



Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Samen
staan we
sterk

Prof.dr. S.A. van Gils

Samen staan we sterk

Rede uitgesproken bij het aanvaarden van
het ambt van hoogleraar

Non-linear Analysis

aan de Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
van de Universiteit Twente
op donderdag 10 maart 2005
door:

Prof. Dr. S.A. van Gils

Samen staan we sterk

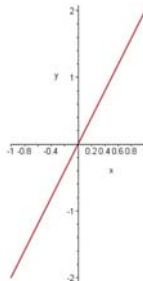
Mijnheer de Rector Magnificus, geachte toehoorders,

Deze middag wil ik U een indruk geven van wiskunde in het algemeen en meer in het bijzonder van een deel van het onderzoek dat binnen de leerstoel Toegepaste Analyse en Mathematische Fysica van de afdeling Toegepaste Wiskunde wordt uitgevoerd. Dat in één zin het woord toegepast twee maal passeert, zet de toon. Het onderzoek heeft een duidelijke link met aanpalende vakgebieden. Anders gezegd, de motivatie om juist dit onderzoek te doen vindt zijn oorsprong in contacten met en vragen van onderzoekers buiten de wiskunde. De wiskunde wordt dan gebruikt als taal om verschijnselen te beschrijven en te bestuderen.

Als iemand vraagt naar je beroep en je antwoordt met “wiskundige” dan varieert de reactie van “dat vond ik zo saai” of “dat heb ik meteen laten vallen zo gauw het kon” tot “wat doe je dan zoal”. Het idee dat er überhaupt nog nieuwe wiskunde nodig zou zijn wordt fronsend terzijde geschoven. Echter, wiskunde is leuk en levend en iets daarvan wil ik vanmiddag laten zien.

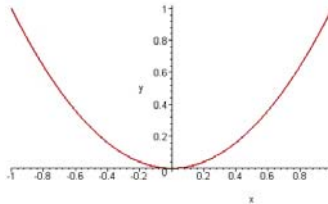
Niet-lineair

Zoals wel vaker in de wiskunde wordt met niet-lineair de ontkenning van lineair bedoeld. Lineair heeft het woord “linea” in zich, Latijn voor lijn. Lineair is rechtlijnig en niet-lineair is daarmee alles wat krom is. Op de middelbare school wordt het lineaire verband $y = ax$ ingevoerd. Hierin is a een gegeven getal. Als we dit getal kennen, kunnen we de grafiek tekenen:



Figuur 1. De grafiek van de functie $y=2x$.

Een voorbeeld van een niet-lineair verband wordt bijvoorbeeld gegeven door de parabool



Figuur 2. Parabool $y = x^2$.

De dart-speler Van Barneveld is zich er misschien niet van bewust, maar het pijltje beschrijft na loslaten een parabool. In De Volkskrant stond recentelijk een interessant stuk hierover^I. De vraag rijst of de professionele speler onbewust gebruik maakt van de parabool. Je zou je kunnen voorstellen dat het voordelig is om de pijl al vast een geschikte parabool te laten doorlopen voor hij wordt losgelaten. Jammer, het idee is leuk, maar de praktijk is als zo vaak veel gecompliceerder. De volgende vraag is intrigerend: hoe is het mogelijk om met zulk een precisie als aan de dag gelegd wordt een pijltje te gooien. Er zijn veel aspecten die een rol spelen. De pijl krijgt een aanvangssnelheid en een aanvangsrichting en wordt losgelaten op een aanvangspositie. Die drie factoren moeten goed bij elkaar passen om het gewenste resultaat te bereiken. We hebben een goede beschrijving nodig van de arm, inclusief de pols en de vingers, aannamen over de beweging van alle verschillende componenten en over het moment van loslaten. Vervolgens kunnen we gaan bepalen met welke precisie geworpen kan worden en welke bewegingen leiden naar het beoogde doel. Een prachtig voorbeeld van modelleren waarbij verschillende disciplines een rol spelen. We hebben nauwkeurige informatie nodig over de verschillende betrokken gewrichten, neurofysiologische informatie over de snelheid van het verkeer tussen de hersenen en de hand en vervolgens moet rekenschap gegeven worden van de wetten van de natuur. In dit geval de zwaartekracht die het pijltje doet vallen. Hierbij komt wiskunde om de hoek kijken. Uit alle ingangsgegevens wordt de parabool berekend

^I S. de Schipper, Goed gooien gaat op gevoel, De Volkskrant, 15 januari 2005, pag K3.

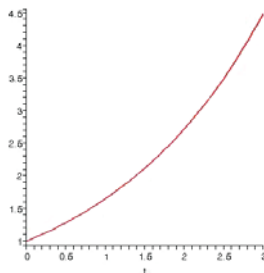
die de pijn gaat volgen. Als dit is gebeurd, kan vervolgens de vraag worden beantwoord bij welke ‘beginvoorwaarden’ (aanvangssnelheid & aanvangspositie & aanvangsrichting) het beoogde doel wordt bereikt en welke onnauwkeurigheid het gevolg is van kleine afwijkingen in bijvoorbeeld het moment van loslaten. In hetzelfde artikel wordt de conclusie getrokken dat de bereikte nauwkeurigheid eigenlijk niet te verklaren valt. De marge in het moment van loslaten is beduidend kleiner dan de tijd die een puls erover doet om van de hersenen bij de hand te arriveren. Het laatste woord is aan Van Barneveld: “Gewoon veel doen. Je moet ook goed mikken, maar dat kon ik altijd al.”

Lineaire en niet-lineaire groei

Ik wil de begrippen lineaire en niet-lineaire groei illustreren aan een praktisch voorbeeld: het uitroeien van een bacterie met behulp van antibiotica. We spreken van lineaire groei als per eenheid van tijd het aantal nieuwe bacteriën evenredig is met de grootte van de populatie. Als we met N het aantal bacteriën noteren, dan is de regel voor lineaire groei met een groei-coëfficiënt λ in formulevorm

$$(i) \quad \frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Lineaire groei geeft aanleiding tot exponentieel gedrag. Immers, als op tijd t_0 het aantal bacteriën gelijk is aan N_0 , dan zal op een tijdstip t het aantal bacteriën gegroeid zijn tot $N(t) = \exp(t-t_0)N_0$. In een plaatje ziet dit er als volgt uit:



Figuur 3. Exponentiële groei.

Langs de horizontale as staat de tijd uit in uren. Langs de verticale as staat het aantal bacteriën uit. Het begintijdstip is hier met 0 aangegeven, en we starten met 1 bacterie. Verder is in dit plaatje de waarde van de groeicoëfficiënt λ gelijk aan 0.5. Bij de interpretatie van deze curve moeten we nog oppassen, want wat is nu de betekenis van 1.5 bacterie. We kunnen aflezen dat op $t = 1.38$ uur het aantal bacteriën is verdubbeld tot 2. De verdubbelingstijd leert ons dat na ieder tijdinterval met een lengte van ongeveer 1.38 uur het aantal bacteriën twee maal zo groot wordt. Dat leidt in korte tijd tot grote getallen. Zo duurt het ongeveer 23 uur om tot 100.000 bacteriën te geraken.

Antibiotica worden toegediend om de bacteriën te doden. Er is veel bekend over de manier waarop dit in zijn werk gaat. Een fenomenologische beschrijving komt er op neer dat aangenomen wordt dat er een verband bestaat tussen de concentratie waarmee het medicijn in het lichaam aanwezig is en de dodelijke werking op bacteriën. Als de concentratie heel laag is, dan zal de dodelijke werking ook gering zijn. Bij een zekere concentratie zal het geen zin meer hebben die nog te verhogen. Voor het functionele verband tussen de dodelijke werking van het medicijn en de concentratie wordt een zogenaamde Hill vergelijking gebruikt:

$$(2) \quad F(C) = \frac{E_{\max} C^\gamma}{C_{50}^\gamma + C^\gamma}$$

Hierin staat E_{\max} voor de maximale snelheid voor bacteriesterfte, C is de concentratie van het medicijn, C_{50} is de concentratie waarbij de snelheid de helft van haar maximale waarde bereikt en γ is een exponent die bepalend is voor de vorm van de Hill curve en die afhangt van het aantal bindingen dat kan optreden tussen, in dit geval, bacterie en antibioticum. Hill² besepte dat het gebruik van dit functionele verband een compromis is. Hij gebruikte een simplificatie van een meer realistisch bindingsschema om al te gecompliceerde berekeningen te vermijden. Toch wordt dit verband op grote schaal gebruikt in de biochemie, fysiologie en farmacologie. Het zou doenlijk en wenselijk zijn om gebaseerd op een meer realistisch bindingsschema een nauwkeuriger verband af te leiden en dit ook toe te passen.

Het verband tussen de concentratie van het medicijn en het effect op de afbraak van bacteriën is een voorbeeld van een niet-lineair verband. Om het

² A.V. Hill, (1910) *The combinations of haemoglobin with oxygen and with carbon monoxide*. I. J. Physiol. 40, iv-vii.

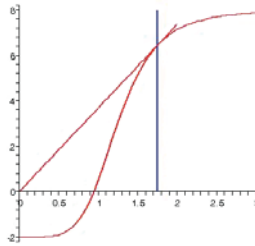
effect van een bepaalde dosis medicijn te kunnen berekenen moeten we beschikken over de waarde van alle geïntroduceerde parameters. De benodigde farmacokinetische³ en farmacodynamische data zijn voor een aantal medicijnen bekend in de literatuur. Als we nu voor de groei/afbraak van bacteriën opnieuw de lineaire vergelijking (1) gebruiken, maar nu gecorrigeerd voor het effect van het medicijn:

$$(3) \quad \frac{dN}{dt} = (\lambda - C(t))N$$

dan kunnen we hieruit N berekenen, als we weten hoe de concentratie zich in de tijd gedraagt. Dit is afhankelijk van de dosering, maar ook hoe het lichaam reageert op de toediening. Opnieuw moet dit in de taal der wiskunde worden omgezet, d.w.z. we moeten dit modelleren. Het allereenvoudigste model neemt aan dat het lichaam één compartiment is en dat het medicijn volgens een lineair model afbreekt. Meer ingewikkelder modellen delen het lichaam op in verschillende compartimenten, waartussen uitwisseling plaats vindt op basis van concentratieverschillen, en waarin met verschillende snelheden afbraak van het medicijn plaatsvindt. Of nu gekozen wordt voor een eenvoudig of voor een ingewikkeld model, het zal altijd zo zijn dat de dosering een cruciale rol speelt. De arts zal willen weten wat nu de meest gewenste dosis is. Deze vraag lijkt eenvoudiger dan hij is. Het ligt voor de hand om te veronderstellen dat hoe hoger de dosis is, hoe groter het effect. Dat is waar, maar niet altijd bruikbaar. Voor het lichaam zijn de antibiotica giftig en de toxische werking op de organen, bijvoorbeeld de nieren, is ongewenst. Verder spelen kostenaspecten een rol. In wiskundige taal hebben we te doen met een optimalisatieprobleem met randvoorwaarden. Nu laten de hiervoor genoemde randvoorwaarden zich in haar algemeenheid niet makkelijk in formules vertalen. Het is typerend voor de wiskunde dat er dan al snel gezocht wordt naar een vraagstelling die in de buurt komt van wat gewenst is en die zich wel goed in formules laat vangen. De eenvoudig te beantwoorden vraag in dit verband is de volgende: als een arts een gegeven hoeveelheid medicijn tot zijn beschikking heeft, zeg een vaste kuur, in pilvorm of in vloeibare vorm voor het infuus, wat is dan het optimale doseringsregime zó dat, na afloop van de behandeling, d.w.z. als de voorraad medicijn op is, het aantal bacteriën zo laag mogelijk is. Deze vraag is goed te beantwoorden.

³ Farmakokinetiek houdt zich bezig met het verloop van de concentraties antimicroben in het lichaam en farmakodynamica bestudeert de relatie tussen deze concentraties en het effect ervan op de concentraties microben.

Of het antwoord relevant is hangt vervolgens af van de uitkomst. Misschien leidt dit antwoord wel tot een concentratie die zwaar toxisch is, of misschien duurt het herstel van de patiënt wel veel te lang. In het laatste geval moeten we de dosis toch verhogen en meer medicijn gebruiken. Het antwoord op de vraag laat zich heel eenvoudig grafisch weergeven. De concentratie die behoort bij het raakpunt van de raaklijn vanuit de oorsprong aan de grafiek van $F(C) - \lambda$ geeft de optimale concentratie, zie Figuur 4.



Figuur 4. Op de horizontale as staat de concentratie van het medicijn in een willekeurige eenheid. De verticale as representeert de snelheid waarmee bacteriën worden gedood. De concentratie die behoort bij het raakpunt van de twee grafieken is optimaal.

Met behulp van dit eenvoudige model kunnen ook uitspraken gedaan worden als: wat is het verschil tussen het effect van een continu regime (infuus) versus twee of drie maal daags een dosering. Bovenstaand voorbeeld beschrijft een deel van het werk dat door studenten is uitgevoerd samen met dr. Kees Neef, ziekenhuis apotheker van het Medisch Spectrum Twente. Er is hier opnieuw sprake van wiskundig modelleren, meer dan van het bedrijven van wiskunde sec. Wiskunde is hier de taal om de groei modellen te formuleren en door te rekenen. Hier is weinig wiskunde nodig, aangezien er niet veel meer wordt gevraagd dan het integreren van x^{-1} , afgezien dan van het toetje, waar een uitspraak over optimaliteit wordt gedaan. Als voorbeeld van een leuke modelleeropdracht voor eerstejaars wiskunde studenten uitstekend, maar minder geslaagd om hier nu de wiskunde aan sich mee te promoten.

Er gaat iets mis op de middelbare school. Daar wordt dat, wat ik hier aanduid als wiskundig modelleren, verkocht als wiskunde. Dat is verwarrend en

werkt niet bepaald gunstig door voor het imago van de wiskunde. Waarmee ik geen woord wil zeggen ten nadele van wiskundig modelleren. Dat is een belangrijke vaardigheid, zeker voor de wiskundig ingenieur. In het curriculum neemt het dan ook een vooraanstaande plaats in. Maar er is ook zoiets als wiskundige schoonheid. Dat je in dit voorbeeld de optimale concentratie krijgt door de raaklijn te trekken vanuit de oorsprong is fraai. Je kunt de berekening die eraan ten grondslag ligt vergeten en het resultaat grafisch presenteren. Dat de wiskunde in realistische vorm in overvloed over de hoofden van VWO leerlingen wordt uitgestort ontnemt de écht geïnteresseerden de kans om kennis te nemen van datgene wat de wiskunde zo mooi en boeiend maakt. Dat is namelijk de abstractie en de efficiëntie.

Emeritus hoogleraar Henk Kuiken⁴ slaat de spijker op zijn kop als hij beweert dat er wel een heel groot verschil is tussen de middelbare scholier die zijn/haar opleiding vervolgt op het conservatorium en de klasgenoot die wiskunde gaat studeren. De eerste zal een zaal met muziek liefhebbers kunnen boeien op bijna-professioneel niveau, terwijl de tweede net de vierkantsvergelijking kan oplossen. Daar krijg je de handen niet mee op elkaar. Professor Huib de Jong heeft zich, in de juist beëindigde periode waarin hij de portefeuille onderwijs op de UT beheerde, ingezet voor de aansluiting tussen VWO en WO. Er zijn allerlei initiatieven genomen om leerlingen van het VWO al in een vroeg stadium kennis te laten maken met de universiteit. Het Bonhoeffer College, bijvoorbeeld, heeft vruchtbare gesprekken gevoerd met de Universiteit Twente over vergaande vormen van samenwerking. Slimme leerlingen kunnen alvast een vak volgen aan de universiteit. Op die manier zal de definitieve overgang naar een vervolgopleiding makkelijker verlopen en zal een stap gezet kunnen worden op de weg die conservatoria al lang ingeslagen zijn. Zo zou het zo gek nog niet zijn om middelbare scholieren reeds vroeg kennis te laten maken met de wonderde wereld van....

Dynamische systemen

Eén van de uitdagingen waarmee wiskundigen en natuurkundigen geworsteld hebben is de onmogelijkheid om expliciet de algemene oplossing van het drie-lichamen-probleem te geven, waarvan het belangrijkste voorbeeld de beweging van zon-aarde-maan is. Er werd zelfs een prijsvraag uitgeschreven door Oscar II, koning van Zweden en Noorwegen ter gelegenheid van zijn 60e verjaardag. In 1890 publiceerde Poincaré zijn artikel over het drie-

4 H.K. Kuiken (1997) ITW-nieuws, jaargang 7, nummer 3, p. 2-4.

lichamen-probleem in het tijdschrift *Acta Mathematica*⁵, een bewerking van het essay waarmee hij de wedstrijd gewonnen had. Het werk was bijzonder vernieuwend, zelfs niet te vergelijken met alles wat er tot dan toe was gepubliceerd op het gebied van hemelmechanica. Met zijn werk is Poincaré de grondlegger geworden van wat nu heet de kwalitatieve theorie van differentiaalvergelijkingen. Daarmee wordt bedoeld dat er uitspraken worden gedaan over het gedrag van oplossingen, zonder dat die expliciet (in formulevorm) voorhanden zijn.

Een belangrijk onderwerp in dynamische systemen, toen en ook nu nog, is dat van de stabiliteit. Het wellicht belangrijkste werk over stabiliteit is dat van Lyapunov⁶, wiens energiefuncties wij nu Lyapunov-functies noemen. Met behulp van deze functies is het mogelijk om stabiliteit van evenwichten te onderzoeken lokaal, maar soms ook globaal, opnieuw zonder de oplossingen expliciet te kennen.

Veel begrippen die nog steeds centraal staan bij de bestudering van dynamische systemen zijn afkomstig van Birkhoff⁷. De ideeën van Poincaré, Lyapunov en Birkhoff, eerst ontwikkeld in eindig veel dimensies, zijn vervolgens gegeneraliseerd naar oneindig dimensionale vergelijkingen. Dit type vergelijkingen komen we in talrijke gebieden tegen zoals bijvoorbeeld de vloeistofdynamica, plasmafysica, optica, mathematische biologie, ...

Het verklaren en beschrijven van patronen die in de natuur voorkomen door analyse van niet-lineaire oneindig dimensionale systemen is een voortdurende uitdaging voor wiskundigen.

Symmetrie

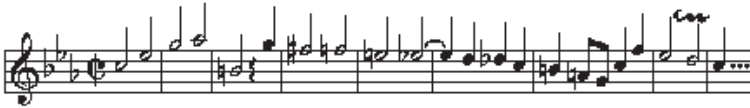
Patronen zal ik nu eerst introduceren aan de hand van een voor iedereen bekend begrip: behang. Niet zonder reden komt hierbij symmetrie om de hoek kijken. Symmetrie speelt een belangrijke rol in de kunst. Dat het ook in de wiskunde zo'n belangrijke rol speelt is misschien verrassend. Het wordt al iets begrijpelijker als we ons realiseren dat het ook in de muziek een rol speelt. *Ricerca* komt uit het Italiaans en betekent 'uitzoeken'. In de muziek wordt het als zelfstandig naamwoord gebruikt voor een compositie in

⁵ H. Poincaré (1890), *Sur le problème des trois corps et les equations de la dynamique*, *Acta Math.* 13, 1-270.

⁶ A.M. Lyapunov (1892), *Problème général de la stabilité du mouvement*, published in 1907.

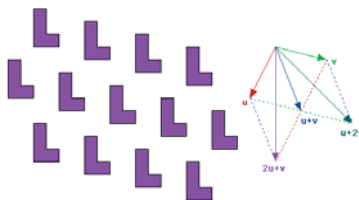
⁷ G.D. Birkhoff (1927), *Dynamical Systems*, *Am. Math. Soc, Providence*.

fuga-stijl die bestaat uit thema's die tegen elkaar gespeeld kunnen worden in verschillende toonsoorten, op meerdere verschillende startpunten, in achterwaartse richting en zelfs op zijn kop, zonder dat de regels voor de harmonie ernstig worden overtreden. Een meesterlijk voorbeeld hiervan vormen de variaties die J.S. Bach in 1747 schreef op een thema van Frederick II, bekend onder de naam *das Musikalische Opfer*.



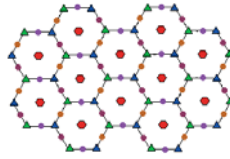
Figuur 5. Thema uit *das Musikalische Opfer*, J.S. Bach

Figuren kunnen symmetrie hebben en vaak maakt dat ze speciaal. Het is gemakkelijk voorbeelden te geven van rotatiesymmetrie en van spiegelsymmetrie. Dit heeft wiskundigen altijd geïnteresseerd. Zo is er een mooi en verrassend resultaat dat iets zegt over het aantal verschillende soorten behang. We hebben het over behang met een duidelijk basispatroon: we kunnen het in twee verschillende richtingen opschuiven zó dat je voor en na schuiven hetzelfde resultaat ziet.



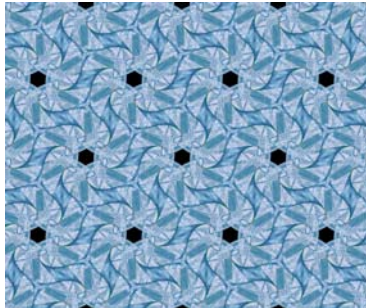
Figuur 6. In twee onafhankelijke richtingen kan het patroon worden opgeschoven.

Vervolgens kunnen we ons afvragen of het misschien mogelijk is om het behang te draaien over een hoek rond een vast punt. Het wordt hier al snel duidelijk dat niet alle hoeken mogelijk zijn. Er zijn de zogenaamde kristallografische beperkingen die zeggen dat alleen hoeken van 30, 60, 90, 120 en 180 graden kunnen voorkomen.



Figuur 7. Honingraat patroon. De rode hexagons laten een draaiing van 60 graden toe, de driehoeken draaiingen van 120 graden en de cirkels draaiingen van 180 graden.

Het zou ook mogelijk kunnen zijn om te spiegelen in een lijn en tenslotte zou het kunnen dat we het spiegelen in de lijn moeten combineren met verschuiven langs dezelfde lijn. Het blijkt dat er precies 17 verschillende mogelijkheden zijn. Alle 17 verschillende mogelijkheden komen voor in traditionele Japanse patronen, elk met een eigen naam. De onderstaande prachtige illustratie is gemaakt als toepassing van dynamische systemen door Mike Field. Wat we zien is een fraaie kleuring van de invariante maat van de attractor van een dynamisch systeem waarin één van de 17 mogelijke symmetrieën is ingebakken. Zo wordt wiskunde tot kunst.



Figuur 8. Hexagonaal patroon, gevisualiseerd met behulp van een chaotisch dynamisch systeem door Mike Field.

Wat voor geometrische figuren het geval is, geldt ook voor vergelijkingen: symmetrie maakt een vergelijking mooier. Wat al dan niet mooi is, is natuur-

⁸ Voor figuur 6 en 7 zie <http://www.oswego.edu/~baloglou/103/seventeen.html>.

lijk subjectief. In ieder geval hebben symmetrische systemen eigenschappen die niet aanwezig zijn bij generieke systemen waarin geen bijzondere structuur aanwezig is. Zeker bij vergelijkingen in de fysica is aanwezigheid van symmetrie eerder regel dan uitzondering. Alleen al daarom is het nodig een systematische studie te doen naar de speciale dynamische eigenschappen ervan. Ook voor systemen zonder symmetrie is het vaak nuttig kennis van symmetrische systemen paraat te hebben. In speciale gevallen, bijvoorbeeld voor speciale waarden van parameters, kan er meer symmetrie aanwezig zijn, wat vervolgens de bron is voor gedrag ook in het niet symmetrische geval.

Bij de bestudering van systemen met symmetrie werken Algebra en analyse sterk samen. Het is dan ook wenselijk om iets van groepentheorie gezien te hebben als je geïnteresseerd bent in patronen. Ook voor wiskundig ingenieurs is het derhalve wenselijk ook in Algebra voldoende aangeboden te krijgen tijdens de opleiding. Het is een misvatting te denken dat dit voor ingenieurs niet zou gelden en dat Algebra meer voor de algemene universiteiten is. Alleen al het succes en de impact van Computer Algebra laat het tegendeel zien. Als je als wiskundige van betekenis wilt zijn voor aanpalende vakgebieden moet je er wel voor zorgen dat de bagage waarover je beschikt je voldoende interessant maakt. Het is goed te weten dat singulariteitentheorie een systematische analyse van evenwichten mogelijk maakt. Voor periodieke banen geldt dit ook, omdat door reductie de classificatie ervan in wezen wordt teruggebracht tot een probleem voor evenwichten.

Periodiek gedrag

Golven zijn overal om ons heen, zowel zichtbaar als onzichtbaar. Kenmerkend voor een golf is de periodiciteit en de periode staat voor de tijd die ligt tussen twee opeenvolgende herhalings van het patroon. Een voor iedereen bekend voorbeeld van periodiek gedrag is de beweging van een slinger. De lengte van de slinger bepaalt de periode. In formule uitgedrukt

wordt deze periode gegeven door $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, waarin L staat voor de lengte

van de slinger en g voor de zwaartekracht van de aarde. In feite is deze formule slechts een benadering voor kleine uitwijkingen. Voor ieder met ervaring op de schommel weet dat dit niet een correcte beschrijving van de werkelijkheid is. De periode neemt namelijk toe met de uitwijking. Om de beweging van lichamen te kunnen beschrijven, waarvan de slinger

een eenvoudig voorbeeld is, is de differentiaal- en integraalrekening ontwikkeld. Dit gebeurde door Leibniz en Newton. Newton publiceerde in 1687 de *Principia*⁹, waarin hij de techniek ontwikkelde die hij zelf nodig had om allerlei mechanische problemen op te lossen. Uit de beschrijving van mechanische problemen zijn veel integralen voortgekomen. Een voorbeeld hiervan is de periode van de zojuist genoemde slinger als functie van de gegeven uitwijking. Die is niet uit te drukken in elementaire functies. Dit heeft aanleiding gegeven tot de studie van elliptische functies. Veel later in de tijd ontmoetten Algebra en Analyse elkaar. Om eigenschappen van de periodefunctie te analyseren is het nuttig om te weten dat er drie onafhankelijke gegeneraliseerde periodefuncties bestaan die samen voldoen aan een stelsel lineaire inhomogene differentiaalvergelijkingen, de Picard-Fuchs vergelijkingen. De vooruitgang ten opzichte van de 19e eeuwse analyse is dat nu families van krommen worden beschouwd, terwijl het voorheen de afzonderlijke krommen waren. Dit inzicht is duidelijk te vinden in het werk van een andere grote wiskundige, David Hilbert (1862-1943).

Aan de basis van veel periodiek gedrag staat vaak een Hopf-bifurcatie. Een Hopf-bifurcatie beschrijft hoe een punt-attractor, een evenwicht, zijn stabiliteit verliest en er een al dan niet stabiele periodieke baan ontstaat. Als Eberhard Hopf¹⁰ in 1942 twee stellingen met existentie en stabiliteit formuleert is dit eigenlijk folklore, maar nooit eerder zo precies geformuleerd. Zelf zegt hij hierover, dat het resultaat teruggaat op Poincaré en eerder had Andronov¹¹ in 1937 hetzelfde resultaat bewezen voor differentiaalvergelijkingen in het vlak. Hoewel Hopf toepassingen in de vloeistofmechanica voor ogen had, bijvoorbeeld dat van periodieke vortex shedding in de stroming achter een obstakel, heeft het toch nog even geduurd eer het bewijs ook in oneindig veel dimensies werd geleverd. Inspirerend is het artikel van Crandall en Rabinowitz¹² over dit onderwerp, waar de Hopf-bifurcatie behandeld wordt vanuit functionaalanalytisch oogpunt, hetgeen de generalisatie naar oneindige dimensies natuurlijk maakt. Periodieke patronen komen we ook bij Josephson juncties tegen.

⁹ I. Newton (1687), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

¹⁰ E. Hopf (1942) *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems*, *Akad. Wiss. (Leipzig)* 94, 3-22.

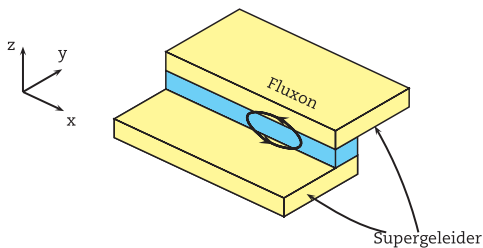
¹¹ A.A. Andronov, A.A. Vitt and S.E. Khaikin (1937) *Theory of Oscillations*, Moscow.

¹² M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz (1977) *The Hopf bifurcation in infinite dimensions*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 67, 53-72.

Josephson junctions

Supergeleiding is ontdekt door de Nederlandse fysicus Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926), die daarvoor in 1913 de Nobelprijs voor de fysica ontving. Hij deed grote moeite om het absolute nulpunt te bereiken, onder meer om de theorie van een andere Nederlandse Nobelprijswinnaar, Johan Diederik van der Waals (1837-1923), waarmee hij intensief samenwerkte, te verifiëren. Kamerlingh Onnes liet stroom lopen door een draad van zuiver kwik en mat daarvan de weerstand bij steeds lager wordende temperatuur. Bij 4.2K was de weerstand geheel verdwenen en dit fenomeen noemde hij supergeleiding. Dit waren experimenten. Niet voor niets was het motto van zijn inaugurele rede: "Door meten tot weten". Het heeft nog bijna een halve eeuw geduurd voor er een verklaring was voor supergeleiding. In 1956 liet Cooper zien dat elektronen bij zeer lage temperaturen in paren voorkomen, gebonden door phononen. Een jaar later publiceerden John Bardeen, Leon Cooper en John Schieffer hun (BCS) supergeleidingstheorie.

In supergeleidende materialen kan er dus een stroom lopen zonder enige weerstand te ondervinden. Als twee supergeleiders dicht bij elkaar gebracht worden, maar gescheiden worden door een zeer dunne isolerende laag, dan kan er een stroom lopen tussen de twee supergeleiders zonder dat er een spanningsverschil is aangebracht en ondanks de isolerende laag. Dit effect staat bekend als tunneling en is in 1962 voorspeld door de Britse fysicus Brian Josephson. De elektronen in het supergeleidende materiaal worden beschreven met een fase. Die fase is voelbaar in de andere, door de isolerende laag gescheiden, supergeleider. Voor de Josephson junctions is met name het faseverschil tussen de twee supergeleiders van belang. De stroom die gaat lopen is namelijk evenredig met de sinus van het faseverschil.



Figuur 9. Lange Josephson junctie

Als we het faseverschil op plaats x en op tijd t aanduiden met $u(x,t)$, dan voldoet u aan de verstoorde sine-Gordon vergelijking

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) - \varepsilon P(u)$$

Met $\varepsilon=0$ staat hier de sine-Gordon vergelijking, een vergelijking trouwens met oneindig veel symmetrieën. Deze vergelijking duikt ook bij andere toepassingen op, zoals bij liquid crystals, niet-lineaire optica en hydrodynamica. Ik ga kort in op de toepassing in de niet-lineaire optica.

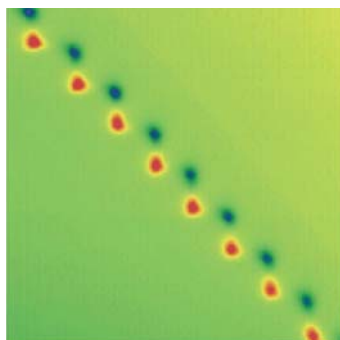
Ultra-korte pulsen, met periode in de orde van femtoseconden, zijn van groot technologisch belang en worden volop bestudeerd in de niet-lineaire optica. Conventionele optica gebruikt over het algemeen harmonische elektromagnetische oscillaties die moduleren langs een omhullende (enveloppe) die veel langer is dan een individuele oscillatie, zó dat er 100-1000 oscillaties passen in één enveloppe. Ultra-korte pulsen hebben maar enkele oscillaties onder de omhullende. De sine-Gordon vergelijking wordt na asymptotische reductie verkregen uit een Maxwell-Bloch systeem met twee energieniveaus. De vergelijking die de enveloppe beschrijft is de niet-lineaire Schrödinger-vergelijking.

Het is de kracht van de wiskunde om uitspraken te doen over de vergelijking zonder dat nu de precieze toepassing centraal staat.

Vortices

Een karakteristieke lengteschaal voor de beschrijving van Josephson juncties is de Josephson penetratiediepte λ . Voor juncties langer dan λ kunnen er kringstromen in de junctie ontstaan (Josephson vortices/fluxonen) die corresponderen met een magnetische flux. De Josephson vortices ontstaan en kunnen bewegen, onder invloed van aangelegde magnetische velden of elektrische stromen. Een vortex in een lange Josephson junctie als in figuur 9 zal onder invloed van een constante stroom die in de y -richting wordt aangelegd éénparig bewegen. Aangekomen aan de rand keert hij om onder verandering van de polariteit, waarbij elektromagnetische straling wordt uitgezonden.

Er bestaan echter samenstellingen van supergeleiders waar een dergelijke kringstroom spontaan aanwezig is, dus in de energetische grondtoestand. Dit is bijvoorbeeld het geval voor Josephson contacten in bepaalde geometrieën tussen een klassieke, lage temperatuur supergeleider (zoals Niobium) en een hoge temperatuur supergeleider, zoals $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. Hierbij is de kringstroom het gevolg van een fase-verandering van π voor verschillende kristalrichtingen in de hoge-temperatuur-supergeleider. De magnetische flux die correspondeert met deze kringstromen is maar een gedeelte van die van standaard Josephson vortices, vandaar de benaming fractionele fluxon.



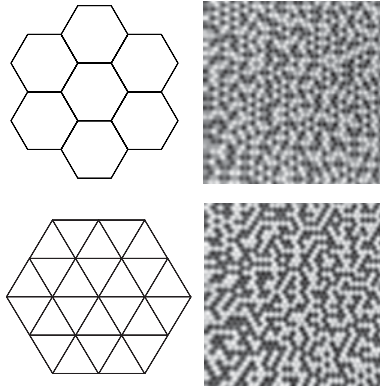
Figuur 10. Fractionele fluxon in een $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ - Nbzigzag structuur; met een scanning SQUID microscoop worden de 16 antiferromagnetisch geordende halve flux quanta op de hoekpunten van de zigzag structuur gemeten¹³. De uitvergroting toont schematisch de structuur.

Recent is financiering aangevraagd voor onderzoek dat voornamelijk bedoeld is om de eigenschappen van gekoppelde systemen van Josephson juncties, met daarin hele en fractionele fluxonen, te beschrijven en ook uit te buiten. In een nauwe samenwerking tussen wiskundigen en natuurkundigen wordt gekeken hoe de spontane kringstromen zich gedragen, zowel in hun onderlinge interacties als ook onder invloed van aangebrachte stroom. De kringstroom verandert van richting onder invloed van een aangelegde stroom. Als

¹³ H. Hilgenkamp, Ariando, H.J.H. Smilde, D.H.A. Blank, H. Rogalla, J.R. Kirtley and C.C. Tsuei. Ordering and manipulation of the magnetic moments in large-scale superconducting -loop arrays, *Nature*, 422, 50–53, 2003.

dit met 0 en 1 wordt geassocieerd, dan is meteen de link naar de opslag van data gelegd.

Het is de bedoeling om arrays te maken met symmetrische patronen, zoals bijvoorbeeld de honingraatstructuur of een patroon bestaande uit driehoeken.



Figuur 11. Rechts boven boven een gemeten patroon van halve fluxonen, gecreëerd in een magnetisch gekoppelde, elektrisch ontkoppelde honingraatstructuur van corner-juncties. Rechts onder idem voor een driehoekstructuur. De afstand tussen de cellen is 11.5 μm en de meting is uitgevoerd met een scanning SQUID microscoop bij een temperatuur van 4.2K.

Als het de goedkeuring krijgt van NWO voeren we bovenstaande metingen uit in structuren met gelijke symmetrieën, maar dan elektrisch gekoppeld. Deze koppeling is veel sterker. We willen dan zowel theoretisch als ook in experimenten bepalen welke symmetrieën ontstaan en hoe de patronen veranderen als er een stroom door de structuur wordt geleid. Het is mooi dat in Twente dit soort samenwerking mogelijk is, in dit geval met dr. Hans Hilgenkamp, en dat ook prof. Arjen Doelman (CWI) hierbij betrokken is. Het maakt ons sterk.

De toekomst van Toegepaste Wiskunde

Onderwijs

De buitenwereld verandert in veel opzichten. De student die nu uit het studiehuis instroomt, heeft geweldige kwaliteiten, maar in onvoldoende mate is nieuwsgierigheid naar abstracte kennis geprikkeld. Teveel overheerst het idee dat alles leuk moet zijn, en helaas, dat is niet altijd het geval. Tot op zekere hoogte is wetenschap ook een ambacht, waarvoor gedegen kennis van zaken noodzakelijk is. Het hoeft niet altijd leuk te zijn om je die kennis eigen te maken. Nieuwsgierigheid en motivatie zijn onontbeerlijke ingrediënten om van een wiskundestudie een succes te maken. Ik prijs me gelukkig met de aanwezigheid van twee VWO docenten in de afdeling, Lia van Asselt en Henri Ruizenaar. Hun expertise en enthousiasme maakt het mogelijk dat we een klein beetje begrijpen hoe we met de veranderende instroom moeten omgaan.

Herhaaldelijk heb ik studenten horen beweren voor Toegepaste Wiskunde gekozen te hebben, omdat ze dan niet zoveel theoretische vakken zouden krijgen. Dit kan en mag het geval niet zijn. Zoals ik al eerder beweerde, ben ik van mening dat we onze studenten een zeer gedegen wiskunde opleiding moeten blijven geven, waarin in ruime mate hun gereedschapskist wordt gevuld met wiskundige hulpmiddelen. Op die manier worden ze interessant voor het werkveld waarvoor we ze opleiden. Een gedegen opleiding in analyse, Algebra stochastiek, statistiek en kansrekening met daarenboven een grondige kennis van wiskundig modelleren maakt onze opleiding waardevol. Dit geldt zowel voor de bachelor- als voor de masterfase. Ik pleit voor een gemeenschappelijk deel in de masterfase waarin de verschillende leerstoelen samenwerken om zo een sterk product af te leveren.

De afdeling Toegepaste Wiskunde staat onder grote druk. Voor een deel wordt dit veroorzaakt door een lage instroom van studenten. Nu geldt dit niet alleen voor de wiskunde en ook niet exclusief voor Twente, de totale instroom in de bètarichtingen is slecht. Eind tachtiger jaren konden we ons hier verheugen in een toestroom van ruim tachtig studenten, nu mogen we blij zijn met ruim twintig. Een dramatische ontwikkeling waar de politiek zich over buigt. Er zijn dan ook stuurgroepen opgericht die sectorplannen geschreven hebben: het Sectorplan Natuurwetenschappen en het Sectorplan Wetenschap & Techniek. Samenwerken is het adagium in beide plannen,

waarbij het tweede plan heel ver gaat door te willen komen tot één virtuele Technische Universiteit. Staan we echt samen zo sterk? We kunnen natuurlijk doen alsof onze neus bloedt en denken “straks waait er weer een andere wind”. Dit lijkt me toch niet een erg verstandige houding.

In het Sectorplan Natuurwetenschappen wordt een aantal afspraken gemaakt. Zo zouden de instellingen voor het cursorisch onderwijs voor de masteropleiding Wiskunde één gezamenlijk programma moeten aanbieden. Dit doet geen recht aan de verschillen die bestaan tussen de algemene en de technische universiteiten. We doen er dan ook goed aan om zeer nauw samen te werken met Delft en Eindhoven, waarbij we moeten profiteren van elkaanders expertise. Dit is de beste manier om in het landelijk aanbod van wiskundevakken voor de masteropleiding een rol van betekenis te spelen. Dit zou het laatste woord hierover moeten zijn, maar zo eenvoudig ligt het niet. De opleiding is de laatste jaren geconfronteerd met dermate veel veranderingen, dat er een grote tegenzin is ontstaan om het roer weer om te gooien. Binnen tien jaar zijn we van een vier naar een vijfjarig curriculum gegaan, hebben we de minor ingevoerd, zijn we overgegaan op de Bachelor Master structuur, om nog maar van alle interne ontwikkelingen te zwijgen. Een zekere stabiliteit is nodig om niet iedereen gek te maken. Het midden te houden tussen het maken van noodzakelijke aanpassingen en de eigen koers te behouden is niet altijd eenvoudig.

Daar waar makelaars roepen “locatie locatie” als ze duidelijk willen maken waar het werkelijk om gaat, daar moeten wij inzetten op “imago imago”. Wiskunde heeft op de middelbare school, ik heb het al eerder aangevoerd, niet het imago dat goed voor haar is. Er wordt meer aandacht besteed aan het leren van trucjes dan op het bijbrengen van begrip. Dat werkt in veel opzichten contraproductief. Het gewenste positieve effect van het weglaten van de achtergrondkennis op de minder begaafde leerlingen blijft achterwege. Het is nog erger. Ook de betere leerlingen klagen dat ze losse trucjes moeten leren, en zeggen dat het ze veel makkelijker zou afgaan als ze de achtergrond van die trucjes zouden meekrijgen.

Ik hoop dat de landelijke profielcommissie in al haar wijsheid keuzes zal maken die het imago van de wiskunde versterken. En ook dat ze in voldoende mate te rade gaat bij mensen zoals Van Asselt en Ruizenaar, die immers door hun unieke expertise een essentiële bijdrage kunnen leveren aan de discussie, hoe de wiskunde er op het VWO in de toekomst uit moet zien.

Vervlakking dreigt ook ons eigen curriculum uit te hollen. Het is niet voor niets dat er een roep is om 'honour tracks'. Ik vind dat die er ook moeten komen en dan met name om de diepgang in de studie te waarborgen voor diegenen die het aankunnen en appreciëren. Dit kost geld en dat moet er dan ook voor komen. Overigens staat dit dan haaks op wat er in de sectorplannen over de Bachelorfase wordt gezegd. Daar wordt juist ingezet op de brede Bachelor. In een brede Bachelor is het programma in de eerste jaren gespreid over een breder palet van vakken. Dit zou bijvoorbeeld een combinatie kunnen zijn van wiskunde, natuurkunde en scheikunde. Ook kun je, binnen de faculteit EWI, denken aan wiskunde, informatica en elektrotechniek. Ik geloof niet dat dit de manier is om wiskundige interesse te spotten en te stimuleren. Ik pleit ervoor om de monodisciplinaire opleidingen in stand houden. Alleen dan is het mogelijk om de gereedschapskist waar ik zojuist over sprak voldoende te vullen met waardevol gereedschap.

Onderzoek

Het onderzoek in de toegepaste wiskunde in onze afdeling wordt meer en meer gestimuleerd door intensieve samenwerking met aanpalende afdelingen. Met Elektrotechniek op het gebied van systeem & regeltheorie en geïntegreerde optische systemen, met Informatica op het gebied van hybride systemen en telecommunicatie, met Natuurkunde op het gebied van vloeistofdynamica en halfgeleiders, met Werktuigbouwkunde op het gebied van logistiek. Zo staat de afdeling in het centrum van de universiteit. De meerwaarde van de wiskunde, het is al vaak gezegd en geschreven, zit hem in de abstractie. Golven in de optica en in de vloeistofdynamica verschillen voor de toepassers ordes van grootte, voor de wiskundigen zijn het vaak dezelfde vergelijkingen die bestudeerd worden. De kennis die in het ene vakgebied is verkregen is, via de wiskunde, overdraagbaar naar andere gebieden. Bijvoorbeeld, in de continuümtheorie, geleerd van Newton, laten gedistribueerde systemen zich beschrijven als vloeistofbuizen.

We moeten niet uit het oog verliezen dat het hart van de Toegepaste Wiskunde uit wiskunde bestaat. Ook aan een Technische Universiteit moet ruimte zijn voor funderend onderzoek, dat niet geheel 'zijn broek op kan houden', om maar afgrijselijk hedendaags jargon te gebruiken, via de 2e en 3e geldstroom. Het valt dan ook te betreuren dat de leerstoel Fundamentele Analyse en Algebra in het huidige financiële model van de UT geen enkele overlevingskans had. Nog duidelijker dan voorheen zullen we onze missie over tafel moeten krijgen en ons ook daarop laten beoordelen.

Dankwoord

Ik dank het College van Bestuur voor het in mij gestelde vertrouwen.

Beste collega's van de afdeling Toegepaste Wiskunde,

Ik ben er trots op in Uw midden te mogen werken. Zowel voor het onderzoek en onderwijs hoop ik van betekenis te kunnen zijn voor de afdeling TW en de faculteit EWI. Ik dank de studenten en de promovendi van de leerstoel Toegepaste Analyse en Mathematische Fysica. In het bijzonder noem ik hier Hadi Susanto, wiens inspanningen op het gebied van de corner-juncties hebben bijgedragen aan de goede samenwerking met de groep rond Hans Hilgenkamp.

Zeergeleerde Valkering, beste Theo,

Onze kennismaking stamt uit het jaar 1982 waarin we elkaar ontmoet hebben bij een cursus over bifurcatietheorie. Met jouw originele vragen over verbanden tussen lopende en staande golven in Toda ketens heb je me op een spoor gezet waar ik lang veel plezier aan heb beleefd. In de afgelopen twee decennia zijn we elkaar regelmatig tegengekomen in wetenschappelijk opzicht. Je streeft er altijd naar om zaken eenvoudig te presenteren zonder opsmuk en intimidatie. Onze discussies tijdens het hardlopen tussen de middag zijn altijd een gezonde mix geweest van privé en werk. Hier dank ik je hartelijk voor en hoop van harte dat we hier nog een paar jaar mee kunnen doorgaan.

Zeergeleerde Hilgenkamp, beste Hans,

Ik heb geprobeerd aan te geven dat samenwerking van essentieel belang is voor het onderzoek in de toegepaste wiskunde, zoals dat past bij een afdeling wiskunde op een technische universiteit. Het maakt sterk. Samenwerking kan niet van bovenaf worden opgelegd, maar kan alleen gedijen als het klikt tussen de betrokkenen. Daar schort het tussen ons zeker niet aan. Ik hoop dat ook aan de randcondities zal worden voldaan. Zonder financiële steun van buitenaf is geen enkel initiatief nog kansrijk.

Hooggeleerde van Groesen, beste Brenny,

Een van de meest kernachtige uitspraken waarmee je me vaak hebt verbaasd is wel “geld speelt geen rol”. Het is niet zo dat je je hiermee als Heer Bommel opstelt, maar veeleer is het een teken van het grenzeloze optimisme waarmee je afgaat op het doel dat je voor ogen staat. Jouw inzet voor de wetenschappelijke ontwikkeling van je studenten, waarbij je de persoon nooit uit het oog verliest, is voor mij een toonbeeld van professionaliteit. Dat je door kleur te bekennen niet overal vrienden maakt is onvermijdelijk. Ik houd wel van kleur.

Hooggeleerde Diekmann, beste Odo,

Met veel plezier denk ik terug aan mijn promotietijd waarin jij mijn begeleider was. Te denken aan de uiterst ontspannen sfeer, met vaste rituelen zoals theedrinken aan het eind van de middag waarbij allerlei aspecten van de wiskunde uitgebreid aan bod kwamen, maakt mij soms weemoedig en doet mij terugverlangen naar een periode die voorgoed voorbij is. Jouw gedrevenheid om problemen ‘echt’ te begrijpen, de instelling om als advocaat van de duivel iedere redenering eerst te wantrouwen alvorens er zeker van te zijn, maken je tot een bijzonder inspirerende vriend en collega. Onze samenwerking is met de promotie niet beëindigd. In de afgelopen jaren hebben we met enige regelmaat gewerkt aan de dynamica van *Cycadae*. Die regelmaat staat thans wat onder druk door mijn functie als opleidingsdirecteur, maar ik zie nieuwe mogelijkheden, bijvoorbeeld in het kader van het cluster Nonlinear Dynamics of Natural Systems.

Lieve Willemijn, Judica, Joske en Anna,

Het is een voorrecht om door vier prachtige meiden omringd te worden. Ik prijs mij gelukkig jullie te zien opgroeien en geniet van het rijkelijk aanwezige talent dat ontluikt.

Lieve Andrea,

Als mijn leeftijd de maat is, zijn we nog niet zo lang bij elkaar. Mijn gevoel hierover is een ander. Jij bent een heel bijzondere vrouw en je hebt een speciale plaats in mijn hart. Met jou samen te zijn maakt het leven voor mij pas écht de moeite waard.

Ik heb gezegd.



Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Postbus 217, 7500 AE Enschede, Tel: 053 - 489 4852, www.utwente.nl