

Paper gepresenteerd op de Onderwijsresearchdagen 2009
27-29 mei 2009 te Leuven, aangepast en uitgewerkt

Differentiaalvergelijkingen begrijpen

J.A. Zwarteveen, N.C. Verhoef, H.P. Hendrikse en J.M. Pieters¹
ELAN Universitaire Lerarenopleiding
Universiteit Twente

Differentiaalvergelijkingen begrijpen

Samenvatting

Een domein van het nieuwe vak wiskunde D van het vwo is het domein Dynamische systemen, waarin het concept differentiaalvergelijkingen een prominente plaats inneemt. Dit concept speelt in technische universitaire studierichtingen een centrale rol, maar wordt door de studenten als moeilijk ervaren. Omdat een van de doelen van het vak wiskunde D voor het vwo een adequate voorbereiding op technische universitaire vervolgoopleidingen is, is een optimale didactiek voor dit concept wenselijk. Voor zo'n didactiek is inzicht in hoe leerlingen het concept differentiaalvergelijkingen begrijpen nodig. Om dit inzicht te verkrijgen wordt een onderzoeksinstrument ontwikkeld om leerprocessen te kunnen beschrijven. In dit paper wordt verslag gedaan van het totstandkomen, toetsen en bijstellen van een prototype van een onderzoeksinstrument dat leerprocessen bij het onderdeel "opstellen van een differentiaalvergelijking" in kaart brengt. Als nevenresultaat van de toetsing van het onderzoeksinstrument, dat zich nog in de ontwikkelfase bevindt, is een eerste inzicht verkregen in het verloop van leerprocessen. Daar dit nevenresultaat interessante gegevens bevat, wordt hierop in dit paper ook ingegaan, en wel aan de hand van de classificeringsgegevens van het werk van een student Technische Geneeskunde.

¹ Adressen auteurs: J.A. Zwarteveen (j.a.roosenbrand@utwente.nl), N.C. Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl), H.P. Hendrikse (h.p.hendrikse@gw.utwente.nl), J.M. Pieters (j.m.pieters@gw.utwente.nl)

1. Inleiding

De commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO), die belast is met de vernieuwing van de vakinhoud, noemt als een van de te bereiken doelen van het nieuwe vak wiskunde D voor het vwo: een adequate voorbereiding op een universitaire technische vervolgstudie (cTWO, 2005). Vanuit deze doelstellingen is het domein "Dynamische systemen", waarbinnen het concept differentiaalvergelijkingen een prominente plaats inneemt, in het curriculum opgenomen. Dit domein was vóór 2007 opgenomen in het curriculum van wiskunde B1 en wiskunde B12, maar is door inperking van het aantal contacturen uit het nieuwe programma voor wiskunde B verdwenen. cTWO heeft ervoor gekozen de omschrijving van dit domein summier te houden, om de scholen hierin hun eigen keus te geven.

2. Probleemstelling en onderzoeksvraag

Door deze summier domeinbeschrijving (cTWO, 2009) is er een grote verscheidenheid aan lesmateriaal ontstaan, waarin in de meeste gevallen de adequate voorbereiding op een universitaire technische vervolgstudie moeilijk te herkennen is. Deze voorbereiding voor het domein differentiaalvergelijkingen is echter noodzakelijk, aangezien dit concept, dat in technische vervolgstudies onontbeerlijk is, door studenten in deze richtingen als moeilijk wordt ervaren (Hulshof, 2007). Wat het lesmateriaal voor het domein "Dynamische systemen" betreft, lijkt, waar het gaat om het modelleren van een situatie tot een differentiaalvergelijking, de voorkeur uit te gaan naar het gebruik van ICT (Drijvers, 2006). De meeste ICT-tools zijn echter niet bedoeld om inzicht te geven in het totstandkomen van de differentiaalvergelijking. Daarbij is het ontwerp van deze tools gebaseerd op de wiskundige kennis van de expert, zonder rekening te houden met de veel minder ontwikkelde wiskundige startpositie van de leerling. Het werken met door experts aangereikte hulpmiddelen veroorzaakt bij de leerling een routinematig handelen, gepaard met weinig begrip (Rasmussen, 2001; Rasmussen & Blumenfeld, 2007). De onderzoeksbevindingen van Chaachoua en Saglan (2006) laten zien dat als studenten geen inzicht hebben in het totstandkomen van de differentiaalvergelijking, zij grote moeite hebben met het analyseren van het gedrag van de oplossing van een differentiaalvergelijking. Dit analyseren noemt cTWO (2008) het belangrijkste aspect van het domein dynamische systemen.

Voorafgaande waarnemingen vormen een goede grond om een studie te wijden aan het ontwerpen van een didactiek van het concept differentiaalvergelijkingen, die de doelstellingen van cTWO kan verwezenlijken.

Dit onderzoek beoogt een bijdrage te leveren aan zulk een didactiek van het concept differentiaalvergelijkingen. Wil men de leerling inzicht in dit concept geven, dan is het noodzakelijk dat de didactiek aansluit bij de leerprocessen van de leerling (Rasmussen & Marrongelle, 2006). Daarvoor zullen eerst deze leerprocessen moeten worden beschreven. Hiertoe wordt in een voorstudie een onderzoeksinstrument ontwikkeld en op validiteit getoetst. In deze voorstudie gaat het daarbij om de volgende vraag:

Welke zijn de kenmerken van een onderzoeksinstrument dat leerprocessen, uitgedrukt in kennis en vaardigheden, bij het verwerven en toepassen van het concept differentiaalvergelijkingen doelmatig beschrijft?

Het concept differentiaalvergelijkingen (DV) omvat diverse onderdelen. Voor dit onderzoek zijn twee onderdelen uitgekozen, namelijk *het opstellen van een DV en het richtingsveld als middel voor het analyseren van het met behulp van een*

DV beschreven model. Beide onderdelen hebben raakvlakken met het domein modelleren.

We beperken de vraag omtrent de kenmerken van het onderzoeksinstrument in dit paper tot de kenmerken van het onderzoeksinstrument dat kennis en vaardigheden bij *het opstellen van een differentiaalvergelijking* in kaart brengt. Het doel van dit onderzoeksinstrument dat leerprocessen beschrijft is binnen dit onderzoek tweeledig. Ten eerste dient het om gebreken in kennis en vaardigheden te kunnen vaststellen, zodat met de hierdoor verkregen informatie de didactiek kan worden aangepast. Maar ten tweede moet dit instrument eveneens ingezet kunnen worden om te toetsen of de aangepaste didactiek geresulteerd heeft in afname van deze gebreken en toename van begrip.

3. Theoretisch kader

Allereerst wordt de hierboven genoemde keuze voor de onderdelen van het concept differentiaalvergelijkingen toegelicht in *de keuze van de onderdelen van het concept differentiaalvergelijkingen*. Daarna wordt verder ingegaan op "het beschrijven van kennis en vaardigheden bij het opstellen van een DV". Hierbij komen drie aspecten aan de orde: *het begrijpen van een wiskundig concept, het beschrijven van dit begrijpen aan de hand van een schema, en het opstellen van een DV als een speciaal geval van modelleren*.

Als laatste wordt het *prototype van het onderzoeksinstrument*, dat is ontstaan op grond van deze inzichten beschreven.

3.1 Keuze van de onderdelen van het concept differentialvergelijkingen

Het concept differentiaalvergelijkingen valt grofweg uiteen in:

- (a) het opstellen van een DV als een model van het veranderingsproces,
- (b) het bewerken daarvan met algebraïsche technieken en numerieke methodes al dan niet met behulp van ICT, en
- (c) het analyseren van dit model in termen van eigenschappen van het veranderingsproces.

Voor het kiezen van onderdeel (a), het opstellen van een DV als een model van het veranderingsproces, pleiten de volgende argumenten.

Uit het onderzoek van Chaachoua en Saglan (2006) is gebleken dat het opstellen van een DV inzicht in het concept differentiaalvergelijkingen bevordert.

Mondelinge informatie van docenten die aan een technische opleiding van een universiteit differentiaalvergelijkingen onderwijzen bevestigen eveneens, dat het opstellen van een goede DV van groot belang is. Als derde en vierde argument om juist het opstellen van een DV als onderwerp van onderzoek te kiezen, is dat dit een speciale vorm van modelleren is, een activiteit die in het nieuwe wiskundeprogramma voor wiskunde B in het domein Vaardigheden is opgenomen, maar waarmee leerlingen uit het voortgezet onderwijs in het algemeen grote moeite hebben (Doorman, Drijvers, Dekker, Van den Heuvel-Panhuizen, De Lange & Wijers, 2007).

Omdat het bewerken van een DV met algebraïsche technieken en numerieke methodes procedureel van aard is, en minder met inzicht in het *concept* differentiaalvergelijkingen heeft te maken, wordt in dit onderzoek onderdeel (b) buiten beschouwing gelaten.

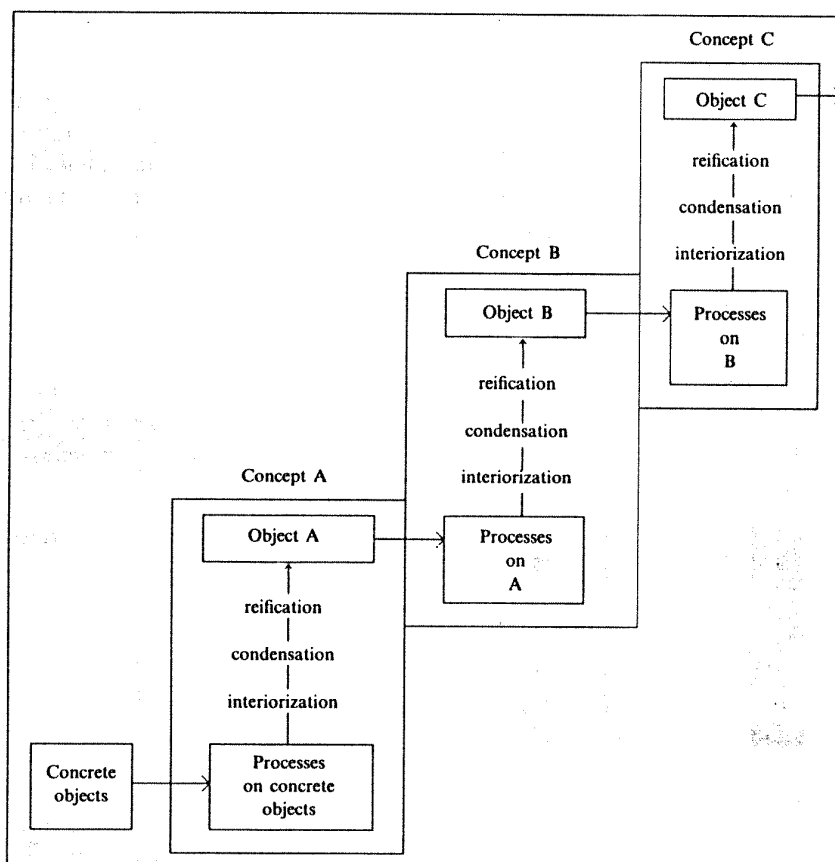
In het volledige onderzoek wordt ook onderdeel (c), het analyseren van het model, betrokken. Deze keuze wordt kort toegelicht in Bijlage I.

Het vervolg spitst zich toe op de aspecten die aan de orde komen bij het beschrijven van de kennis en vaardigheden bij het gekozen onderdeel "het

opstellen van een differentiaalvergelijking". Eerst wordt het begrijpen van een wiskundig concept in algemene zin besproken, daarna wordt het beschrijven van dit begrijpen aan de hand van een schema toegelicht. Als laatste wordt ingegaan op het raakvlak tussen modelleren en het opstellen van een DV.

3.2 Het begrijpen van een wiskundig concept

In ons onderzoek gaan we uit van de theorieën van Sfard (1991) en Tall (1994). Anna Sfard (1991) onderscheidt het begrijpen van een wiskundig concept in *operationeel* en *structureel* begrijpen. Door bewerkingen uit te voeren op een begrepen concept ontstaat via interiorisatie, condensatie en verdinging (reïficatie), het structureel begrijpen van een hoger concept. Zolang het hogere concept nog niet door verdinging structureel is begrepen, maar wel procedures met het concept kunnen worden uitgevoerd, is het concept operationeel begrepen. Bijvoorbeeld, door herhaald een getal af te trekken van een getal dat kleiner is (een bewerking op het begrepen concept "getal", op dat moment alleen nog maar een "positief" getal) en met deze uitkomsten verder te rekenen, ontstaat langzamerhand het inzicht dat de uitkomsten van deze bewerkingen een zelfstandig concept vormen. Namelijk het concept "negatief getal", dat ingepast kan worden in het bekende concept "getal". Nu kan dit concept ook onder woorden gebracht worden en als een nieuw concept worden gedefinieerd. De definitie van het concept, wat een uiting is van het structureel begrijpen, volgt dus na het operationeel begrijpen van het concept. Een leerproces naar structureel begrijpen is doorgaans dus hiërarchisch ingericht. Zie Figuur 1.



Figuur 1, schema uit Sfard (1991)

Maar bij meer complexe wiskundige concepten bestaat een omgekeerde volgorde: pas als men bewerkingen uitvoert op, dus operationeel bezig is met, een *gedefinieerd* hoger concept (soms zelfs langdurig), ontstaat structureel begrijpen van dit nieuwe concept. Dit kan het geval zijn bij het concept "logaritme", dat eerst als gedefinieerd object ingevoerd kan worden (eventueel na een inleiding die de definitie rechtvaardigt). Pas nadat er veelvuldig mee gewerkt is, gaat operationeel begrijpen van dit nieuwe concept over in structureel begrijpen van het concept. Deze dualiteit: een concept is tegelijkertijd ook een proces, bracht David Tall tot de introductie van het woord "procept" (Gray & Tall, 1994).

Aangezien het concept differentiaalvergelijkingen tot de complexere concepten gerekend kan worden, gaan wij ervan uit dat langdurig werken met het concept tot structureel begrijpen van dit concept zal leiden. Het opstellen van een differentiaalvergelijking achten wij voor het werken met het concept met het oog op de begripsvorming bijzonder geschikt.

Hoe begripsvorming beschreven kan worden wordt in de volgende paragraaf toegelicht.

3.3 *Het beschrijven van het begrijpen van een wiskundig concept aan de hand van een schema.*

Bij het ontwikkelen van onderzoeksinstrument dat kennis en vaardigheden bij het opstellen van een differentiaalvergelijking in kaart kan brengen, zijn diverse methoden uit de literatuur vergeleken. In het hiernavolgende wordt ingegaan op het werk van Zandieh (2000), Roorda, Vos en Goedhart (2007) en Rasmussen (2001), die allen leerprocessen beschreven aan de hand van een schema, en op het werk van De Jong en Ferguson (1996), die met hun kennismatrix de soorten kennis hebben geclassificeerd.

Zandieh (2000) ontwikkelde een instrument om kennis en vaardigheid te meten bij het concept afgeleide. Haar instrument is een matrix met de kolommen *grafisch*, *verbaal*, *natuurkundig*, *symbolisch* en *andere*. Deze kolommen geven verschillende representaties van het concept afgeleide weer (bijvoorbeeld *grafisch* als het concept in verband met de raaklijn wordt gebracht, of *natuurkundig* als het begrip snelheid in rekening wordt genomen). De rijen van de matrix zijn *ratio*, *limiet* en *functie*. De rijen zijn aspecten van het concept afgeleide. In de vijftien cellen van deze 3x5-matrix kunnen open en gevulde rondjes getekend worden, waarbij een gevuld rondje op diepe kennis duidt en een open rondje op het slechts noemen van een begrip.

Roorda, et al. (2007) vonden bij hun onderzoek naar leerprocessen bij hetzelfde concept beperkingen van deze matrix. Zij onderzochten hoe de leerlingen te werk gingen als zij een model moesten opstellen vanuit een gegeven context waarin de afgeleide een rol speelt. De problemen waar zij op stuitten, en die niet weer te geven waren met behulp van deze matrix, waren o.a.: leerlingen kunnen hun aanwezige kennis niet toepassen op de context, leerlingen hebben problemen met het vertalen van de context naar het model en vice versa, en de onmogelijkheid om in de matrix persoonlijke constructies van de leerling weer te geven. Zij stapten over op een raamwerk waarin relaties tussen en binnen verschillende wiskundige representaties en tussen context en wiskundige representaties schematisch worden weergegeven.

Bij het concept differentiaalvergelijkingen hanteerde Rasmussen (2001) een raamwerk, dat onder woorden bracht welke facetten hij bestudeerde als hij zijn studenten opgaven hardop denkend liet maken. Hij bediende zich niet van een compacte schematische weergave.

De Jong en Ferguson-Hessler (1996) hebben getracht binnen de kennisleer kennis-in-gebruik (als de kennis moet worden toegepast) schematisch in te delen. Zij onderscheiden vier kennistypen: *situationeel*, *procedureel*, *conceptueel* en *strategisch*. Aan elk kennistype kennen zij vijf eigenschappen toe: *niveau*, *structuur*, *automatisering*, *modaliteit* en *algemeenheid*. De begrippen "procedureel" en "conceptueel" in deze indeling komen overeen met de begrippen "operationeel" en "structureel" van Sfard en beschrijven de beide kanten van Tall's begrip "procept".

In ons onderzoek zullen we onderdelen van deze schema's combineren, om de leerprocessen bij het opstellen van een differentiaalvergelijking te kunnen beschrijven. Daarvoor zullen we eerst nog stilstaan bij het feit dat het opstellen van een DV een speciaal geval van modelleren is.

3.4 *Het opstellen van een differentiaalvergelijking als een speciaal geval van modelleren*

Er zijn de laatste jaren heel wat schema's die modelleeractiviteiten beschrijven gepubliceerd, bijvoorbeeld: Blum en Leiß (2005), Galbraith en Stillman (2006), Spandaw en Zwaneveld (2009), Verhoef, Jeurnink en Van Groessen (2009). In alle schema's vinden we de volgende hoofdmodelleeractiviteiten terug: *begrijpen* van de context, *vereenvoudigen* van de situatie, kiezen van de *relevante grootheden* en *mathematiseren*.

De diverse modelleeractiviteiten behoeven geen vaste volgorde (Doerr, 2007), maar vinden wel plaats in iedere modelleeropgave.

In hun boek voor universitaire techniekstudenten over differentiaalvergelijkingen maken Boyce en DiPrima (2005) deze activiteiten concreet voor het opstellen van differentiaalvergelijkingen door het modelleerproces in zes stappen weer te geven, zie Bijlage II. De eerste vier stappen daarvan zijn concretisering van bovengenoemde modelleeractiviteiten. De andere twee ("let op de dimensies", en "soms moet je een stelsel differentiaalvergelijkingen opstellen") zijn meer specialistisch van aard. Enigszins bewerkt zijn die eerste vier stappen:

1. Identificeer de relevante grootheden. Om dit te kunnen is inzicht in de context nodig.
2. Kies variabelen in geschikte en passende eenheden voor die grootheden.
3. Ga na welke grootheden veranderingen teweegbrengen (d.i. identificeer de onafhankelijke variabele) en breng onder woorden hoe de afhankelijke grootheid verandert, resp. grootheden veranderen.
4. Leg relaties tussen de in stap 1 gevonden en in stap 2 van passende eenheden voorziene variabelen de vorm van een differentiaalvergelijking.

We herkennen in stap 1. (voortaan genoemd fase A) de modelleeractiviteit *begrijpen* en *vereenvoudigen*, in stap 2. (fase B) het kiezen van *relevante grootheden*, in stap 3. (fase C) weer het *begrijpen* en deels al het *mathematiseren*, en in stap 4. (fase D) ook het *mathematiseren*.

Op grond van de bevindingen die weergegeven zijn in de paragrafen (3.1) t/m (3.4) is een prototype van het onderzoeksinstrument tot stand gekomen. Dit prototype en de totstandkoming ervan wordt kort toegelicht.

3.5 *prototype van het onderzoeksinstrument*

Om de leerprocessen van de leerling te kunnen beschrijven, wordt aan de leerlingen een aantal opgaven gegeven, die zij moeten maken. Het werk van de

leerlingen moet geclassificeerd kunnen worden in een schema. Dat betekent dat het onderzoeksinstrument bestaat uit een aantal opgaven en een schema.

Wat betreft het schema: een schema als dat van Zandieh (2000; zie 3.3) is aantrekkelijk, omdat daarin de fasen van het modelleren met differentiaalvergelijkingen een plaats kunnen krijgen (op de plaats waar zij de verschillende aspecten van het concept heeft staan). Deze fasen werden in 3.4 beschreven. De verwachting is dat de beperkingen waar Roorda, et al. (2007) tegenaan liepen op te lossen zijn door de fase van het vertalen van context naar model op te nemen in het onderzoeksinstrument (fase C, die de voor het opstellen van een differentiaalvergelijking specifieke werkwijze omschrijft), "afwijkende" methodes van de leerlingen te beschrijven, wat overeenkomt met de werkwijze van Rasmussen (2001), en daar waar de leerlingen hun kennis niet kunnen toepassen tijdens de interviews gerichte hints te geven, waarvan in het protocol vermelding wordt gemaakt.

De kolommen, die bij Zandieh verschillende representaties weergeven van het concept "afgeleide", worden in het prototype ingevuld met kennistypen, ontleend aan de kennismatrix van De Jong en Ferguson, om te kunnen beschrijven welke kennis de leerling bij het opstellen van een differentiaalvergelijking toepast. Ze worden voor dit onderzoeksinstrument beschreven met "noemt de leerling dit", "doet de leerling dit" en "strategie". De kolommen komen grotendeels overeen met de kennistypen *cognitief*, *procedureel* en *strategisch*. Het kennistype *situationeel* wordt niet opgenomen in de kolommen, want het is als een fase beschreven in de rijen, namelijk fase A. De notatie met open en dichte rondjes wordt eveneens overgenomen van de werkwijze van Zandieh, met dien verstande dat een open rondje, wat bij Zandieh betekent dat de leerling het onderwerp alleen maar noemt, als een open rondje in de kolom "noemt de leerling dit" wordt gezet; een dicht rondje in deze kolom betekent dat het noemen van dit onderwerp van inzicht getuigt, de leerling toont dan conceptueel begrip, of in de woorden van Sfard structureel begrip. Een oppervlakkig gebruikte *procedure* in de zin van De Jong en Ferguson (oppervlakkige reproductie, gebrek aan kritische beoordeling), wat dus ook kan inhouden dat de procedure verkeerd wordt uitgevoerd, of een onvolledig uitgevoerde procedure, wordt met een open rondje onder "doet de leerling dit" genoteerd. Een dicht rondje in deze kolom geeft aan dat de leerling de procedure met inzicht uitvoert; hier raken we aan het begrip "procept" van Tall. Deze manier van invullen met open en dichte rondjes betekent in feite dat van de kenniseigenschappen in de categorisering van De Jong en Ferguson alleen het *niveau* wordt gebruikt. Deze keuze is tot stand gekomen, omdat dit onderzoek vooral ingaat op het begrijpen, in structurele zin, van onderdelen van het concept differentiaalvergelijkingen. Om te kunnen onderzoeken of leerlingen zich veel van woorden, dan wel van "beelden" bedienen, wordt er, als dat van toepassing is, in de cellen een v (verbaal) of een b (beeldend) geschreven. Beeldend staat tussen aanhalingstekens, omdat ook gebaren, mimiek, en soms ook intonatie bij het uitvoeren of toelichten van de opdrachten uitdrukking kunnen geven van kennis (Lakoff, 1987).

In de kolom "strategie" wordt de volgorde waarin de verschillende fasen bij het maken van een opdracht aan de orde komen door nummering genoteerd.

De opdrachten, waarvan de uitvoering met behulp van deze matrix geclassificeerd kan worden, zijn zodanig opgesteld, dat bij het maken ervan alle fasen A t/m D aan de orde komen. Dit eerste prototype kan met de matrix van Figuur 2 worden weergegeven.

fase	noemt de leerling dit	doet de leerling dit	strategie
A			
B			
C			
D			

Figuur 2

Hier zij al vast opgemerkt, dat bij het toetsen van het prototype is gebleken dat de fasen onderscheiden moeten worden in deelfasen.

4. Onderzoeksmethode

Zowel de voorstudie (het ontwikkelen van een valide onderzoeksinstrument om kennis en vaardigheden te kunnen beschrijven) als het gehele onderzoek (ten behoeve van een bijdrage aan een didactiek van het concept differentiaalvergelijkingen) zijn ontwerpgericht (Van den Akker, Gravemeijer, Mc Kenney, & Nieveen, 2006). Dat betekent dat elk ontwerp, i.c. het onderzoeksinstrument en de didactiek, in opeenvolgende cycli van ontwerpen, testen of uitvoeren en evalueren wordt bijgesteld en verbeterd tot een bruikbaar product is ontstaan.

4.1 deelnemers

In de ontwerpfase van het onderzoeksinstrument is aan een wiskundedocent en een natuurkundedocent gevraagd vanuit hun didactische kennis en vakkennis commentaar op de opgaven te geven.

De deelnemers aan de eerste cyclus, om te testen of het schema van het prototype van het onderzoeksinstrument werkbaar was, waren drie wiskundedocenten (waaronder de hierboven genoemde), die in de bovenbouw lesgeven, en daar onder andere het concept differentiaalvergelijkingen hebben behandeld. Zij hebben de opgaven schriftelijk gemaakt, voorzien van een uitgebreide toelichting. Er is gekozen voor deze docenten omdat verwacht mag worden dat zij, vertrouwd zijnde met de stof, de opgaven over het opstellen zonder problemen kunnen maken, waardoor het classificeren in de matrix, zoals beschreven in 3.5, eenvoudig zal zijn. Ook konden zij nog vanuit hun praktijkervaring commentaar op de opgaven, die een onderdeel van het onderzoeksinstrument vormen, leveren.

In de tweede cyclus is, om te testen of het mogelijk is met de matrix leerprocessen in kaart te brengen, een drietal interviews afgenomen. Het ging om een informeel interview met een vijfdejaars student informatica en een interview met elk van twee eerstejaars studenten Technische Geneeskunde (TG-studenten), die al het college differentiaalvergelijkingen hadden gevolgd. Alle drie de studenten studeren aan de UTwente. Alle drie hebben zij dezelfde opgave hardop denkend gemaakt. Voor een interview met de vijfdejaars informaticastudent is gekozen, omdat verwacht werd, dat iemand die in zijn opleiding veel met differentiaalvergelijkingen heeft gewerkt, goed in staat is om de opgaven te maken. Waardoor ook hier het classificeren eenvoudig zou zijn. En omdat hij niet, zoals een docent, over de didactische kant van het concept heeft nagedacht, was de verwachting dat hij daardoor dichter bij een middelbare scholier staat in zijn aanpak van de opgaven. De keuze voor TG-studenten is gedaan omdat verwacht werd dat deze studenten, nadat zij het college

differentiaalvergelijkingen hadden gevolgd, ook beter dan middelbare scholieren in staat zouden zijn om de opgaven te maken. Bovendien werd verwacht dat studenten van deze richting, die niet heel erg technisch is, "taliger" zijn dan studenten van een studierichting waar techniek en wiskunde een grotere rol spelen dan bij Technische Geneeskunde. Daarom zullen zij geen moeite hebben met het hardop denken, waardoor hun leerproces goed is te volgen.

Deze tweede cyclus van het ontwerpgerichte onderzoek naar een valide onderzoeksinstrument was meteen ook een eerste cyclus in het in kaart brengen van leerprocessen.

4.2 *materiaal*

4.2.1 *opgaven*

Om leerprocessen te kunnen beschrijven, moeten er ook leerprocessen plaatsvinden. Daarvoor worden er in dit onderzoek door de deelnemers opgaven gemaakt. Deze opgaven staan in Bijlage III.

Opgave 2 hiervan (met andere eenheden) werd door Rasmussen en Marrongele (2006) eveneens gebruikt om een van hun zogenoemde Pedagogical Content Tools te illustreren. Deze opgave is onder andere opgenomen in ons onderzoeksinstrument om een vergelijking te kunnen maken tussen de resultaten van de Nederlandse leerlingen en de Amerikaanse studenten uit het onderzoek van Rasmussen en Marrongele.

Bij het ontwikkelen van de opgaven is al rekening gehouden met het tweede gekozen onderdeel van het concept differentiaalvergelijkingen, het richtingsveld als middel voor het analyseren van het met behulp van een DV beschreven model.

4.2.2 *werkschema*

Om de matrix, zoals beschreven in paragraaf 3.5 operationeel te maken, is gebruik gemaakt van een werkschema, waarin de opeenvolgende kenmerkende uitspraken en handelingen van de deelnemer (in het werkschema "actie" genoemd) nauwkeurig weer te geven zijn, en er ruimte is om opmerkingen te plaatsen. Dit werkschema met de gebruiksaanwijzing is op Bijlage IV te vinden.

4.3 *procedure*

Dit vooronderzoek is vooral gericht op het ontwikkelen en valideren van een onderzoeksinstrument, waarbij tijdens de testfase ervan ook leerprocessen beschreven zijn. De verzamelde data hebben dus betrekking op het onderzoeksinstrument zelf en geven ook informatie over leerprocessen. Beide onderdelen van de dataverzameling worden daarom hierna besproken.

4.3.1 *dataverzameling*

De wiskundedocenten werd gevraagd de opgaven schriftelijk uit te werken, en van uitgebreide motivatie te voorzien. Bovendien mochten zij commentaar op de opgaven leveren. Deze data betroffen het onderzoeksinstrument. De docenten hebben de opgaven opgestuurd gekregen, en hadden ongelimiteerd de tijd om de opgaven te maken. Een docent gaf aan, dat hij enige uren bezig is geweest met de opgaven.

De studenten werd gevraagd opgave 2 te maken op papier, terwijl zij hardop moesten denken. Indien nodig stuurde de interviewer door vragen. De interviews duurden elk ruim een uur.

Bij het informele interview zijn de belangrijkste hardop geuite gedachten door de interviewer genoteerd. Een interview met de TG-studenten is op een geluidsgrager opgenomen. De geluidsopname is uitgeschreven en gecombineerd met het gemaakte schriftelijke werk. Het andere schriftelijke werk is meteen na het maken de gehele opgave van aantekeningen voorzien volgens de stimulated-recall-methode. Deze data betreffen zowel het onderzoeksinstrument als de leerprocessen.

4.3.2 dataverwerking

Uit de data van de studentinterviews zijn de kenmerkende uitspraken en handelingen (acties) geselecteerd. Het selecteren van de acties heeft plaatsgevonden op grond van het volgende criterium: de uitspraak of handeling moet nieuwe informatie bevatten vergeleken met de vorige actie. De geselecteerde acties werden in de eerste kolom van het werkschema ingevuld, waarna de classificatie kon plaatsvinden in de kolommen.

De kritiek van de docenten op de opgaven is verwerkt in de opgaven, die aan de volgende deelnemers zijn voorgelegd, zoals ze op Bijlage III staan.

Het gemaakte werk van de docenten is op dezelfde wijze als het werk van de studenten geclassificeerd in het werkschema.

Een derde persoon gaat, onafhankelijk van de onderzoeker de acties selecteren uit de data van de schriftelijk gemaakte opgaven en de interviews en deze in het werkschema classificeren.

De resultaten van de beide classificeringen worden vergeleken en daarna wordt, indien dit noodzakelijk blijkt, het werkschema aangepast.

Vervolgens wordt het werkschema gecomprimeerd tot de matrix, zoals beschreven in 3.5.

5. Resultaten

Eerst volgen de resultaten betreffende het werkschema, daarna komen de resultaten uit de studentinterviews, waar het leerprocessen betreft, aan de orde.

De door de docenten gemaakte opgaven waren, zoals verwacht, goed te classificeren. Hun aanpak was vanuit een discrete benadering, met Δ 's dus.

Het classificeren van het gemaakte werk van de studenten was ook mogelijk binnen het werkschema. Het bleek echter nodig de studenten verder te helpen door vragen te stellen, en soms waren tips nodig. Een student gaf bij een onderdeel een alternatieve oplossing. Hiervoor is het werkschema vanzelfsprekend niet toereikend, omdat de fases A t/m D niet alle doorlopen werden en er andere wegen werden bewandeld. De kolom opmerkingen is gebruikt om deze alternatieve oplosmethode te kenmerken. De betrouwbaarheid van deze classificeringen moet nog door triangulatie worden bewerkstelligd.

Alle drie de studenten bleken, tegen de verwachting in, grote moeite te hebben met het opstellen van een DV. De studenten werkten bij het opstellen van een DV meteen met de notatie dy/dx .

De informaticastudent begon het verkennen en begrijpen van de situatie op het tijdstip $t = 0$, wat de voortgang belemmerde. De tip om met Δ 's te werken bracht hem langzaam verder, evenals de tip om op de dimensies te letten.

De beide TG-studenten vertoonden met elkaar vergelijkbare benaderingen van het probleem.

We bespreken hier het ingevulde werkschema van een van de beide TG-studenten. We hebben hiervoor gekozen omdat in dit werkschema duidelijk de gedachtegang bij het totstandkomen van de gevraagde DV is na te gaan.

Voorafgaand aan de opgave werden aan deze student ook de volgende vragen gesteld (Figuur 3):

- A. Geef een "definitie" van het concept differentiaalvergelijking.
- B. Geef een voorbeeld van een differentiaalvergelijking
- C. Geef een voorbeeld van een situatie die met een differentiaalvergelijking beschreven kan worden.
- D. Welke van de volgende uitdrukkingen zijn differentiaalvergelijkingen (y is een functie van x):
 - a. $y' = 3$
 - b. $y'' + y' + 3 = 0$
 - c. $y' = 3y$
 - d. $y' = 3x$

Figuur 3

De antwoorden die hierop gegeven werden werpen licht op de manier van aanpak. Deze zijn in Figuur 4 weergegeven.

A een differentiaalvergelijking beschrijft de verandering van iets in de tijd
B $\frac{dy}{dx} + ay = c$ of $\frac{dy}{dx} + by + c = d$
C hoeveelheid zuurstof in de longen per na x aantal adembalingen
d a, b, c

Figuur 4

De classificering van het werk van deze student in het werkschema is te vinden in Bijlage V.

We ontdekken in deze weergave onder andere dat voor er met deze modelleeropgave werd begonnen eerst een situatieschets werd gemaakt. Dit gebeurde overigens bij alle deelnemers.

De oplosmethode van opgave b was een alternatieve. Desondanks was het werkschema, hoewel niet toereikend, toch redelijk bruikbaar, omdat wel enkele van de fases A t/m D voorkwamen in de oplosmethode.

Aan een zuivere notatie wordt weinig aandacht gegeven, dit is bijvoorbeeld te zien in 5. van opgave b. Daar legt de student uit wat

$$3dy/dt - 2dy/dt + 100y = 400$$

betekent. Er wordt niet gereflecteerd op de notatie, en op de onmogelijkheid die deze notatie uitdrukt, namelijk dat als je twee snelheden aftrekt en er 100 keer de inhoud bij optelt je 400 liter krijgt. Hier wordt een procedure uitgevoerd (een DV opstellen) zonder begrip van wat de opgeschreven DV voorstelt.

Een beperkte voorstelling van het begrip differentiaalvergelijking komt duidelijk naar voren in 6. van opgave b. "bij een DV denk je meestal aan $y' + y + \dots = \dots$ " Dit is ook in overeenstemming met het antwoord op de voorvragen, zie daarvoor figuur 1 en figuur 2.

6. Conclusie en eerste bijstelling

Wat betreft het onderzoeksinstrument kan opgemerkt worden dat de opgave 2 als opgave geschikt is om hardop denkend te maken.

Ook is deze opgave, hetzij gemaakt door een expert, hetzij gemaakt door een persoon die er moeite mee heeft, in het werkschema te classificeren. Bij een alternatieve oplosmethode moet de kolom "opmerkingen" gebruikt worden om die methode te kenmerken.

Het onderzoeksinstrument zoals besproken in 3.5 is ontworpen met een tweeledig doel. Ten eerste is het een analyse-instrument om leerprocessen in kaart te brengen ten einde een aangepaste en verbeterde didactiek te ontwerpen. Ten tweede dient het, nadat leerlingen het onderwerp differentiaalvergelijkingen hebben behandeld gekregen volgens de veranderde didactiek, om te meten of deze didactiek de verwachte resultaten opgeleverd heeft, namelijk een toename in structureel begrip. Voor het eerste doel is het *werkschema* dat afgeleid is uit de matrix een geschikt middel. Het werkschema is terug te brengen tot de met de deelfasen uitgebreide matrix door de acties met steekwoorden benoemd genummerd in de cellen te plaatsen; de kolom "strategie" kan zodoende geïntegreerd worden in de kolommen "doet de leerling dit" en "noemt de leerling dit".

Wat de leerprocessen zelf betreft het volgende.

Uit de interviews met de studenten kunnen we concluderen, dat het opstellen van een DV, hoewel er op de middelbare school enige aandacht aan is besteed, voor hen onmogelijk was zonder hulp. De studenten kennen een aantal technieken om een DV op te lossen, en daardoor is hun beeld (conceptimage, Tall & Vinner (1981)) van het begrip differentiaalvergelijking beperkt tot de representatie daarvan als een ingewikkelde formule. De eenvoudige vorm $dy/dt = 1$ werd ook niet meteen als een DV die de verandering van het volume beschrijft gezien. Dit is in overeenstemming met het antwoord op vraag D, waar de vorm $y' = 3x$ niet als een DV werd herkend.

Verder zien we een verschil in aanpak tussen de docenten en de studenten: de docenten startten met een discrete benadering, terwijl de studenten meteen met de notatie van de afgeleide aanvingen. Hoewel deze studenten dezelfde start maakten als de studenten in het onderzoek van Rasmussen en Marrongelle (2006) vonden we niet het probleem dat Rasmussen en Marrongelle beschreven, namelijk of dZ/dt voor de instroom nu 6 of $6t$ moest zijn. Zie hiervoor punt 4 van opgave c in het schema op bijlage V. In punt 8 bij diezelfde opgave werd die $6t$ wel opgeschreven, maar dan als een poging om de concentratie te beschrijven, en niet in verband met de afgeleide.

Ook komt naar voren dat de betekenis van stap 5 uit het stappenplan van Boyce en DiPrima – “let op de dimensies” – van groot belang is bij het opstellen van een differentiaalvergelijking. Dit is niet verwonderlijk, aangezien een differentiaal ook als een breuk kan worden opgevat, of natuurkundig uitgedrukt, een snelheid waarmee iets verandert altijd een eenheid tot de macht -1 bevat (in opgave 2b liter per minuut, dat is $l \cdot \text{min}^{-1}$).

7. Discussie

Over het onderzoeksinstrument.

De voorgestelde manier om het werkschema te comprimeren tot de oorspronkelijke matrix is echter te uitgebreid om als analyse-instrument ingezet te worden om de didactiek te evalueren. Er moeten nog criteria opgesteld worden om de weergave in de matrix te comprimeren tot een overzichtelijker schema.

Het zoeken naar deze criteria is echter misschien niet nodig, als we zinvol gebruik kunnen maken van het werkschema zelf. Namelijk als we de middelste kolommen van het werkschema waarin acties binnen de verschillende fasen met open en dichte rondjes genoteerd beschouwen, en geen acht slaan op de eerste en laatste kolom, waarin tekst staat, ontdekken we een route die de leerling doorloopt. Het verdient aanbeveling te onderzoeken of deze weergave van de leerprocessen van de leerlingen reeds duidelijke aanwijzingen kunnen genereren voor een aangepaste didactiek.

Over de leerprocessen.

In de middelbareschoolboeken wordt enige aandacht besteed aan het opstellen van een differentiaalvergelijking, maar te snel wordt overgestapt op het algebraïsch oplossen daarvan. In de eerstejaarscolleges over DVn wordt al helemaal niet stilgestaan bij het opstellen van een differentiaalvergelijking (een vierde informeel geïnterviewde student bevestigde deze stelling eveneens). Wel worden kant en klare modellen gegeven die geanalyseerd moeten worden. Het analyseren van het gedrag van een differentiaalvergelijking wordt op deze manier een truc. Dit kan enigszins worden geïllustreerd met de grafiek die deze TG-student maakte bij opgave 2c, namelijk een asymptotisch naar de horizontale as dalende grafiek, beginnend in 400, een grafiek behorende bij een standaardanalyse.

Een aanbeveling om langer stil te staan bij het opstellen van een differentiaalvergelijking lijkt in het licht van de nu gevonden resultaten op zijn plaats. Alleen al het ingevulde werkschema van deze student geeft een aantal praktische aanwijzingen voor een didactiek die het opstellen van een differentiaalvergelijking aan de leerlingen wil bijbrengen. Zoals het heenwerken naar een zuivere notatie en aandacht voor het kloppend maken van de dimensies, de vijfde stap in van het schema van Boyce en DiPrima.

De uitwerkingen van de docenten vergelijkend met die van de studenten doet vermoeden dat het werken vanuit een discrete benadering een beter inzicht in het modelleren van een dynamisch systeem geeft.

Referenties

- Blum, W. & Leiss, D. (2005). Filling Up - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (red.), *Proceedings of the European Congress of Mathematics Education*, St. Felin de Guixols, Spain, Feb 16-22.
- Boyce, W.E. & Diprima, R.C. (2005). *Elementary differential equations and boundary value problems* (8th ed.). Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, Inc..
- Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, 25(1), 15 – 22.
- CTWO (2005). Wiskunde D voorstel programma 2007. Gedownload op 11 mei 2009 van <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/wiskundeD.doc>
- CTWO (2008). Conceptexamenprogramma 2013 wiskunde D. Gedownload op 11 mei 2009 van <http://www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/2008-01-11ExProg/vwoD.doc>
- cTWO. (2009) Gedownload op 11 mei 2009:
http://www.fi.uu.nl/ctwo/Wiskunde/docs/Examenprogramma_wiskunde_D_vwo_DEFINITIE_F.pdf
- De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M.G.M. (1996). Types and Qualities of Knowledge. *Educational Psychologist*, 31(2), 105-113.
- Doerr, H.M. (2007). What knowledge do teacher need for teaching mathematics through Application and modelling?. In: W. Blum, P.L. Galbraith & M. Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10 pp. 69–78. New York, USA: Springer.
- Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., De Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 405-418.
- Drijvers, P. (2006). Wiskunde D, uitdagend en relevant. *Euclides*, 81(7), 327-330.
- Gallbraith, P., & Stilman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik*, vol 38 (2), 143-162.
- Gray, E.M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115-141.
- Hulshof, J. (2007). Echtebrwwiskunde. Gedownload op 24 februari 2009 van <http://www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrwwiskunde.pdf> p.3
- Lakoff, G. (1987). *Women, fire and other dangerous things*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- Rasmussen, C., & Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics into instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 388–420.
- Roorda, G., Vos, P. & Goedhart M.J. (2007). The concept of derivative in modelling and applications: developing a framework. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan S. (eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 288-293). Chichester, UK: Horwood Publishing.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Spandaw, J.G., & Zwaneveld, G. (in druk). Modelleren. In A. van Streun (Ed.), *Handboek vakdidactiek wiskunde*.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.) (2006). *Educational design research*. London: Routledge.
- Verhoef, N., Jeurnink, G., & Van Groessen, B. (2009). Modelleren, hoe onderwijs je dat? *Euclides*, 84 (4), 122-125.
- Zandieh, M. (2000) A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & j. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV*. Providence, RI: American Mathematical Society, 128-153.

Bijlage I

De redenen voor de keuze van het onderdeel "het analyseren van het met behulp van een differentiaalvergelijking opgestelde model in termen van eigenschappen van het veranderingsproces" zijn tweërlei. Ten eerste noemt cTWO (2008) in het conceptexamenprogramma 2013 vwo wiskunde D het *analyseren* van het model als een wezenlijk onderdeel van het domein "Dynamische systemen". Met analyseren wordt hier bedoeld het gedrag van de beschouwde afhankelijke variabele onderzoeken. Deze analyse heeft, mits het model goed gekozen is, een zekere voorspellende of verklarende rol. Het analyseren van het met behulp van een differentiaalvergelijking beschreven model zal als een nieuw element in de methodes voor wiskunde D vanaf 2014 een centrale plaats innemen. Een belangrijk middel bij deze analyse is het richtingsveld. Het onderzoek focust op dit middel. De keuze voor het *richtingsveld* als analysemiddel is gemaakt, omdat het goed begrijpen van het richtingsveld de basis legt voor het goed begrijpen van het fasevlak. Het fasevlak is een concept dat in een technische vervolgstudie al snel aan de orde is, namelijk bij de behandeling van een stelsel differentiaalvergelijkingen. Dit concept wordt door techniekstudenten als moeilijk ervaren, zo bleek uit interviews met docenten die het vak differentiaalvergelijkingen doceren aan eerstejaarsstudenten op een technische universiteit. Ten tweede noemt cTWO (2008) in haar conceptexamenprogramma de relatie tussen de eigenschappen van het dynamische systeem en de beschreven werkelijkheid een belangrijke kwestie. Hier is weer een raakvlak met het modelleren, namelijk het terugkoppelen van het model naar de beschreven werkelijkheid.

Bijlage II

In hun boek *Elementary differential equations and boundary value problems* reiken Boyce en DiPrima het volgende stappenplan aan om een DV op te stellen.

- 1 Identify the independent and dependent variables and assign letters to represent them.
- 2 Choose the units of measurements for each variable. In a sense, the choice of a unit is arbitrary, but some choices are much more convenient than others.
- 3 Articulate the principle that underlies or governs the problem you are investigating. This may be a widely recognised physical law, or it may be a more speculative assumption that may be based on your own experience or observations. In any case, this step is likely not to be a purely mathematical one, but will require you to be familiar with the field in which the problem originated.
- 4 Express the principles or law in step 3 in terms of the variables you choose in step 1. It may require the introduction of physical constants or parameters and the determination of appropriate values for them. Or it may involve the use of auxiliary or intermediate variables that must be related to the primary variables.
- 5 Make sure that each term in your equation has the same physical units.
- 6 In more complex problems the resulting mathematical model may be complicated, for example a system of several differential equations.

Bijlage III

Opgave 1

Een brede rechte stoep is aan de ene kant begrensd door de straat, en aan de andere kant door een groot speelveld. Aan de rand van de stoep, aan de straatkant, staat het trekeendje van Jantje. Jantje zelf staat aan de andere kant van de stoep, langs het speelveld. Het eendje zit vast aan een touwtje van 3 meter lang, dat Jantje in zijn hand houdt. Dit touwtje staat strak gespannen. Jantje gaat nu lopen langs het speelveld, en trekt daarbij het eendje achter zich aan

- Schets de baan van het eendje zoals je je die voorstelt.
- Stel een differentiaalvergelijking op die de baan van het trekeendje beschrijft.

Opgave 2

In een vat van 500 liter zit 100 liter water, waarin 400 gram zout is opgelost. Er stroomt een zoutoplossing met een concentratie van 2 gram per liter het vat in, met een snelheid van 3 liter per minuut. De hoeveelheid wordt intussen goed gemengd en stroomt er weer uit met een snelheid van 2 liter per minuut.

- Na hoeveel minuten is het vat vol?
- Stel een differentiaalvergelijking op die de inhoud van het vat beschrijft totdat het vol is als functie van de tijd t in minuten
- Schets een grafiek die volgens jou weergeeft wat de hoeveelheid zout is als functie van de tijd.
- Stel bij deze gegevens een differentiaalvergelijking dZ/dt op voor de hoeveelheid zout Z , als $0 \leq t \leq 400$.

Opgave 3

In een cilindrisch een blik met een diameter van 10 cm wordt vlak bij de bodem een rond gaatje met een diameter van 4 millimeter gemaakt. Het blikje is met water gevuld en op het moment van het ontstaan van het gaatje bevindt de waterspiegel van het water zich 16 cm boven het gaatje. We gaan er in deze opgave vanuit dat door de stroming van de uitgaande vloeistof het gaatje niet groter wordt.

Uit de fysica is bekend, dat de snelheid v waarmee een vloeistof (op deze manier) een vat verlaat te benaderen is met de formule $v = \sqrt{2gh}$, waarbij g de zwaartekrachtversnelling is, en h de hoogte van de vloeistofspiegel boven het gaatje. Verder is je misschien wel eens opgevallen, dat de straal van het waterstraaltje van de doorsnede loodrecht op de snelheid kleiner is dan die van het gaatje. Voor water geldt dat de straal van het dwarsdoorsnede van het straaltje ongeveer 0,77 van die van het gaatje is.

- Schets het verloop van de hoogte van de vloeistof in het vat boven het gaatje.
- Stel bij de gegevens een differentiaalvergelijking op voor de hoogte van de vloeistofspiegel.
- Plot een richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking.
- Plot ook een richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $dh/dt = -0,27 h$. Zie je zo op het oog verschil in deze richtingsvelden?
- Denk je dat er een essentieel verschil is in de oplossingen van de differentiaalvergelijking in b. en in d.? Waarom (niet)?