zien geïnteresseerde leerlingen er met enige inspanning zelfstandig hun weg in zullen kunnen vinden. *A.W. Grootendorst*

J. Mansfeld

Pappus, mathematicus en een beetje filosoof

Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1998.
20p., prijs ƒ20,- (Mededelingen van de Afdeling Letterkunde, Nieuwe Reeks; 61 #6).
ISBN 90-6984-220-3

Het gaat hier om de gedrukte tekst van een rede die de auteur uitsprak voor de Afdeling Letterkunde van de KNAW en door hem omschreven als een case study op het terrein van de traditiegeschiedenis van het platonisme. De bedoeling was met enkele voorbeelden aan te geven hoe in de Klassieke Oudheid literaire genres elkaar beïnvloed hebben, in concreto: enkele voorbeelden te geven van de wijze waarop, uit de wiskundige tijdschriften, kennis geput kan worden met betrekking tot de *filosofische* denkwijze van een *mathematische auteur*. Voor deze laaste viel de keuze op Pappus van Alexandrië (1e helft van de vierde eeuw na Christus). De fragmenten die hierbij aan de orde gesteld, zijn gekozen uit de Sunagogè (3 plaatsen) en uit Pappus' commentaar op boek X van de Elementen van Euclides (1 plaats). Op heldere wijze zet de auteur uiteen hoe men uit deze, toch wiskundige, geschriften een kijk op het Platonisme krijgt die de 'kanonieke' literatuur niet verschaft, onder andere het inzicht dat gedurende lange tijd vormen van platonisme naast elkaar hebben bestaan die men geneigd zou zijn diachroon te ordenen. Vooral de bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de Elementen doet Pappus naar voren komen als een wiskundige met wel degelijk filosofische interesse. Het betoog dwingt respect af door de grote eruditie die eruit spreekt. Vermeldenswaard is ook de lof die de schrijver toebrengt aan de historici van de wiskunde, die hij karakteriseert als 'benijdenswaardig knappe onderzoekers'. Toch roept het betoog enkele kritische opmerkingen op, speciaal waar het gaat om de wiskundige passages. Allereerst deze: op pagina 9 wordt een plaats uit de Sunagogè vertaald: "... dat de bol van alle driedimensionale lichamen die dezelfde omtrek (waarom niet 'oppervlakte', awg) hebben, de bol de grootste inhoud heeft ...". Dat is correct. Wanneer dan drie regels verder wordt gezegd dat "... de bol groter is dan de andere (*ingeschreven*) figuren ...", dan is de opmerking tussen haakjes voor de rekening van de vertaler. Hier wordt de lezer op het verkeerde been gezet. Natuurlijk is deze bewering waar, maar daarom gaat het hier niet: het gaat om lichamen met gelijke oppervlakte, c.q. krommen met gelijke omtrek. Op pagina 10 herhaalt de auteur deze gedachte door te zeggen dat "... van alle onregelmatige figuren in het platte vlak ... met dezelfde omtrek de *omgeschreven* cirkel de grootste is." Overigens is ook het woord 'regelmatig' hier misplaatst. Op pagina 17 komt het probleem van de incommensurabiliteit aan de orde; wij lezen daar (het gaat over de Pythagoreërs): ' ... zij kwamen volgens de overlevering in moeilijkheden toen bleek dat de hypothenusa (sic!) van een rechthoekige driehoek incommensurabel is met de rechten, dat wil zeggen niet met dezelfde eenheidsmaat te meten'. Met 'de rechten' kunen moeilijk de rechthoekzijden bedoeld zijn. Denk maar aan een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5. Uiteraard is hier in eerste instatie een *gelijkbenige* rechthoekige driehoek bedoeld. Duidelijker zou zijn, als gewezen was op de incommensurabiliteit van diagonaal en zijde van een vierkant. Zo zijn er meer kanttekeningen te plaatsen, onder andere waar het gaat om het losse gebruik van de term 'regelmatige' lichamen, waarmee in een aantal gevallen 'halfregelmatige lichamen' bedoeld wordt. Ook de voetnoot op pagina 15, waar het harmonische gemiddelde wordt besproken aan de hand van een enkel voorbeeld, zal voor de gemiddelde lezer niet voldoende inzicht geven in dit gemiddelde. Deze opmerkingen doen echter geen afbreuk aan de waardering voor dit — zoals reeds opgemerkt — erudiete artikel, waarmee tevens aan fraaie bijdrage geleverd is aan het leggen van contact tussen de alpha- en de bètawereld. Hopelijk zal de in het uitzicht gestelde gedetailleerde bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de Elementen van Euclides niet lang op zich laten wachten. *A.W. Grootendorst*

P.J. Nahin

An imaginary tale
The story of $\sqrt{-1}$

Princeton: Princeton University Press, 1998.
257p., prijs \$ 25,95.
ISBN 0-691-02795-1

Er zijn veel redenen te bedenken om $\sqrt{-1}$ een onmogelijk, een absurd, een betekenisloos getal te noemen. In *An imaginary tale* passeren talloze de revue, in de loop der eeuwen door uiteenlopende denkers naar voren gebracht. Van Diophantus die in zijn Arithmetica de vergelijking $172x = 336x^2 + 24$ 'onmogelijk' noemde vanwege de uitkomst, tot aan 'royal astronomer' Airy toe, die nog halverwege de negentiende eeuw verklaarde niet het minste vertrouwen te hebben in een resultaat dat met imaginaire symbolen tot stand is gekomen. Aan Nahin de taak te laten zien dat dergelijke symbolen weliswaar imaginair zijn, maar geenszins betekenisloos. Aan die taak zet hij zich met een enthousiasme waaraan de lezer moeilijk ontsnapt. In de eerste drie hoofdstukken laat hij zien hoe wiskundigen in de loop van zo'n 2000 jaar tegen imaginaire getallen aanliepen en in de meeste gevallen zo snel mogelijk doorliepen. Cardano, Descartes riepen 'onherleidbaar' of 'onmogelijk' en zelfs Euler deed dat waar het ging om de meetkundige betekenis van het getal dat hij i noemde. Een enkeling — Cardano's leerling Bombelli, Wallis — schrikt er niet voor terug denkbeeldig te rekenen of tekenen en Nahir zelf laat zien hoe je complexe wortels in een uiterst reële grafiek kunt construeren. De eer voor degene die als eerste het complexe vlak definieerde gaat naar de landmeter Caspar Wessel, die echter in het Deens schreef, zodat Argand (en Buë) het tien jaar later nogmaals over konden doen. Geschiedenis is echter niet het doel in deze hoofdstukken, maar een middel om de puzzel van het imaginaire tot leven te brengen door te laten zien bij welke gelegenheden $\sqrt{-1}$ opduikt en hoe daar mee om te gaan. Daarin slaagt de auteur uitstekend, hoewel hij in zijn enthousiasme af en toe nalaat aan te geven waar hij precies naar toe wil. De laatste vier hoofdstukken draaien om eigenschappen en toepassingen van complexe getallen. Hoewel

Nahin elektrotechnisch ingenieur is, betreffen die laatste voornamelijk wiskundige toepassingen. Wat hij de fysische betekenis van *i* noemt, is vooral de meetkundige, en de fysische toepassingen beperken zich tot een afleiding van de Keplerwetten en het doorrekenen van een elektrotechnisch vraagstuk. Zijn ware hartstocht lijkt te liggen bij afleidingen met, dankzij de complexe getallen, onverwachte en elegante uitkomsten. Hoe fraai die resultaten kunnen zijn, weet eenieder die een college complexe functietheorie heeft gevolgd. Het laatste hoofdstuk gaat over die theorie en is misschien wel het meest geslaagde: aan de hand van de ontwikkeling van Cauchy's contourintegratie, geeft Nahin hier in feite een uitstekende inleiding op de theorie. De lezer wordt terecht gewaarschuwd dat *An imaginary tale* geen wiskundig lichtgewicht is. De gemiddelde vwo-er zal zeker moeite hebben met het gemak waarmee algebraïsch gemanipuleerd wordt. Wie daar plezier aan beleeft, vindt hier een schat aan puzzels waarin het mysterie van $\sqrt{-1}$ van alle kanten belicht wordt. *F.J. Dijksterhuis*

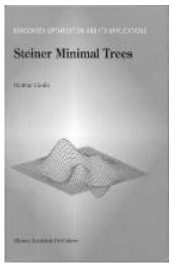
dige/logische denkwijzen en denkachtergronden ontwikkelt, is magistraal. Dit gehele bouwwerk plaatst de schrijver bovendien nog in een, weliswaar enigszins speculatief, wijsgerig kader met betrekking tot begrippen als 'waarheid' en 'kenbaarheid', namelijk in en van de werkelijkheid. Naar mijn mening dient ieder, die zich op enig niveau wenst te bekwamen in ons vak, zich tevens intensief te verdiepen in stof zoals die in dit boek behandeld wordt. Het hangt van de diepgang en de omvang van de opleiding af of de totale inhoud voor ieder aan de orde moet komen. Het maakt natuurlijk enig verschil of men opgeleid wordt tot 2e-graads leraar, tot 1e-graads leraar, of tot beroepswiskundige al of niet ten behoeve van een specifieke richting. Maar zonder (enige) kennis van het hier gebodene mag niemand zich wiskundige, of wiskundeleraar noemen. Het boek van Trudeau is hiervoor een eminente gids. Het is bovendien schitterend uitgevoerd, voorzien van vele opgaven en geschreven in glasheldere taal. Kortom, dit boek betekent een feest voor ieder die zich er in verdiept. *W. Kleijne*

R.J. Trudeau

Die geometrische Revolution

Basel: Birkhäuser Verlag, 1998.
312 p., prijs DM 68,-.
ISBN 3-7643-5914-5

Oorspronkelijk is dit boek in 1987 verschenen onder de titel *The Non-Euclidian Revolution*. In 1995 verscheen hiervan de verbeterde en bijgewerkte tweede druk, waarvan het voorliggende werk de Duitse vertaling is. Dit in feite dus al zo'n 12 jaar bestaande boek is dan ook in brede kring langzamerhand een oude en goede bekende. Als tamelijk elementair werk biedt het bovendien, wetenschappelijk wiskundig gezien althans, geen nieuws. Desondanks is en blijft het naar mijn mening een zeer opmerkelijk boek. Speciaal voor de huidige generatie in opleiding zijnde wiskundigen geeft het boek een uniek overzicht van een aantal facetten van de meetkunde. Maar niet alleen zuiver meetkundige zaken, ook meer algemene beschouwingen komen ruim aan bod, waardoor de meetkunde, en meer algemeen de wiskunde, in een bredere context geplaatst wordt. Het boek is dus in de eerste plaats een meetkundeboek, waarbij de euclidische meetkunde in historisch perspectief behandeld wordt, gevolgd door een, eveneens in historische context geplaatste, behandeling van de hyperbolische meetkunde. Het bijzondere van het boek is evenwel dat gedurende de gehele behandeling zeer veel aandacht geschonken wordt aan de logische denkwijze die aan de meetkunde ten grondslag ligt en aan de logische achtergronden van de meetkunde. Het ligt natuurlijk voor de hand dat het aangrijpingspunt hiervoor in het vijfde postulaat van Euclides genomen is. De historische ontwikkeling, culminerend in de ontwikkelingen in de 19e eeuw op het gebied van de niet-euclidische meetkunde, verklaren de term 'revolutie' in de titel van het boek. Inderdaad is hier sprake van een revolutie, even zwaar wegend als die tengevolge van het denken van bijvoorbeeld Copernicus, Newton en Darwin. De wijze waarop de schrijver de meetkundige beschouwingen, in samenhang met de in de loop van de tijd zich ontwikkelende wiskun-



D. Cieslik

Steiner minimal trees

Dordrecht: Kluwer 1998. 319p., prijs f 260,-
(Nonconvex optimization and its applications; 23). ISBN 0-7923-4983-0

The problem 'For which point the sum of the distances to three given points in the plane is minimal?' was posed by Fermat and solved by Torricelli. It can be generalised in numerous ways: take more than three points, take a higher dimensional space, a metric other than the Euclidian one, ask for the shortest network connecting N given points. This last question, posed for finite N, in a finite dimensional normed real linear space (called a Banach-Minkowski space by the author, below BaMi space), and in particular in a plane, is the main topic of this book. The solution is a tree having as vertices the given points and (mostly) some extra, so called Steiner points. It is generally called a Steiner Minimal Tree (SMT), giving, the author argues, a bit to much credit to Steiner. The problem becomes easier if the number of Steiner points allowed is restricted to a fixed k (k-SMT). If $k = 0$ we have the well-known problem of the Minimum Spanning Tree (MST, unfortunately), and in fact operate in a discrete space. In a general metric space an SMT need not exist, in a BaMi space however it does, although it may not be unique. It then has a most $N - 2$ Steiner points and their degree is at most one larger than the dimension of the space. The infimum (taken over all finite sets) of the ratio of the length of the SMT and that of the MST is the Steiner ratio of the space; it is at least $\frac{1}{2}$. For many normed spaces to find an SMT is known to be NP-hard or NP-complete, the latter even in Hakimi's problem where the space is the set of points of a graph with a length function on the edges. The book treats many special cases for many types or normed spaces; Euclidian or Manhatten distance, discrete spaces, L_p-norm, planes, strictly convex unit balls, et cetera, emphassing the algorithmic and complexity aspects of findsing an SMT or an approximation of it, often invoking one of the more than 400, often recent, references, and thus