varphi(x)$ n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale. Il est aisé de voir alors que cette valeur diffère infiniment peu de

$$\bar{\varphi}(x)\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \bar{\varphi}(x)\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

donc

$$\lim \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\bar{\varphi}(x) = \lim \int_0^x \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

On trouvera de même sans difficulté

$$\lim \int_x^{\infty} \frac{\varepsilon\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\overset{+}{\varphi}(x),$$

et nous aurons donc

$$\lim_{\varepsilon=0}[\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i)] = \pi i[\bar{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)].$$

Posons maintenant

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u} \right) \varphi_1(u)\, du,$$

on aura $F_1(z) = \Phi_1'(z)$, et, puisque nous supposons $F(z) = F_1(z)$, les fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ ne pourront différer que par une constante. On aura donc

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \Phi_1(-x+\varepsilon i) - \Phi_1(-x-\varepsilon i),$$

et, faisant tendre ε vers zéro, on en conclut

$$\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x) = \overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x).$$

Cette relation a lieu pour toute valeur *positive* de x tandis que nous supposons $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$. On peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même* distribution de masse. En effet, tant qu'il ne s'agit que de caractériser une distribution de masse, on peut prendre arbitrairement les valeurs de $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ aux points de discontinuité. Rien n'empêche donc de prendre toujours

$$\varphi(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)}{2}, \qquad \varphi_1(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x)}{2}.$$

De cette façon, on voit qu'on a pour toute valeur positive de x

$$\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

et, puisque $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$, les deux fonctions sont identiques.

CHAPITRE VII.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

40. Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres; nous supposerons que ces nombres sont limités supérieurement et inférieurement.

Il en sera de même alors des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad u_{n+3}, \quad \ldots,$$

et ces nombres admettent donc un maximum, ou limite supérieure L_n, et également un minimum, ou limite inférieure l_n. Ce nombre L_n jouira alors des propriétés suivantes :

1° Aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne peut être plus grand que L_n.

2° Au moins un de ces nombres est égal à L_n, ou, si cela n'a pas lieu, on pourra en trouver au moins un qui surpasse $L_n - \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque. Lorsque n augmente, L_n ne peut que diminuer, de même l_n ne peut qu'augmenter. Dès lors il est clair que, pour $n = \infty$, on aura

$$\lim L_n = L,$$
$$\lim l_n = l,$$
$$L \geqq l.$$

Voici maintenant les propriétés du nombre L :

I. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous inférieurs à $L + \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

En effet, puisque L_n tend vers L en diminuant, on peut toujours déterminer n de façon que L_n soit plus petit que $L + \varepsilon$; or aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne surpasse L_n, ils sont donc aussi *tous* $< L + \varepsilon$.

Parmi les nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

il y en a toujours un qui est, soit $= L_1$, soit $> L_1 - \varepsilon$. Soit u_k ce nombre, il est visiblement plus grand que $L - \varepsilon$ puisque $L_1 \geqq L$.

Ensuite, parmi les nombres

$$u_{k+1}, \quad u_{k+2}, \quad u_{k+3}, \quad \ldots$$

il y en aura un qui est, soit $= L_{k+1}$, soit $> L_{k+1} - \varepsilon$.

Soit u_l ce nombre, il sera encore plus grand que $L - \varepsilon$.

De même, parmi les nombres

$$u_{l+1}, \quad u_{l+2}, \quad u_{l+3}, \quad \ldots$$

il y en aura toujours un u_m, qui est plus grand que $L_{l+1} - \varepsilon$, et, par conséquent, aussi plus grand que $L - \varepsilon$.

En continuant ainsi, il est clair que, dans la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

on peut trouver une infinité de nombres

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots$$

qui sont tous plus grands que $L - \varepsilon$. Les indices k, l, m, ... vont en augmentant; or nous savons déjà que *tous* les nombres de la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont inférieurs à $L + \varepsilon$.

Il en sera de même pour la suite

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots,$$

et nous arrivons à ce résultat :

II. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre $L - \varepsilon$ *et* $L + \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

On verra de la même façon

I°. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous supérieurs à $l - \varepsilon$.

II°. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre $l - \varepsilon$ *et* $l + \varepsilon$.

La considération de ces nombres L et l est due à M. du Bois-Reymond, qui l'a exposée dans un livre paru en 1882 et qui a été traduit en français par MM. Milhaud et Girot. M. du Bois-Reymond appelle L et l les *limites d'indétermination des nombres* u_n; on voit en effet que, pour n infini, u_n finit par osciller entre ces limites. Et il est évident aussi que les nombres u_n ne tendent vers une limite déterminée que lorsqu'on a $L = l$.

La première application qu'on a faite de cette considération nous paraît due à M. Hadamard qui a remarqué que, dans le cas

$$u_n = \sqrt[n]{|c_n|},$$

le rayon de convergence de la série

$$\sum_0^\infty c_n z^n$$

est égal à $1 : L$.

41. Je reviens maintenant à la fonction $\varphi_n(u)$ définie au n° 36. C'est une fonction croissante qui est bien déterminée, même aux points de discontinuité.

Elle ne varie qu'entre les limites

$$\varphi_n(0) = 0, \qquad \varphi_n(\infty) = \frac{1}{a_1}.$$

Soit maintenant u un nombre fixe, positif ou nul, et considérons la suite infinie

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \varphi_3(u), \quad \ldots.$$

Ces nombres sont limités; je désignerai les limites correspondantes L et l par

$$L = \psi(u),$$
$$l = \chi(u),$$

en sorte qu'on aura

$$\psi(u) \geqq \chi(u).$$

Il est clair du reste que $\psi(0) = \chi(0) = 0$, et si pour quelque valeur particulière de u on a

$$\psi(u) = \chi(u),$$

nous pourrons en conclure, d'après ce qui précède, que, pour $n = \infty$,

$$\lim \varphi_n(u) = \psi(u) = \chi(u).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ étant croissante, on reconnaît immédiatement que les fonctions $\psi(u)$ et $\chi(u)$ sont aussi croissantes.

Ainsi, sous la condition $a < b$, on aura

$$\psi(a) \leqq \psi(b), \tag{1}$$
$$\chi(a) \leqq \chi(b). \tag{2}$$

A ces inégalités, nous allons en ajouter une autre d'une très grande importance : c'est celle-ci

$$\psi(a) \leqq \chi(b). \tag{3}$$

Mais la démonstration de cette inégalité exige quelques préparatifs.

42. Calculons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\, du.$$

Sa valeur est évidemment

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k+1}(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n)\; x_1^{k+1} \\
&\quad + \frac{1}{k+1}(M_2 + M_3 + \ldots + M_n)(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) \\
&\quad\quad + \frac{1}{k+1}(M_3 + \ldots + M_n)(x_3^{k+1} - x_2^{k+1}) \\
&\quad\quad\quad + \frac{1}{k+1} M_n\, (x_n^{k+1} - x_{n-1}^{k+1}),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{k+1}(M_1 x_1^{k+1} + M_2 x_2^{k+1} + M_3 x_3^{k+1} + \ldots + M_n x_n^{k+1});$$

ainsi

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

On aura de même

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_{n+n'}(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n+2n'-2)$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty [\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)]\, u^k\,du = 0 \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

D'après un raisonnement bien connu, dû à Legendre, on en conclut que la fonction

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe *au moins* $2n-1$ fois. Or, $\varphi_n(u)$ et $\varphi_{n+n'}(u)$ sont des fonctions croissantes l'une et l'autre, puis $\varphi_n(u)$ est constant dans chacun des intervalles

$$(x_1, x_2), \quad (x_2, x_3), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, x_n).$$

Dans chacun de ces intervalles, $\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$ peut changer de signe *une fois* au plus. Ensuite, il peut y avoir un changement de signe pour les points de discontinuité $x_1, \ldots, x_n$, cela donne au plus n changements de signe; en tout on en a ainsi $2n-1$ *au plus*. Mais, à cause de

$$\varphi_n(0) = \varphi_{n+n'}(0) = 0,$$
$$\varphi_n(\infty) = \varphi_{n+n'}(\infty) = \frac{1}{a_1},$$

on reconnaît immédiatement qu'il ne peut pas y avoir d'autres changements de signe. Donc, effectivement, il doit y avoir un changement de signe dans chaque intervalle

$$(x_1, x_2), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, x_n),$$

et un changement de signe pour

$$u = x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour une valeur $u = x_k$, il faut donc que l'on ait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}),$$

et même dans le cas où la fonction $\varphi_{n+n'}(u)$ aurait aussi une discontinuité pour $u = x_k$ (ce qui peut arriver exceptionnellement lorsque les équations

$$Q_{2n}(z) = 0, \qquad Q_{2n+2n'}(z) = 0$$

ont des racines communes), on aurait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{+}{x_k}) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}).$$

Remarquons ensuite que, puisque

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}) et que $\varphi_n(u)$ est constant dans cet intervalle, $\varphi_{n+n'}(u)$ doit effectivement *croître* dans cet intervalle. Or, cette fonction ne croît que par sauts brusques, les points de discontinuité étant les racines de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0.$$

On en conclut que, dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), il doit y avoir au moins une racine de cette équation.

On retrouve ainsi une proposition que nous avons déjà obtenue d'une façon plus complète (*voir* n° 5).

43. Pour démontrer maintenant l'inégalité (3), plaçons-nous dans l'hypothèse contraire; supposons qu'on ait

$$\psi(a) > \chi(b),$$

on pourra trouver un nombre positif ε tel que

$$\psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Cela étant, d'après les propriétés des limites d'indétermination, nous savons qu'il existe une infinité d'indices croissants

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_k, \quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(a)$ pour $n = \nu_k$ est toujours $> \psi(a) - \varepsilon$. Et il existera aussi une seconde suite d'indices croissants

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \nu'_3, \quad \ldots, \quad \nu'_k, \quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(b)$ pour $n = \nu'_k$ est toujours $< \chi(b) + \varepsilon$.

Je dis maintenant que, pour $n = \nu_k$ et aussi pour $n = \nu'_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne pourra jamais avoir une racine comprise entre a et b. En effet, supposons que pour $n = \nu_k$ cette équation ait une racine c comprise entre a et b. Alors la fonction $\varphi_n(u)$ aura encore une discontinuité pour $u = c$, et, puisque $\varphi_n(a)$ est déjà supérieur à $\psi(a) - \varepsilon$, on aura

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) > \psi(a) - \varepsilon,$$
$$\varphi_n(\overset{+}{c}) > \psi(a) - \varepsilon.$$

Or, dans la suite

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \ldots, \quad \nu'_k, \quad \ldots,$$

nous pourrons toujours trouver un nombre $\nu'_r = n'$ *supérieur* à $n = \nu_k$. Dès lors, on devrait avoir

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) < \varphi_{n'}(c) < \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Mais c'est là évidemment une absurdité, car

$$\varphi_{n'}(c) \leqq \varphi_{n'}(b) < \chi(b) + \varepsilon,$$

tandis que

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) > \psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Il est ainsi prouvé que l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir aucune racine entre a et b lorsque $n = \nu_k$, et l'on verra de la même façon que cela est vrai encore pour $n = \nu'_k$.

Puisque donc, pour une infinité de valeurs $n = \nu_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

n'admet aucune racine entre a et b, nous savons (*voir* n^os 35, 36) que la fonction $F(z)$ admet un développement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

convergent pour $a < |z| < b$, et la valeur de c_{-1} est la limite de $\varphi_n(c)$, c étant un nombre fixe entre a et b, n parcourant les valeurs

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots.$$

Mais on peut appliquer le même raisonnement en faisant parcourir à n les valeurs

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \nu'_3, \quad \ldots,$$

et puisque, dans les deux cas, la fonction $F(z)$ est la même, on devrait avoir

$$c_{-1} = \lim \varphi_{\nu_k}(c) = \lim \varphi_{\nu'_k}(c).$$

Or cela est une absurdité évidente, car tous les nombres $\varphi_{\nu_k}(c)$ surpassant $\psi(a) - \varepsilon$ et tous les nombres $\varphi_{\nu'_k}(c)$ sont inférieurs à

$$\chi(b) + \varepsilon < \psi(a) - \varepsilon.$$

La contradiction qui se manifeste ici montre que l'hypothèse d'où on l'a déduite, et qui consistait à admettre que

$$\psi(a) > \chi(b),$$

doit être rejetée. L'inégalité (3) se trouve démontrée.

44. Ce point important établi, nous pourrons introduire une fonction qui joue le rôle principal dans notre théorème fondamental. Posons

$$\Phi(u) = \frac{\psi(u) + \chi(u)}{2},$$

il résulte immédiatement des inégalités (1), (2), que c'est là une fonction *croissante;* on a d'ailleurs $\Phi(0) = 0$, et la fonction ne peut pas croître au delà de $\frac{1}{a_1}$ comme $\psi(u)$ et $\chi(u)$. Il est clair que

$$\Phi(u + \varepsilon) \geqq \chi(u + \varepsilon) \geqq \psi(u),$$

donc

$$\Phi(\overset{+}{u}) \geqq \psi(u).$$

De même,

$$\Phi(\bar{u}) \leqq \chi(u).$$

Ainsi, lorsqu'on a $\psi(u) > \chi(u)$, $\Phi(u)$ est discontinue et la mesure de la discontinuité n'est pas moindre que $\psi(u) - \chi(u)$, mais elle peut être plus grande. Aussi $\Phi(u)$ peut être discontinue même en des points pour lesquels $\psi(u) = \chi(u)$. Mais, $\Phi(u)$ étant une fonction croissante, nous savons qu'elle a des points de continuité dans tout intervalle.

Or, si l'on a

$$\Phi(\overset{+}{u}) = \Phi(\bar{u}),$$

on conclut $\psi(u) = \chi(u) = \lim \varphi_n(u)$ pour $n = \infty$. Donc, dans tout intervalle, il y a des points u tels que $\varphi_n(u)$ tend vers une limite finie pour $n = \infty$.

Voici maintenant une propriété de la fonction $\Phi(u)$ qui nous sera très utile. Considérons la fonction $\varphi_n(u)$; elle est discontinue pour $u = x_k$ et pour $n' > n$: on a

$$\varphi_n(\bar{x}_k) < \varphi_{n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

Il s'ensuit évidemment que $\psi(x_k)$ et $\chi(x_k)$, les limites d'indétermination des $\varphi_{n'}(x_k)$ pour $n' = \infty$, sont aussi comprises entre $\varphi_n(\bar{x}_k)$ et $\varphi_n(\overset{+}{x}_k)$: donc

$$\varphi_n(\bar{x}_k) \leqq \Phi(x_k) \leqq \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

45. Considérons maintenant les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et un intervalle quelconque (a, b),

$$0 \leqq a < b.$$

Deux cas peuvent se présenter :

Ou bien les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

pour lesquelles il n'y a aucune racine *entre* a et b, sont en nombre fini;

Ou bien ces équations sont en nombre infini.

Dans le premier cas, nous dirons que l'intervalle (a, b) est de *première espèce;* dans le second cas, il est de *seconde espèce.*

Lorsque l'intervalle (a, b) est de première espèce, il existe un nombre ν, tel que pour $n > \nu$ l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a toujours au moins une racine entre a et b, et cette propriété est évidemment caractéristique pour un intervalle de première espèce. Ainsi, lorsque, pour une valeur particulière de n, l'équation a *deux* racines entre a et b, l'intervalle est toujours de première espèce, car les équations suivantes de degrés supérieurs auront toujours au moins une racine entre ces deux racines-là.

Supposons que l'intervalle (a, b) soit de seconde espèce et, en outre, que les points a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Il résulte de cette dernière hypothèse que :

$$\Phi(a) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(a),$$
$$\Phi(b) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(b).$$

Je dis qu'on a nécessairement $\Phi(a) = \Phi(b)$. En effet, supposons

$$\Phi(a) < \Phi(b),$$

on pourra déterminer un nombre positif ε tel que

$$\Phi(a) + \varepsilon < \Phi(b) - \varepsilon.$$

D'autre part, pour toutes les valeurs de n au-dessus d'une certaine limite $n > \nu$, on a

$$|\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que, pour ces mêmes valeurs de n, on a

$$\varphi_n(a) < \varphi_n(b).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ doit donc augmenter effectivement lorsque u croît de a jusqu'à b. Cela n'est possible que si l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine entre a et b. Comme cela doit arriver pour *toutes* les valeurs de n qui surpassent ν, on en conclut que l'intervalle (a, b) est de *première espèce*, contrairement à l'hypothèse admise. On a donc bien

$$\Phi(a) = \Phi(b).$$

Pour $n > \nu$, on aura toujours

$$\begin{gathered} |\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon, \\ |\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon; \end{gathered}$$

mais, puisque $\Phi(a) = \Phi(b)$, il est évident qu'il s'ensuit

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs

$$a \leqq u \leqq b.$$

C'est là un résultat important; il suppose que l'intervalle (a, b) soit de *seconde* espèce et que a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Dans le cas $a = 0$, l'intervalle $(0, b)$ peut être de seconde espèce, mais voici dans quelles circonstances seulement. L'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne doit jamais avoir une racine égale ou plus petite que b; car, si cela arrive, l'équation

$$Q_{2n'}(-z) = 0$$

a toujours pour $n' > n$ une racine dans l'intervalle $(0, b)$, qui serait ainsi de première espèce. Donc, si l'intervalle $(0, b)$ est de seconde espèce, on a toujours

$$\varphi_n(b) = 0,$$

et par conséquent $\Phi(b) = 0$. Les fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ sont identiquement nulles dans tout l'intervalle

$$0 \leqq u \leqq b.$$

46. Soit L un nombre positif quelconque et considérons l'intégrale

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Entre 0 et L, j'intercale $k - 1$ nombres $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$

$$u_0 = 0 < u < u_2 < \ldots < u_{k-1} < u_k = L,$$

d'une façon quelconque. Je désigne par ε l'étendue du plus grand des intervalles (u_{i-1}, u_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Pour simplifier un peu les raisonnements, je supposerai qu'aucun point $u_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ ne soit racine d'une équation

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

ou un point de discontinuité de $\Phi(u)$. Puisque l'ensemble des racines et des points de discontinuité de $\Phi(u)$ peut se ranger sous la forme d'une suite infinie, il existe de tels points u_i dans tout intervalle. Le point $u_0 = 0$ n'est pas une racine, mais il peut être un point de discontinuité pour $\Phi(u)$. Cependant, cela ne peut jamais arriver lorsque l'intervalle (u_0, u_1) est de seconde espèce, car alors $\Phi(u)$ est nulle dans tout l'intervalle.

A chaque intervalle (u_{i-1}, u_i) j'associe maintenant un nombre entier ν_i de la façon suivante. Si l'intervalle est de première espèce, je suppose que le nombre ν_i est tel que, pour $n > \nu_i$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine dans l'intervalle.

Si l'intervalle est de seconde espèce, je suppose que, pour $n > \nu_i$ et

$$u_{i-1} \leqq u \leqq u_i,$$

on ait

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$

ε' étant un nombre positif arbitraire, le même pour tous les intervalles de seconde espèce.

Cela étant, soit N le plus grand des nombres

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_k,$$

je supposerai désormais $n > \mathrm{N}$, et je cherche une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{L}} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Pour cela, je la décompose dans une somme de k intégrales

$$\sum_1^k \int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du.$$

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de première espèce, la fonction $\varphi_n(u)$ aura au moins un saut brusque dans l'intervalle pour $u = c$ et

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) \leqq \Phi(c) \leqq \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Les deux intervalles

$$[\varphi_n(u_{i-1}), \varphi_n(u_i)] \qquad \text{et} \qquad [\Phi(u_{i-1}), \Phi(u_i)]$$

auront donc au moins un point de commun, par conséquent

$$\varphi_n(u_i) \geqq \Phi(u_{i-1}),$$
$$\Phi(u_i) \geqq \varphi_n(u_{i-1}).$$

Dans tout l'intervalle, on a évidemment

$$\varphi_n(u_{i-1}) - \Phi(u_i) \leqq \varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$

et à plus forte raison

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$
$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \geqq \varphi_n(u_{i-1}) - \varphi_n(u_i) + \Phi(u_{i-1}) - \Phi(u_i),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}).$$

On en conclut

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du \leqq \varepsilon \left\{\varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})\right\}.$$

Le facteur qui multiplie ε est la somme des variations des fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ dans l'intervalle (u_{i-1}, u_i). La somme de toutes les intégrales

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du,$$

pour lesquelles (u_{i-1}, u_i) est un intervalle de première espèce, a donc pour limite supérieure

$$\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2),$$

σ_1 étant la somme des variations de $\varphi_n(u)$ dans ces intervalles, σ_2 la somme des variations de $\Phi(u)$. Il est clair que σ_1 est inférieur à la variation totale de $\varphi_n(u)$, c'est-à-dire à

$$\varphi_n(\infty) - \varphi_n(0) = \frac{1}{a_1}.$$

De même σ_2 est inférieure à la variation totale de $\Phi(u)$ qui, elle aussi, ne peut pas surpasser $\frac{1}{a_1}$. On peut donc adopter pour limite supérieure de la somme considérée l'expression $\frac{2\varepsilon}{a_1}$.

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de seconde espèce, on aura dans tout l'intervalle, à cause de la valeur de $n > \mathrm{N} \geqq \nu_i$,

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$
$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \varepsilon'(u_i - u_{i-1}).$$

La somme de toutes les intégrales de cette espèce sera donc inférieure à $\mathrm{L}\varepsilon'$, puisque la somme des intervalles est évidemment inférieure à L.

D'après cela, il est clair que nous pouvons énoncer la proposition suivante :

L, ε, ε' *étant des nombres positifs arbitraires, il existe un nombre entier* N *tel que, pour* $n > \mathrm{N}$,

$$\int_0^{\mathrm{L}} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + \mathrm{L}\varepsilon'.$$

47. Il est évident que

$$\frac{\mathrm{P}_{2n}(z)}{\mathrm{Q}_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi_n(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u)\, du}{(z+u)^2},$$
$$\frac{\mathrm{P}_{2n}(z)}{\mathrm{Q}_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u) - \Phi(u)}{(z+u)^2}\, du,$$

z étant un point quelconque non sur la coupure. On en conclut

$$\left| \frac{\mathrm{P}_{2n}(z)}{\mathrm{Q}_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} \right| < \int_0^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

La limite supérieure peut s'écrire

$$\int_0^{\mathrm{L}} \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du + \int_{\mathrm{L}}^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

Adoptons deux nombres positifs ε, ε' et déterminons N comme dans le nº 46, on aura, pour $n > N$,

$$\int_0^L \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\,du < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right),$$

(z) étant, comme au nº 33, le minimum de $|z+u|$, lorsque u varie de o à ∞.

Pour l'intégrale entre limites L et ∞, j'observe que

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \frac{1}{a_1},$$

et pour $z = \alpha + \beta i$,

$$|z+u|^2 = (u+\alpha)^2 + \beta^2 \geqq (u+\alpha)^2,$$

donc

$$\int_L^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \varphi(u)|}{|z+u|^2}\,du < \frac{1}{a_1}\int_L^\infty \frac{du}{(u+\alpha)^2} = \frac{1}{a_1(L+\alpha)},$$

en supposant que $L + \alpha$ soit positif.

Il vient donc

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2}\right| < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right) + \frac{1}{a_1(L+\alpha)}.$$

Or les nombres L, ε, ε' étant arbitraires (ou à peu près), il est clair que la limite supérieure peut être rendue aussi petite qu'on le voudra.

Il est ainsi démontré que pour tout point z non sur la coupure, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\,\Phi(u)}{z+u}.$$

Nous savions déjà que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

tend vers une fonction holomorphe $F(z)$; nous voyons maintenant que cette fonction peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\,\Phi(u)}{z+u}.$$

Quant à l'uniformité de la convergence, il résulte de la limitation obtenue que la convergence est uniforme dans tout domaine S où la partie réelle de $-z$ et $\frac{1}{(z)}$ sont limités supérieurement. Un tel domaine peut s'étendre à l'infini.

48. De la même façon que nous avons étudié les réduites d'ordre pair, on peut étudier les réduites d'ordre impair, et l'on trouvera

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u},$$

$\Phi_1(u)$ étant encore une fonction croissante qui caractérise une certaine distribution de masse sur un axe OX.

Mais il est à peine nécessaire de faire cette recherche, car le seul cas qui nous intéresse est celui où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente;* mais alors nous savons que $F(z) = F_1(z)$, et il devient inutile de faire une recherche spéciale pour obtenir une forme analytique plus explicite de $F_1(z)$. Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ caractérisent alors nécessairement la même distribution d'après le théorème du n° 39.

Dans le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente, il est clair que les distributions de masse caractérisées par les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ sont celles données par les systèmes

$$(\mu_i, \lambda_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$(\nu_i, \theta_i), \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

considérées au n° 24. Les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}, \qquad \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}$$

se réduisent alors aux séries

$$\sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}, \qquad \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i}.$$

Nous avons vu (n° **15**) que x étant réel positif, on a

$$(1)\qquad F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{\xi c_n}{x^{n+1}}\ (0 < \xi < 1);$$

or, on a

$$x\,F(x) = \int_0^\infty \frac{x}{x+u}\,d\,\Phi(u).$$

Il est aisé de voir que, pour $x = +\infty$, le second membre a pour limite

$$\int_0^\infty d\,\Phi(u) = \Phi(\infty).$$

En effet, cette intégrale ayant une valeur finie, on peut choisir un nombre L de façon que

$$\int_L^\infty d\,\Phi(u) = \varepsilon_1,$$

ε_1 étant plus petit qu'un nombre arbitraire ε. On aura alors

$$\int_L^\infty \frac{x}{x+u}\,d\,\Phi(u) = \varepsilon_1',$$

ε_1' étant plus petit que ε. Ensuite il est clair qu'on peut prendre x assez grand pour que

$$\int_0^L \frac{x}{x+u}\,d\,\Phi(u) = \int_0^L d\,\Phi(u) - \varepsilon_1'',$$

ε_1'' étant plus petit que ε. On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{x}{x+u}\,d\,\Phi(u) = \int_0^L d\,\Phi(u) + \varepsilon_1' - \varepsilon_1'' = \int_0^\infty d\,\Phi(u) - \varepsilon_1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1'';$$

or, d'après la formule (1), on a

$$\lim_{x=\infty} x\,F(x) = c_0 = \frac{1}{a_1},$$

donc

$$\int_0^\infty d\Phi(u) = c_0.$$

Ce point établi, nous pouvons écrire

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{u}{x(x+u)}\right] d\Phi(u) = \frac{c_0}{x} - \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{u}{x+u}\, d\Phi(u),$$

$$(2) \qquad x^2\left[\mathrm{F}(x) - \frac{c_0}{x}\right] = -\int_0^\infty \frac{x}{x+u}\, u\, d\Phi(u).$$

Nous savons que, pour $x = \infty$,

$$\lim x^2\left[\mathrm{F}(x) - \frac{c_0}{x}\right] = -c_1.$$

On peut en conclure que l'intégrale

$$(3) \qquad \int_0^\infty u\, d\Phi(u)$$

a une valeur finie et que cette valeur est c_1. En effet, si

$$\int_0^{\mathrm{L}} u\, d\Phi(u)$$

croît au delà de toute limite avec L; le second membre de (2) croîtrait aussi au delà de toute limite pour $x = \infty$, ce qui ne doit pas avoir lieu. L'intégrale (3) a donc une valeur finie, et pour obtenir cette valeur il suffit de faire croître x indéfiniment dans la formule (2). En continuant ces raisonnements, on voit que généralement

$$\int_0^\infty u^k\, d\Phi(u) = c_k.$$

La distribution de masse caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ constitue donc une solution du *problème des moments*.

Dans le cas où la série

$$\sum_0^\infty a_n$$

est divergente, nous n'obtenons ainsi qu'une solution de ce problème, et, en effet, nous démontrerons bientôt que ce problème n'en admet pas d'autres dans ce cas.

Nous avons vu (n° 42) que

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-2)],$$

et du résultat que nous venons d'obtenir on conclut aisément

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \Phi(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

on en conclut que

$$\varphi_n(u) - \Phi(u)$$

doit changer de signe au moins $2n-1$ fois. Soit x_k un point de discontinuité de $\varphi_n(u)$; il est facile de conclure

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \Phi(\overset{-}{x_k}) \leqq \Phi(\overset{+}{x_k}) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}).$$

Ce résultat précise celui obtenu à la fin du n° 44.

Il est clair aussi que, dans un intervalle où la fonction $\Phi(u)$ est constante, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir plus d'*une* racine.

49. Je reviens à la proposition du n° 46; pour $n > N$ on a

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'.$$

Nous venons de voir que $\Phi(\infty) = \varphi_n(\infty) = c_0$, par conséquent

$$c_0 - \varphi_n(u) \quad \text{et} \quad c_0 - \Phi(u)$$

ne sont jamais négatifs, et à cause de

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) = c_0 - \Phi(u) - [c_0 - \varphi_n(u)],$$

on aura

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq |c_0 - \Phi(u)| + |c_0 - \varphi_n(u)|;$$

or il est facile de voir que

$$|c_0 - \varphi(u)| < \frac{c_2}{u^2},$$

$$|c_0 - \Phi(u)| < \frac{c_2}{u^2}.$$

En effet, considérons la distribution de masse caractérisée par $\Phi(u)$ [ou $\varphi_n(u)$]. Le moment du second ordre est c_2, la masse totale comprise dans le segment de u à ∞ est $c_0 - \Phi(u)$, le moment du second ordre de cette masse est inférieur à c_2; si l'on concentre cette masse au point u, on diminue encore le moment du second ordre; donc

$$u^2 | c_0 - \Phi(u) | < c_2.$$

Il vient donc

$$| \varphi_n(u) - \Phi(u) | < \frac{2c_2}{u^2}$$

et

$$\int_L^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | \, du < \frac{2c_2}{L},$$

puis

$$\int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | \, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon' + \frac{2c_2}{L}.$$

Par un choix convenable de L, ε, ε' on peut rendre la limite supérieure plus petite qu'un nombre donné, par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | \, du = 0.$$

50. Voici comment on peut interpréter ce résultat.

Désignons par les symboles D_n et D les distributions de masse caractérisées par les fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$. On peut passer de la distribution D_n à la distribution D par un certain transport de masses. Convenons de dire que le transport d'une masse m sur une longueur l exige un *travail* mesuré par ml. Alors on voit, sans difficulté, que le travail total minimum nécessaire pour passer de D_n à D (ou réciproquement) est mesuré par

$$\int_0^\infty | \varphi_n(u) - \Phi(u) | \, du.$$

Nous désignerons ce travail minimum aussi par $\{ D_n, D \}$, et il semble naturel de dire que la distribution D_n diffère infiniment peu de D lorsque $\{ D_n, D \}$ est infiniment petit.

Ainsi D peut être considérée comme la limite de D_n.

En général, lorsqu'on a une suite infinie de distributions

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots,$$

et qu'il existe une distribution D telle que

$$\{ D_n, D \}$$

devienne inférieure à ε dès que n surpasse une certaine limite, on dira que D est la limite de D_n.

On peut reprocher à cette définition de faire intervenir la limite D elle-même, et puisque

$$\{D_n,\ D_{n+n'}\} \leqq \{D_n,\ D\} + \{D,\ D_{n+n'}\} < 2\varepsilon,$$

on serait porté à adopter la définition suivante : la suite

$$D_1,\quad D_2,\quad D_3,\quad \ldots$$

tend vers une limite s'il existe un nombre n tel que

$$\{D_n,\ D_{n+n'}\} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

Mais il est clair que cette définition manque de sens précis, tant qu'on n'aura pas démontré qu'il existe effectivement une distribution D telle que $\{D_n, D\}$ devienne infiniment petit. Nous avons voulu indiquer seulement cette question, que nous n'examinerons pas ici.

Puisque

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{n} \frac{M_i}{z + x_i},$$

on voit qu'on peut considérer cette réduite elle-même comme une espèce de *moment paramétrique* (dépendant du paramètre z) de la distribution D_n. Et le résultat principal de nos recherches revient donc à ce que le moment paramétrique de D_n a pour limite le moment paramétrique de D.

Or, si l'on considère l'intégrale définie par laquelle s'exprime le moment paramétrique de D, et si l'on se rappelle la définition d'une intégrale définie comme limite d'une certaine somme, on verra que, pour cette somme, on peut justement prendre le moment paramétrique de D_n, c'est-à-dire la $2n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue. On peut donc dire que la fraction continue est une *transformation identique* de l'intégrale définie. Cette singulière réduction l'une à l'autre de deux expressions analytiques si différentes, une intégrale définie et une fraction continue, nous l'avons remarquée pour la première fois dans le cas particulier où $Q_{2n}(z)$ est un polynome X_n de Legendre. (Voir *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 508; 1884).

C'est le désir de généraliser ce résultat qui nous a fait entreprendre les recherches que nous exposons ici.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$.

51. Soit $\psi(u)$ une fonction croissante quelconque $[\psi(0)=0]$, nous supposerons seulement que la distribution de masse qu'elle représente a des moments finis d'ordre quelconque, et nous poserons

$$c_k = \int_0^\infty u^k d\psi(u).$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

qui représente une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la coupure. Si la fonction $\psi(u)$ est constante à partir de $u=a$, l'intégrale se réduit à

$$\int_0^a \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

et la coupure ne s'étend que de $u=0$ jusqu'à $u=-a$. Tous les moments sont alors finis dès que cela est le cas pour $c_0=\psi(a)$. L'intégrale admet évidemment un développement asymptotique

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots,$$

qui est divergent en général et convergent pour $|z|>a$ dans le cas particulier que nous venons de mentionner.

Mais on a toujours, lorsque $z=x$ est réel positif,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}=\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n}+(-1)^n\frac{\xi c_n}{x^{n+1}} \quad (0<\xi<1).$$

Le développement en fraction continue de cette intégrale, ou, à proprement parler, de son développement asymptotique, a fait l'objet des recherches de Tchebicheff, Heine, Darboux.

Nous allons reprendre ici cette étude, en nous attachant surtout à la question de la convergence, qui n'a guère été considérée dans les travaux antérieurs que nous venons de rappeler, et dans lesquels on a pris toujours la fraction continue sous la forme (I^d) (*voir* l'Introduction).

Pour réduire la série en fraction continue, on n'a qu'à appliquer les formules du n° 11, les déterminants A_n et B_n seront positifs comme déterminants des formes quadratiques positives

$$\int_0^\infty (X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u),$$

$$\int_0^\infty u(X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u).$$

On trouvera donc une fraction continue du type que nous avons étudié, les a_i étant positifs.

Dès lors, nous pouvons appliquer les résultats obtenus par l'étude directe de la fraction continue.

Deux cas sont à distinguer :

1° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est convergente.*

Dans ce cas on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_0^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}.$$

2° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente.*

Dans ce cas, on a

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Mais quels rapports ont ces limites avec l'intégrale $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$ qui a été l'origine de la fraction continue?

52. Pour répondre à cette question, supposons d'abord $z = x$ réel et positif. On a alors ce théorème (voir *Comptes rendus*, t. CVIII, p. 1297; 1889) :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\left[1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n\right]^2$$

est égal à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} > \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}.$$

La vérification est facile; posons

$$\mathfrak{L} = 1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n;$$

les conditions du minimum sont

$$(1)\qquad \int_0^\infty (x+u)^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Ces relations sont visiblement équivalentes à celles-ci

$$\int_0^\infty u^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

ou bien, si l'on se souvient, le symbole S introduit au n° 11,

$$S\{u^k \mathfrak{L}\} = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

D'après la formule (3) du n° 11, le polynome $\mathfrak{L}$, dans le cas du minimum, ne diffère donc que par un facteur constant de $Q_{2n}(-u)$, et, puisque $\mathfrak{L}$ se réduit à l'unité pour $u = -x$, on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}.$$

Le minimum est

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}^2 = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}[1 + X_1(x+u) + \ldots + X_n(x+u)^n],$$

ce qui, à cause des formules (1), se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{1}{Q_{2n}(x)}\int_0^\infty \frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u}\, d\psi(u).$$

La dernière intégrale est évidemment égale à

$$S\left[\frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u}\right] = P_{2n}(x),$$

ce qui achève la démonstration.

On vérifiera aussi aisément ce second théorème :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{x(x+u)}[1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n]^2\, du$$

est égal à

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} - \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} > \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}.$$

A ces théorèmes, j'ajouterai la remarque suivante :

Dans le cas du premier théorème, $\mathfrak{L}$ est le polynome en u le plus général qui se réduit à l'unité pour $u = -x$. Or $\left(\frac{-u}{x}\right)^n$ est aussi un tel polynome; on aura donc

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{u^{2n}\,d\psi(u)}{x^{2n}(x+u)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} > \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots - \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}},$$

et l'on trouvera de même

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} < \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_{2n}}{x^{2n+1}}.$$

Ces inégalités, nous les avions obtenues déjà (n° 15), mais rapprochons-les maintenant de celles-ci

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)}.$$

Pour calculer numériquement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u},$$

on peut se servir de la série (même divergente)

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots;$$

la somme d'un nombre pair de termes donnera toujours une limite inférieure, la somme d'un nombre impair de termes une limite supérieure.

Mais on peut aussi réduire la série en fraction continue : les réduites successives donneront encore alternativement des limites supérieures et inférieures.

Nous voyons maintenant qu'*il y a toujours avantage à réduire la série en fraction continue :* les limites données par les réduites sont *plus rapprochées* que celles données par la série.

La limite de l'approximation que peut donner la fraction continue est caractérisée par ces inégalités

$$F(x) \leqq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq F_1(x).$$

53. Il est facile maintenant de répondre à la question posée à la fin du n° 51.

Dans le premier cas, lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente, nous savons que le problème des moments est *indéterminé* (nº 24). C'est dire qu'il existe une infinité d'intégrales

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}, \qquad \int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}, \qquad \int_0^\infty \frac{d\psi_2(u)}{z+u}, \qquad \dots,$$

qui sont des fonctions holomorphes *distinctes* de z, qui donnent le *même développement asymptotique*

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

et, par conséquent, aussi la *même fraction continue*.

Le calcul des réduites de cette fraction continue conduit à deux limites

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i};$$

mais on ne peut établir évidemment aucun lien précis entre ces deux fonctions parfaitement déterminées et une intégrale telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

puisque cette fonction est susceptible de varier.

La seule chose qu'on peut affirmer c'est que, pour $z = x$, on aura toujours

$$\frac{p(x)}{q(x)} \leqq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq \frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ figurent d'ailleurs aussi parmi les déterminations possibles de $\psi(u)$.

On ne peut pas avoir, pour une valeur particulière $x = x_0$,

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u},$$

sans qu'on ait identiquement dans tout le plan

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et les fonctions $\psi(u)$, $\Phi(u)$ peuvent être considérées comme identiques, puisqu'elles caractérisent la même distribution de masse.

En effet, nous avons vu que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u} - \frac{P_{2n}(x_0)}{Q_{2n}(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}\left[\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x_0)}\right]^2.$$

Or, si le second membre tend vers zéro pour $n=\infty$, comme nous le supposons ici, cela aura lieu à plus forte raison lorsqu'on remplace x_0 par un nombre plus grand. Par conséquent, on aura

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

dès que z est réel, positif, plus grand que x_0.

Mais alors cette égalité aura lieu dans tout le plan.

On verra de même que l'égalité

$$\frac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}$$

entraîne l'identité

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}.$$

Tant que la distribution de masse, caractérisée par $\psi(u)$ n'est pas identique à une de celles représentées par $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$, on aura

$$\frac{p(x)}{q(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

l'égalité étant exclue.

54. Dans le second cas, la fraction continue est convergente et l'on aura, pour $z=x$,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{x+u};$$

car, dans ce cas, $F(x) = F_1(x)$. Il s'ensuit que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u};$$

car cette égalité ne peut avoir lieu pour $z=x$ sans avoir lieu dans tout le plan. Les fonctions $\psi(u)$ et $\Phi(u)$ seront identiques ou elles représenteront au moins la *même* distribution de masse.

On voit aussi que le problème des moments est *déterminé* dans le cas actuel, et qu'il n'admet pas d'autre solution que celle caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ ou $\psi(u)$. En effet, si le problème avait une autre solution caractérisée par $\psi_1(u)$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}$$

donnerait toujours la même fraction continue, et il s'ensuivrait

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}=\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}=\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Il est à remarquer que ce second cas peut arriver, même lorsque le développement

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots$$

est toujours *divergent*. En effet, la série est dans ce cas lorsque

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

croît au delà de toute limite. Nous savons que, pour cela, il faut et il suffit que les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

ne soient pas limités supérieurement. Or, il est clair que cela n'empêche nullement la série

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

d'être *divergente*. On pourrait, par exemple, prendre arbitrairement tous les a_i, exceptés ceux d'une certaine suite infinie

$$a_p, \quad a_q, \quad a_r, \quad a_s, \quad \ldots,$$

et déterminer ensuite ceux-ci de façon que les nombres

$$\frac{1}{a_p a_{p+1}}, \quad \frac{1}{a_q a_{q+1}}, \quad \frac{1}{a_r a_{r+1}}, \quad \ldots$$

croissent au delà de toute limite.

55. Pour donner un exemple de la théorie que nous venons d'exposer, considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{[1+\lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{z+u}\, du$$

où $-1 \leqq \lambda \leqq 1$. Puisque

$$d\psi(u) = [1+\lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du,$$

nous avons affaire ici à une distribution de masse à *densité finie*. Cette distribution varie d'ailleurs avec le paramètre λ. Mais, si l'on calcule les moments, on trouve

$$c_k = \int_0^\infty u^k e^{-\sqrt[4]{u}}\, du \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

ils ne dépendent pas du paramètre λ; en effet, on vérifie sans peine que les intégrales

$$\int_0^\infty u^k \sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du = 4\int_0^\infty u^{4k+3} \sin u\, e^{-u}\, du \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

sont *toutes nulles*. Le problème des moments a donc manifestement une infinité de solutions; nous sommes dans le cas indéterminé, et il est certain que les valeurs des a_i seront telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. La fraction continue donnera deux limites

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}, \qquad \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i},$$

et les distributions de masse (μ_i, λ_i), (ν_i, θ_i) constitueront encore deux solutions particulières du problème des moments. Mais on ne peut établir aucun lien *précis* entre la valeur de l'intégrale et les limites fournies par la fraction continue. Toutefois, lorsque $z = x$ est réel positif, on pourra toujours obtenir des limites supérieures et inférieures de l'intégrale en calculant les réduites. Mais, puisque les c_k et les a_k ne dépendent point de λ, on voit qu'on ne tient aucun compte de la partie

$$\lambda \int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{x+u}\, du = \pi\lambda\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

Puisque λ peut varier de -1 et $+1$, on en conclut nécessairement

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} > 2\pi\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

La fraction continue ne peut donner qu'une approximation limitée, comme c'est le cas aussi du développement en série. En calculant a_1, a_2, ..., on voit que ces nombres suivent une loi très compliquée, en sorte qu'on ne peut pas vérifier directement la convergence de la série

$$\sum_1^{\infty} a_n.$$

56. Je donnerai encore un autre exemple dans lequel cette vérification peut se faire.

Soit $f(u)$ une fonction *impaire et périodique* de u,

$$f(u+\tfrac{1}{2}) = \pm f(u),$$

alors l'intégrale

$$\int_0^{\infty} u^k u^{-\log u} f(\log u)\, du,$$

où k est un entier quelconque, positif, nul ou négatif, est toujours nulle.

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} f(v)\, dv = 0$$

et de faire la substitution

$$v = -\frac{k+1}{2} + \log u.$$

Ainsi, dans le cas $f(u) = \sin(2\pi u)$,

$$\int_0^{\infty} u^k u^{-\log u} \sin(2\pi \log u)\, du = 0.$$

Je considère maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1+\lambda\sin(2\pi\log u)}{z+u}\, u^{-\log u}\, du,$$

où

$$-1 \leqq \lambda \leqq +1.$$

On voit que les choses se passent comme dans l'exemple précédent; la valeur de

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^k u^{-\log u}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+(k+1)u}\, du = e^{\frac{1}{4}(k+1)^2}$$

est *indépendante* du paramètre λ.

La fraction continue doit donc être oscillante; cela se vérifie ici directement, puisqu'on a

$$a_{2n} = \left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n-1}{2}}\right)e^{-\frac{n}{2}},$$

$$a_{2n+1} = \frac{e^{-\frac{2n+1}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n}{2}}\right)}.$$

A cause de $e>1$, la convergence des séries

$$\sum a_{2n}, \quad \sum a_{2n+1}$$

est manifeste. Pour abréger, je supprime le calcul qui donne les valeurs des a_n (et qui reste valable sans qu'on ait besoin de supposer que e ait la valeur particulière 2,71828...).

Dans le cas actuel, la différence

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)}$$

doit surpasser nécessairement

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\log u)}{x+u}\, u^{-\log u}\, du = 2e^{-\pi^2}\sqrt{\pi}\, x^{-\log x}.$$

57. Comme exemple du cas déterminé, je rappellerai d'abord la fraction continue étudiée par Laguerre, dont nous avons parlé dans l'Introduction. Puisque, dans ce cas,

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n},$$

la fraction continue est *convergente* et représente dans tout le plan, excepté sur la coupure, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

La masse s'étend ici à l'infini, et, en effet, les nombres $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ne sont pas limités supérieurement.

Dans le cas où la masse ne s'étend pas à l'infini, la fraction continue est naturellement toujours convergente, car le développement en série est alors même convergent pour des valeurs suffisamment grandes de z.

Comme exemple de ce cas, considérons une fraction continue *périodique* telle que

$$b_{2n} = p, \qquad b_{2n-1} = q.$$

On connaît, dans ce cas, immédiatement la fonction $F(z)$

$$F(z) = \frac{\sqrt{z^2 + 2(p+q)z + (p-q)^2} - z + p - q}{2z}$$

et

$$a_{2n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n;$$

l'une des deux séries

$$\sum_1^\infty a_{2k}, \quad \sum_0^\infty a_{2k+1}$$

sera toujours divergente. Mais la fonction $F(z)$ doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et l'on a vu, dans le n° 39, comment on peut mettre $F(z)$ sous cette forme, si l'expression explicite de $F(z)$ est connue.

Ce calcul conduit ici aux résultats suivants. Deux cas sont à distinguer selon que $p \gtrless q$.

Premier cas : $p > q$.

Posons

$$\alpha = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2,$$
$$\beta = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2,$$

on aura

$$F(z) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u} \frac{du}{z+u}.$$

Ainsi il y a, à l'origine, une concentration de masse égale à $\sqrt{\alpha\beta} = p - q$, puis une distribution continue de masse dans l'intervalle (α, β).

Second cas : $p < q$.

On trouve simplement

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u} \frac{du}{z+u};$$

la masse concentrée à l'origine du premier cas a disparu. Dans le cas particulier : $p = q$, on a $\alpha = 0$, et l'on peut appliquer l'une ou l'autre des formules trouvées. Il n'y a pas de masse concentrée à l'origine, mais la *densité* y devient infinie.

Dans le premier cas, la série

$$\sum_{0}^{\infty} a_{2k+1}$$

est convergente, et sa somme est $1 : (p - q)$.

58. Nous allons montrer que, toujours dans le cas déterminé, la masse concentrée à l'origine est

$$1 : \sum_{0}^{\infty} a_{2k+1};$$

elle est nulle lorsque la série est divergente.

Dans le cas indéterminé,

$$1 : \sum_{0}^{\infty} a_{2k+1}$$

est le *maximum* de la masse qui peut être concentrée à l'origine; elle s'y trouve, en effet, dans la distribution

$$(\nu_i, \theta_i),$$

puisque

$$\theta_0 = 0, \qquad \nu_0 = 1 : \sum_{0}^{\infty} a_{2k+1};$$

mais, dans toute autre distribution, la masse concentrée à l'origine est *moindre*.

Je rappelle la limitation

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq F_1(x),$$

nous savons (nº 15) que

$$\lim_{x=0} x\,F_1(x) = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{x=0} \int_0^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \lim_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon) = \mu,$$

en désignant par μ la masse concentrée à l'origine.

En effet,

$$\int_0^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \int_0^{x^2} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} + \int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u},$$

et il est évident que

$$\int_0^{x^2} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} = \frac{\psi(x^2)}{1+\xi x} \qquad (0<\xi<1),$$

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} < \psi(\sqrt{x}) - \psi(x^2),$$

$$\int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{x\,d\psi(u)}{x+u} < \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}[\psi(\infty) - \psi(\sqrt{x})];$$

la première intégrale tend vers μ, les deux autres vers zéro. Dans le cas déterminé, on a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = F_1(x);$$

il vient donc

$$\mu = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Dans le cas indéterminé, on peut conclure seulement

$$\mu \leqq 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1},$$

et cela pour toutes les distributions équivalentes qui donnent les mêmes moments et la même fraction continue.

Nous savons d'ailleurs que, pour la distribution caractérisée par $\Phi_1(u)$, on a

$$\mu = \nu_0 = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Je dis maintenant que, pour toute autre solution du problème des moments, on a

$$\mu < 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

En effet, admettons que, pour $\Phi_1(u)$ et $\Psi(u)$, on ait

$$\mu = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Si, dans chacune de ces deux distributions (supposées différentes), on *enlève* la masse μ concentrée à l'origine, il restera deux systèmes de masses donnant encore les mêmes moments, c'est-à-dire équivalentes. Il existe alors une troisième distribution de masse, équivalente à ces deux-là et qui a, à l'origine, une masse finie μ'. Cette distribution est caractérisée par une fonction $\Phi'_1(u)$ analogue à $\Phi_1(u)$. En rétablissant maintenant la masse μ, on aurait une solution du problème des moments primitifs, avec une masse $\mu + \mu'$ à l'origine qui serait supérieure à

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Cela est impossible, d'où la proposition énoncée.

59. Dans le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_k$$

est divergente, nous avons vu que la fraction continue est convergente et que la limite des réduites est

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\,\Phi(u)}{z+u}.$$

Il est clair maintenant que la fonction $\Phi(u)$ qui figure ici n'est assujettie dans un intervalle quelconque (a, b), à aucune autre condition restrictive que celle d'être croissante. Il s'ensuit qu'en général la coupure est bien une ligne *singulière* à travers laquelle il est impossible de continuer analytiquement la fonction $F(z)$. En effet, pour que cette continuation analytique soit possible à travers l'intervalle $(-a, -b)$ de la coupure, il faut que la fonction $\Phi(u)$ soit une fonction *analytique* de u dans l'intervalle (a, b). Or c'est là une condition très restrictive qui ne sera point satisfaite en général.

Mais, si l'on veut donner des exemples particuliers, on ne peut guère commencer par se donner les a_k, ou cela n'est possible que dans des cas très restreints. Il faudra bien se résigner à prendre pour $\Phi(u)$ quelque fonction analytique; ainsi s'explique qu'en réalité nous n'avons pu donner aucun exemple du cas général dans lequel la coupure est une ligne singulière. Dans tous nos exemples, la coupure est seulement une coupure artificielle.

60. La fonction $\psi(u)$ étant donnée, ou la distribution de masse qu'elle représente, comment peut-on savoir si la fraction continue pour

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

est convergente ou divergente? C'est là un problème qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale; tout ce qu'on peut faire, c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. Lorsque la fraction continue est convergente, le problème des moments n'admet qu'une seule solution; nous dirons aussi, dans ce cas, que la distribution de masse représentée par $\psi(u)$ est déterminée. On ne peut guère faire varier cette distribution, sans introduire des masses négatives, si l'on veut conserver les moments. Or les masses négatives seront toujours exclues. La distribution de masse est indéterminée, au contraire, lorsque la fraction continue n'est pas convergente, mais oscillante.

Voici d'abord quelques remarques qui sont à peu près évidentes. Si, à une distribution de masse indéterminée, on ajoute de nouvelles masses, on restera toujours dans le cas indéterminé. Si, à une distribution déterminée on enlève une partie de la masse (toujours sans introduire des masses négatives), on restera dans le cas déterminé.

Dès qu'on trouve deux distributions équivalentes qui ne sont pas identiques, on est certainement dans le cas indéterminé.

Qu'on veuille bien se reporter maintenant aux formules (8) et (11) des nos 11, 12, par lesquelles les sommes

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$

s'expriment au moyen des c_k.

On trouve facilement que,

$$\sum_0^n \sum_0^n \mathrm{C}_{i,k} \mathrm{X}_i \mathrm{X}_k = \mathfrak{F}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$$

étant une forme quadratique définie et positive, le minimum de

$$\mathfrak{F}(1, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$$

s'exprime par

$$\begin{vmatrix} \mathrm{C}_{0,0} & \mathrm{C}_{0,1} & \ldots & \mathrm{C}_{0,n} \\ \mathrm{C}_{1,0} & \mathrm{C}_{1,1} & \ldots & \mathrm{C}_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{C}_{n,0} & \mathrm{C}_{n,1} & \ldots & \mathrm{C}_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathrm{C}_{1,1} & \ldots & \mathrm{C}_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{C}_{n,1} & \ldots & \mathrm{C}_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Dès lors, on reconnaît que le *minimum* de

$$\int_0^\infty (1 + \mathrm{X}_1 u + \ldots + \mathrm{X}_n u^n)^2 \, d\psi(u)$$

est égal à

$$1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}),$$

et le *maximum* de

$$\int_0^\infty [1 - (1 + \mathrm{X}_1 u + \mathrm{X}_2 u^2 + \ldots + \mathrm{X}_n u^n)^2] \frac{d\psi(u)}{u}$$

est égal à

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

On trouve, du reste, facilement que, dans le premier cas, on a

$$1 + \mathrm{X}_1 u + \ldots + \mathrm{X}_n u^n = \frac{\mathrm{Q}_{2n+1}(-u)}{-u\,\mathrm{Q}'_{2n+1}(0)}$$

et, dans le second,

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = Q_{2n}(-u).$$

Pour abréger, nous écrivons le premier résultat ainsi

$$\{d\psi(u)\}_n = 1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}).$$

Remarquons que l'intégrale, dont $\{d\psi(u)\}_n$ est le minimum, a, pour $u = 0$, un élément égal à la masse μ concentrée à l'origine ; on a donc

$$\mu < \{d\psi(u)\}_n,$$

en sorte qu'on retrouve, de cette façon, la limitation

$$\mu \leqq 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Lorsque n augmente, $\{d\psi(u)\}_n$ ne peut que diminuer ; pour $n = \infty$, cette expression tend vers une limite positive ou nulle que nous représenterons par

$$\{d\psi(u)\}_\infty = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

61. Considérons d'abord le cas où il n'y a point de masse concentrée à l'origine. Nous savons que, dans le cas déterminé, la masse concentrée à l'origine est égale à

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1},$$

donc

$$\{d\psi(u)\}_\infty = 0.$$

Mais, dans le cas indéterminé, la série

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est convergente et par conséquent

$$\{d\psi(u)\}_\infty > 0.$$

Ainsi, *s'il n'y a point de concentration de masse à l'origine, la frac-*

tion continue sera convergente ou oscillante selon que

$$\{d\psi(u)\}_\infty$$

est nul ou positif.

Si la distribution $\mathfrak{D}$ représentée par $\psi(u)$ a, à l'origine, une masse μ, enlevons cette masse et soit $\mathfrak{D}'$ la distribution ainsi modifiée. Supposons que, d'une manière ou d'autre (par exemple, à l'aide de la proposition précédente), on sache si la distribution $\mathfrak{D}'$ est déterminée ou indéterminée, qu'est-ce qu'on en peut conclure pour $\mathfrak{D}$?

Si la distribution $\mathfrak{D}'$ est indéterminée, $\mathfrak{D}$ est aussi indéterminée. Si, au contraire, $\mathfrak{D}'$ est déterminée, je dis que $\mathfrak{D}$ est aussi déterminée, en général; il faut faire exception seulement pour un cas singulier que nous indiquerons. En effet, voici comment on peut conclure dans le cas où $\mathfrak{D}$ serait indéterminée, $\mathfrak{D}'$ déterminée. Soit $\mathfrak{D}_1$ la distribution équivalente à $\mathfrak{D}$, mais qui a, à l'origine, la plus grande concentration de masse possible, cette masse étant μ_1. Elle est donnée par une fonction Φ_1

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i},$$

et $\nu_0 = \mu_1$. Tant que $\mathfrak{D}$ n'est pas identique à $\mathfrak{D}_1$, on a

$$\mu_1 > \mu.$$

Enlevons à $\mathfrak{D}_1$ la masse μ (ce qui peut se faire sans introduire une masse négative), on aura une distribution $\mathfrak{D}'_1$ équivalente à $\mathfrak{D}'$. Donc, si $\mathfrak{D}'$ est *déterminée*, $\mathfrak{D}'_1$ et $\mathfrak{D}'$ doivent être *identiques*, et, par exemple, aussi $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$.

On peut donc dire, si $\mathfrak{D}'$ est déterminée, $\mathfrak{D}$ l'est aussi en général; il y a exception seulement lorsque $\mathfrak{D}$ est une distribution du type (ν_i, θ_i).

62. Je vais supposer maintenant, comme cela arrive dans les exemples particuliers qu'on peut traiter,

$$d\psi(u) = f(u)\,du,$$

$f(u)$ étant une fonction positive et généralement continue. On a ici

$$\{f(u)\,du\}_n = \text{minimum de } \int_0^\infty f(u)\{1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n\}^2\,du.$$

D'abord, dans certains cas particuliers, on sait calculer ce minimum, ou obtenir la fraction continue. Ainsi, par exemple, dans le cas

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{u^{a-1}e^{-bu}}{z+u}\,du,$$

on trouve

$$a_1 = 1, \qquad a_{2n+1} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n},$$

$$a_2 = \frac{b}{a}, \qquad a_{2n} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)b}{a(a+1)\ldots(a+n-1)},$$

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{1.2\ldots n}.$$

Puisque $a > 0$, on voit que la série $\sum_0^\infty a_{2k+1}$ est divergente, donc

$$\{u^{a-1}e^{-bu}\,du\}_\infty = 0.$$

Il est clair que, c étant une constante positive, on a

$$\{f(cu)\,du\}_n = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_n,$$

$$\{f(cu)\,du\}_\infty = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_\infty.$$

D'autre part, si

$$f_1(u):f(u)$$

reste inférieur à un nombre fixe, on aura

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0.$$

Si, au contraire, le rapport

$$f_1(u):f(u)$$

est constamment supérieur à un nombre positif, on aura certainement

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty > 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty > 0.$$

63. On peut aller plus loin dans cette voie, et nous démontrerons cette proposition.

Supposons que

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0,$$

et que le rapport $f_1(u):f(u)$ a un maximum fini M_α dans l'intervalle (α, ∞) (ce nombre M_α pouvant d'ailleurs croître indéfiniment lorsque α tend vers zéro), alors, je dis qu'on aura aussi

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0.$$

Pour le démontrer, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra. Je détermine d'abord un nombre positif α par cette condition

$$\int_0^\alpha f_1(u)\,du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit ensuite $f(\bar{u})$ une fonction qui est nulle dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et égale à $f(u)$ pour $u > \alpha$.

On aura

$$\{f(\bar{u})\,du\}_n = \int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du,$$

$\mathfrak{L}(\bar{u})$ étant un certain polynome du degré n en u et qui se réduit à l'unité pour $u = 0$.

D'autre part, si l'on a

$$\{f(u)\,du\}_n = \int_0^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(u)^2\,du,$$

on aura

$$\{f(\bar{u})\,du\}_n < \int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(u)^2\,du = \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(u)^2\,du < \{f(u)\,du\}_n.$$

Donc, puisque nous supposons

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0,$$

on aura aussi

$$\{f(\bar{u})\,du\}_\infty = 0.$$

J'observe ensuite que

$$\{f_1(u)\,du\}_n < \int_0^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \int_0^\alpha f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du + \int_\alpha^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du.$$

Or, le polynome $\mathfrak{L}(\bar{u})$ est déterminé à un facteur près par les conditions

$$\int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0 \qquad (k = 1.2, \ldots n),$$

ou

$$\int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0.$$

Il s'ensuit que toutes les racines de

$$\mathfrak{L}(\bar{u}) = 0$$

sont positives, plus grandes que α. Et puisque $\mathfrak{L}(\bar{0}) = 1$, on voit que, dans l'intervalle $(0, \alpha)$, on a

$$0 < \mathfrak{L}(\bar{u}) \leqq 1,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\alpha f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \int_0^\alpha f_1(u)\,du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ensuite

$$\int_\alpha^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \mathrm{M}_\alpha \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \mathrm{M}_\alpha \{f(\bar{u})\,du\}_n,$$

donc

$$\{f_1(u)\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon + \mathrm{M}_\alpha\{f(\bar{u})\,du\}_n.$$

Or, il existe un nombre ν tel que, pour $n > \nu$, on a

$$\mathrm{M}_\alpha\{f(\bar{u})\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

et il est clair d'après cela qu'on a

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas

$$f(u) = \frac{4}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}},$$

la fraction continue (*voir* plus loin n° 86) s'obtient avec des valeurs simples des a_k

$$a_k = \frac{4}{k},$$

par conséquent

$$\left\{\frac{4\,du}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0,$$

et aussi, c étant une constante positive

$$\left\{\frac{du}{e^{c\sqrt{u}}-e^{-c\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0.$$

Cela étant, posons

$$f_1(u) = u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u),$$

$$f(u) = \frac{1}{e^{c\sqrt{u}}-e^{-c\sqrt{u}}},$$

où $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \geqq \frac{1}{2}$, tandis que nous supposons $c < b$. Ensuite $\mathcal{G}(u)$ sera une fonction positive de u, qui dans tout intervalle (α, ∞) reste inférieur à un nombre fixe. On a

$$f_1(u) : f(u) = u^{a-1}\mathcal{G}(u)\,e^{-bu^\lambda+c\sqrt{u}}\left(1-e^{-2c\sqrt{u}}\right),$$

et l'on voit que ce rapport tend vers zéro pour $u = \infty$.

Nous pouvons appliquer la proposition démontrée et conclure

$$\left\{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u)\right\}_\infty = 0.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}\mathcal{G}(u)}{z+u}\,du$$

donne une fraction continue *convergente*, tant que $\lambda \geqq \frac{1}{2}$. Supposons $\mathcal{G}(u) = 1$, la fraction continue sera *oscillante* pour $\lambda < \frac{1}{2}$; pour abréger, je supprime la démonstration.

64. Appliquons ce résultat à la série de Stirling.

On sait qu'en posant

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \mathrm{J}(z),$$

on a

$$\mathrm{J}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2+u^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi u}}\right)$$

ou

$$\mathrm{J}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{zu^{-\frac{1}{2}}\,du}{z^2+u}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right).$$

C'est là une intégrale telle que nous l'avons étudiée; on a seulement remplacé z par z^2 et multiplié par z. Le développement en série prend ainsi la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{B_1}{1.2.z} - \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6.z^5} - \ldots,$$

et la fraction continue devient

$$\text{(B)} \qquad \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 z + \cfrac{1}{a_3 z + \ldots}}}$$

On a ici

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi\sqrt{u}} \mathcal{G}(u),$$

$$\mathcal{G}(u) = e^{2\pi\sqrt{u}} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right);$$

$\mathcal{G}(u)$ tend ici vers l'unité pour $u = \infty$ et satisfait ainsi à la condition imposée à cette fonction dans notre énoncé. *Il suffit donc de transformer la série de Stirling* (A) *dans la fraction continue* (B), *pour avoir une expression convergente qui représente* $J(z)$ *tant que la partie réelle de* z *est positive.*

La fraction continue change de signe avec z comme l'intégrale de Binet, dont elle est une transformation identique; mais, lorsqu'on change ainsi le signe de z, ces expressions donnent $-J(z)$, mais pas $J(-z)$; l'axe imaginaire est une coupure, aussi bien pour l'intégrale que pour la fraction continue.

Le calcul des a_k est très pénible; on trouve

$$a_1 = 12, \qquad a_2 = \frac{5}{2}, \qquad a_3 = \frac{84}{53}, \qquad a_4 = \frac{2809}{2340}, \qquad a_5 = \frac{1003860}{1218947}, \qquad \ldots;$$

la loi de ces nombres paraît extrêmement compliquée.

65. Nous terminons ici cette étude de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

par l'énoncé des propositions suivantes, dont la démonstration se déduit aisément des formules que nous donnerons plus loin (nos 76, 77, 78).

I. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, on aura de même une fraction continue convergente pour

$$\frac{\mu}{z}+\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

μ étant une constante positive, excepté dans un cas singulier. Ce cas singulier se présente lorsque la distribution de masse caractérisée par $\psi(u)$ est identique à celle donnée par une fonction $\Phi_1(u)$

$$(\nu_i,\ \theta_i)$$

à laquelle on aurait enlevé la masse ν_0 concentrée à l'origine.

II. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{z+u}$$

donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.

Le cas singulier exceptionnel est le même que pour la proposition (I).

III. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\psi(u-\lambda)}{z+u},$$

où λ est une constante positive, donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.

Ce cas singulier a lieu lorsque la distribution de masse caractérisée par

$\psi(u)$ est celle-ci

$$(\mu_i, \lambda_i - \lambda_1) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

c'est-à-dire si cette distribution s'obtient en rapprochant de la quantité λ_1, de l'origine, les masses d'une distribution (μ_i, λ_i) provenant d'une fonction $\Phi(u)$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z + \lambda_i},$$

(*A suivre.*)

ERRATA.

Page J.85, ligne 11, en descendant, après «de $\Phi(u)$» ajouter «et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$».

Page J.86, ligne 11, en descendant, après «de $\Phi(u)$» ajouter «et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$».