ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT

Sur la cyclide de Dupin

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 6, nº 2 (1892), p. F1-F7
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_2_F1_0>

SUR

LA CYCLIDE DE DUPIN,

PAR M. E. COSSERAT,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Toulouse,
Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences.

I. — *Formules relatives à la cyclide générale de Dupin, rapportée à ses lignes de courbure.*

La cyclide de Dupin doit être comptée parmi les plus remarquables des surfaces particulières; nous allons montrer comment on peut aisément constituer, à l'égard de cette surface, un Tableau de formules analogue à celui que l'on trouve pour l'ellipsoïde au Tome II (p. 379 et suiv.) des *Leçons* de M. Darboux.

On sait (¹) que l'on obtient la même cyclide générale de Dupin, soit en cherchant l'enveloppe de la sphère

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2-u_1^2=0,$$

où x', y' sont des fonctions de u_1 définies par les équations

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0, \qquad x'=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}(u_1-k),$$

soit en cherchant l'enveloppe de la sphère

$$(x-x'')^2+y^2+(z-z'')^2-v_1^2=0,$$

où x'', z'' sont des fonctions de v_1, définies par les équations

$$\frac{x''^2}{a^2-b^2}-\frac{z''^2}{b^2}-1=0, \qquad x''=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(v_1-k).$$

(¹) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 268.

Cette proposition de Dupin permet de trouver simplement les expressions des coordonnées rectangulaires d'un point de la surface en fonction des paramètres u_1 et v_1. Il en résulte, en effet, que les coordonnées d'un point de la surface satisfont aux quatre équations compatibles

$$x^2+y^2+z^2-2x'x-2y'y+b^2+k^2-2ku_1=0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(x-\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{x'}{y'}y\right)+k=0,$$

$$x^2+y^2+z^2-2x''x-2z''z-b^2+k^2-2kv_1=0,$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(x+\frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{x''}{z''}z\right)+k=0,$$

que l'on résout immédiatement en remarquant que l'on obtient une équation linéaire en retranchant la première et la troisième équation.

Posons

$$u_1=\frac{1}{u},\qquad v_1=\frac{1}{v}.$$

Il vient

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned} x&=\frac{b^2-ka^2u+k(a^2-b^2)v}{a\sqrt{a^2-b^2}(u-v)},\\ y&=\frac{b\sqrt{u^2-\dfrac{(1-ku)^2}{a^2-b^2}}}{u-v},\\ z&=-\frac{b\sqrt{-v^2+\dfrac{(1-kv)^2}{a^2}}}{u-v}.\end{aligned}\right.$$

La surface est rapportée à ses lignes de courbure, en vertu de la signification géométrique des paramètres u et v; cela résultera aussi, d'ailleurs, de ce qui va suivre.

Remarquons qu'il serait bien facile de transformer les expressions de x, y, z sans changer les courbes coordonnées, de façon à obtenir des fonctions rationnelles des nouveaux paramètres et à mettre ainsi en évidence la représentation de la surface sur le plan.

Appliquons maintenant les considérations développées par M. Darboux (*Leçons*, t. II, p. 376 et suiv.) au calcul des fonctions qui interviennent dans les formules de Codazzi.

On trouve, pour définir le carré de l'élément linéaire,

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

les formules

$$\mathrm{E} = \frac{1}{[\mathrm{U}(u-v)]^2}, \qquad \mathrm{G} = \frac{1}{[\mathrm{V}(u-v)]^2}$$

en posant

$$\mathrm{U} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)u^2-(1-ku)^2}}{b}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\sqrt{-a^2v^2+(1-kv)^2}}{b}.$$

Calculons les quantités D, D′, D″ définies par l'identité

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Il vient

$$\mathrm{D} = \frac{v}{\mathrm{U}^3\mathrm{V}(u-v)^4}, \qquad \mathrm{D}' = 0, \qquad \mathrm{D}'' = \frac{u}{\mathrm{U}\mathrm{V}^3(u-v)^4}.$$

Si l'on suppose que les axes des x et des y du trièdre (T) coïncident avec les tangentes aux lignes coordonnées (v) et (u), on trouve ensuite

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \xi = \sqrt{\mathrm{E}}, & \xi_1 = 0, \\ \eta = 0, & \eta_1 = \sqrt{\mathrm{G}}, \\ p = 0, & p_1 = \dfrac{u}{\mathrm{V}(u-v)}, \\ q = -\dfrac{v}{\mathrm{U}(u-v)}, & q_1 = 0, \\ r = -\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}(u-v)}, & r_1 = -\dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}(u-v)}. \end{array}\right.$$

Les formules (1) et (2) contiennent tous les éléments nécessaires pour l'étude complète de la surface.

L'équation des asymptotiques sera

$$\frac{du^2}{u\mathrm{U}^2} = \frac{dv^2}{v\mathrm{V}^2};$$

c'est-à-dire

$$\frac{du^2}{u[(a^2-b^2)u^2-(1-ku)^2]}=\frac{dv^2}{v[-a^2v^2+(1-kv)^2]}.$$

Les rayons de courbure principaux auront pour valeurs

$$R=\frac{1}{v}, \qquad R'=\frac{1}{u}.$$

Sur chaque ligne de courbure, le rayon principal correspondant reste constant.

II. — *Application des formules précédentes.*

M. O. Bonnet a démontré, comme application des formules de Codazzi [1], que si une surface est telle que sur chaque ligne de courbure le rayon principal correspondant à cette ligne soit constant, la surface est une cyclide de Dupin. Les formules précédentes permettent d'arriver directement à ce résultat.

Remarquons, avec M. Bonnet, que les lignes (u) et (v) étant les lignes de courbure d'une surface, les axes des x et des y du trièdre (T) coïncidant avec les tangentes aux lignes coordonnées et l'élément linéaire étant pris sous la forme

$$ds^2=A^2du^2+C^2dv^2,$$

les relations

$$R=-\frac{A}{q}, \qquad R'=\frac{C}{p_1}$$

permettent de substituer R, R' à q et à p_1 dans les équations de Codazzi. On obtient ainsi le système

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial v} &= \left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{\partial\log A}{\partial v},\\ \frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial u} &= -\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\frac{\partial\log C}{\partial u},\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)&+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)+\frac{AC}{RR'}=0,\end{aligned}\right.$$

[1] O. Bonnet, *Addition au Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier, p. 120).

qui contient toutes les relations existant entre les rayons de courbure principaux et l'élément linéaire de la surface.

Ceci posé, dans le cas actuel, nous pouvons choisir les paramètres u et v, de façon que l'on ait

$$R = \frac{1}{v}, \qquad R' = \frac{1}{u}.$$

Portons ces valeurs dans les deux premières équations (3), il vient

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} = \frac{1}{u - v},$$

$$\frac{\partial \log C}{\partial u} = -\frac{1}{u - v};$$

donc, si l'on désigne par U une fonction de u et par V une fonction de v, on a

$$A = \frac{1}{U(u - v)},$$

$$C = \frac{1}{V(u - v)}.$$

Il reste à voir si l'on peut déterminer les fonctions U et V de façon que la troisième des équations (3) soit vérifiée, c'est-à-dire de façon que l'on ait l'identité

$$(u - v)\left(\frac{dU^2}{du} - \frac{dV^2}{dv}\right) - 2U^2 - 2V^2 - 2uv = 0.$$

Or, si l'on différentie deux fois par rapport à u, on trouve

$$\frac{d^3 U^2}{du^3} = 0.$$

En différentiant deux fois par rapport à v, on trouve de même

$$\frac{d^3 V^2}{dv^3} = 0.$$

Il en résulte que U^2 et V^2 ne peuvent être que deux trinômes du second degré en u et v

$$U^2 = lu^2 + 2mu + n,$$

$$V^2 = l_1 v^2 + 2m_1 v + n_1.$$

Si l'on substitue ces expressions dans l'identité, on trouve

$$l + l_1 + 1 = 0, \qquad m + m_1 = 0, \qquad n + n_1 = 0;$$

donc, en désignant par a, b, k trois nouvelles constantes, en général, U^2 et V^2 ont les expressions suivantes

$$U^2 = \frac{(a^2 - b^2)u^2 - (1 - ku)^2}{b^2},$$

$$V^2 = \frac{-a^2 v^2 + (1 - kv)^2}{b^2}.$$

La surface cherchée est, par suite, constituée, ainsi qu'on le voit immédiatement, par l'une des différentes formes de la cyclide de Dupin.

III. — *Surface moyenne et développée moyenne de la cyclide de Dupin.*

Considérons la surface moyenne (M) d'une cyclide de Dupin (D), c'est-à-dire la surface formée par le lieu du milieu M du segment limité par les centres de courbure principaux de (D). C'est une surface du quatrième ordre ayant une conique double et quatre points doubles, ces derniers à l'infini.

Les normales de la cyclide de Dupin rencontrent deux coniques focales l'une de l'autre; il en résulte qu'il existe sur (M) un système conjugué formé de coniques dont les plans sont respectivement parallèles à deux plans fixes rectangulaires.

Ce système conjugué est la trace sur (M) des développables de la congruence formée par les normales de (D); la surface (M) correspond donc par orthogonalité des éléments à une surface minima telle que l'image sphérique de ses asymptotiques coïncide avec l'image sphérique des lignes de courbure de (D). La surface adjointe de cette surface minima aura même représentation sphérique de ses lignes de courbure que (D) et sera, par conséquent, une surface minima à lignes de courbure planes de M. O. Bonnet. Donc :

La surface moyenne de la cyclide de Dupin correspond par orthogonalité des éléments à la surface adjointe d'une surface minima à lignes de courbure planes de M. O. Bonnet.

Considérons maintenant la développée moyenne de la cyclide de Dupin (D), c'est-à-dire la surface enveloppe du plan mené perpendiculairement à chaque normale de (D) au point qui est à égale distance des centres de courbure principaux relatifs à la normale considérée. Les normales de (D) rencontrant deux courbes, il en résulte qu'aux lignes de courbure de la cyclide de Dupin correspondent sur sa développée moyenne des courbes formant un système conjugué; d'ailleurs, ce système conjugué est formé des lignes de courbure, puisque la correspondance entre les deux surfaces est établie par plans tangents parallèles; on peut donc énoncer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour :

La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

Il résulte de ce théorème la proposition suivante :

La développée moyenne de la cyclide de Dupin est une surface dont toutes les lignes de courbure sont planes.