

# Wiskunde in wetenschap

## VISIE OP EEN DOMEIN IN WISKUNDE D

[ Universiteit Twente – kerngroep ]

Wat is wetenschapsbeoefening, welke rol speelt wiskunde hierin, en wat betekent dat voor het onderwijs in de bovenbouw van het vwo?

Geïnspireerd door een oproep van de vernieuwingscommissie cTWO gericht aan het adres van het wetenschappelijk onderwijs, wordt er dit schooljaar aan de Universiteit Twente een leerstofdomein 'Wiskunde in Wetenschap' ontwikkeld door een kerngroep van UT- en vwo-docenten. Dit lesmateriaal is bedoeld voor het nieuwe vak Wiskunde D, maar (deels) ook voor Natuur, Leven en Technologie (NLT). Het wil aan de hand van uitdagende cases de leerlingen laten ervaren dat het proces van (wiskundig) modelleren problemen doet begrijpen en ze toegankelijk maakt voor oplossingen.

### Wetenschap

Wetenschap, bedreven vanuit nieuwsgierigheid of doelgerichtheid, stelt zichzelf vragen om (natuur)verschijnselen te kunnen begrijpen. Om het denken richting te geven en om van gedachten te wisselen is een 'taal' vereist waarin begrippen worden ontwikkeld. Deze begrippen beschrijven de meest in het oog lopende aspecten van het verschijnsel. Zij dienen zo precies mogelijk geformuleerd te worden en moeten eenduidig zijn.

Er worden niet alleen begrippen, maar ook relaties tussen die begrippen gezocht; juist daardoor ontstaat inzicht in het probleem. Of het leidt tot de noodzaak meer begrippen in te voeren en/of andere relaties te onderzoeken. Al doende gaan we meer 'begrijpen' van het verschijnsel. Dit geheel van begrippen en relaties is een bouwwerk dat een 'model' is van het te onderzoeken probleemgebied.

Omgekeerd, bij het denken of communiceren over welk onderwerp dan ook gebruiken we een (al dan niet expliciet gemaakt) achterliggend model. Als verschillende mensen onbewust verschillende modellen gebruiken kan dat gemakkelijk aanleiding geven tot misverstanden of onbegrip. Bijvoorbeeld: algemene uitspraken over economie, gezondheid etc. hangen voornamelijk af van welk aspect

men daarvan wil benadrukken. Juist als daarvoor gekwantificeerde grootheden worden gebruikt (winst van bedrijven, aantal werklozen, cholesterolgehalte, etc.) moet het belang daarvan worden onderkend. De keuze van de beschouwde grootheden kan de discussie over de resultaten van het model verhelderen. Voorbeelden uit het dagelijkse leven zoals hierboven gegeven kunnen leerlingen het belang illustreren van het expliciet maken van het gebruikte model. Het valt daarbij op te merken dat bovenstaande geldt voor alle wetenschappen, van natuurwetenschappen tot geestes- en sociale wetenschappen. Bovendien moet benadrukt worden dat alleen 'logisch redeneren' (meestal stilzwijgend) geaccepteerd is als methode om uit gekozen begrippen/grootheden en daarvan afgeleide (of aangenomen) relaties conclusies te trekken. De inductieve manier van redeneren wordt vaak toegepast bij het opstellen van een model, waarbij het logisch redeneren slechts ten dele aan de orde is. Er spelen nogal eens voorkeuren, ingeslepen (voor)oordelen en toevalligheden mee. Van belang wordt dan de terugkoppeling van meetresultaten of uitkomsten van berekeningen naar de werkelijkheid.

### Wiskunde

In het voorafgaande is betoogd dat het exact formuleren van begrippen en relaties tot een model leidt dat het denkkader gaat vormen waarmee via logisch redeneren kennis wordt ontwikkeld over het te onderzoeken probleemgebied. Met al deze activiteiten wordt in veel gevallen wel wat slordig omgesprongen, maar dit erkent in principe de nauwkeurige werkwijze van de wiskunde als ideaaltypisch voorbeeld. Dit is op zich al voldoende reden om modelleren te zien als een (toegepast) wiskundige activiteit.

Meer klassiek gesproken, en niet minder belangrijk maar wel meer vertrouwd, komt de wiskunde in beeld zodra de boven beschreven structuur geformaliseerd wordt en wiskundige technieken worden gebruikt voor nader onderzoek. In bijvoorbeeld de sociologie worden intermenselijke relaties gerepresenteerd als 'grafien' en in bijvoorbeeld natuurkunde wordt het begrip 'afgeleide' als maat voor verandering geïntroduceerd. In het vertalen van begrippen naar meetbare grootheden (buren in een graaf, snelheid bij verplaatsing) bedrijft men ook wiskunde. Relaties geven uitdrukking aan ordening of aan een functioneel verband. Dat kan een ongelijkheid zijn, een algebraïsche vergelijking, een differentiaalvergelijking, ... Het geheel van gekozen grootheden en opgestelde relaties vormt het wiskundig model van de (benadering van de) werkelijkheid.

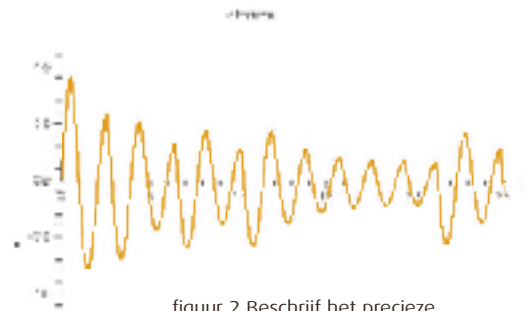
Dit modelleerproces kan op elk niveau, afhankelijk van het leerjaar, gestalte krijgen. De concretisering van het abstractieniveau en het manipuleren met parameters zijn daarbij bepalend. In hoeverre het model de werkelijkheid benadert is afhankelijk van de selectie van grootheden en relaties. Een complexer model zal meer wiskunde-achtergrond vereisen, zowel voor het formuleren van het model, de analyse van het model, als ook voor de interpretatie van het resultaat van het onderzoek in het model.

## Modules

Het domein Wiskunde in Wetenschap heeft binnen Wiskunde D (vwo) een studielast van 80 uren. Wij werken eraan om dit domein te laten bestaan uit modules die in opeenvolgende leerjaren kunnen worden ingezet. Tevens is het studiemateriaal (deels) inzetbaar bij het vak NLT. Eén module staat bij ons voor 20 studielasturen. De kerngroep werkt aan verschillende modules die in combinatie het domein Wiskunde in Wetenschap kunnen opvullen. Ook aan de universiteiten van Amsterdam, Delft, Eindhoven en Nijmegen worden modules Wiskunde in Wetenschap ontwikkeld. Voor klas 4 wordt een algemene inleidende module 'Modelleren' geschreven met eenvoudige voorbeelden uit diverse wetenschapsgebieden. We willen ernaar streven dat deze module ook aantrekkelijk zal zijn voor leerlingen van andere dan het N&T-profiel. Daarnaast ontwikkelt de groep specifiekere modules met een bepaald thema (kilometerheffing, tsunami's, resonantie, planeetbewegingen) voor klas 5 en 6 waaraan een onderzoekopdracht aan de universiteit of eventueel op afstand kan worden gekoppeld. De door de kerngroep ontwikkelde modules bestaan uit leerlingmateriaal (zie *figuur 1 en figuur 2*) en docentmateriaal.



figuur 1 Schaalmodel (Märklin) van een locomotief. Neem aan dat deze locomotief met een snelheid van 60 km/u rijdt. Hoe snel moet je het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?



figuur 2 Beschrijf het precieze verband tussen de figuur en de grafiek.

(advertentie)

# LEKOPRO

**POLYDRON is een eenvoudig bouwsysteem voor alle niveaus van onderwijs**



### Informatie

t: 020-4160320

f: 020-4160590

e: [lekopro@planet.nl](mailto:lekopro@planet.nl)

website: [www.lekopro-polydron.nl](http://www.lekopro-polydron.nl)

# POLYDRON

Het idee is dat leerlingen open opdrachten krijgen, kort en helder geformuleerd. De docenten echter zullen voorzien worden van een uitgebreide bundel met theoretische achtergrondartikelen en praktische tips: computersimulaties, applets, etc. Theoretisch berust deze aanpak op een constructivistische visie op leren en onderwijzen. Concreet betekent dit dat het leren plaatsvindt vanuit probleemgeoriënteerde activiteiten in een rijke leeromgeving – leerlingen kennen de weg naar allerlei hulpmiddelen. Het coöperatief (groeps)leren neemt een centrale plaats in, samen wordt er aan problemen gewerkt.

### Didactiek

Bij dit type leren hoort een daaraan aangepaste didactiek en een andere rol van de docent. De module zoals wij die voor ogen hebben is niet vergelijkbaar met een hoofdstuk uit één van de gebruikelijke wiskundemethodes. Wij ontwikkelen geen stapelopgaven in steeds veranderende contexten. We gaan uit van één rijke context, en willen het denken van leerlingen stimuleren door niet van deze ene context af te wijken. Het leerproces wordt niet gestuurd door de opgaven in het boek, maar door vragen die leerlingen zelf stellen. Dat gaat niet vanzelf, omdat leerlingen niet gewend zijn op deze manier met wiskunde bezig te zijn. Dit kan bijvoorbeeld door het houden van onderwijsleergesprekken waarin de docent de tijd neemt om door te vragen, eigen voorbeelden te laten bedenken, etc. De docent treedt dan op als meester en de leerling is zijn gezelschap; in de literatuur wordt wel gesproken over *cognitive apprenticeship* (de docent als voorbeeld).

Eén van die rijke contexten waarvoor wij hebben gekozen is de context 'golven'. Motivatie is waarschijnlijk geen probleem (zie [www.wldelft.nl/gen/news/tsunami/](http://www.wldelft.nl/gen/news/tsunami/)). Die mooie applet uit Delft gaat over golven en over het enorme bereik van golven. Het onderwerp is levensecht waardoor de kans groter is dat het geleerde ook beklijft; in de literatuur heet dat *situated cognition* (de docent geeft hints, stelt vragen, en biedt mogelijkheden aan om een volgende stap te zetten).

Maar wat moet je nu met zo'n rijke context in de wiskundesles? Hoe kun je daar nu een model van maken? Om maar met de deur in huis te vallen: wat is een golf eigenlijk? Hoe stel je dat voor? Je kunt een golf observeren als je naar de zee kijkt, maar wat gebeurt er eigenlijk en hoe beschrijf je dat?

Iedereen (nemen we aan) heeft wel eens in een stadion, of op tv, naar wedstrijden gekeken. Vaak wordt er hard geschreeuwd om de sporters extra op te jatten. Het effect is het grootst als je rechtop gaat staan met je armen recht omhoog gericht, precies op het moment dat de sporter voorbij komt. En dan gebeurt het: er ontstaat een golf (wave) beginnend bij de start (staande mensen) en eindigend bij de finish (staande mensen). Neem nu eens aan dat de toeschouwers gaan staan om te schreeuwen en 2 seconden later weer zitten.

Als de toeschouwers op de tribune reageren op de naaste linkerbuur met een reactietijd van ½ seconde, dan verplaatst de golf zich in 1 seconde 80 cm, ervan uitgaande dat de stoelen op de tribune 40 cm breed zijn en direct aansluiten. Met andere woorden, de *golfsnelheid* is 80 cm (2 stoelen) per seconde. En als elke toeschouwer op de tribune reageert op de linkerbuur van de linkerbuur, dan verdubbelt (4 stoelen per seconde) de golfsnelheid. De golf verplaatst zich meer dan 1½ meter per seconde. Als de toeschouwers ook nog eens 2 seconden blijven staan, dan is de lengte van de golf meer dan 3 meter (8 stoelen). Anders gezegd: de *golflengte* is 3,20 meter (8 stoelen), en in het voorgaande geval 1,60 meter (4 stoelen). In dit voorbeeld zien we al dat, wil je tot een model komen, er veel vragen moeten worden gesteld en veel aannames moeten worden gedaan. Ook moeten de definities helder worden: wat versta je bijvoorbeeld precies onder een golflengte?

Voortbordurend op dit kernconcept kunnen allerlei nieuwe vragen ontstaan: Oudere mensen reageren trager, wat verandert er dan aan de golf? Kinderen reageren sneller maar blijven langer staan, wat verandert er dan? Hoe kun je aan een golf zien of mensen sneller opstaan of sneller gaan zitten, bijvoorbeeld vanaf het punt dat de handen helemaal in de hoogte zijn? Hoe lang duurt het in het Thialf Stadion voordat de golf helemaal rond is? Gaat de golf voor mensen hoog boven in de tribune (meer stoelen) langzamer dan voor mensen die beneden (minder stoelen) zitten? Wat gebeurt er als iemand (niet op de voorste rij) niet op zijn naaste buur, maar op diegene die schuin voor hem zit, reageert?

Deze aanpak kost tijd, maar het kernconcept krijgt langzaam maar zeker body. Een dergelijke context kan ook worden gespeeld, of via eigen verhalen bijna realiteit

worden, in de literatuur aangeduid met *anchored instruction*: leerlingen worden voorzien van 'ankers'; de docent begeleidt zijn leerlingen met vragen en opmerkingen zoals: Denk je dat je aanname klopt? Hoe kom je daarachter? Waarom probeer je dit idee niet eens uit?

Abstractie, de stap naar een omschrijving waarin twee variabelen (afstand en tijd) voorkomen, komt dan niet zomaar uit de lucht vallen. Dit is een voorbeeld maar de essentie is duidelijk: denk met de leerlingen na over het kernconcept zelf. Voor docenten is dit nieuw, samen met leerlingen stellen zij zichzelf vragen en zoeken naar antwoorden, de literatuur spreekt dan over *reciprocal teaching*. Deze andere didactiek vereist behalve lesmateriaal voor leerlingen ook materiaal voor docenten. Wij zijn van plan een uitgebreide docentenhandleiding te ontwerpen, met allerlei literatuurverwijzingen, websites met applets, en dwarsverbanden naar andere concepten.

We verwachten dat er aan het eind van dit schooljaar lesmateriaal en een bijbehorende docentenhandleiding gereed zullen zijn voor experimenteel gebruik.

### Over de auteurs

De UT-kerngroep bestaat uit vier UT-docenten:

- Brenny van Groesen, [groesen@math.utwente.nl](mailto:groesen@math.utwente.nl),
  - Gerard Jeurnink, [g.a.m.jeurink@utwente.nl](mailto:g.a.m.jeurink@utwente.nl)
  - Norbert Ligterink, [n.e.ligterink@utwente.nl](mailto:n.e.ligterink@utwente.nl)
  - Nellie Verhoef, [n.c.verhoef@utwente.nl](mailto:n.c.verhoef@utwente.nl)
- en zeven vwo-docenten:
- Jan de Geus, [j.degeus@baudartius.nl](mailto:j.degeus@baudartius.nl)
  - Art Groen, [artjos@home.nl](mailto:artjos@home.nl)
  - Jan Otto Kranenborg, [j.o.kranenborg@hetnet.nl](mailto:j.o.kranenborg@hetnet.nl)
  - Jeroen Spandaw, [j.g.spandaw@xs4all.nl](mailto:j.g.spandaw@xs4all.nl)
  - Frits Spijkers, [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)
  - Gerard Stroomer, [g.stroomer@liemerscollege.nl](mailto:g.stroomer@liemerscollege.nl)
  - Joke Zwarteveen, [jzwarteveen@nuborgh.nl](mailto:jzwarteveen@nuborgh.nl)