Annales de la faculté des sciences de Toulouse

G. Koenigs

# La géométrie réglée et ses applications

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série*, tome 7, nº 4 (1893), p. 1-55

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_4_1_0>

© Université Paul Sabatier, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

# GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

## ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Professeur suppléant au Collège de France.

## CHAPITRE V.

### COORDONNÉES DE KLEIN. — GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE.

Coordonnées tétraédriques. — Forme caractéristique de $\omega(x)$; réciproque. — Forme de M. Klein. — Système de six complexes linéaires en involution deux à deux. — Configuration remarquable qu'ils forment. — Propriétés des quinze congruences $C_{ij}$. — Notation particulière pour leurs directrices. — Les demi-quadriques $Q_{ijk}$. — Les dix quadriques fondamentales. — Les tétraèdres fondamentaux. — Relations remarquables entre les quadriques et les tétraèdres. — Digression sur une configuration offerte par trois complexes linéaires en involution deux à deux. — Groupement des sommets et des faces des tétraèdres. — Propriétés des permutations de six lettres. — Les tétraèdres desmiques. — Distribution sur une conique des six pôles d'un même plan. — Configuration des seize points et des seize plans. — Transformations qui font revenir sur elle-même la forme fondamentale. — Quelques généralités sur les espaces à $n$ dimensions. — Représentation d'une quadrique sur un plan. — La projection stéréographique. — Correspondance entre la Géométrie projective sur une quadrique et la Géométrie anallagmatique dans un plan. — La Géométrie de l'espace réglé est identique à la Géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.

74. Nous avons défini au n° 3 un système particulier de coordonnées $r_{ik}$ de la ligne droite, dont la notion se trouve liée à celle d'un certain tétraèdre de coordonnées.

Nous avons indiqué ensuite comment on pouvait substituer à ces coordonnées de nouvelles coordonnées au moyen des formules de transformation

$$r_{ik} = A_{ik,1}\, x_1 + A_{ik,2}\, x_2 + \ldots + A_{ik,6}\, x_6,$$

dans lesquelles le déterminant de la transformation n'est pas nul. Les équations

$$x_i = 0$$

représentent chacune un complexe linéaire, et ces six complexes ne font pas évidemment partie d'un même système à cinq termes.

Les variables $r_{ik}$ vérifient la relation

$$r_{12}\, r_{34} + r_{13}\, r_{42} + r_{14}\, r_{23} = 0,$$

et, si on leur substitue les variables $x_i$, le premier membre de cette équation devient une forme quadratique en $x_1, x_2, \ldots, x_6$,

$$\omega(x).$$

La forme de la fonction $\omega(x)$ caractérise les coordonnées. Il y a deux types particulièrement importants et qui ont, d'ailleurs, entre eux les liens les plus étroits. Le premier est le suivant

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6,$$

et le second, qui a été considéré par M. Klein en premier lieu, et qui est la base des recherches de ce géomètre, consiste dans la somme de carrés

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2.$$

Nous allons étudier successivement ces deux types.

Nous observerons d'abord que les coordonnées $r_{ik}$ réalisent le premier, et nous allons montrer que, réciproquement, *si les coordonnées réduisent la forme* $\omega(x)$ *au type*

$$\omega(x) = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6$$

(somme de trois rectangles), *les* $x_\rho$ *sont des coordonnées* $r_{ik}$ *par rapport à un certain tétraèdre.*

En effet, si nous cherchons la forme adjointe $\Omega(a)$, nous trouverons

$$\Omega(a) = a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_6 a_3,$$

c'est-à-dire $\omega(a)$. C'est un de ces cas où la forme adjointe reproduit la forme primitive. Pour le complexe $x_\rho = 0$, tous les coefficients $a_i$ sont nuls, sauf $a_\rho$, et, par suite, $\Omega(a) = 0$; *les complexes coordonnés sont donc tous spéciaux.*

Montrons maintenant que les directrices de ces complexes sont les arêtes d'un tétraèdre.

La condition d'involution de deux complexes A, B s'écrit ici

$$a_4 b_1 + b_4 a_1 + a_5 b_2 + b_5 a_2 + a_6 b_3 + b_6 a_3 = 0;$$

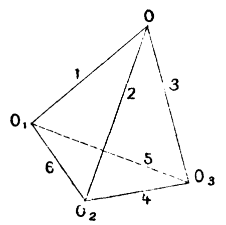
elle est vérifiée pour chaque couple $x_\rho = 0$, $x_\sigma = 0$ de complexes coordonnés, sauf pour les trois couples d'indices 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6.

Prenons, par exemple, les complexes d'indices 1, 2, 3 (*fig.* 1), puisqu'ils sont spéciaux et en involution deux à deux, et qu'ils ne font pas partie d'un même système à deux termes, il en résulte que leurs directrices forment un trièdre ou un triangle : par exemple, un trièdre de sommet O.

Les directrices des complexes 2, 3, 4 forment de même un trièdre ou un triangle; mais si elles formaient un trièdre, la directrice de 4 devrait passer au point de rencontre O des directrices de 2 et de 3; la directrice de 4 couperait donc en O celle du complexe 1, ce qui ne se peut, attendu que 1 et 4 ne sont pas en involution. Donc les directrices de 2, 3, 4 forment un triangle, et la directrice de 4 coupe celle de 2 en un point $O_2$, celle de 3 en un point $O_3$.

Si l'on prend ensuite la directrice de 5, elle forme avec celles de 3 et 4 un trièdre ou un triangle. Si elle formait un triangle, elle serait dans le plan $OO_2O_3$

Fig. 1.




et couperait la directrice de 2, ce qui ne se peut, attendu que 2 et 5 ne sont pas en involution. Donc les directrices de 5, 3, 4 forment un trièdre, et, par suite, la directrice de 5 passe en $O_3$; de même la directrice de 6 passe en $O_2$.

Il ne reste plus qu'à prouver que les directrices de 5, 6, 1 se coupent en un même point $O_1$, c'est-à-dire forment un trièdre. Or, en effet, ces trois directrices se coupent deux à deux; elles forment donc un trièdre ou un triangle. On ne peut admettre qu'elles forment un triangle, car la directrice de 1, étant alors dans le plan des directrices de 5 et de 6, couperait la directrice de 4; et cela ne se peut, puisque 1 et 4 ne sont pas en involution. C'est donc un trièdre que forment les droites directrices des complexes 1, 6, 5.

Il est ainsi établi que les directrices des complexes coordonnés forment un tétraèdre, dans lequel les couples d'arêtes opposées sont les directrices des complexes 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6.

On serait arrivé évidemment au même résultat si l'on était parti de l'hypothèse que les directrices de 1, 2, 3 forment un triangle et non un trièdre. On aurait obtenu une configuration dualistique au point de vue des notations de celle que nous avons trouvée.

Ceci posé, affectons de l'indice 1 le point $O_1$, de l'indice 2 le point $O_2$, de l'indice 3 le point $O_3$ et de l'indice 4 le point $O$; puis considérons les coordonnées $r_{ik}$ définies au n° 4 et prises par rapport à ce tétraèdre.

La directrice du complexe

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | est la droite | $O\,O_1$ | ou | 41, |
| 2 | » | $O\,O_2$ | » | 42, |
| 3 | » | $O\,O_3$ | » | 43, |
| 4 | » | $O_2O_3$ | » | 23, |
| 5 | » | $O_3O_1$ | » | 31, |
| 6 | » | $O_1O_2$ | » | 12. |

Or l'équation

$$r_{ik}=0$$

est la condition de rencontre d'une droite avec la droite $ik$; donc, avec le système des $r_{ik}$, l'équation du complexe

| | | |
|---|---|---|
| 1 | sera | $r_{41}=0$, |
| 2 | » | $r_{42}=0$, |
| 3 | » | $r_{43}=0$, |
| 4 | » | $r_{23}=0$, |
| 5 | » | $r_{31}=0$, |
| 6 | » | $r_{12}=0$, |

et, comme les $r_{ik}$ sont des fonctions linéaires de $x_\rho$, on devra avoir

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=\alpha_1 r_{41},\\ x_2&=\alpha_2 r_{42},\\ x_3&=\alpha_3 r_{43},\\ x_4&=\alpha'_1 r_{23},\\ x_5&=\alpha'_2 r_{31},\\ x_6&=\alpha'_3 r_{12},\end{aligned}\right.$$

où les $\alpha$, $\alpha'$ sont des constantes. Si l'on forme

$$x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6=\alpha_1\alpha'_1\,r_{41}r_{23}+\alpha_2\alpha'_2\,r_{42}r_{31}+\alpha_3\alpha'_3\,r_{43}r_{12};$$

cette forme ne devant différer que par un facteur de

$$r_{41}r_{23} + r_{42}r_{31} + r_{43}r_{12},$$

on voit que

$$\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2 = \alpha_3\alpha'_3: \tag{2}$$

mais, et c'est là le point essentiel, les formules (1) montrent bien qu'aux facteurs $\alpha$ près, les $x_\rho$ sont des coordonnées $r_{ik}$ prises par rapport à un certain tétraèdre.

La présence des facteurs $\alpha$ est sans importance, puisque, eu égard aux relations (2), on peut les faire rentrer dans les $x$ sans changer la forme

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6.$$

En somme, effectuer une transformation qui ramène de la forme ci-dessus à cette même forme revient à changer le tétraèdre de référence.

Le lecteur prouvera aisément, comme application des formules qui définissent les $r_{ik}$ au n° **4**, que réciproquement tout changement de titres ou de coordonnées se traduit par une transformation linéaire des coordonnées $r_{ik}$.

**75.** Les autres coordonnées dont nous allons parler sont dues à M. Klein.

Supposons qu'on ait un système de coordonnées de l'espèce précédente, c'est-à-dire *tétraédriques,* et désignons dès lors ces coordonnées, comme au n° **4**, par le symbole $r_{ik}$. Nous aurons

$$r_{41}r_{23} + r_{42}r_{31} + r_{43}r_{12} = 0,$$

ou encore

$$(r_{41}+r_{23})^2 + (r_{42}+r_{31})^2 + (r_{43}+r_{12})^2 - (r_{41}-r_{23})^2 - (r_{42}-r_{31})^2 - (r_{43}-r_{12})^2 = 0.$$

La forme fondamentale, *si l'on a égard à la réalité,* est donc décomposable en six carrés, dont trois positifs et trois négatifs.

Effectuons la transformation *réelle*

$$\left\{\begin{aligned} r_{41}+r_{23} &= x_1,\\ r_{42}+r_{31} &= x_2,\\ r_{43}+r_{12} &= x_3,\\ r_{41}-r_{23} &= x_4,\\ r_{42}-r_{31} &= x_5,\\ r_{43}-r_{12} &= x_6, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et il viendra, pour la forme fondamentale,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2. \tag{4}$$

Mais des raisons de *symétrie,* qui se présentent aussi dans la théorie des coordonnées penta ou hexasphériques, font désirer de ramener (4) à une *somme* de carrés ([1]). Ce but ne peut être atteint évidemment que par une transformation imaginaire.

Par exemple, aux équations (3) on peut substituer les suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} r_{41}+r_{23}=x_1, & r_{41}-r_{12}=x_4\sqrt{-1}, \\ r_{42}+r_{31}=x_2, & r_{42}-r_{31}=x_5\sqrt{-1}, \\ r_{43}+r_{12}=x_3, & r_{43}-r_{12}=x_6\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

et, au lieu de (4), nous aurons

$$(6)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2,$$

formule symétrique, mais compliquée d'imaginaires.

Cependant, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, les six complexes coordonnés sont réels, attendu que $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont réels, et que $\sqrt{-1}$ est en facteur dans $x_4$, $x_5$, $x_6$.

Mais cette circonstance n'aura pas lieu *nécessairement* si nous effectuons *toute autre* transformation linéaire ramenant la forme fondamentale à une somme de six carrés.

**76.** Une forme quadratique, somme de carrés (mettons six carrés), étant donnée

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2,$$

on appelle *substitution orthogonale* toute transformation linéaire qui conserve à la forme son type, en sorte qu'en vertu des équations de transformation

$$x_i=\alpha_{i,1}y_1+\alpha_{i,2}y_2+\ldots+\alpha_{i,6}y_6 \qquad (i=1,2,\ldots,6),$$

on doit avoir

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_6^2.$$

En conséquence, en effectuant sur les variables $x_i$, définies avec précision par les formules (5), une substitution orthogonale quelconque, on aura le type général des coordonnées qui attribuent à la fonction $\omega$ la forme d'une somme de carrés.

Les coordonnées ainsi définies sont celles de M. Klein; mais il est aisé de

([1]) Consulter à cet égard les travaux de M. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces; Sur les groupes de points, de cercles,* et les *Leçons sur la théorie des surfaces.*

constater que ces coordonnées ne sont pas essentiellement distinctes des coordonnées, en apparence moins générales, que définissent les formules (5).

Ayons, en effet, des coordonnées $y_i$ ramenant $\omega$ à la forme

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_6^2,$$

et effectuons la transformation linéaire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1&=y_1+y_2\sqrt{-1}, & z_4&=y_1-y_2\sqrt{-1},\\ z_2&=y_4+y_4\sqrt{-1}, & z_5&=y_3-y_4\sqrt{-1},\\ z_3&=y_5+y_6\sqrt{-1}, & z_6&=y_5-y_6\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

l'emploi des variables $z$ ainsi définies ramènera la forme au type tétraédrique

$$z_1z_4+z_2z_5+z_3z_6;$$

en sorte que les $z_i$ sont les coordonnées $r_{ik}$ relativement à un certain tétraèdre, tandis que les $y$, d'après les formules (7), sont celles qui s'en déduiraient précisément par application des formules (5).

Il y a cependant une différence, car ici le tétraèdre auquel se rapportent les coordonnées $z_i$ *peut fort bien être imaginaire*. On conçoit que cette distinction n'ait rien de bien essentiel.

Par cette remarque, le passage d'un système de coordonnées de M. Klein à un autre système analogue peut se ramener au passage d'un système de coordonnées tétraédriques à un autre système tétraédrique, précédé et suivi de la transformation définie par les formules (5).

**77.** Le système de coordonnées de M. Klein présente une configuration remarquable dont nous allons exposer les principales propriétés.

Il y figure six complexes coordonnés $C_1, C_2, \ldots, C_6$, représentés par les équations respectives

$$x_1=0,\qquad x_2=0,\qquad \ldots,\qquad x_6=0.$$

Aucun de ces complexes n'est spécial, car la forme adjointe de $\omega(x)$ est ici

$$\Omega(a)=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_6^2;$$

elle n'est nulle pour aucun des complexes $C_i$.

La condition d'involution des deux complexes

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_6x_6=0,$$
$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_6x_6=0$$

s'écrit

$$a_1 b_1 + a_2 b_3 + \ldots + a_6 b_6 = 0.$$

On reconnaît ainsi que les complexes $C_i$, pris deux à deux, sont en involution ou orthogonaux. De là le nom de *sextuplement orthogonal* que l'on donne quelquefois à ce système de coordonnées. M. Klein a donné à l'ensemble des six complexes $C_i$ le nom de *système fondamental*.

Supposons que, réciproquement, les complexes coordonnés $x_1, x_2, \ldots, x_6$ soient en involution deux à deux.

La forme adjointe de la forme fondamentale s'écrivant

$$\Omega(a) = \Sigma A_{ij} a_i a_j,$$

l'involution des complexes

$$x_i = 0, \qquad x_j = 0$$

exige que $A_{ij} = 0$; tous les rectangles doivent manquer dans $\Omega(a)$, et aucun complexe coordonné ne peut être spécial, car, si $x_i = 0$ était spécial, on aurait

$$A_{ii} = 0,$$

et $\Omega(a)$ serait réductible à moins de six carrés. En faisant rentrer dans les $a$ des facteurs constants, on peut donc écrire

$$\Omega(a) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_6^2,$$

et alors on a

$$\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2;$$

le système de coordonnées est celui de M. Klein.

Ceci nous permet de compter le nombre de paramètres contenus dans un système fondamental.

Donnons-nous arbitrairement $C_1$, nous introduisons ainsi cinq paramètres, car un complexe linéaire dépend de cinq paramètres. Nous prendrons $C_2$ en involution avec $C_1$, mais quelconque d'ailleurs : nous introduisons ainsi quatre nouveaux paramètres. $C_3$ devra être en involution avec $C_1$ et $C_2$, mais il contient encore trois paramètres nouveaux. $C_4$ apportera seulement deux paramètres, car il est assujetti à être en involution avec $C_1$, $C_2$, $C_3$; $C_5$ contient enfin un seul paramètre, car il doit être en involution avec $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$. Quant à $C_6$, il est pleinement défini par la condition d'être en involution avec $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$. Nous avons ainsi construit un système fondamental, et, en vérité, *le plus général*. Nous avons dû introduire dans notre construction

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

paramètres. Tel est le nombre de paramètres que contient le système fondamental.

On observera que, après avoir pris $C_1, C_2, \ldots, C_p$ réels, nous pouvons prendre ensuite $C_{p+1}, \ldots, C_6$ avec des coefficients imaginaires quelconques, en sorte que, *dans un système fondamental, le nombre des complexes imaginaires est arbitraire*. Toutefois, il est impossible qu'il n'y en ait qu'un seul d'imaginaire, car si $C_1, C_2, \ldots, C_5$ sont réels, le complexe $C_6$ est forcément réel; mais il peut y en avoir deux, trois, quatre, cinq ou même six d'imaginaires.

Un tel système exige évidemment, pour être obtenu, une transformation imaginaire.

78. Prenons $p$ des complexes $C_i$, savoir $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et formons le système à $p$ termes

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p = 0;$$

il est clair que, $x_{p+1} = 0, \ldots, x_6 = 0$ étant $(6-p)$ complexes en involution avec $C_1, C_2, \ldots, C_p$, le système complémentaire du système précédent sera

$$\lambda_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \lambda_6 x_6 = 0.$$

De là de nombreuses conséquences, comme on va le voir.

Soit $C_{ij}$ la congruence commune aux complexes $C_i$ et $C_j$; elle n'est pas singulière, car son invariant est égal à l'unité. Je désigne par $\Delta_{ij}$ et $\Delta_{ji}$ ses directrices, qui sont toujours distinctes. J'observe que le système à deux termes formé des complexes qui contiennent la congruence $C_{ij}$ a pour équation

$$x_i + \lambda x_j = 0;$$

son invariant est égal à $1 + \lambda^2$; donc les complexes spéciaux du système auront pour équations

$$\sqrt{-1}\, x_i + x_j = 0,$$
$$\sqrt{-1}\, x_j + x_i = 0.$$

Les coordonnées des directrices de la congruence $C_{ij}$ seront toutes nulles, sauf $x_i$ et $x_j$, qui seront proportionnelles à $\pm\sqrt{-1}$ et à $1$.

Voici comment je fixe les notations :

Je désigne par $\Delta_{ij}$ la directrice dont les coordonnées sont $x_i = \sqrt{-1}$, $x_j = 1$, les autres coordonnées étant nulles; dès lors $\Delta_{ji}$ aura pour coordonnées $x_j = \sqrt{-1}$, $x_i = 1$, les autres coordonnées étant nulles.

On va voir combien est importante cette fixation des notations au point de vue de la correspondance à établir entre les propriétés de la configuration des six complexes fondamentaux et celles des permutations de six lettres.

Il y a quinze combinaisons de six indices deux à deux; il y a donc quinze congruences $C_{ij}$ et, par suite, trente droites $\Delta_{\rho\sigma}$.

On observera que : *toute droite* $\Delta_{ij}$ *appartient à tout complexe* $C_k$ *qui n'a avec elle aucun indice commun*. Il y a quatre de ces complexes $C_k$, $C_l$, $C_m$, $C_n$; ils ont en commun deux droites, $\Delta_{ij}$ et $\Delta_{ji}$.

Prenons deux congruences $C_{ij}$, $C_{kl}$ n'ayant aucun indice commun. *Leurs directrices forment un quadrilatère gauche*. En effet, $\Delta_{ij}$, par exemple, appartient, d'après ce qui précède, aux complexes $C_k$ et $C_l$: donc $\Delta_{ij}$ appartient à la congruence $C_{kl}$ et coupe, en conséquence, $\Delta_{kl}$ et $\Delta_{lk}$.

Supposons, au contraire, que $C_{ij}$ et $C_{ik}$ aient un indice commun $i$; dans ce cas, les directrices ne sauraient se couper; en effet, soient $l$, $m$, $n$ les trois indices autres que $i$, $j$, $k$; les complexes $C_l$, $C_m$, $C_n$ contiennent les directrices de $C_{ij}$, $C_{ik}$; donc ces directrices appartiennent à la demi-quadrique $Q_{lmn}$ commune à ces trois complexes.

Les complexes $C_i$, associés par trois, donnent lieu à vingt demi-quadriques. Ces demi-quadriques vont par couples de demi-quadriques complémentaires. Il est clair, en effet, que les deux demi-quadriques

$$Q_{ijk}, \quad Q_{lmn},$$

sans indice commun, sont complémentaires; elles sont portées par une même quadrique que je représente par le symbole

$$(Q_{ijk}, \quad Q_{lmn}).$$

Il y a donc dix de ces quadriques. M. Klein leur a donné le nom de *quadriques fondamentales*.

Deux demi-quadriques ayant un indice commun

$$Q_{ikl}, \quad Q_{imn}$$

n'ont en commun aucune droite, car si une droite commune existait, elle serait commune aux cinq complexes $C_i$, $C_k$, $C_l$, $C_m$, $C_n$. Les complémentaires de ces deux demi-quadriques sont

$$Q_{jmn}, \quad Q_{jkl},$$

et elles ont aussi un indice $j$ commun.

Considérons, au contraire, deux demi-quadriques ayant deux indices communs

$$Q_{ijk}, \quad Q_{ijl},$$

ces demi-quadriques ont en commun les droites $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$, directrices de $C_{mn}$.

Leurs complémentaires seront

$$Q_{mnl}, \quad Q_{mnk},$$

et ces complémentaires ont en commun $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$.

Donc les deux quadriques fondamentales

$$(Q_{ijk}, Q_{mnl}), \quad (Q_{ijl}, Q_{mnk})$$

se coupent suivant le quadrilatère gauche, formé par les droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$, $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$.

Si une congruence $C_{ij}$ n'a aucun indice commun avec une demi-quadrique $Q_{lmn}$, elle en a deux communs avec la demi-quadrique complémentaire $Q_{ijk}$ et ses directrices sont portées par cette demi-quadrique; elles sont donc tracées sur la quadrique

$$(Q_{ijk}, Q_{lmn}).$$

Ainsi, *pour qu'une congruence ait ses directrices sur une quadrique fondamentale, il faut et il suffit qu'elle ait deux ou zéro indices communs avec l'une ou l'autre des demi-quadriques qui constituent la quadrique fondamentale proposée.*

Mais il peut arriver que la congruence $C_{ij}$ ait un indice commun avec chacune de ces demi-quadriques

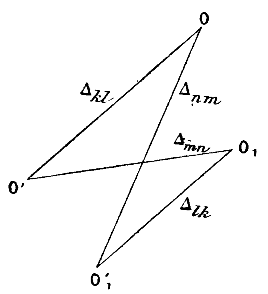
$$Q_{ikl}, \quad Q_{jmn};$$

on peut prouver que, *dans ce cas, les droites* $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$ *sont conjuguées par rapport à la quadrique fondamentale proposée*

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}).$$

En effet, $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$ forment un quadrilatère gauche sur cette qua-

Fig. 2.




drique; $\Delta_{kl}$ coupe $\Delta_{mn}$ et $\Delta_{nm}$ en deux points O, O', et $\Delta_{lk}$ coupe ces deux mêmes droites en $O_1$, $O'_1$. La droite $\Delta_{ij}$ coupe les quatre droites $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$, $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$;

donc, puisque $\Delta_{ij}$ n'est pas tracée sur la quadrique, il faut que les points où elle perce cette surface soient deux des quatre points O, O', $O_1$, $O'_1$; ils ne peuvent être que O, $O_1$ ou O', $O'_1$. De même pour $\Delta_{ji}$. Donc les droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$ sont précisément celles qui joignent O et $O_1$, O' et $O'_1$ : ce sont donc les diagonales du quadrilatère gauche. En conséquence, elles sont bien conjuguées par rapport à la quadrique proposée.

Mais notre raisonnement nous prouve quelque chose de plus.

Les droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$, $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$ sont les arêtes d'un tétraèdre.

Ainsi :

*Les directrices de trois congruences* $C_{ij}$, $C_{kl}$, $C_{mn}$ *sans indices communs forment un tétraèdre.*

Je désigne par $T(ij, kl, mn)$ ce tétraèdre.

On peut donner de ce fait une autre démonstration.

Je rappelle que le complexe spécial dont $\Delta_{\rho\sigma}$ est la directrice a pour équation

$$\sqrt{-1}\,x_\rho + x_\sigma = 0.$$

Posons, en conséquence, d'une façon générale,

$$Z_{\rho\sigma} = \sqrt{-1}\,x_\rho + x_\sigma.$$

On aura

$$\begin{aligned}
Z_{ij}Z_{ji} + Z_{kl}Z_{lk} + Z_{mn}Z_{nm} &= (\sqrt{-1}\,x_i + x_j)(\sqrt{-1}\,x_j + x_i) \\
&\quad + (\sqrt{-1}\,x_k + x_l)(\sqrt{-1}\,x_l + x_k) + (\sqrt{-1}\,x_m + x_n)(\sqrt{-1}\,x_n + x_m) \\
&= -(x_i x_j + x_k x_l + x_m x_n) \\
&\quad + \sqrt{-1}\,(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + x_n^2) + (x_i x_j + x_k x_l + x_m x_n) \\
&= \sqrt{-1}\,(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + x_n^2).
\end{aligned}$$

Les formules de transformation

$$\begin{aligned}
Z_{ij} &= \sqrt{-1}\,x_i + x_j, \\
Z_{ji} &= \sqrt{-1}\,x_j + x_i, \\
Z_{kl} &= \sqrt{-1}\,x_k + x_l, \\
Z_{lk} &= \sqrt{-1}\,x_l + x_k, \\
Z_{mn} &= \sqrt{-1}\,x_m + x_n, \\
Z_{nm} &= \sqrt{-1}\,x_n + x_m
\end{aligned}$$

attribuent donc à la formule quadratique $\omega(x)$ la forme *tétraédrique*

$$Z_{ij}Z_{ji} + Z_{kl}Z_{lk} + Z_{mn}Z_{nm},$$

et, par suite, conformément au n° 74, les axes des six complexes spéciaux

$$Z_{ij}=0, \quad Z_{ji}=0, \quad Z_{kl}=0, \quad Z_{lk}=0, \quad Z_{mn}=0, \quad Z_{nm}=0,$$

c'est-à-dire les directrices des congruences $C_{ij}$, $C_{kl}$, $C_{mn}$ forment un tétraèdre.

79. Disposons les directrices de ces congruences suivant le Tableau ci-après :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{ij}, & \Delta_{kl}, & \Delta_{mn}, \\ \Delta_{ji}, & \Delta_{lk}, & \Delta_{nm}; \end{array}$$

il est clair que toutes les droites de ce Tableau se coupent, sauf celles qui sont sur une même verticale, et qui constituent précisément les couples d'arêtes opposées du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

On peut, en groupant par trois les droites du Tableau précédent, sans en prendre jamais deux sur une verticale, procéder de plusieurs manières. On peut les prendre toutes trois sur la première ligne, ou deux sur la première et une sur la seconde, ou une sur la première et deux sur la seconde, ou bien enfin toutes les trois sur la seconde. Nous obtiendrons ainsi huit groupes différents de trois droites se coupant deux à deux et formant, en conséquence, soit trièdre, soit triangle.

Nous réalisons de la sorte les quatre trièdres et les quatre triangles de face de notre tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

Supposons, pour fixer les idées, que les droites placées dans la première ligne

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

forment un trièdre de sommet O; les trois autres droites, celles de la seconde ligne

$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{nm}),$$

formeront évidemment un triangle qui constitue la face opposée au point de concours des trois premières arêtes.

Si maintenant nous remplaçons dans le symbole

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

une des droites, par exemple $\Delta_{mn}$ par la droite de la seconde ligne $\Delta_{nm}$, qui est placée au-dessous, nous obtenons trois droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),$$

qui forment une des faces qui aboutissent au point O.

On voit donc qu'on obtiendra les quatre faces du tétraèdre en prenant un nombre impair (1 ou 3) de droites dans la seconde ligne et un nombre pair (2 ou zéro) dans la première.

On aura, au contraire, les quatre trièdres du tétraèdre en prenant un nombre impair (1 ou 3) de droites dans la première ligne et un nombre pair (2 ou zéro) dans la seconde.

Donc, si les droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

forment un trièdre, il en est de même des triples de droites

$$\begin{array}{l}(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),\\ (\Delta_{ji}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),\\ (\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{mn}),\end{array}$$

tandis que les triples de droites

$$\begin{array}{l}(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{nm}),\\ (\Delta_{ji}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn}).\\ (\Delta_{ij}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{mn}),\\ (\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm})\end{array}$$

forment des triangles.

On peut résumer ces faits dans un énoncé très laconique :

Soit le triple de droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn}).$$

Ces droites forment trièdre ou triangle; si l'on permute dans l'une de ces droites les deux indices, on a encore trois droites qui se coupent deux à deux et forment encore trièdre ou triangle, *seulement l'espèce de la configuration est changée, c'est-à-dire que si le premier triple formait triangle, le nouveau forme trièdre, et réciproquement.*

Nous appellerons *fondamentaux* les tétraèdres $T(ij, kl, mn)$. Il y a quinze de ces tétraèdres. Chacun est, en effet, caractérisé par une distribution en trois couples

$$(ij), \quad (kl), \quad (mn)$$

des indices $1, 2, \ldots, 6$. L'ordre de ces couples importe peu, ainsi que l'ordre des indices dans un couple.

Observons que l'indice 1 figure dans l'un de ces couples. Soit $i = 1$, alors $j$ peut être 2, 3, 4, 5 ou 6, ce qui nous fournit déjà cinq classes de groupements. L'indice associé à l'indice 1 étant choisi, il reste à distribuer les quatre autres indices en deux couples ; le nombre des dispositions possibles est égal à la moitié du nombre des combinaisons de quatre objets deux à deux, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\frac{4.3}{2} = 3$. Chaque classe comprend donc 3 dispositions ; il y a 5 classes, il y a donc $3 \times 5 = 15$ tétraèdres.

Considérons une directrice $\Delta_{ij}$ de la congruence $C_{ij}$ ; cette directrice est coupée par les directrices des congruences

$$C_{kl} \text{ et } C_{mn}, \quad C_{km} \text{ et } C_{ln}, \quad C_{kn} \text{ et } C_{lm}.$$

Nous associons par deux ces congruences, parce que les directrices de $C_{kl}$ et $C_{mn}$, par exemple, coupent $\Delta_{ij}$ aux deux mêmes points. Sur chaque droite $\Delta_{ij}$ nous avons donc trois couples de sommets de tétraèdres fondamentaux. *Ces trois couples, pris deux à deux, sont en relation harmonique.*

Par exemple, les deux points où $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$ coupent $\Delta_{ij}$ forment une proportion harmonique avec ceux où $\Delta_{ij}$ est coupée par $\Delta_{km}$ et $\Delta_{mk}$. En effet, les deux premiers points sont deux sommets du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, et les deux autres sont ceux où l'arête $\Delta_{ij}$, qui les porte, perce la quadrique

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}).$$

Donc, puisque le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est conjugué par rapport à cette conique, la propriété harmonique a bien lieu.

80. Nous avons vu que le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ a deux de ses couples d'arêtes opposées $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$, $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$ sur la quadrique

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}),$$

tandis que les arêtes opposées $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$ sont conjuguées par rapport à cette quadrique.

On a formé cette quadrique au moyen du groupement des indices en trois couples

$$ij, \quad kl, \quad mn,$$

en prenant pour $Q_{ikl}$ un indice dans un de ces couples (l'indice $i$), deux dans un autre ($k$ et $l$) et zéro dans le dernier ($m$ et $n$) ; $Q_{jmn}$ est formé de même en prenant un indice dans un des deux couples, deux dans un second et zéro dans le troisième.

Il y a visiblement six quadriques fondamentales qui contiennent ainsi chacune deux couples d'arêtes opposées de $T(ij, kl, mn)$ en effet ; contiennent tous les couples d'arêtes opposées, sauf $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$, les deux quadriques

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}), \qquad (Q_{imn}, \quad Q_{jkl}) ;$$

item, sauf $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$, les deux quadriques

$$(Q_{kij},\quad Q_{lmn}),\qquad (Q_{kmn},\quad Q_{lij});$$

item, sauf $\Delta_{mn}$, $\Delta_{nm}$, les deux quadriques

$$(Q_{mij},\quad Q_{nkl}),\qquad (Q_{mkl},\quad Q_{nij}).$$

Restent quatre autres quadriques fondamentales qui ne contiennent aucune arête du tétraèdre proposé : ce sont les quadriques que l'on obtient en prenant pour chacune des demi-quadriques composantes un des trois indices (et un seulement) dans chacun des couples

$$ij,\quad kl,\quad mn.$$

On trouve ainsi les quadriques fondamentales

$$\begin{array}{l}(Q_{ikm},\quad Q_{jln}),\\ (Q_{ilm},\quad Q_{jkn}),\\ (Q_{ikn},\quad Q_{jlm}),\\ (Q_{iln},\quad Q_{jkm}).\end{array}$$

Ces quatre quadriques admettent le tétraèdre $T(ij,\ kl,\ mn)$ comme tétraèdre conjugué commun.

Nous avons vu en effet qu'une quadrique fondamentale étant donnée, par exemple,

$$(Q_{ikm},\quad Q_{jln}),$$

toute congruence qui a un indice commun avec ses deux demi-quadriques composantes $Q_{ikm}$, $Q_{jln}$, par exemple $C_{ij}$, a ses deux directrices conjuguées par rapport à la quadrique.

Donc, eu égard précisément au mode de formation de nos quatre quadriques, on voit que les directrices de $C_{ij}$, $C_{kl}$, $C_{mn}$ forment autant de couples de droites conjuguées communes à ces quatre quadriques; ces droites formant le tétraèdre $T(ij,\ kl,\ mn)$, on voit bien que ce tétraèdre est conjugué à la fois par rapport à ces quatre quadriques.

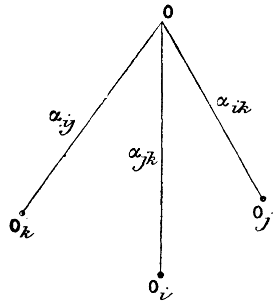
On peut rattacher cette propriété à une autre qui concerne trois complexes linéaires en involution.

Soient trois complexes linéaires $C_i$, $C_j$, $C_k$ en involution deux à deux; O un point de l'espace; $\pi_i$, $\pi_j$, $\pi_k$ ses plans polaires dans les trois complexes; $\alpha_{ij}$, $\alpha_{jk}$, $\alpha_{ik}$ les intersections de ces plans.

Sur la droite $\alpha_{ij}$ est le point $O_k$, pôle de $\pi_i$ dans le complexe $C_j$ et sur $\alpha_{ik}$ est le point $O_j$, pôle de $\pi_i$ dans le complexe $C_k$.

Puisque O et $O_k$ sont pôles d'un même plan $\pi_i$, dans $C_i$ et $C_j$ respectivement, il en résulte que $O_k$ et O (eu égard à l'involution) sont pôles d'un même plan dans ces deux complexes $C_i$ et $C_j$ respectivement (*fig.* 3).

Fig. 3.




Comme $\pi_j$ est le plan polaire de O dans $C_j$, on voit que $\pi_j$ est le plan polaire de $O_k$ dans $C_i$. Ainsi $O_k$ est pôle de $\pi_i$ dans $C_j$ et de $\pi_j$ dans $C_i$. De même le point $O_j$ est le pôle de $\pi_k$ dans $C_i$ et de $\pi_i$ dans $C_k$.

On verra de même qu'il existe sur $\alpha_{jk}$ un point $O_i$, qui est à la fois le pôle de $\pi_k$ dans $C_j$ et de $\pi_j$ dans $C_k$. Enfin le plan $\pi$ des points $O_i$, $O_j$, $O_k$ est le pôle de ces points dans chacun des complexes $C_i$, $C_j$, $C_k$ respectivement.

En effet, prouvons par exemple que $O_i$ est le pôle du plan $\pi$ dans le complexe $C_i$. Il suffit de prouver que $O_iO_k$ et $O_iO_j$ sont deux droites de ce complexe. Or, en effet, $O_iO_k$ est issue du point $O_k$ dans le plan $\pi_j$ polaire de $O_k$ dans $C_i$, et $O_iO_j$ est issue de $O_j$ dans le plan $\pi_k$ polaire de $O_j$ dans $C_i$.

Nous avons ainsi formé un tétraèdre tel que chaque plan de faces admet comme pôles dans les trois complexes précisément les trois sommets qu'il contient.

La loi de répartition des pôles et des plans polaires donne lieu au schéma suivant :

| | O | $O_i$ | $O_j$ | $O_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | ★ | $C_i$ | $C_j$ | $C_k$ |
| $\pi_i$ | $C_i$ | ★ | $C_k$ | $C_j$ |
| $\pi_j$ | $C_j$ | $C_k$ | ★ | $C_i$ |
| $\pi_k$ | $C_k$ | $C_j$ | $C_i$ | ★ |

Prenons un plan dans la colonne de gauche et un sommet dans la ligne du haut; par exemple $\pi_i$ et $O_j$, à l'intersection de la ligne $\pi_i$ et de la colonne $O_j$ se trouve $C_k$; c'est le complexe par rapport auquel $\pi_i$ et $O_j$ sont conjugués.

Si j'avais pris $\pi_i$ et $O_i$, je serais tombé sur une case vide; c'est qu'en effet $O_i$ est le sommet opposé à $\pi_i$, et, par suite, ce point et ce plan ne peuvent être conjugués dans aucun complexe.

Soient $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$ les directrices de la congruence $C_{ij}$ commune aux complexes $C_i$ et $C_j$. Ces droites coupent $OO_k$ et $O_iO_j$, car ces dernières droites appartiennent à la fois aux complexes $C_i$ et $C_j$. Mais il y a plus : puisque $O_i$ et $O_j$ sont les pôles d'un même plan $\pi$ dans les complexes $C_i$ et $C_j$ respectivement, on voit que le segment $O_iO_j$ est divisé harmoniquement par les droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$, en vertu des propriétés déjà démontrées des complexes en involution.

Or envisageons la demi-quadrique

$$Q_{ijk},$$

commune aux complexes $C_i$, $C_j$, $C_k$; la demi-quadrique complémentaire contient évidemment $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$; donc les points où la droite $O_iO_j$ coupe $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$ sont aussi ceux où elle coupe la quadrique qui porte la demi-quadrique $Q_{ijk}$. En conséquence, $O_i$ et $O_j$ sont conjugués par rapport à cette quadrique. Le même raisonnement s'applique aux autres arêtes du tétraèdre. On voit donc que :

*Le tétraèdre* $OO_iO_jO_k$ *est conjugué par rapport à la quadrique qui porte la demi-quadrique* $Q_{ijk}$.

Prenons, par exemple, le tétraèdre

$$T(ij, kl, mn)$$

et une des quatre quadriques fondamentales déjà considérées

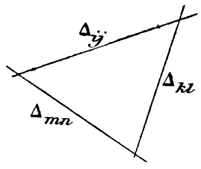
$$(Q_{ikm}, Q_{jln}).$$

Le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est tel que les plans de ses faces ont pour pôles, par rapport aux complexes $C_i$, $C_k$, $C_m$, les trois sommets situés dans chacun de ces plans.

Admettons, en effet, que $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$ forment un triangle; appelons $\pi$ le plan de ce triangle, toute droite issue du point $(\Delta_{ij}, \Delta_{kl})$ (intersection de $\Delta_{ij}$ et $\Delta_{kl}$) et tracée dans le plan $\pi$, coupe $\Delta_{mn}$ et $\Delta_{nm}$; elle appartient donc à $C_{mn}$ et, par suite, à $C_m$. Ainsi, le point $(\Delta_{ij}, \Delta_{kl})$ est le pôle de $\pi$ dans $C_m$; de même le point $(\Delta_{ij}, \Delta_{mn})$ est le pôle de $\pi$ dans $C_k$, et enfin $(\Delta_{mn}, \Delta_{kl})$ est le pôle de $\pi$ dans $C_i$. Le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est donc bien dans le cas du tétraèdre

$OO_iO_jO_k$ de tout à l'heure, il est donc conjugué par rapport à la quadrique qui porte $Q_{ikm}$ et $Q_{jln}$.

Fig. 4.




Nous compléterons ce qui concerne l'ensemble de ces quatre quadriques, qui admettent comme conjugué le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ en prouvant à leur égard une propriété intéressante.

*Chacune de ces quadriques est à elle-même sa propre polaire réciproque par rapport à une quelconque des trois autres.*

On observe d'abord que ces quatre quadriques se coupent deux à deux suivant quatre droites. Prenons-en deux quelconques

$$(Q_{ikm}, \quad Q_{jln}),$$
$$(Q_{ilm}, \quad Q_{jkn});$$

elles se coupent suivant les directrices de $C_{im}$ et de $C_{jn}$, qui forment un tétraèdre avec $\Delta_{kl}$ et $\Delta_{lk}$.

Donc $\Delta_{kl}$ et $\Delta_{lk}$ coupent ces deux quadriques aux mêmes points. Prenons alors une des quatre autres arêtes du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, par exemple $\Delta_{ij}$, les deux segments que ces deux quadriques déterminent sur $\Delta_{ij}$ sont ceux qu'y déterminent les directrices des congruences $C_{km}$ et $C_{kn}$; d'après la remarque qui termine le n° 79, ces deux couples de points sont en relation harmonique.

Voilà donc deux quadriques $Q$, $Q'$ qui ont un tétraèdre conjugué commun $T(ij, kl, mn)$, qui se coupent suivant quatre droites formant un quadrilatère gauche dont $\Delta_{kl}$, $\Delta_{lk}$ sont les diagonales et qui, enfin, déterminent sur les quatre autres arêtes du tétraèdre envisagé, des couples de segments en relation harmonique.

Rapportée au tétraèdre conjugué commun, l'équation de $Q$ sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0,$$

et si $X = 0$, $Y = 0$ sont les équations de $\Delta_{kl}$, celles de $\Delta_{lk}$ seront

$$Z = 0, \qquad T = 0.$$

Les propriétés harmoniques démontrées prouvent alors que $Q'$ aura une équation de la forme

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 = 0,$$

et l'on reconnaît bien ainsi que les deux quadriques sont leurs propres polaires réciproques l'une par rapport à l'autre.

81. Pour nous représenter plus complètement la configuration des droites $\Delta_{ij}$, on peut introduire un symbole qui met en évidence une intéressante correspondance entre les propriétés de cette configuration et celles des permutations de six lettres.

Trois droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$ sans indice commun forment toujours un hyperfaisceau (trièdre ou triangle).

Je représente cet hyperfaisceau par la notation

$$(ij,\ kl,\ mn).$$

Il y a autant de symboles de cette forme qu'il y a de permutations de six lettres; soit 720. Mais j'observe qu'on peut permuter les couples d'indices $ij$, $kl$, $mn$ sans que le symbole cesse de s'appliquer à l'ensemble des trois droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$ : les six permutations

$$\begin{array}{lll}(ij,\ kl,\ mn), & (kl,\ ij,\ mn), & (mn,\ kl,\ ij),\\ (ij,\ mn,\ kl), & (mn,\ ij,\ kl), & (kl,\ mn,\ ij)\end{array}$$

s'appliquent aux trois mêmes droites. Nous n'avons donc, en réalité, que $\frac{720}{6} = 120$ hyperfaisceaux. Soixante sont des gerbes (sommets de tétraèdres fondamentaux). Soixante sont des plans (faces du tétraèdre).

Il s'agit d'établir une règle pour distinguer.

Il résulte d'abord de ce qui a été dit au n° 79 que, si dans le symbole

$$(ij,\ kl,\ mn)$$

on permute $i$ et $j$, ou bien $k$ et $l$, ou bien $m$ et $n$, la nature de l'hyperfaisceau change.

On peut même ajouter que, en effectuant plusieurs fois ces permutations, on obtient huit hyperfaisceaux, dont quatre sont les sommets du tétraèdre fondamental

$$\mathrm{T}(ij,\ kl,\ mn)$$

et les quatre autres les faces de ce même tétraèdre.

J'ajoute maintenant que, *quels que soient* les deux indices que l'on permute dans le symbole $(ij,\ kl,\ mn)$, l'hyperfaisceau qu'il représente change *toujours* de nature.

Comme la permutation de deux indices quelconques résulte d'un nombre impair de permutations d'indices successifs (*voir* la théorie des déterminants), et que le fait est déjà établi pour les deux indices d'un même couple $ij$, $kl$, $mn$, il suffit d'établir qu'il est vrai pour deux indices consécutifs de deux couples différents, par exemple, pour $m$ et $l$.

Considérons donc l'hyperfaisceau

$$(ij,\ km,\ ln)$$

et établissons qu'il est d'espèce différente de celle de l'hyperfaisceau primitif

$$(ij,\ kl,\ mn).$$

Cherchons pour cela si ces hyperfaisceaux ont des droites communes.

L'hyperfaisceau $(ij,\ kl,\ mn)$ est formé des droites qui coupent $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$, les droites de cet hyperfaisceau vérifient donc les équations

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= x_i\sqrt{-1} + x_j = 0, \\ Z_{kl} &= x_k\sqrt{-1} + x_l = 0, \\ Z_{mn} &= x_m\sqrt{-1} + x_n = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = x_j, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_l, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = x_n. \tag{8}$$

Pareillement, l'hyperfaisceau $(ij,\ km,\ ln)$ est défini par les équations

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = x_j, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_m, \qquad \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = x_n. \tag{9}$$

L'ensemble des équations (8) et (9) se réduit à

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}. \tag{10}$$

Le rapport $\frac{x_j}{x_i}$ est déterminé, de même que les rapports $\frac{x_l}{x_n}$, $\frac{x_m}{x_n}$, $\frac{x_n}{x_k}$, mais le rapport $\frac{x_k}{x_i}$ demeure arbitraire. Nos deux hyperfaisceaux ont, dès lors, en commun un faisceau plan de droites ; cela exige évidemment qu'ils soient d'espèces contraires, et même, de plus, il faut que ces hyperfaisceaux soient *unis,* c'est-à-dire que celui qui est une gerbe ait son sommet dans le plan de celui qui consiste en un système plan de droites. Donc on peut affirmer que si, dans le symbole

$$(ij,\ kl,\ mn),$$

on permute deux indices consécutifs *quelconques,* l'hyperfaisceau qu'il représente change d'espèce.

Comptons, dès lors, comme on le fait dans la théorie des déterminants, le nombre d'inversions présentées par la permutation

$$(ij,\ kl,\ mn);$$

comme la permutation de deux indices consécutifs change la parité du nombre des inversions, on peut dire ceci :

*Deux symboles représentent deux hyperfaisceaux de même espèce ou d'espèces différentes, selon que les deux nombres d'inversions qu'ils présentent sont de même parité ou de parités différentes.*

Il est bien évident que rien n'indique *a priori* quel genre de parité s'applique aux gerbes ou aux systèmes plans, mais *il suffit que le choix se trouve fixé dans un symbole,* par exemple dans

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6),$$

pour que l'on sache à quoi s'en tenir pour tous les autres. Ainsi, si le symbole précédent convient à une gerbe, comme il contient zéro inversions, tous les symboles qui contiennent un nombre pair d'inversions conviennent à des gerbes; aux systèmes plans, au contraire, conviennent ceux qui en présentent un nombre impair.

L'introduction de cette représentation dans l'étude de la configuration du système fondamental y jette, croyons-nous, un certain jour, elle marque un lien entre cette configuration et le système des permutations que l'on peut former avec six indices distincts.

**82.** Les soixante sommets et les soixante faces des quinze tétraèdres fondamentaux offrent un groupement remarquable.

Considérons les tétraèdres

$$\mathrm{T}(ij,\ kl,\ mn),\quad \mathrm{T}(ij,\ km,\ ln),\quad \mathrm{T}(ij,\ kn,\ lm)$$

que l'on obtient en partageant de toutes les façons possibles les indices $k$, $l$, $m$, $n$ en deux couples (ce qui donne trois dispositions). Ces trois tétraèdres ont visiblement en commun le couple d'arêtes opposées $\Delta_{ij}$, $\Delta_{ji}$.

Sur $\Delta_{ij}$, par exemple, il y a donc trois couples de sommets appartenant chacun à l'un des trois tétraèdres. Ces couples sont deux à deux harmoniques les uns par rapport aux autres. En effet, le trièdre $\mathrm{T}(ij,\ kl,\ mn)$ est conjugué par rapport à la quadrique

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_{ikm},\ \mathrm{Q}_{jln}),$$

et celle-ci contient deux couples d'arêtes opposées du tétraèdre $\mathrm{T}(ij,\ km,\ ln)$.

La droite $\Delta_{ij}$ coupe cette quadrique Q en deux points qui sont précisément les deux sommets de $T(ij, km, ln)$ portés par $\Delta_{ij}$; ces points divisent donc harmoniquement l'arête $\Delta_{ij}$ du premier tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

On démontrera de même que les trois couples de face des trois tétraèdres

$$T(ij, kl, mn), \quad T(ij, km, ln), \quad T(ij, kn, lm)$$

qui passent par $\Delta_{ij}$ se divisent harmoniquement.

Supposons que les droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$ forment un trièdre; nous appellerons O leur point de concours. Le trièdre de ces droites appartient au tétraèdre $T(ij, kl, mn)$. Par l'arête $\Delta_{ij}$ passent, outre les faces de ce tétraèdre, un couple de faces du tétraèdre $T(ij, km, ln)$ et un couple de faces du tétraèdre $T(ij, kn, lm)$.

Les symboles de ces faces sont aisés à former.

Soit d'abord

$$(ij, kl, mn)$$

le symbole du trièdre des droites $\Delta_{ij}$, $\Delta_{kl}$, $\Delta_{mn}$, les symboles

$$(ij, km, ln),$$
$$(ij, mk, nl)$$

sont ceux des deux faces du tétraèdre $T(ij, km, ln)$, qui contiennent $\Delta_{ij}$; pareillement,

$$(ij, kn, ml),$$
$$(ij, nk, lm)$$

sont les symboles des deux faces du tétraèdre $T(ij, kn, ml)$, qui contiennent $\Delta_{ij}$.

La règle de la parité des permutations, donnée au numéro précédent, permet de former sans hésitation ces quatre symboles.

Nous aurons de même, relativement à $\Delta_{kl}$,

$$\left.\begin{array}{l}(kl, im, jn)\\(kl, mi, nj)\end{array}\right\}\text{ faces de } T(kl, im, jn) \text{ menées par } \Delta_{kl},$$

$$\left.\begin{array}{l}(kl, in, mj)\\(kl, ni, jm)\end{array}\right\}\text{ faces de } T(kl, in, mj) \text{ menées par } \Delta_{kl};$$

et enfin, relativement à $\Delta_{mn}$,

$$\left.\begin{array}{l}(mn, ki, lj)\\(mn, ik, jl)\end{array}\right\}\text{ faces de } T(mn, ki, lj) \text{ menées par } \Delta_{mn},$$

$$\left.\begin{array}{l}(mn, kj, il)\\(mn, jk, li)\end{array}\right\}\text{ faces de } T(mn, kj, il) \text{ menées par } \Delta_{mn}.$$

Nous voyons ainsi que, par tout sommet O d'un tétraèdre fondamental T $(ij, kl, mn)$, il passe, outre les trois faces de ce tétraèdre, douze des faces de six autres tétraèdres fondamentaux, ayant chacun avec le tétraèdre proposé un couple d'arêtes opposées commun.

J'ajoute que *ces douze faces se coupent suivant seize droites* issues de O; c'est-à-dire que tout plan parmi les quatre menés par $\Delta_{ij}$, et tout plan parmi les quatre menés par $\Delta_{kl}$, se coupent dans l'un des quatre plans menés par $\Delta_{mn}$.

Prenons, par exemple, la face

$$(ij,\ km,\ ln)$$

menée par $\Delta_{ij}$, et associons-la aux quatre qui sont menées par $\Delta_{kl}$.

Nous pourrons former les quatre groupes :

$$\text{I.}\qquad \begin{cases} (ij,\ km,\ ln), \\ (kl,\ im,\ jn), \\ (mn,\ kj,\ il); \end{cases}$$

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} (ij,\ km,\ ln), \\ (kl,\ nj,\ mi), \\ (mn,\ li,\ jk); \end{cases}$$

$$\text{III.}\qquad \begin{cases} (ij,\ km,\ ln), \\ (kl,\ mj,\ in), \\ (mn,\ lj,\ ki); \end{cases}$$

$$\text{IV.}\qquad \begin{cases} (ij,\ km,\ ln), \\ (kl,\ ni,\ jm), \\ (mn,\ ik,\ jl). \end{cases}$$

Dans ces groupes, le premier plan est toujours celui de la face $(ij, km, ln)$ menée par $\Delta_{ij}$; le second plan est l'un des quatre menés par $\Delta_{kl}$; quant au troisième plan de chaque groupe, c'est l'un des quatre menés par $\Delta_{mn}$; dans chaque groupe, ce troisième plan dépend des trois premiers.

Il est aisé de constater que les trois plans d'un même couple ont en commun une droite; voici la représentation de ces droites pour chacun des quatre triples de faces ci-dessus :

$$\text{I.}\qquad \frac{x_i}{-1} = \frac{x_j}{\sqrt{-1}} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

$$\text{II.}\qquad \frac{x_i}{+1} = \frac{x_j}{-\sqrt{-1}} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

III. $$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

IV. $$\frac{x_i}{-\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{-1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}.$$

Nous avons de la sorte quatre droites sur la face $(ij, km, ln)$ menée par $\Delta_{ij}$, et, par suite, il y a bien autour de O seize de ces droites.

On peut donner un procédé régulier de formation des coordonnées de ces droites.

Observons que, faisant partie de la gerbe

$$(ij, kl, mn),$$

ces seize droites vérifient forcément les équations

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1}, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

qu'on peut écrire couramment à la simple lecture du symbole $(ij, kl, mn)$.

Chacune des droites de la gerbe sera donc définie par un système de valeurs des deux rapports

$$\frac{x_j}{x_n}, \quad \frac{x_l}{x_n}.$$

Or ces rapports ne peuvent être que $+1$, $-1$, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$; car, dans tous les hyperfaisceaux que nous considérons, les équations que nous aurons à écrire seront toujours de la forme

$$x_\alpha = \varepsilon . x_\beta,$$

où $\varepsilon$ égale l'une des quatre quantités ci-dessus, et, comme la multiplication ou la division ne fait que permuter ces quantités, on voit bien que

$$\frac{x_j}{x_n}, \quad \frac{x_l}{x_n}$$

ne pourront être que $+1$, $-1$, $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$.

Cela nous donne donc seize combinaisons possibles, et, comme il nous faut seize droites, ces seize combinaisons seront toutes réalisables.

De la sorte, on obtient les seize droites de la gerbe en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_6$ proportionnelles de toutes les façons possibles à $+1$, $-1$, $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, *de telle sorte cependant que les équations de la gerbe soient* SAUVEGARDÉES,

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1}, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}.$$

On observe que, pour les quatre droites situées dans *un même* plan mené par $\Delta_{ij}$, les rapports des coordonnées $x_k$, $x_l$, $x_m$, $x_n$ sont les mêmes.

J'appellerai $\Xi$ les droites que nous venons de définir.

Nous aurons un résultat analogue si le symbole

$$(ij,\ kl,\ mn)$$

convient à un système plan. Il y aura douze sommets de tétraèdres fondamentaux situés dans ce plan, en outre des trois sommets de la face, et ces sommets seront distribués par quatre sur les côtés de cette face ; ils seront, de plus, par groupes de trois sur seize droites $\Xi'$, dont la représentation analytique est la même que celle des seize droites $\Xi$.

Mais il y a plus, *ces nouvelles droites $\Xi'$ que nous venons d'obtenir ne forment pas un ensemble différent de celui formé par les droites $\Xi$.*

Considérons, par exemple, la droite commune aux trois systèmes plans

$$(ij,\ km,\ ln),$$
$$(kl,\ im,\ jn),$$
$$(mn,\ kj,\ il),$$

laquelle a pour coordonnées

$$\frac{x_i}{-1} = \frac{x_j}{\sqrt{-1}} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1};$$

elle passe déjà par le sommet de la gerbe

$$(ij,\ kl,\ mn);$$

on constate qu'elle fait aussi partie des gerbes

$$(il,\ km,\ jn),$$
$$(im,\ kj,\ ln).$$

Ainsi, toute droite $\Xi$ qui est commune à trois plans de faces sert de jonction à trois sommets ([1]).

Le nombre de ces droites est, dès lors, très facile à évaluer. Il y a 60 sommets qui portent chacun 16 droites $\Xi$; mais comme, d'après ce dénombrement, chaque droite est comptée trois fois puisque chacune contient trois sommets, il

---

([1]) On entrevoit la possibilité d'établir une correspondance complète entre les groupes de permutations de six lettres et les propriétés de la configuration du système fondamental. Je me contenterai ici de ces indications générales, me réservant de développer plus à fond ces remarques nouvelles dans un écrit particulier.

y aura

$$\frac{60.16}{3} = 320$$

droites $\Xi$.

83. On peut joindre deux à deux 60 points d'un nombre de manières égal à

$$\frac{60.59}{2} = 1770.$$

Mais chacune des droites $\Xi$ représente à elle seule 3 droites de jonction des sommets deux à deux, soit 960 droites.

Il reste donc $1770 - 960 = 810$ droites de jonction deux à deux.

Or, prenons les arêtes $\Delta_{ij}$; il y a sur chacune six sommets de tétraèdres; chacune représente donc un nombre de droites de jonction deux à deux égal à

$$\frac{5.6}{2} = 15,$$

et, comme il y a 30 de ces arêtes, cela nous fait $30 \times 15 = 450$ droites de jonction. Il en reste donc

$$810 - 450 = 360,$$

qui ne sont pas des arêtes, ni des droites $\Xi$ et qui joignent les sommets deux à deux.

Il est aisé de voir comment on obtiendra ces 360 droites nouvelles, que je désigne par $\Xi_0$.

Prenons le sommet $(ij, kl, mn)$, qui est à la rencontre des droites $\Delta_{ij}, \Delta_{kl}, \Delta_{mn}$.

Il y a six tétraèdres

$$\begin{array}{ll} T(ij, km, ln), & T(ij, kn, lm), \\ T(kl, im, jn), & T(kl, in, jm), \\ T(mn, ik, jl), & T(mn, il, jk), \end{array}$$

qui ont, avec le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, chacun un couple d'arêtes communes.

Les deux premiers ont chacun deux sommets sur $\Delta_{ji}$, ce qui fait quatre, et de même les deux seconds en donneront quatre sur $\Delta_{lk}$ et les deux derniers quatre autres sur $\Delta_{nm}$. En tout, $3 \times 4 = 12$ points.

Cela posé, joignons le sommet

$$(ij, kl, mn)$$

du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ à ces douze sommets.

Nous aurons ainsi douze droites $\Xi_0$, et nous les aurons toutes de cette manière, car le nombre des droites ainsi obtenu est exactement égal à

$$\frac{60 \times 12}{2} = 360.$$

On obtient donc les droites $\Xi_0$ en joignant un sommet d'un tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, pris sur une arête $\Delta_{ij}$ à un sommet, pris sur l'arête opposée $\Delta_{ji}$, d'un autre tétraèdre fondamental assujetti à avoir $\Delta_{ij}$ et $\Delta_{ji}$ pour arêtes opposées.

On ne manquera pas d'observer que toute droite $\Xi_0$ est aussi l'intersection de deux plans de faces des tétraèdres ci-dessus considérés.

Cherchons à représenter les droites $\Xi_0$. Nous allons, pour cela, prendre un hyperfaisceau

$$(ij,\ kl,\ mn),$$

disons une gerbe pour préciser; prendre sur $\Delta_{ji}$ un sommet de l'un des tétraèdres $T(ij, kn, lm)$, $T(ij, km, ln)$ et joindre au sommet de la gerbe proposée.

Les gerbes du tétraèdre $T(ij, kn, lm)$, qui contiennent $\Delta_{ij}$ sont les deux suivantes :

$$(ji,\ ml,\ kn),$$
$$(ji,\ lm,\ nk);$$

les gerbes du tétraèdre $T(ij, km, ln)$, qui contiennent $\Delta_{ij}$, sont de même

$$(ji,\ km,\ ln),$$
$$(ji,\ mk,\ nl).$$

Des calculs très simples nous donnent : droite commune aux gerbes $(ij, kl, mn)$, $(ji, ml, kn)$

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1};$$

droite commune aux gerbes $(ij, kl, mn)$, $(ji, lm, nk)$

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{-\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{-1};$$

droite commune aux gerbes $(ij, kl, mn)$, $(ji, km, ln)$

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{1} = \frac{x_n}{-\sqrt{-1}};$$

droite commune aux gerbes $(ij, kl, mn)$, $(ji, mk, ln)$

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{-1} = \frac{x_n}{\sqrt{-1}}.$$

On voit aisément que toutes les droites $\Xi_0$ s'obtiendront en annulant deux des coordonnées, et prenant les quatre autres de toutes les façons possibles proportionnelles à l'une des quatre quantités $+1$, $-1$, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, de telle sorte cependant que, si $x_i = 0$, $x_j = 0$, on ait deux relations de la forme

$$\frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_l, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = x_n.$$

84. Nous ne quitterons pas ce sujet sans mettre en évidence une propriété fort curieuse des tétraèdres fondamentaux.

Prenons un sommet $(ij, kl, mn)$ du tétraèdre T $(ij, kl, mn)$. Il y a huit tétraèdres qui n'ont avec lui aucune arête commune. Prenons l'un de ces tétraèdres, par exemple

$$\mathrm{T}\,(ik, jm, ln),$$

et joignons le point $(ij, kl, mn)$ aux sommets de ce tétraèdre; nous aurons ainsi quatre des seize droites $\Xi$; sur chacune de ces quatre droites il y a donc encore un sommet, ce qui fait quatre sommets; je dis que ces quatre sommets appartiennent à un même tétraèdre fondamental.

Les quatre sommets du tétraèdre T $(ik, jm, ln)$ ont en effet pour symboles

$$\begin{array}{ll} (ik, jm, ln), & (ik, mj, nl), \\ (ki, mj, ln), & (ki, jm, nl). \end{array}$$

Or on constate aisément que les trois points

$$(ij, kl, mn), \qquad (ik, jm, ln), \qquad (km, ni, jl)$$

sont en ligne droite; de même les points

$$\begin{array}{llll} (ij, kl, mn), & (ik, mj, nl) & \text{et} & (mk, in, jl), \\ (ij, kl, mn), & (ki, mj, ln) & \text{et} & (km, lj, in), \\ (ij, kl, mn), & (ki, jm, nl) & \text{et} & (mk, ni, lj). \end{array}$$

On voit bien que les quatre nouveaux points sont les sommets du tétraèdre

$$\mathrm{T}\,(mk, in, lj).$$

Donc : *relativement à chacun des sommets d'un tétraèdre fondamental* T $(ij, kl, mn)$, *les huit tétraèdres fondamentaux qui n'ont avec le précédent aucune arête commune sont deux à deux homologiques.*

De là on peut conclure que trois tétraèdres fondamentaux, qui n'ont en commun aucune arête, forment un système *desmique* de trois tétraèdres, c'est-à-dire que les faces de l'un passent par les seize droites de rencontre des faces des deux autres, et que les sommets de l'un sont sur les seize droites de jonction des sommets des deux autres.

On pourra consulter, au sujet de ces systèmes desmiques, un travail de M. Stéphanos inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XIV de la collection.

85. Le système fondamental donne lieu à une remarquable correspondance entre les points et les plans de l'espace.

Considérons d'abord un plan $\pi$; *les pôles de ce plan dans les six complexes fondamentaux sont sur une même conique.*

En effet, soit $O_i$ le pôle du plan $\pi$ dans le complexe $C_i$, et prenons trois de ces points $O_1$, $O_2$, $O_3$. Les complexes $C_1$, $C_2$, $C_3$ permettent, comme on sait, d'associer à ces trois points un quatrième point $O$ tel que le plan $OO_2O_3$ soit le plan polaire de $O$ dans $C_3$; $OO_3O_1$ le plan polaire de $O$ dans $C_2$; $OO_1O_2$ le plan polaire de $O$ dans $C_0$ (*voir* n° 80). Le tétraèdre $OO_1O_2O_3$ est conjugué par rapport à la quadrique $Q$ qui porte la demi-quadrique $Q_{123}$. Donc le triangle $O_1O_2O_3$ est conjugué par rapport à la conique $K$ trace de $Q$ sur le plan $\pi$. Or la quadrique $Q$ porte aussi la demi-quadrique $Q_{456}$; donc, le triangle $O_4O_5O_6$ est aussi conjugué par rapport à la conique $K$. Les deux triangles $O_1O_2O_3$ et $O_4O_5O_6$ étant conjugués par rapport à une même conique, leurs sommets sont sur une même conique.

On peut même ajouter que leurs côtés touchent une même conique.

Pareillement : Si l'on distribue en deux trièdres les plans polaires $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$, $\pi_5$, $\pi_6$ d'un même point $O$ dans les six complexes fondamentaux, les deux trièdres sont conjugués par rapport à un même cône du second degré; leurs arêtes sont sur un même cône du second degré et *leurs faces touchent un troisième cône de second degré.*

86. Conservons les notations précédentes.

Le point $O_i$ et le point $O_j$ étant les pôles d'un même plan $\pi$ dans $C_i$ et $C_j$ respectivement, le point $O_j$ et le point $O_i$ sont aussi les pôles d'un même plan $\pi_{ij}$ par rapport à $C_i$ et à $C_j$. Ce plan $\pi_{ij}$ passe par la droite $O_iO_j$; il y a quinze plans $\pi_{ij}$.

Prenons les trois plans

$$\pi_{ij}, \quad \pi_{jk}, \quad \pi_{ki};$$

le point $O_{ijk}$ où ils se coupent est celui que nous avons considéré plus haut et qui est le pôle

$$\begin{array}{lll} \text{de } \pi_{ij} & \text{dans} & C_k, \\ \text{»} \quad \pi_{jk} & \text{»} & C_i, \\ \text{»} \quad \pi_{ki} & \text{»} & C_j. \end{array}$$

Prenons maintenant les trois autres indices $l$, $m$, $n$. Nous aurons de même trois plans $\pi_{lm}$, $\pi_{mn}$, $\pi_{nl}$ se coupant en un point $O_{lmn}$.

Mais il est clair que $O_{ijk}$ et $O_{lmn}$ coïncident. Nous savons, en effet, que les tétraèdres $O_{ijk}O_iO_jO_k$, $O_{lmn}O_lO_mO_n$ sont conjugués par rapport à la quadrique Q, qui contient les demi-quadriques complémentaires $Q_{ijk}$, $Q_{lmn}$. Donc $O_{ijk}$ et $O_{lmn}$ sont les pôles d'un même plan $\pi$ par rapport à Q.

Il y a $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ combinaisons d'indices trois à trois, et, par suite, il y a vingt tétraèdres

$$O_{ijk}O_iO_jO_k,$$

mais il n'y a que dix points $O_{ijk}$, puisque $O_{ijk}$ *est identique à* $O_{lmn}$.

D'après cela, on voit que le point $(O_{ijk} = O_{lmn})$ est le pôle

du plan $\pi_{jk}$ dans $C_i$,
» $\pi_{ki}$ » $C_j$,
» $\pi_{ij}$ » $C_k$,
» $\pi_{mn}$ » $C_l$,
» $\pi_{nl}$ » $C_m$,
» $\pi_{lm}$ » $C_n$.

Nous avons, en résumé, une configuration de seize points

$$O_1,\quad O_2,\quad O_3,\quad O_4,\quad O_5,\quad O_6\quad (O_{123} = O_{456}),\quad (O_{134} = O_{246})\quad (O_{124} = O_{356}),\quad \ldots,$$

et de seize plans

$$\pi,\quad \pi_{12},\quad \pi_{13},\quad \pi_{14},\quad \ldots$$

tels que les pôles des seize plans dans les six complexes fondamentaux font partie des seize points, et que les plans polaires des seize points font partie des seize plans.

Chacun des seize plans contient ainsi six des seize points, et par chacun des seize points passent six des seize plans.

Si l'on prend les pôles de l'un des seize plans par rapport aux dix quadriques fondamentales, on obtient les dix points du système non situés dans ce plan, et si l'on prend les plans polaires d'un des seize points par rapport aux quadriques fondamentales, on obtient les dix plans du système qui ne passent pas par ce point.

**87.** On peut rattacher cette configuration remarquable à une importante correspondance à laquelle donne lieu le système fondamental.

Nous venons de voir que tout plan $\pi$ se trouve faire partie d'une configuration de seize plans et de seize points qu'il définit complètement. Nous pouvons dire, en conséquence, que la connaissance d'une gerbe définit une configuration de seize gerbes et de seize systèmes plans dont fait partie la gerbe proposée.

Plus généralement : tout hyperfaisceau fait partie d'une configuration de trente-deux hyperfaisceaux, dont seize sont des gerbes et seize sont des systèmes plans.

Soit une droite $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$; en désignant par $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_6$ le symbole $+1$ ou le symbole $-1$, les expressions

$$\varepsilon_1 x_1, \quad \varepsilon_2 x_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 x_6$$

sont les coordonnées de $2^5 = 32$ droites, parmi lesquelles les droites $x_1, x_2, \ldots, x_6$, et qui forment avec elle une configuration spéciale. D'abord, deux droites de la configuration ne se coupent *généralement* pas, car

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_6 x_6^2$$

ne peut être une conséquence de $x_1^2 + \ldots + x_6^2 = 0$, que si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_6$, auquel cas les deux droites ne sont pas distinctes.

Il saute aux yeux que, si la droite $x_1, x_2, \ldots, x_6$ engendre un hyperfaisceau

$$x_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu,$$

il en est de même des trente et une autres droites de la configuration. On a, pour ces droites

$$x'_i = \varepsilon_i (a_i \lambda' + b_i \mu' + c_i \nu').$$

Les hyperfaisceaux sont-ils de même nature?

Supposons que le nombre des $\varepsilon$ positifs soit pair, par exemple $2\mu$, il y en aura $6 - 2\mu$ négatifs; on peut toujours, grâce à un changement de tous les signes, supposer $2\mu = 4$, car si $2\mu = 2$, on a $6 - 2\mu = 4$.

Soit donc

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_1 \lambda' + b_1 \mu' + c_1 \nu', \\
x'_2 &= a_2 \lambda' + b_2 \mu' + c_2 \nu', \\
x'_3 &= a_3 \lambda' + b_3 \mu' + c_3 \nu', \\
x'_4 &= a_4 \lambda' + b_4 \mu' + c_4 \nu', \\
-\ x'_5 &= a_5 \lambda' + b_5 \mu' + c_5 \nu', \\
-\ x'_6 &= a_6 \lambda' + b_6 \mu' + c_6 \nu'.
\end{aligned}$$

Si l'on écrit que

$$x_1 = x'_1, \qquad x_2 = x'_2, \qquad x_3 = x'_3, \qquad x_4 = x'_4, \qquad x_5 = x'_5, \qquad x_6 = x'_6,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
a_1(\lambda - \lambda') + b_1(\mu - \mu') + c_1(\nu - \nu') &= 0, \\
a_2(\lambda - \lambda') + b_2(\mu - \mu') + c_2(\nu - \nu') &= 0, \\
a_3(\lambda - \lambda') + b_3(\mu - \mu') + c_3(\nu - \nu') &= 0, \\
a_4(\lambda - \lambda') + b_4(\mu - \mu') + c_4(\nu - \nu') &= 0, \\
a_5(\lambda + \lambda') + b_5(\mu + \mu') + c_5(\nu + \nu') &= 0, \\
a_6(\lambda + \lambda') + b_6(\mu + \mu') + c_6(\nu + \nu') &= 0.
\end{aligned}$$

Les quatre premières équations exigent que

$$\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \nu - \nu' = 0,$$

et les deux autres donnent

$$a_5\lambda + b_5\mu + c_5\nu = 0,$$
$$a_6\lambda + b_6\mu + c_6\nu = 0,$$

pour déterminer $\lambda : \mu : \nu$. Les deux hyperfaisceaux ont, dans ce cas, une droite commune. Ils sont de même espèce.

S'il y a, au contraire, un nombre impair de quantités $\varepsilon$ égales à $+1$, on peut toujours supposer qu'il y en ait cinq ou trois. S'il y en a trois, au lieu des six équations ci-dessus, on aura le système

$$\begin{aligned}
a_1(\lambda - \lambda') + b_1(\mu - \mu') + c_1(\nu - \nu') &= 0,\\
a_2(\lambda - \lambda') + b_2(\mu - \mu') + c_2(\nu - \nu') &= 0,\\
a_3(\lambda - \lambda') + b_3(\mu - \mu') + c_3(\nu - \nu') &= 0,\\
a_4(\lambda + \lambda') + b_4(\mu + \mu') + c_4(\nu + \nu') &= 0,\\
a_5(\lambda + \lambda') + b_5(\mu + \mu') + c_5(\nu + \nu') &= 0,\\
a_6(\lambda + \lambda') + b_6(\mu + \mu') + c_6(\nu + \nu') &= 0,
\end{aligned}$$

et il y aura impossibilité de l'existence d'une droite commune, car les trois premières équations donnent

$$\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \nu - \nu' = 0,$$

et les autres

$$\lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \nu + \nu' = 0,$$

d'où

$$\lambda = \lambda' = \mu = \mu' = \mu' = \nu' = 0.$$

Les hyperfaisceaux seront donc d'espèces différentes.

Enfin, s'il n'y a qu'un seul $\varepsilon$ négatif, on aura cinq équations de la forme

$$a_i(\lambda - \lambda') + b_i(\mu - \mu') + c_i(\nu - \nu') = 0,$$

qui donneront

$$\lambda = \lambda', \qquad \mu = \mu', \qquad \nu = \nu',$$

et ensuite une équation unique de la forme

$$a_j\lambda + b_j\mu + c_j\nu = 0.$$

Les hyperfaisceaux auront donc, en commun, dans ce cas, un faisceau plan de droites. Ils seront encore d'espèces différentes, mais, de plus, ils seront *unis*

L'équation unique

$$a_j\lambda + b_j\mu + c_j\nu = 0$$

exprime que $x_j = 0$, c'est-à-dire que le faisceau commun à nos deux hyperfaisceaux est un faisceau du complexe $C_j$.

Il est dès lors facile de retrouver les résultats précédemment obtenus.

Supposons que la droite $x_1, x_2, \ldots, x_6$ engendre, pour fixer les idées, un système plan $\pi$, les trente et une autres droites

$$\varepsilon_1 x_1, \quad \varepsilon_2 x_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 x_6$$

vont engendrer des hyperfaisceaux.

Les quinze pour lesquelles il y a un nombre pair d'$\varepsilon$ positifs engendreront encore des systèmes plans. Les seize autres engendreront des gerbes et sur ces gerbes il y en aura six ayant un seul $\varepsilon$ négatif et dont les six sommets $O_1, O_2, \ldots, O_6$ seront dans le plan $\pi$. Les droites du faisceau plan $(\pi, O_i)$ appartiennent au complexe $C_i$; et $O_i$ est ainsi le pôle du plan $\pi$ dans le complexe $C_i$. On voit comment nous retrouverons la configuration déjà décrite des seize points et des seize plans.

Nous aurons occasion de revenir sur ces questions à propos de la théorie des complexes du second degré et des surfaces de Kummer.

**88.** Nous avons eu à nous occuper, au point de vue de la transformation des coordonnées, de celles de ces transformations qui conservent son type à la forme fondamentale, ou, comme on dit, la font revenir sur elle-même. Au lieu de se placer au point de vue de la transformation des coordonnées, on peut se proposer un autre problème que je vais traiter.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_6$ des coordonnées linéaires de droites, c'est-à-dire se déduisant linéairement de coordonnées tétraédriques quelconques, comme nous avons vu, et soit

$$\omega(x)$$

la forme linéaire correspondante.

Il existe des transformations linéaires

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i6}x_6, \tag{11}$$

qui conservent à la forme fondamentale son expression, en sorte que, en vertu des équations (11), on a

$$\omega(x) = \omega(x'). \tag{12}$$

Ces transformations peuvent être considérées comme faisant correspondre à une droite dans le système des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_6$ une autre droite $x'$ *dans le même système* de coordonnées, puisque les coordonnées $x'_i$ annulent la même forme que les $x_i$.

*Quelle est la nature de cette transformation?*

Si $x$ décrit un faisceau plan, on a

$$x_i = a_i\lambda + b_i\mu,$$

et, par suite, eu égard à la forme linéaire des $x'_i$ exprimés en fonction des $x_i$, on a aussi

$$x'_i = a'_i\lambda + b'_i\mu.$$

La droite $x'$ décrit donc aussi un faisceau plan.

Même démonstration pour l'hyperfaisceau. Si $x$ décrit un hyperfaisceau, $x'$ en décrit un autre.

Mais ici surgit une distinction capitale.

Les hyperfaisceaux engendrés par $x$ et par $x'$ peuvent être de même nom (gerbe et gerbe ou plan et plan); ou bien peuvent être de noms contraires (gerbe et plan ou plan et gerbe).

Dans le premier cas, à toutes les droites $x$, issues d'un point P, correspondent toutes celles $x'$ issues d'un point P'. A toutes les droites $x$ d'un plan $\pi$ correspondent toutes celles $x'$ d'un plan $\pi'$. De plus, si P est dans le plan $\pi$, P' est dans le plan $\pi'$, car au faisceau plan $(P, \pi)$ correspond le faisceau plan $(P', \pi')$. A tous ces caractères, on reconnaît une transformation homographique de l'espace.

Dans le second cas, à toutes les droites issues d'un point P correspondront celles d'un plan $\pi'$, et à toutes celles d'un plan $\pi$ correspondront celles issues d'un point P'. De plus, si le plan $\pi$ et le point P sont unis, le plan $\pi'$ et le point P' le sont aussi, à cause encore de la conservation des faisceaux.

La transformation consiste ainsi en une correspondance *dualistique* entre les figures lieux de droites $x$ et les figures lieux de droites $x'$.

La réponse à notre problème est donc la suivante :

*Si les équations de transformation linéaire*

$$x'_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i6}x_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

*donnent*

$$\omega(x) = \omega(x'),$$

*elles établissent entre les droites $x$ et $x'$ soit une correspondance homographique, soit une correspondance dualistique.*

**89.** Cette remarque a été pour M. Klein le point de départ d'un curieux rapprochement entre la Géométrie de la droite dans l'espace et celle des propriétés métriques d'un espace à quatre dimensions.

Cette notion d'espaces à plus de trois dimensions a aujourd'hui conquis droit de cité en Géométrie. Nous ne voulons pas dire par là qu'une étude systématique et complète des espaces à $n$ dimensions puisse offrir un véritable intérêt géométrique : l'intérêt qui s'attacherait à une pareille étude serait tout d'ordre philosophique et spéculatif. Cependant, il est *certaines propriétés* des espaces à $n$ dimensions qui trouvent une interprétation utile dans des figures de la Géométrie ordinaire; grâce à ces propriétés, les faits de la Géométrie d'Euclide peuvent souvent recevoir une forme plus rationnelle, plus lumineuse. A ce point de vue, le langage de la Géométrie à $n$ dimensions peut rendre de signalés services, et ce serait se priver d'un auxiliaire précieux que de le rejeter sans examen. C'est dans ces limites que l'étude de la Géométrie à $n$ dimensions mérite que l'on s'y arrête. On va en trouver un exemple dans la Géométrie de la ligne droite.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, $(n+1)$ variables homogènes, c'est-à-dire n'intervenant que par leurs rapports. Nous regarderons ces paramètres comme les coordonnées homogènes dans un espace à $n$ dimensions $E_n$.

Une équation homogène du degré $m$ entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ représente un espace du degré $m$ contenu dans l'espace $E_n^1$, et doué seulement de $n-1$ dimensions; nous représenterons par

$$E_{n-1}^m$$

un tel espace.

En particulier, une relation linéaire représente un espace linéaire

$$E_{n-1}^1$$

à $n-1$ dimensions contenu dans $E_n^1$.

Si l'on se donne $k$ équations linéaires, c'est-à-dire $k$ espaces $E_{n-1}^1$, ils ont en commun un espace à $n-k$ dimensions, que nous qualifierons encore de linéaire.

Plus généralement, si l'on se donne $k$ équations entre les $x_i$, on définit un espace $E_{n-k}^\mu$ à $(n-k)$ dimensions.

Le degré $\mu$ de cet espace se définit comme le nombre des points qu'il a en commun avec un espace linéaire $E_k^1$ à $k$ dimensions arbitrairement choisi.

Si $\mu = 2$, nous dirons que l'espace est *quadratique*.

Par exemple, une équation du second degré entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ définit un espace quadratique à $(n-1)$ dimensions $E_{n-1}^2$; nous dirons aussi, pour abréger, une quadrique à $(n-1)$ dimensions. L'intersection d'une quadrique à $(n-1)$ dimensions et de $(k-1)$ espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions est évidemment un espace quadratique à $(n-k)$ dimensions.

Les espaces quadratiques donnent lieu aux mêmes théories que les quadriques, les cônes et les coniques.

Soit, par exemple, un espace quadratique à $(n-1)$ dimensions, dans l'espace à $n$ dimensions,

$$\omega(x) = 0,$$

et

$$x_1, \ \ldots, \ x_{n+1}; \qquad y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_{n+1}$$

deux points de l'espace; on dit que ces points sont conjugués si

$$\omega(x \mid y) = 0.$$

Le lieu des points $x$ conjugués d'un point fixe $y$ est un espace linéaire à $(n-1)$ dimensions. Cet espace linéaire généralise la notion du plan polaire ou de la droite polaire pour les quadriques et les coniques.

Soit $\Omega(a)$ la forme adjointe de $\omega(x)$; l'équation

$$\Omega(a) = 0$$

exprime que l'espace linéaire

$$\Sigma\, a_i x_i = 0$$

est tangent (¹) à l'espace quadratique $\omega(x) = 0$; pareillement, l'équation

$$\Omega(a \mid b) = 0$$

exprime que les deux espaces linéaires

$$\Sigma\, a_i x_i = 0, \qquad \Sigma\, b_i x_i = 0$$

sont conjugués, c'est-à-dire que chacun contient le pôle de l'autre.

Un espace quadratique à $(n-1)$ dimensions est le lieu d'une infinité d'espaces linéaires à un nombre moindre de dimensions.

**90.** La Géométrie des espaces quadratiques a pour nous un intérêt particulier. Nous avons vu, en effet, que l'on peut définir toute droite de l'espace au moyen de six coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_6$, liées par une équation du second degré

$$\omega(x) = 0.$$

Si l'on considère, dès lors, les $x_i$ comme les coordonnées d'un point dans un espace $E_5^1$ à cinq dimensions, l'équation $\omega = 0$ représente dans cet espace un espace quadratique $E_4^2$ à quatre dimensions. On peut dire ainsi que *la Géométrie de la droite dans l'espace ordinaire est identique à celle d'un point sur une quadrique* $E_4^2$ *à quatre dimensions contenue dans un espace à cinq dimensions.*

Les droites d'un complexe linéaire

$$\Sigma\, a_i x_i = 0$$

---

(¹) C'est-à-dire que son pôle est sur la quadrique.

sont représentées par les points d'intersection de l'espace linéaire $E_4^1$, représenté par cette équation avec la quadrique fondamentale $E_4^2$. L'équation

$$\Omega(a) = 0,$$

qui exprime que le complexe est spécial, exprime que l'espace $E_4^1$ est tangent à l'espace quadratique $E_4^2$.

Si l'on considère deux complexes linéaires

$$\Sigma\, a_i x_i = 0, \qquad \Sigma\, a'_i x_i = 0,$$

la condition d'involution

$$\Omega(a \mid a') = 0$$

exprime que les espaces linéaires $E_4^1$, $E_4'^1$ correspondants sont *conjugués* par rapport à la quadrique fondamentale $E_4^2$.

La quadrique $E_4^2$ contient des espaces linéaires à une et à deux dimensions.

Nous savons, en effet, que si $x^0$ et $x^{00}$ sont deux droites qui se coupent, les expressions

$$x_i = x_i^0 \lambda + x_i^{00} \mu \tag{13}$$

sont les coordonnées d'une droite du faisceau plan défini par ces deux droites. Il en résulte aussitôt que, lorsque $\lambda : \mu$ varie, on a constamment

$$\omega(x) = \omega(x^0 \lambda + x^{00} \mu) = 0.$$

Or, interprétées dans l'espace à cinq dimensions, les équations (13) représentent un espace linéaire $E_1^1$ à une dimension contenu dans $E_4^2$.

Réciproquement, soit $E_1^1$ un espace linéaire à une dimension contenu dans $E_4^2$, les coordonnées $x_i$ d'un point de cet espace linéaire seront représentées par des formules telles que (13) où l'on devra avoir

$$\omega(x) = \omega(x^0 \lambda + x^{00} \mu) = 0,$$

quels que soient $\lambda$, $\mu$. Dans la Géométrie des droites, nous aurons donc un faisceau plan. On peut dès lors énoncer cette proposition :

*Il y a sur $E_4^2$ une infinité d'espaces linéaires à une dimension; ces espaces correspondent en Géométrie de droites aux faisceaux plans de l'espace euclidien, en sorte qu'il y a une quintuple infinité de ces espaces linéaires sur $E_4^2$.*

On verra de la même façon qu'il y a sur $E_4^2$ une infinité d'espaces linéaires à deux dimensions, qui correspondent aux hyperfaisceaux de la Géométrie linéaire.

Mais il y a deux sortes d'hyperfaisceaux, la gerbe et le système plan. On peut donc prévoir qu'il y aura sur $E_4^2$ deux familles distinctes d'espaces linéaires à deux dimensions.

Ce fait, qui est tout à fait analogue à celui du double système de génératrices rectilignes dans les quadriques de l'espace ordinaire, peut être mis directement en évidence. Il offre, comme on va le voir, *une différence essentielle* avec l'exemple auquel je l'ai comparé.

Pour les quadriques ordinaires, deux génératrices rectilignes se coupent toujours si elles sont de systèmes différents, et jamais si elles sont du même système.

*C'est l'inverse ici,* car deux espaces linéaires $E_2^1$ de même famille ont toujours un point commun : cela tient à ce que deux gerbes ou bien deux plans ont toujours une droite commune.

Par contre, deux $E_2^1$ de $E_4^2$, pris dans les deux familles, ou bien n'ont aucun point commun, ou bien ont en commun un espace $E_1^1$.

Cela tient à ce qu'une gerbe et un plan n'ont généralement pas de droite commune et que, si cela a lieu, ils ont en commun un faisceau plan de droites.

Un complexe de droites, défini par une équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0,$$

sera représenté comme la trace sur la quadrique $E_4^2$ de l'espace $E_4$ représenté par l'équation $f = 0$.

Nous obtiendrons ainsi sur $E_4^2$ un espace à trois dimensions $E_3$.

Pareillement, un espace à deux dimensions $E_2$, tracé sur $E_4^2$, représente une congruence, et un espace à une dimension représente une surface réglée.

91. Ce rapprochement entre la Géométrie réglée et celle du point sur une quadrique à quatre dimensions dans un espace à cinq dimensions resterait sans grande utilité si l'on ne le faisait suivre d'une remarque concernant la Géométrie des espaces quadratiques.

Je prendrai d'abord l'exemple d'une quadrique ordinaire dans l'espace ordinaire.

Soit Q une telle quadrique, O un point pris sur elle, $\pi$ un plan quelconque.

Concevons que l'on fasse correspondre à tout point M du plan un point P de la quadrique, en prenant l'intersection de celle-ci avec la droite OM. Réciproquement, à un point P de la quadrique correspondra un point M et un seul; de part et d'autre la correspondance est *univoque;* c'est ce que l'on exprime en disant que la quadrique est *représentable sur le plan* [1].

---

[1] Pour cette question des surfaces représentables sur le plan, on pourra consulter plusieurs Notes que lui a consacrées M. G. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. Les Travaux originaux de Clebsch ont paru dans les *Mathematische Annalen*. Aujourd'hui très développée, cette théorie mériterait une étude spéciale.

On peut donner une forme analytique concrète à cette représentation et la rattacher à une méthode anciennement imaginée par Chasles pour l'étude des courbes tracées sur les quadriques ([1]).

Soient $OG_0$, $OH_0$ les deux génératrices rectilignes de la quadrique issues du point O; par le point P de la quadrique passent deux génératrices, une G de même système que $OG_0$; la seconde H de même système que $OH_0$. G coupe $OH_0$ en un point P′, H coupe $OG_0$ en un point P″. Pour définir la position de P′ sur $OH_0$, on peut prendre le rapport anharmonique qu'il forme avec le point O et deux autres points fixes pris sur $OH_0$; en sorte que, A′, B′ désignant ces points fixes, on aura, par exemple,

$$u = \frac{A'O}{P'O} : \frac{A'B'}{P'B'}.$$

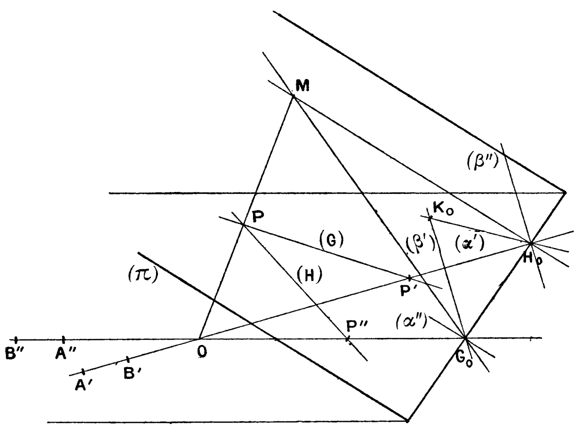
De même, A″, B″ désignant deux points fixes sur $OG_0$, on définira le point P″ par le paramètre

$$v = \frac{A''O}{P''O} : \frac{A''B''}{P''B''}.$$

Une fois $u$ et $v$ connus, les points P′, P″ en résultent, ainsi que le point P et, par conséquent, le point M, dans le plan $\pi$.

Appelons $G_0$, $H_0$ les traces de $OG_0$ et $OH_0$ sur ce plan. La droite $G_0M$ est la

Fig. 5.




trace du plan $OG_0M$ sur le plan $\pi$; ce plan $OG_0M$ est évidemment tangent en P″ à la quadrique, et à cause du théorème de Chasles, sur le plan tangent à une surface réglée; le paramètre $v$ est égal au rapport anharmonique

$$v = (G_0\alpha'',\ G_0M,\ G_0H_0,\ G_0\beta''),$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIII.

où $G_0\alpha''$ est la trace sur le plan $\pi$ du plan tangent en A'', $G_0\beta''$ la trace du plan tangent en B''.

De même, $H_0\alpha'$, $H_0\beta'$ étant les traces des plans tangents en A' et B', on a

$$u = (H_0\alpha', H_0M, H_0G_0, H_0\beta').$$

Prenons comme triangle de référence dans le plan $\pi$ le triangle formé par les droites $H_0\beta'$, $G_0\beta''$ et $G_0H_0$, on voit aussitôt que si

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

représentent les équations de ces trois droites, on aura, en faisant rentrer dans X, Y, Z des facteurs constants,

$$u = \frac{X}{Z}, \qquad v = \frac{Y}{Z}.$$

En appelant $K_0$ le point de rencontre des droites $G_0\beta''$ et $H_0\beta'$, on voit donc que les quantités $u$, $v$ sont tout à la fois les *coordonnées de Chasles du point* P *sur la quadrique,* et qu'elles sont aussi les coordonnées triangulaires du point M par rapport au triangle de référence $G_0H_0K_0$.

Les points $H_0G_0$ jouent dans cette représentation un rôle essentiel. Tout point de $OG_0$ se projette en $G_0$, tout point de $OH_0$ se projette en $H_0$. Ces points $H_0$, $G_0$ sont donc des points d'indétermination, en ce sens qu'en chacun d'eux se projettent une infinité de points de la quadrique.

Il y a aussi sur la quadrique un point d'indétermination. En effet, il est visible que, si le point P de la quadrique tend vers le point O, le point M vient se placer sur la droite $G_0H_0$, et que la position du point M est la trace sur $G_0H_0$ de la position limite de OP, quand OP devient tangente en O à la surface.

Nous voyons ainsi qu'il y a sur le plan deux points remarquables $G_0$, $H_0$ et une droite remarquable, la droite qui les joint. Sur la surface, il y a un point remarquable O et deux droites remarquables, les génératrices issues de ce point.

Dans les représentations de ce genre, les points $G_0$, $H_0$ portent le nom de *points de base* de la représentation, et la droite $G_0H_0$ le nom de *ligne fondamentale.*

Dans le cas général de la représentation des surfaces sur le plan, la nature des points de base et des lignes fondamentales, ou *génériquement* des ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX, caractérise la représentation.

On démontre que, généralement, les courbes du plan qui représentent les sections planes de la surface passent par les points de base ou points fondamentaux.

Ici c'est évident, car toute section plane coupe $OG_0$ en un point, $OH_0$ en un autre, et la perspective est ainsi une conique qui passe pas les deux points $G_0$, $H_0$.

On sait que les propriétés métriques des figures planes se définissent comme des relations entre cette figure et deux points remarquables du plan, les points circulaires à l'infini. Au point de vue projectif, on peut donc regarder comme étant métriques toutes les propriétés de relation entre une figure et deux points du plan.

Les coniques passant par ces deux points fixes seront dénommées *cercles*. A ce point de vue, on peut dire que les sections planes de la quadrique sont représentées sur le plan par des cercles.

On reconnaît d'ailleurs que, pour réaliser effectivement cette représentation, il suffirait de prendre pour le point O un ombilic de la quadrique, et, pour le plan $\pi$, un plan parallèle au plan tangent au point O.

On se trouve alors avoir généralisé une transformation bien ancienne, la *transformation stéréographique*.

Mais une telle restriction nous est inutile, puisque nous sommes toujours libres de prendre comme base des propriétés métriques deux points quelconques du plan.

92. On peut présenter cette représentation des quadriques sur le plan sous une forme plus analytique, qui se prête mieux à la généralisation que nous avons en vue.

Prenons, en effet, deux points O et O′ sur la quadrique non situés sur une même génératrice rectiligne. Menons par la droite OO′ deux plans conjugués et soit $\Delta$ la droite d'intersection des plans tangents en O et O′. Cette droite coupe les plans conjugués en deux points O″, O‴; nous prenons le tétraèdre OO′O″O‴ comme tétraèdre de référence. La quadrique aura une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - zt = 0, \tag{14}$$

en faisant rentrer dans $x$, $y$, $z$, $t$ des constantes numériques qu'il est inutile de mettre en évidence. Je pose alors

$$\left\{\begin{aligned} \rho x &= XZ, \\ \rho y &= YZ, \\ \rho z &= Z^2, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

et j'observe que l'équation (14) donne alors

$$\rho t = X^2 + Y^2. \tag{16}$$

Nous avons ainsi exprimé $x$, $y$, $z$, $t$ en fonction de trois paramètres homogènes X, Y, Z.

Nous pourrons regarder X, Y, Z comme des coordonnées triangulaires d'un point dans un plan, et nous aurons ainsi réalisé *analytiquement* une représentation de la quadrique sur le plan.

Je ne m'arrête pas à démontrer que cette représentation se réalise géométriquement dans la projection stéréographique telle que je l'ai définie ci-dessus.

Observons que toute section plane

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

est représentée sur le plan par la conique

$$(aX + bY + cZ)Z + dt(X^2 + Y^2) = 0, \tag{17}$$

laquelle passe par deux points fixes

$$Z = 0, \qquad X \pm iY = 0.$$

Si l'on regarde ces deux points comme les points circulaires à l'infini du plan, l'équation (17) est l'équation générale des cercles du plan.

93. Ceci posé, cherchons à résoudre la question suivante :

*Quelles sont exactement les propriétés des figures planes qui correspondent aux propriétés projectives de la quadrique?*

Pour résoudre cette question avec précision, nous allons rechercher quelle est la transformation plane qui correspond à une transformation homographique conservant la quadrique proposée.

Soient $x, y, z, t$ les coordonnées d'un point P de la quadrique; $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ celles du point P′ correspondant. On a

$$\left\{\begin{aligned} x' &= ax + by + cz + dt,\\ y' &= a'x + b'y + c'z + d't,\\ z' &= a''x + b''y + c''z + d''t,\\ t' &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t,\end{aligned}\right. \tag{18}$$

et, de plus, il faut avoir identiquement

$$x'^2 + y'^2 - z't' = k(x^2 + y^2 - zt). \tag{19}$$

Soient (X, Y, Z) les coordonnées du point M correspondant au point P; (X′, Y′, Z′) celles du point M′ correspondant au point P′.

On aura, en remplaçant dans (18) $x$, $y$, $z$, $t$, $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ par leurs valeurs en

X, Y, Z, X′, Y′, Z′,

$$
(20)\qquad \begin{cases} \sigma X'Z' = a\,XZ + b\;YZ + c\;Z^2 + d\;(X^2+Y^2), \\ \sigma Y'Z' = a'\,XZ + b'\,YZ + c'\,Z^2 + d'\,(X^2+Y^2), \\ \sigma Z'^2 = a''\,XZ + b''\,YZ + c''\,Z^2 + d''\,(X^2+Y^2), \\ \sigma(X'^2+Y'^2) = a'''XZ + b'''YZ + c'''Z^2 + d'''(X^2+Y^2). \end{cases}
$$

Ces équations sont évidemment surabondantes pour définir X′, Y′, Z′ en fonction de X, Y, Z; mais elles sont compatibles d'après l'identité (19), c'est-à-dire quand $a$, $b$, $c$, $d$, $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, ..., $c'''$, $d'''$ se prêtent à cette identité.

Pour simplifier l'interprétation des formules, je ferai $Z' = Z = 1$, et j'écrirai les formules sous cette forme

$$
(\mathrm{T})\qquad \begin{cases} X' = \dfrac{aX + bY + c + d(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}, \\[2ex] Y' = \dfrac{a'X + b'Y + c' + d'(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}, \\[2ex] X'^2 + Y'^2 = \dfrac{a'''X + b'''Y + c''' + d'''(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}. \end{cases}
$$

Alors X, Y seront les coordonnées rectangulaires d'un point, X′, Y′ celles de son transformé.

Supposons qu'on effectue une première transformation de cette forme T, puis une autre T′ avec d'autres coefficients, la nature linéaire de ces formules nous montre que la transformation résultante T′T sera encore une transformation de même forme.

En un mot, ces transformations forment ce que M. Lie a appelé *un groupe*.

Une transformation homothétique autour d'un point quelconque, un déplacement quelconque, une transformation par symétrie par rapport à une droite quelconque, et plus généralement une inversion par rapport à un cercle quelconque, font partie du groupe, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement sur les formules qui expriment ces diverses transformations. Je vais prouver que, réciproquement : *toute transformation définie par les formules* (T) *résulte de l'application successive d'un certain nombre de ces transformations* (¹).

En effet, désignons par $T_1$ la translation qui change le point X, Y dans le point X″, Y″ et qui est représentée par les formules

$$
(\mathrm{T}_1)\qquad X'' = X + h, \qquad Y'' = Y + k,
$$

(¹) KLEIN, *Mathematische Annalen*, t. V.

où $h$ et $k$ sont deux constantes; envisageons ensuite la transformation

$$(\mathrm{T}_2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \frac{a_1\mathrm{X}'' + b_1\mathrm{Y}'' + d_1(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)}{a_1''\mathrm{X}'' + b_1''\mathrm{Y}'' + c_1'' + d_1''(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)},\\ \mathrm{Y}' &= \frac{a_1'\mathrm{X}'' + b_1'\mathrm{Y}'' + d_1'(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)}{a_1''\mathrm{X}'' + b_1''\mathrm{Y}'' + c_1'' + d_1''(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)},\\ \mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2 &= \frac{a_1'''\mathrm{X}'' + b_1'''\mathrm{Y}'' + c_1''' + d_1'''(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)}{a_1''\mathrm{X}'' + b_1''\mathrm{Y}'' + c_1'' + d_1''(\mathrm{X}''^2 + \mathrm{Y}''^2)}. \end{aligned}\right.$$

La succession des deux opérations $(\mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{T}_2)$ équivaut à la transformation générale $(\mathrm{T})$ où $c$, $c'$ ne sont pas nuls; on peut donc poser $\mathrm{T} = \mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$.

Maintenant, si l'on a égard à l'identité

$$(a_1\mathrm{X}'' + \ldots)^2 + (a_1'\mathrm{X}'' + \ldots)^2 = (a_1''\mathrm{X}'' + \ldots)(a_1'''\mathrm{X}'' + \ldots),$$

on voit que, le premier membre s'annulant avec $\mathrm{X}''$, $\mathrm{Y}''$, il doit en être de même du second; on a donc

$$c_1''c_1''' = 0.$$

Supposons d'abord $c_1'' = 0$; alors, en effectuant l'inversion

$$(\mathrm{T}_0)\qquad \mathrm{X}'' = \frac{\mathrm{X}'''}{\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2}, \qquad \mathrm{Y}'' = \frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2},$$

l'opération $\mathrm{T}_2$ apparaît comme le produit $\mathrm{T}_3\mathrm{T}_0$ des opérations $\mathrm{T}_3$ et $\mathrm{T}_0$, où $\mathrm{T}_3$ est défini par les formules

$$(\mathrm{T}_3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \frac{a_1\mathrm{X}''' + b_1\mathrm{Y}''' + d_1}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + d_1''},\\ \mathrm{Y}' &= \frac{a_1'\mathrm{X}''' + b_1'\mathrm{Y}''' + d_1'}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + d_1''},\\ \mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2 &= \frac{a_1'''\mathrm{X}''' + b_1'''\mathrm{Y}''' + c_1'''(\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2) + d_1'''}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + d_1''}, \end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_2\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_3\mathrm{T}_0\mathrm{T}_1.$$

Supposons au contraire que ce soit $c_1'''$ qui soit nul; alors, en effectuant encore l'opération $\mathrm{T}_0$, $\mathrm{T}_2$ apparaît comme le produit $\mathrm{T}_2'\mathrm{T}_0$ des deux opérations $\mathrm{T}_0$ et $\mathrm{T}_2'$, où $\mathrm{T}_2'$ est ainsi défini

$$(\mathrm{T}_2')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X}' &= \frac{a_1\mathrm{X}''' + b_1\mathrm{Y}''' + d_1}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + c_1''(\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2) + d_1''},\\ \mathrm{Y}' &= \frac{a_1'\mathrm{X}''' + b_1'\mathrm{Y}''' + d_1'}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + c_1''(\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2) + d_1''},\\ \mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2 &= \frac{a_1'''\mathrm{X}''' + b_1'''\mathrm{Y}''' + d_1'''}{a_1''\mathrm{X}''' + b_1''\mathrm{Y}''' + c_1''(\mathrm{X}'''^2 + \mathrm{Y}'''^2) + d_1''}. \end{aligned}\right.$$

Or, pour effectuer la transformation $(T'_2)$, on peut effectuer la transformation

$$(T'_3)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{a_1 X''' + b_1 Y''' + d_1}{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + d'''_1},\\ Y_1 &= \frac{a'_1 X''' + b'_1 Y''' + d'_1}{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + d'''_1},\\ X_1^2 + Y_1^2 &= \frac{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + c''_1 (X'''^2 + Y'''^2) + d''_1}{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + d'''_1}, \end{aligned}\right.$$

et la faire suivre de l'inversion $T_0$

$$X' = \frac{X_1}{X_1^2 + Y_1^2}, \qquad Y' = \frac{Y_1}{X_1^2 + Y_1^2}.$$

On a alors

$$T = T_0 T'_3 T_0 T_1.$$

Les transformations $T_3$ et $T'_3$ ont le même caractère; elles ont la forme générale

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''},\\ Y' &= \frac{\alpha' X + \beta' Y + \gamma'}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''},\\ X'^2 + Y'^2 &= \frac{\alpha''' X + \beta''' X + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2)}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''}. \end{aligned}$$

Écrivons que l'on a identiquement

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 + (\alpha' X + \beta' Y + \gamma')^2 = (\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'')[\alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2)].$$

On voit d'abord que $\alpha''$, $\beta''$ devront être nuls, ce qui permet alors de faire $\gamma'' = 1$. Il reste donc

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X + \beta Y + \gamma,\\ Y' &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma',\\ X'^2 + Y'^2 &= \alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2), \end{aligned}$$

avec l'identité

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 + (\alpha' X + \beta' Y + Y + \gamma')^2 = \alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2).$$

On doit donc avoir, en particulier,

$$(\alpha X + \beta Y)^2 + (\alpha' X + \beta' Y)^2 = \delta''' (X^2 + Y^2).$$

Or cette identité prouve que l'on peut poser, soit

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\delta'''}\cos\theta, & \beta &= \sqrt{\delta'''}\sin\theta,\\ \alpha' &= -\sqrt{\delta'''}\sin\theta, & \beta' &= \sqrt{\delta'''}\cos\theta, \end{aligned}\right.$$

soit

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\delta'''}\cos\theta, & \beta = \sqrt{\delta'''}\sin\theta, \\ \alpha' = \sqrt{\delta'''}\sin\theta, & \beta' = -\sqrt{\delta'''}\cos\theta. \end{cases}$$

Dans le premier cas, la transformation $T_3$ représente un déplacement quelconque D dans le plan, précédé d'une homothétie H; on a alors

$$T_3 = D.H.$$

Dans le second cas, cette homothétie est accompagnée d'une transformation S par symétrie par rapport à une droite, et l'on a alors

$$T_3 = D.H.S.$$

Donc, en résumé, on a

$$T = \begin{cases} T_3 T_0 T_1, \\ \text{ou bien} \\ T_0 T_3 T_0 T_1, \end{cases}$$

où

$$T_3 = \begin{cases} D.H, \\ \text{ou bien} \\ D.H.S. \end{cases}$$

Donc T se ramène bien à une superposition d'opérations de la nature suivante :

Mouvements, homothéties, inversions, symétries par rapport à des droites.

Toutes ces transformations ont une propriété commune : elles transforment tout cercle du plan en un autre ou, autrement dit, ce groupe de transformations conserve la famille des cercles du plan. On pourrait donner à ces transformations le nom de *transformations anallagmatiques*.

On voit, en conséquence, que, interprétées sur le plan représentatif, les transformations homographiques d'une quadrique en elle-même ont pour images le groupe des transformations anallagmatiques du plan.

Les propriétés projectives de la quadrique correspondent aux propriétés anallagmatiques dans le plan.

**94.** Tout ce que nous venons de dire pour la représentation des quadriques ordinaires sur le plan s'étend au cas des quadriques à $n-1$ dimensions dans l'espace à $n$ dimensions.

Prenons, par exemple, la quadrique

$$(23) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0$$

dans l'espace à cinq dimensions, nous poserons

$$\rho x_1 = X_1 X_5,$$
$$\rho x_2 = X_2 X_5,$$
$$\rho x_3 = X_3 X_5,$$
$$\rho x_4 = X_4 X_5,$$
$$\rho x_5 = X_5^2,$$

et l'équation (23) donnera

$$\rho x_6 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Nous avons aussi représenté notre quadrique sur un espace linéaire à quatre dimensions, dans lequel $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, $X_5$ sont les coordonnées homogènes d'un point.

Nous avons ici encore une *figure fondamentale,* ou d'indétermination. Elle est représentée par les équations

$$X_5 = 0, \qquad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0,$$

elle constitue un espace quadratique à deux dimensions, que je représente par $I_2$.

Appelons *sphère* toute quadrique de l'espace à quatre dimensions qui contient $I_2$, l'équation d'une sphère sera

$$(aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5)X_5 + f(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) = 0.$$

Il est commode de réduire à l'unité la variable $X_5$ qui, égalée à zéro, représente l'infini de notre espace à quatre dimensions, et l'équation de notre sphère aura la forme

$$(24) \qquad a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 + a_6(X_1^2 + X_2^2 + X_1^2 + X_4^2).$$

La distance de deux points sera

$$\sqrt{(X_1 - X_1')^2 + \ldots + (X_4 - X_4')^2};$$

un déplacement, une symétrie, une homothétie, une inversion se définiront comme dans le cas de l'espace ordinaire, et, par le même raisonnement que plus haut, nous reconnaîtrons que toute transformation linéaire qui conserve la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6,$$

c'est-à-dire toute transformation homographique ou dualistique de l'espace réglé, se traduit dans l'espace représentatif à quatre dimensions par une succession d'opérations telles que :

1° Homothétie; 2° symétrie; 3° inversion; 4° déplacements, toutes transformations qui laissent invariable la notion de sphère.

A ce point de vue, nous pouvons dire que :

*La Géométrie réglée, au point de vue dualistique et projectif, est identique à la Géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.*

95. On voit que, dans la représentation qui nous occupe, un complexe linéaire (c'est-à-dire une section de la quadrique à quatre dimensions par un espace linéaire à quatre dimensions) se trouve représenté par une sphère de l'espace à quatre dimensions.

Si

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_6 x_6 = 0$$

est l'équation du complexe linéaire, celle de la sphère est précisément l'équation (24).

L'équation de la sphère peut recevoir la forme

$$\left(X_1 + \frac{a_1}{2a_6}\right)^2 + \left(X_2 + \frac{a_2}{2a_6}\right)^2 + \left(X_3 + \frac{a_3}{2a_6}\right)^2 + \left(X_4 + \frac{a_4}{2a_6}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4a_5 a_6}{a_6^2}.$$

L'expression du second nombre représente le carré du rayon de la sphère, $-\frac{a_1}{2a_6}$, $-\frac{a_2}{2a_6}$, $-\frac{a_3}{2a_6}$, $-\frac{a_4}{2a_6}$ sont les coordonnées de son centre. Le rayon est nul si

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4a_5 a_6 = 0. \tag{25}$$

Or la forme fondamentale étant ici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6,$$

l'invariant du complexe est précisément le premier membre de (25). *Les sphères de rayon nul correspondent ainsi aux complexes spéciaux.*

Pareillement, l'équation

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 - 2a_5 b_6 - 2a_6 b_5 = 0$$

exprime l'*involution des deux complexes*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots = 0, \qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots = 0;$$

elle exprime aussi *l'orthogonalité* des deux sphères correspondantes.

Une congruence linéaire est représentée par l'intersection de deux sphères. Par cette intersection, on peut faire passer deux sphères de rayon nul qui représentent chacune un des complexes spéciaux, qui ont pour directrices les directrices de la congruence.

L'intersection de deux sphères dans l'espace à quatre dimensions est, outre $I_2$, qui est mis à part, un espace quadratique à deux dimensions, que l'on peut appeler une sphère à deux dimensions.

Désignant par $S_3$ les sphères à trois dimensions, je désignerai celles-ci par $S_2$.

L'intersection de trois sphères à trois dimensions est un cercle $S_1$ ou espace quadratique à une dimension d'espèce particulière, car il a toujours deux points communs avec l'espace à deux dimensions $I_2$.

Par un cercle $S_1$ passent une infinité (une double infinité) de sphères images du système à trois termes de complexes linéaires menés par la demi-quadrique dont $S_1$ est l'image. Une infinité de ces complexes sont spéciaux; leurs directrices, qui engendrent la demi-quadrique complémentaire, ont pour images les points d'un second cercle $S'_1$, lequel est le lieu des centres des sphères de rayon nul menées par $S_1$. La correspondance entre $S_1$ et $S'_1$ est évidemment réciproque.

96. Les faisceaux plans de droites et les hyperfaisceaux de l'espace réglé ont aussi une représentation très simple.

Si la droite $x$ engendre un faisceau plan de droites, on peut écrire, nous le savons,

$$x_1 = a_1 + \rho b_1, \quad x_2 = a_2 + \rho b_2, \quad x_3 = a_3 + \rho b_3,$$
$$x_4 = a_4 + \rho b_4, \quad x_5 = 1 + \rho, \quad x_6 = a_6 + \rho b_6.$$

Les coordonnées $X_1, X_2, X_3, X_4$ du point correspondant dans l'espace à quatre dimensions seront

$$(26)\quad X_1 = \frac{x_1}{x_5} = \frac{a_1 + \rho b_1}{1 + \rho}, \qquad X_2 = \frac{a_2 + \rho b_2}{1 + \rho}, \qquad X_3 = \frac{a_3 + \rho b_3}{1 + \rho}, \qquad X_4 = \frac{a_4 + \rho b_4}{1 + \rho}.$$

On aura, de plus,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_1 + \rho b_1)^2 + (a_2 + \rho b_2)^2 + (a_3 + \rho b_3)^2 + (a_3 + \rho b_4)^2 = (1 + \rho)(a_6 + \rho b_6).$$

Ceci devant avoir lieu quel que soit $\rho$, il vient

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_6,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = b_6,$$
$$2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3 + 2a_4 b_4 = a_6 + b_6,$$

d'où, en éliminant $a_6$ et $b_6$,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^3 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2 = 0. \tag{27}$$

Les binômes $a_i - b_i$ sont les coefficients directeurs $\alpha_i$ de la droite représentée par les équations (26), lesquelles pourront s'écrire, en posant

$$\alpha_i = a_i - b_i,$$

$$\frac{X_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{X_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{X_3 - a_3}{\alpha_3} = \frac{X_4 - a_4}{\alpha_4}. \tag{28}$$

L'équation (27), qui s'écrit

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 0, \tag{29}$$

exprime évidemment que le point de la droite (28), qui est à l'infini, appartient à l'espace quadratique $I_2$ ; elle exprime aussi que la distance de deux points quelconques de la droite est nulle. Les droites considérées sont des droites de longueur nulle et peuvent être définies par la propriété d'avoir avec $I_2$ un point commun.

Il est, dès lors, naturel d'introduire les coordonnées de Chasles de ce point de rencontre, en posant

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{\alpha_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{\alpha_3}{\lambda_0 \mu_0 - 1} = \frac{a_4}{(\lambda_0 \mu_0 + 1)\sqrt{-1}}, \tag{30}$$

et, dès lors, la représentation générale de nos droites (et par suite des faisceaux plans de l'espace réglé) sera

$$\frac{X_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda_0 \mu_0 - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda_0 \mu_0 + 1)\sqrt{-1}}. \tag{31}$$

Il est clair que, $\lambda_0$ et $\mu_0$ restant fixes, le point de rencontre avec $I_2$ reste fixe.

Si on laisse fixe $\lambda_0$, le point en question décrit, lorsque $\mu_0$ varie, une génératrice rectiligne d'un système de $I_2$ ; il décrit, au contraire, une génératrice rectiligne du second système si $\lambda_0$ varie, $\mu_0$ étant fixe.

La représentation va beaucoup plus au fond des choses qu'on ne le pourrait croire au premier abord.

Cherchons, en effet, à représenter un hyperfaisceau.

Si la droite $x$ engendre un hyperfaisceau, on peut poser

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \rho b_1 + \rho' b'_1,\\
x_2 &= a_2 + \rho b_2 + \rho' b'_2,\\
x_3 &= a_3 + \rho b_3 + \rho' b'_3,\\
x_4 &= a_4 + \rho b_4 + \rho' b'_4,\\
x_5 &= 1 + \rho + \rho',\\
x_6 &= a_6 + \rho b_6 + \rho' b'_6,
\end{aligned}$$

avec la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0,$$

qui, devant avoir lieu quels que soient $\rho$, $\rho'$, nous donne

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= a_6,\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 &= b_6,\\
b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 + b_4'^2 &= b'_6,\\
2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) &= a_6 + b_6,\\
2(a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 + a_4 b'_4) &= a_6 + b'_6,\\
2(b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3 + b_4 b'_4) &= b_6 + b'_6,
\end{aligned}$$

d'où, par élimination de $a_6$, $b_6$, $b'_6$,

$$\begin{aligned}
(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2 &= 0,\\
(a_1 - b'_1)^2 + (a_2 - b'_2)^2 + (a_3 - b'_3)^2 + (a_4 - b'_4)^2 &= 0,\\
(b_1 - b'_1)^2 + (b_2 - b'_2)^2 + (b_3 - b'_3)^2 + (b_4 - b'_4)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

On vérifiera les deux premières équations en posant

$$\frac{b_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{b_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{b_3 - a_3}{\lambda_0 \mu_0 - 1} = \frac{b_4 - a_4}{(\lambda_0 \mu_0 + 1)\sqrt{-1}} = \theta',$$

$$\frac{b'_1 - a_1}{\lambda'_0 + \mu'_0} = \frac{b'_2 - a_2}{(\lambda'_0 - \mu'_0)\sqrt{-1}} = \frac{b'_3 - a_3}{\lambda'_0 \mu'_0 - 1} = \frac{b'_4 - a_4}{(\lambda'_0 \mu'_0 + 1)\sqrt{-1}} = \theta',$$

où $\lambda_0$, $\mu_0$, $\theta$, $\lambda'_0$, $\mu'_0$, $\theta'$ sont des arbitraires.

On en tire

$$\begin{aligned}
b'_1 - b_1 &= [\theta'(\lambda'_0 + \mu'_0) - \theta(\lambda_0 + \mu_0)],\\
b'_2 - b_2 &= [\theta'(\lambda'_0 - \mu'_0) - \theta(\lambda_0 - \mu_0)]\sqrt{-1},\\
b'_3 - b_3 &= [\theta'(\lambda'_0 \mu'_0 - 1) - \theta(\lambda_0 \mu_0 - 1)],\\
b'_4 - b_4 &= [\theta'(\lambda'_3 \mu'_0 + 1) - \theta(\lambda_0 \mu_0 + 1)]\sqrt{-1},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
0 &= (b'_1 - b_1)^2 + (b'_2 - b_2)^2 + (b'_3 - b_3)^2 + (b'_4 - b_4)^2 \\
&= -2\theta\theta'[\quad(\lambda'_0 + \mu'_0)(\lambda_0 + \mu_0) - (\lambda'_0 - \mu'_0)(\lambda_0 - \mu_0) \\
&\qquad + (\lambda'_0\mu'_0 - 1)(\lambda_0\mu_0 - 1) - (\lambda'_0\mu'_0 + 1)(\lambda_0\mu_0 + 1)] \\
&= 4\theta\theta'(\lambda'_0 - \lambda_0)(\mu'_0 - \mu_0).
\end{aligned}$$

On voit qu'il faut avoir soit

$$\lambda'_0 = \lambda_0,$$

soit

$$\mu'_0 = \mu_0.$$

Prenons, par exemple, $\lambda'_0 = \lambda_0$.

L'hyperfaisceau correspondant se représente dans l'espace à quatre dimensions par les équations

$$X_i = \frac{a_i + \rho b_i + \rho' b'_i}{1 + \rho + \rho'},$$

ou encore par les équations

$$\begin{aligned}
\frac{X_1 - a_1}{\rho(b_1 - a_1) + \rho'(b'_1 - a_1)} &= \frac{X_2 - a_3}{\rho(b_2 - a_3) + \rho'(b'_2 - a_2)} \\
= \frac{X_3 - a_3}{\rho(b_3 - a_3) + \rho'(b'_3 - a_4)} &= \frac{X_4 - a_4}{\rho(b_4 - a_4) + \rho'(b'_4 - a_4)},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant rentrer $\theta$ dans $\rho$ et $\theta'$ dans $\rho'$,

$$\begin{aligned}
\frac{X_1 - a_1}{\rho(\lambda_0 + \mu_0) + \rho'(\lambda_0 + \mu'_0)} &= \frac{X_2 - a_2}{\rho(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1} + \rho'(\lambda_0 - \mu'_0)\sqrt{-1}} \\
= \frac{X_3 - a_3}{\rho(\lambda_0\mu_0 - 1) + \rho'(\lambda_0\mu'_0 - 1)} &= \frac{X_4 - a_4}{[\rho(\lambda_0\mu_0 + 1) + \rho'(\lambda_0\mu'_0 + 1)]\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

Ces équations, où $\rho' : \rho$ est arbitraire et même variable, définissent un espace linéaire à deux dimensions qui représente l'hyperfaisceau considéré. Or, et c'est là un fait bien remarquable, en posant

$$\frac{\mu_0\rho + \mu'_0\rho'}{1 + \rho'} = \mu,$$

ces équations peuvent recevoir la forme

$$\frac{X_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda_0\mu - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda_0\mu + 1)\sqrt{-1}}. \tag{32}$$

Ces équations se déduisent des équations (30) en y remplaçant le paramètre constant $\mu_0$ par un paramètre variable $\mu$.

Si l'on avait adopté la solution $\mu'_0 = \mu_0$, on serait arrivé à la formule

$$(33) \qquad \frac{X_1 - a_1}{\lambda + \mu_0} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda \mu_0 - 1} = \frac{X_4 - a_4}{\lambda \mu_0 + 1)\sqrt{-1}},$$

qui se déduit des équations (30) faisant varier $\lambda$.

Les espaces linéaires (32) et (33) sont à deux dimensions, puisque $\mu$ est variable dans (32) et $\lambda$ dans (33). Ce sont, en quelque sorte, des espaces linéaires à deux dimensions *isotropes*. Ils possèdent cette propriété de couper chacune le plan de l'infini suivant une génératice rectiligne de $I_2$. Seulement, les uns couperont $I_2$ suivant une génératrice d'un système [équation (32)]; les autres, suivant une génératrice du système opposé [équation (33)].

Nous avons donc deux sortes d'espaces (1) linéaires $E'_2$ isotropes.

Les uns correspondront aux hyperfaisceaux qui sont des gerbes, les autres aux hyperfaisceaux qui sont des systèmes plans.

Il est assurément bien curieux que la séparation des deux systèmes de génératrices de $I_2$ revienne à la distinction entre la Géométrie du point et celle du plan dans l'espace à trois dimensions, qui est le lieu des figures réglées.

Prenons, par exemple, les équations

$$(34) \qquad \frac{X_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda_0 \mu_0 - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda_0 \mu_0 + 1)\sqrt{-1}};$$

nous avons là la représentation d'un faisceau plan $(O, \pi)$ dont fait partie la droite A, qui a pour image le point $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ de l'espace à quatre dimensions. Quand $\lambda_0$, $\mu_0$ recevront toutes les valeurs possibles, *nous aurons tous les faisceaux plans qui contiennent* A.

Si $\lambda_0$ reste fixe, la droite X engendre, nous le savons, un hyperfaisceau, dont un des éléments O ou $\pi$ reste fixe, par exemple O, et alors les équations (34) représentent toutes les droites issues de O.

Si, au contraire, c'est $\mu_0$ qui est fixe, c'est le plan $\pi$ qui se trouve fixé et représenté comme support d'un système plan de droites.

Ainsi, en résumé, quand un faisceau est représenté par des formules telles que (34), $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ représentent une droite de ce faisceau, $\lambda_0$ le point O et $\mu_0$ le plan $\pi$ du faisceau sur cette droite (2).

---

(1) Le fait n'est pas nouveau; déjà, dans le plan, les droites isotropes forment deux familles distinctes.

(2) On pourra comparer avec la représentation que j'ai donnée en 1882 dans mon travail *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, p. 23.

Si l'on reliait $\lambda_0$, $\mu_0$ homographiquement, le lieu de la droite X serait une congruence linéaire *singulière* admettant A pour directrice (1).

Il existe encore d'autres systèmes de coordonnées, mais leur étude viendra naturellement à la suite des propriétés infinitésimales.

J'ajouterai que les coordonnées que j'ai définies projectivement au début peuvent recevoir une forme métrique importante. Nous y reviendrons au moment de l'étude des propriétés métriques des systèmes réglés.

(*A suivre.*)

---

(1) Le lecteur pourra comparer ce qui précède avec le Chapitre sur les coordonnées penta ou hexasphériques du Tome I des Leçons de M. G. Darboux. La sphère dans l'espace euclidien donne lieu à une théorie toute pareille à celle de la droite.