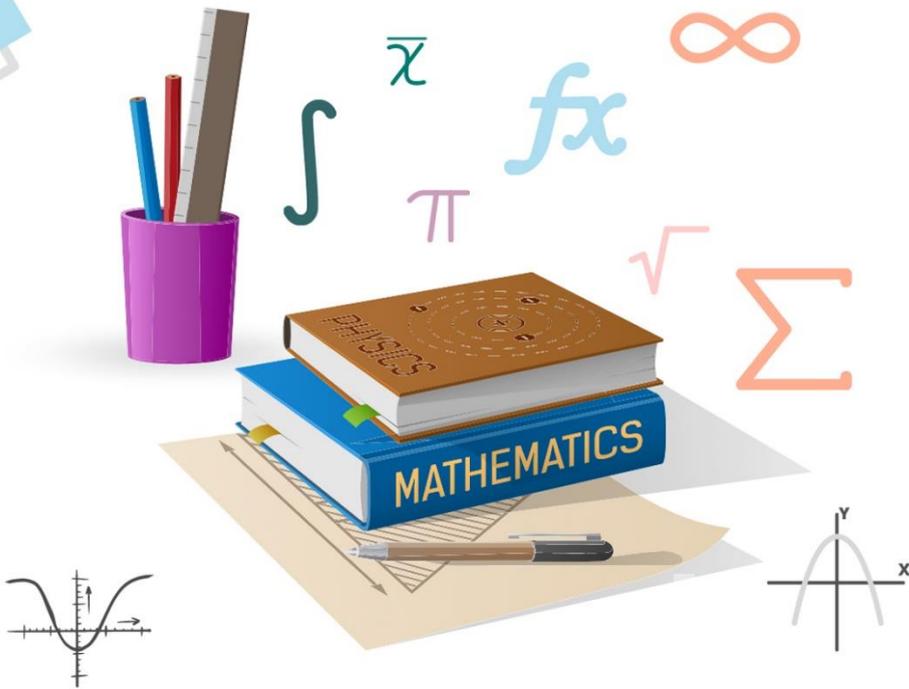


# KALKULUS DIFERENSIAL

Editor: Suci Haryanti



Suri Toding Lembang | Ayunda Sriwahyuningrum |  
Ul'fah Hernaeny | Nurhayati | Farah Indrawati |  
Andry Fitrian | Rofinda Taubah | I Putu Tedy Indrayana |  
Sudirman | Seruni | Iman Noor | Prahesti Tirta Safitri |  
Kus Andini Purbaningrum | Jan Setiawan

BUNGA RAMPAI

**KALKULUS DIFERENSIAL**

## **UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta**

### **Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4**

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

### **Pembatasan Pelindungan Pasal 26**

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i Penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv Penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

### **Sanksi Pelanggaran Pasal 113**

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

# **KALKULUS DIFERENSIAL**

Suri Toding Lembang  
Ayunda Sriwahyuningrum  
Ul'fah Hernaeny  
Nurhayati  
Farah Indrawati  
Andry Fitriani  
Rofinda Taubah  
I Putu Tedy Indrayana  
Sudirman  
Seruni  
Iman Noor  
Prahesti Tirta Safitri  
Kus Andini Purbaningrum  
Jan Setiawan

Penerbit



CV. MEDIA SAINS INDONESIA  
Melong Asih Regency B40 - Cijerah  
Kota Bandung - Jawa Barat  
[www.medsan.co.id](http://www.medsan.co.id)

Anggota IKAPI  
No. 370/JBA/2020

# **KALKULUS DIFERENSIAL**

Suri Toding Lembang  
Ayunda Sriwahyuningrum  
Ul'fah Hernaeny  
Nurhayati  
Farah Indrawati  
Andry Fitriani  
Rofinda Taubah  
I Putu Tedy Indrayana  
Sudirman  
Seruni  
Iman Noor  
Prahesti Tirta Safitri  
Kus Andini Purbaningrum  
Jan Setiawan

Editor :

**Suci Haryanti**

Tata Letak :

**Mega Restiana Zendrato**

Desain Cover :

**Qonita Azizah**

Ukuran :

**A5 Unesco: 15,5 x 23 cm**

Halaman :

**vi, 235**

ISBN :

**978-623-362-947-8**

Terbit Pada :

**Desember 2022**

Hak Cipta 2022 @ Media Sains Indonesia dan Penulis

*Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit atau Penulis.*

**PENERBIT MEDIA SAINS INDONESIA**

(CV. MEDIA SAINS INDONESIA)

Melong Asih Regency B40 - Cijerah

Kota Bandung - Jawa Barat

[www.medsan.co.id](http://www.medsan.co.id)

## **KATA PENGANTAR**

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga buku kolaborasi dalam bentuk buku dapat dipublikasikan dan dapat sampai di hadapan pembaca. Buku ini disusun oleh sejumlah guru, dosen dan praktisi sesuai dengan kepekarannya masing-masing. Buku ini diharapkan dapat hadir memberi kontribusi positif dalam ilmu pengetahuan khususnya terkait dengan Kalkulus Diferensial.

Sistematika buku ini dengan judul “Kalkulus Diferensial” terdiri atas 14 bab yang dijelaskan secara rinci dalam pembahasan mengenai konsep dan Aplikasi diantaranya: Sistem Bilangan Real, Pertidaksamaan, Interval dan Nilai Mutlak, Definisi dan Pengoprasian Fungsi, Limit dan Kontinuitas Fungsi, Definisi Turunan, Teorema Turunan dan Fungsi Aljabar, Nilai Turunan Fungsi Trigonometri, Eksponensial dan Logaritma, Penerapan Aturan Rantai untuk menentukan Turunan, Turunan Tingkat Tinggi, Turunan Fungsi Implisit, Nilai Ekstrim, Kemotonan dan Kecekungan dan Persamaan Diferensial Biasa .

Akhirnya kami mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah mendukung dalam proses penyusunan dan penerbitan buku ini, secara khusus kepada Penerbit Media Sains Indonesia sebagai inisiator. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi pembaca sekalian.

Jakarta, Desember 2022  
Editor



## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	iii
1 SISTEM BILANGAN REAL .....	1
Pengertian Bilangan Real .....	1
Teorema Bilangan Irasional .....	5
Bilangan Rasional.....	6
Teorema Dasar Aritmatika .....	7
Logaritma .....	9
2 PERTIDAKSAMAAN, INTERVAL, DAN NILAI MUTLAK .....	15
Pertidaksamaan .....	15
Interval .....	16
Penyelesaian Pertidaksamaan .....	17
Nilai Mutlak.....	25
Latihan Soal .....	32
3 DEFINISI DAN PENGOPERASIAN FUNGSI.....	37
Definisi Fungsi.....	37
Macam-macam Fungsi.....	42
Pengoperasian Suatu Fungsi .....	51
Komposisi Fungsi .....	53
Fungsi Invers .....	55
Soal Latihan .....	57
4 LIMIT FUNGSI.....	61
Defenisi Limit.....	61
Limit Sepihak.....	71

	Kontinuitas .....	73
	Latihan Soal .....	75
5	KONTINUITAS FUNGSI .....	81
	Definisi Kontinuitas Fungsi .....	81
	Syarat Kontinuitas Fungsi .....	81
	Sifat Dasar Kontinuitas Fungsi.....	83
	Latihan Soal .....	89
6	DEFINISI TURUNAN.....	95
	Pengertian .....	95
	Notasi Turunan.....	97
	Sifat Turunan Fungsi.....	98
	Gradien Garis Singgung.....	101
	Menentukan Fungsi Sketsa Kurva .....	103
	Soal Terapan Turunan .....	105
7	TEOREMA TURUNAN FUNGSI ALJABAR .....	111
	Definisi .....	111
	Teorema Turunan Fungsi Aljabar .....	112
	Teorema Fungsi Konstanta .....	112
	Teorema Fungsi Identitas.....	112
	Teorema Pangkat .....	113
	Teorema Kelipatan Konstanta .....	114
	Teorema Jumlah .....	115
	Teorema Selisih .....	116
	Teorema Hasil Kali.....	117
	Teorema Hasil Bagi .....	118

8	NILAI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI, EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA .....	123
	Pendahuluan .....	123
	Turunan Fungsi Trigonometri .....	124
	Turunan Fungsi Eksponensial .....	134
	Turunan Fungsi Logaritma .....	143
9	PENERAPAN ATURAN RANTAI UNTUK MENENTUKAN TURUNAN.....	151
	Pengantar .....	151
	Teorema Aturan Rantai.....	152
	Aturan Rantai untuk menentukan Fungsi .....	152
	Penerapan Aturan Rantai.....	153
	Penerapan Aturan Rantai Lebih dari Sekali .....	156
	Review Konsep .....	157
10	TURUNAN TINGKAT TINGGI .....	163
	Turunan Fungsi Tingkat Tinggi.....	163
	Turunan Parsial Tingkat Tinggi.....	168
11	TURUNAN FUNGSI IMPLISIT .....	175
	Fungsi Implisit.....	175
	Soal dan Pembahasan.....	178
12	NILAI EKSTRIM.....	187
	Definisi Nilai Ekstrim.....	187
	Contoh 1 .....	189
	Contoh 2.....	191
	Contoh 3.....	192
	Contoh 4.....	193
	Contoh 5.....	194

	Contoh 6.....	195
	Contoh 7.....	196
	Latihan.....	198
13	KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN.....	201
	Kemonotonan.....	201
	Kecekungan.....	205
14	PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA.....	215
	Pengantar Persamaan Diferensial Biasa.....	215
	Persamaan Diferensial Orde Satu .....	218
	Soal Latihan .....	232

# SISTEM BILANGAN REAL

**Suri Toding Lembang**

Universitas Kristen Indonesia Toraja

## **Pengertian Bilangan Real**

### A. Bilangan Real

Bilangan real adalah gabungan dari beberapa macam bilangan yang disimbolkan dengan  $\mathbf{R}$ . Sistem bilangan real adalah himpunan bilangan real yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian sehingga memenuhi aksioma tertentu. Pada sistemnya diperlukan tiga aksioma, yang dikenal sebagai aksioma lapangan, urutan, dan kelengkapan.

1. Aksioma Lapangan: Aksioma ini mengatur tentang ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, sifat komutatif, asosiatif, dan distributive, terdapatnya unsur 0 dan 1, serta terdapatnya unsur invers terhadap penjumlahan dan perkalian. Dari aksioma ini dapat dibuktikan berbagai sifat yang mendasari operasi aljabar atas berbagai obyek kalkulus, yaitu peubah, konstanta, dan parameter.
2. Aksioma Urutan: Aksioma ini mengatur tentang pemunculan bilangan positif dan negatif. Berdasarkan ini setiap bilangan real dapat diurutkan dari kecil sampai besar. Dari aksioma

---

ini diturunkan berbagai sifat yang mendasari penyelesaian suatu pertaksamaan. Kemudian dirancang konsep nilai mutlak sebagai ukuran jarak dua bilangan real dan suatu alat untuk menyelesaikan pertaksamaan yang berkaitan dengan limit.

3. Aksioma Kelengkapan: Aksioma ini mengatur tentang perbedaan antara bilangan rasional dan bilangan real. Kita mengenal terdapatnya korespondensi satu-satu di antara bilangan real dan titik pada garis, tetapi sifat ini tidak dipenuhi bilangan rasional. Setiap bilangan real dapat digambarkan sebagai titik pada garis, dan setiap titik pada garis dapat dinyatakan sebagai bilangan real. Diantara setiap dua bilangan real terdapat tak hingga banyaknya bilangan rasional dan irasional. **Operasi dan Sifat Bilangan Real**

Pada  $\mathbf{R}$  didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian (jumlah dan hasil kali bilangan-bilangan real) serta pengurangan dan pembagian yang memenuhi sebagai berikut:

1. Penjumlahan dan pengurangan
  - $a + b = b + a$  untuk semua  $a, b$  dalam  $\mathbf{R}$  (Komutatif penambahan)
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$  untuk semua  $a, b$  dalam  $\mathbf{R}$  (asiosatif penambahan)
  - Ada elemen  $0$  dalam real sedemikian rupa sehingga  $0 + a = a$  dan  $a + 0 = a$  untuk semua  $a$  bilangan  $\mathbf{R}$  (adanya elemen  $0$ )
  - Untuk setiap  $a$  dalam real dan elemen  $-a$  dalam real sedemikian rupa sehingga  $a + (-a) = 0$  dan  $(-a) + a = 0$  (adanya elemen negatif)

---

## 2. Perkalian dan pembagian

- $a \cdot b = b \cdot a$  untuk semua  $a, b$  bilangan real (komutatif perkalian)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  untuk semua  $a, b, c$  bilangan real (asosiatif perkalian)
- Ada elemen 1 dalam  $R$  yang berbeda dari 0 sehingga  $1 \cdot a = a$  dan  $a \cdot 1 = a$  untuk semua bilangan  $R$  (Satuan unsur keberadaan)
- Untuk setiap  $a \neq 0$  dalam  $R$  ada elemen  $1/a$  sedemikian rupa sehingga  $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$  dan  $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$  (adanya timbal balik)
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  dan  $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$  untuk semua  $a, b, c$ , dalam bilangan  $R$  (Distributif perkalian dan penjumlahan)

### B. Macam-macam Bilangan Real

1. Bilangan Asli :1,2,3..., digunakan untuk menghitung banyaknya objek suatu himpunan. Disimbolkan dengan  $N=\{1,2,3, \dots\}$
2. Bilangan Prima: 2,3,5..., adalah bilangan asli yang mempunyai tepat dua faktor.
3. Bilangan Komposit: 4,6,8,9,10,..., adalah bilangan asli yang mempunyai lebih dari 2 faktor bilangan cacah
4. Bilangan Cacah: 0,1,2,3,..., bilangan asli berserta unsur 0.
5. Lawan bilangan asli (bilangan bulat negatif): -1, -2, -3,...
6. Bilangan Bulat: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,

- 
7. Bilangan Genap:..., -4, -2, 0, 2, 4, ..., adalah bilangan bulat kelipatan 2.
  8. Bilangan Ganjil:..., -3, -1, 1, 3, ..., adalah bilangan bulat bukan kelipatan 2
  9. Bilangan Pecahan: adalah bilangan berbentuk  $x = \frac{m}{n}$ , m bilangan bulat dan n bilangan asli dengan m tidak habis dibagi n.

### C. Bilangan Rasional

Bilangan rasional atau sering dikenal dengan bilangan pecahan merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{a}{b}$  dengan  $a, b \in \mathbb{B}$  dan  $b \neq 0$ . Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan huruf Q dan terdiri atas himpunan pecahan negatif, himpunan pecahan positif, dan bilangan bulat.

Bilangan rasional dapat ditulis menjadi 2 macam, yaitu:

#### 1. Rasional Pecahan, terdiri atas:

- Pecahan murni berbentuk  $\frac{a}{b}$ ,  $a < b, b \neq 0$ .  
Misalnya  $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}$
- Pecahan campuran berbentuk  $a\frac{b}{c}$ ,  $b < c, c \neq 0$ .  
Misalnya  $2\frac{3}{5}, 4\frac{5}{7}$
- Pecahan palsu berbentuk  $\frac{a}{b}$ , a habis dibagi b,  $b \neq 0$ .  
Misalnya  $\frac{3}{1}$

#### 2. Rasional Desimal, terdiri atas:

- Rasional decimal terbatas. Misalnya: 0,30; 0,35; 0,357
- Rasional decimal tak terbatas berulang.

Misalnya: 0,55555...; 0,345345345 ...

---

## Teoroma Bilangan Irasional

Bilangan yang pecahan desimalnya berakhir (terbatas) atau jika bagian desimalnya periodik (berpola) maka bilangan itu adalah suatu bilangan rasional.

Bukti:

Misalkan suatu bilangan  $x = 0,345345345\dots$

Akan di buktikan bahwa  $x$  adalah suatu bilangan rasional.

$$1000x = 345,345345\dots$$

$$\begin{array}{r} x = 0,345345\dots \\ \hline 999x = 345 \end{array}$$

$$x = \frac{345}{999}$$

terbukti bahwa bilangan dengan desimalnya periodik merupakan suatu bilangan rasional karena decimal yang periodik itu dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{a}{b}$ .

### Contoh soal:

1. Apakah bilangan –bilangan berikut merupakan bilangan rasional?
  - a. 3
  - b.  $-\frac{1}{2}$
  - c.  $\sqrt{2}$

Penyelesaian:

- a. 3 merupakan bilangan rasional karena dapat dituli dalam bentuk  $\frac{a}{b}$ , yaitu  $\frac{3}{1}$
- b.  $-\frac{1}{2}$  merupakan bilangan rasional karena sesuai dengan defenisi bilangan rasional.
- c.  $\sqrt{2}$  bukan merupakan bilangan rasional karena tidak dapat kamu tulis dalam bentuk  $\frac{a}{b}$  dengan  $a, b$  bilangan bulat dan  $b \neq 0$ .

- 
2. Di antara bilangan-bilangan berikut, manakah yang termasuk bilangan rasional?
- 5
  - 0,151515....

Penyelesaian:

- $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ , Jadi 5 merupakan bilangan rasional
- $0,151515... = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ , Jadi 0,151515.... adalah bilangan rasional

### **Bilangan Irasional**

Bilangan irasional adalah kebalikan dari bilangan rasional yaitu bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk  $\frac{a}{b}$ , dengan  $a, b \in B$  dan  $b \neq 0$ . Himpunan bilangan irasional dilambangkan dengan huruf  $I$ .

Ciri-ciri dari bilangan irasional

- Bilangan irasional tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan biasa
- Jika ditulis sebagai pecahan decimal merupakan decimal tak terbatas dan tak berulang. Seperti  $\sqrt{3} = 1,7320 \dots$
- Bilangan irasional dapat dinyatakan kedalam bentuk akar, seperti  $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ .

Bilangan  $\sqrt{25}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$  bukan bilangan irasional karena dari bilangan-bilangan tersebut bisa didapatkan akarnya, yaitu suatu bilangan rasional.

Sifat –sifat bilangan irasional dan bilangan rasional

- Jumlah atau selisih antara bilangan rasional dan bilangan irasional adalah bilangan irasional
- Hasil kali antara bilangan rasional dan irasional adalah bilangan irasional.

---

## Contoh Soal

Tunjukkan bahwa  $\sqrt{2}$  merupakan bilangan irasional!

Solusi:

Andaikan  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , maka terdapat  $p, q \in \mathbb{Z}$ , sehingga  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . Pilih pasangan  $p$  dan  $q$  sehingga  $\frac{p}{q}$  merupakan pecahan yang paling sederhana, yaitu yang tak memiliki factor yang sama kecuali satu.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 \text{ merupakan bilangan genap}$$

$$\Leftrightarrow p \text{ merupakan bilangan genap}$$

Misalkan  $p = 2r$ ,  $r$  bilangan bulat, maka  $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$

$q^2 = 2r^2$ ,  $\therefore q$  bilangan genap

“Karena  $p$  dan  $q$  bilangan genap, maka 2 merupakan factor  $p$  dan  $q$ , kontradiksi dengan pemilihan  $p$  dan  $q$  yang paling sederhana. Dengan demikian, jika diandaikan  $\sqrt{2}$  bilangan rasional maka akan terjadi kontradiksi.  $\therefore \sqrt{2}$  bilangan irasional”

## Teorema Dasar Aritmatika

**Defenisi 1** : Suatu bilangan bulat  $p > 1$  disebut bilangan prima, jika pembagi positif bilangan tersebut hanya 1 dan  $p$ . Jika bilangan bulat lebih dari satu bukan bilangan prima disebut bilangan komposit.

**Teorema 1**: Jika  $p$  bilangan prima dan  $p|ab$ , maka  $p|a$  atau  $p|b$ .

Bukti: Jika  $p|a$ , maka pernyataan tersebut benar. Misalkan  $p|a$ , karena  $p$  prima (pembagi dari  $p$  hanya  $p$  dan satu) maka  $\gcd(p, a) = 1$ . Karena  $p|ab$  dan  $\gcd(p, a) = 1$  menurut lemma Euclid disimpulkan  $p|b$ .

---

## Contoh Soal

1. Jika  $p$  prima dan  $p \mid a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ , maka  $p \mid a_k$  untuk suatu  $k$  dengan  $1 < k < n$

### **Bukti:**

Akan dibuktikan melalui induksi matematika :

Untuk  $n=1$  benar karena untuk  $p$  prima dan  $p \mid a_1$ , maka  $p \mid a_k$   $1 < k < n$

Untuk  $n = 2$  benar seperti telah dibuktikan pada teorema 1.

Misalkan untuk  $n > 2$  benar. Artinya jika  $p$  membagi suatu hasil perkalian dari faktor-faktor yang banyaknya kurang dari  $n$ , maka  $p$  membagi paling sedikit sebuah faktor.

Misalkan  $p \mid a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  berdasarkan teorema 1 maka  $p \mid a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  maka menurut pemisalan maka  $p \mid a_k$  suatu  $k$  dengan  $1 < k < n$ .

2. Jadi d Jika  $p, q_1, q_2, \dots, q_n$  semuanya prima dan  $p \mid q_1 q_2 \dots q_n$ , maka  $p = q_k$  untuk suatu  $k$  dengan  $1 < k < n$ .

### **Bukti:**

Jika  $p$  prima dan  $p \mid q_1 q_2 \dots q_n$ . Berdasarkan contoh diatas disimpulkan  $p \mid q_k$  untuk suatu  $k$  dengan  $1 < k < n$

Karena  $q_k$  prima, maka  $q_k$  hanya memiliki pembagi positif 1 dan  $q_k$  disimpulkan, jika  $p$  prima dan  $p \mid a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ , maka  $p \mid a_k$  untuk suatu  $k$  dengan  $1 < k < n$ .

**Teorema 2:** Setiap bilangan bulat positif  $n > 1$  dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian bilangan-bilangan prima tepat dengan satu cara (urutan faktor-faktornya bisa berbeda) dan representasi tersebut unik.

**Bukti:** Bilangan bulat  $n > 1$  adalah bilangan prima atau komposit. Jika  $n$  prima tidak ada hal yang harus dibuktikan lagi. Jika  $n$  komposit, maka ada bilangan

---

bulat  $d|n$  dengan  $1 < d < n$ . Ada bilangan bulat terkecil diantara bilangan bulat  $d$  dan misalkan  $p_1$  maka  $p_1$  haruslah bilangan prima.

Karena jika  $p_1$  bukan  $n$  bilangan prima, maka ada  $q$  dimana  $1 < q < p_1$  dengan  $q|p_1$  dan  $p_1|n$  sehingga  $q|n$ . Hal ini bertentangan dengan  $p_1$  pembagi  $n$  yang terkecil yang besar 1. Dengan demikian dapat kita tulis  $n = p_1 n_1$  dimana  $p_1$  prima dan  $1 < q < p_1$

**Contoh soal:**

Setiap bilangan bulat  $n > 1$  dapat dituliskan secara unik dalam bentuk kanonik yaitu  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ , untuk  $i=1, 2, r, k_i$  bilangan bulat positif dan  $p_i$  bilangan prima dengan  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ .

**Bukti:**

$n = p_1 p_2 \dots p_r$  dengan  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  dengan demikian dapat terjadi  $p_1 = p_2$  sehingga  $n = p_1^2 p_3 \dots p_r$  dan seterusnya.

**Logaritma**

1. Pengertian Logaritma

Logaritma adalah kebalikan atau invers dari eksponen atau pemangkatan. Dengan kata lain, logaritma dari  $x$  merupakan eksponen dengan bilangan pokok  $b$  yang dipangkatkan dengan bilangan konstan lain agar memperoleh nilai  $x$ . Kasus sederhana dalam logaritma adalah menghitung jumlah munculnya faktor yang sama dalam perkalian berulang.

2. Bentuk Umum Logaritma

Jika  $a^c = b$ , dengan  $b$  adalah bilangan positif dan  $a$  adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1, maka  $c$  adalah logaritma  $b$  dengan bilangan pokok  $a$  atau ditulis

---

$c = {}^a \log b$ . Jika  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , dan  $b > 0$ .

Jika  $a^n = x$  maka  ${}_a \log x = n$

Sehingga  $a^c = b$  maka  ${}_a \log b = c$

Atau:

Ketika  $a$  dipangkatkan dari  $c$  sama dengan  $b$ :

$$a^c = b$$

Maka logaritma basis  $a$  dari  $c$  sama dengan  $c$ :

$$\log_a (b) = c$$

Dimana:

Bilangan **a** = basis atau bilangan pokok

Bilangan **b** = numerus atau domain logaritma

Bilangan **c** = range atau hasil logaritma

### 3. Sifat Logaritma

Terdapat sifat-sifat yang ada pada logaritma, sifat ini diturunkan dari defenisi logaritma itu sendiri yang menunjukkan logaritma dari operasi suatu bilangan.

a. Sifat penjumlahan

$${}_a \log p.q = {}_a \log p + {}_a \log q ; a > 0, a \neq 1, q > 0$$

b. Sifat perkalian

$${}_a \log b \times {}_b \log c = {}_a \log c ; a > 0$$

c. Sifat Pembagian

$${}_a \log \frac{p}{q} = {}_a \log p - {}_a \log q ; a > 0, a \neq 1, p > 0; q > 0$$

d. Sifat Logaritma dari Perpangkatan

Logaritma yang nilai numerus-nya merupakan suatu eksponen dapat dijadikan logaritma baru dengan mengeluarkan pangkat menjadi pengali.

$${}_a \log b^p = p \cdot {}_a \log b ; a > 0, a \neq 1, b > 0$$

e. Sifat logaritma dasar, yakni suatu bilangan yang dipangkatkan dengan angka 1, maka hasilnya akan tetap sama seperti yang sebelumnya.

- 
- f. Sifat logaritma koefisien, yakni saat terdapat contoh terkait soal logaritma yang diberikan mempunyai pangkat. Maka pangkat dari basis atau biasa disebut numerus sebagai koefisien dari logaritma.
  - g. Sifat logaritma akan berbanding terbalik, yakni suatu sifat yang mempunyai prasyarat berupa logaritma yang berbanding terbalik antara basis terhadap numerus.
  - h. Sifat perpangkatan logaritma, adalah suatu bilangan yang dipangkatkan dengan logaritma yang mempunyai basis sama, maka hasilnya akan berupa suatu numerus dari logaritma itu sendiri.
  - i. Sifat Penjumlahan dan pengurangan merupakan logaritma yang dapat dijumlahkan dengan logaritma lainnya yang mempunyai basis yang serupa.
  - j. Sifat perkalian dan juga pembagian logaritma, adalah dua buah logaritma yang disederhanakan. Sebab keduanya mempunyai numerus yang serupa
  - k. Sifat logaritma numerus terbalik, maka logaritma bisa mempunyai nilai yang serupa dengan logaritma lainnya. Bila numerus menggunakan pecahan terbalik.

Untuk  $a, b$  rasional dan  $a \neq 1$ , berlaku:

1.  ${}^a \log a = 1$

2.  ${}^a \log 1 = 0$

3.  ${}^a \log a^n = n$

4.  ${}^a \log b \cdot c = a \log b + a \log c$

5.  ${}^a \log \frac{b}{c} = a \log b - a \log c$ ,  $a, b$  rasional,  $c \neq 0$

---

$$6. {}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$$

$$7. {}^a \log b = \frac{{}^c \log b}{{}^c \log a} = \frac{1}{{}^b \log a}$$

$$8. {}^a \log b \times {}^b \log c = {}^a \log c$$

$$9. a^m \log b^n = \frac{n}{m} (\log b), \text{ m dan n rasional, } m \neq 0$$

$$10. a^{\log b} = b$$

#### 4. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

##### a. Persamaan Logaritma

Menyelesaikan persamaan logaritma, dengan menyamakan bilangan pokoknya. Teknik penghitungannya adalah sebagai berikut.

${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$ , dimana:

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

##### b. Pertidaksamaan Logaritma

Langkah pertama untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma adalah dengan menyamakan bilangan pokoknya. Lalu, selanjutnya adalah dengan mengikuti tahapan sebagai berikut.

$${}^a \log f(x) \geq {}^a \log g(x)$$

Untuk bilangan pokok  $0 < a < 1$

$$f(x) \leq g(x)$$

$$f(x) > 0$$

---

$g(x) > 0$  Untuk bilangan pokok  $a > 1$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

### Contoh Soal

1.  ${}^5\log 100 - {}^5\log 4 = \dots$

Jawab:

$${}^5\log 100 - {}^5\log 4 = {}^5\log 100/4$$

$$= {}^5\log 25$$

$$= {}^5\log 5.5$$

$$= 2 \times {}^5\log 5$$

$$= 2 \times 1$$

2.  ${}^5\log (3x - 2) = 5\log 7$

Jawab:

Menentukan nilai x dengan menemukan nilai x, sehingga  $3x - 2 = 7$

Maka :

$${}^5\log (3x - 2) = 5\log 7 \Rightarrow 3x - 2 = 7$$

$$\Rightarrow 3x = 7 + 2$$

$$\Rightarrow 3x = 9$$

$$\Rightarrow x = 3$$

---

## Daftar Pustaka

- Bartle, R., & Donald R. Sherbert. (2000). *Introduction To Real Analysis* (3th Edition). USA: Library of Congress Cataloging.
- Glibert, G. (2009). *Elements Of Modern Algebra* (7th Edition). Brooks/Cole Cengage Learning.
- Lipson, M., & Lipschutz, S. (2008). *Matematika Diskrit* (Edisi Ketiga). Erlangga.
- Mulyana, E. (2002). *Teorema Dasar Matematika*. Jakarta: Jams Dani

## Profil Penulis



### **Suri Toding Lembang, M.Pd.**

Lahir di Rantepao 18 September 1990. Pendidikan yang telah ditempuh, SDN Malango Rantepao 1996, SMPN 1 Toraja Utara 2002, SMA Negeri 2 Toraja Utara 2005. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Kristen Indonesia Toraja (UKI Toraja) tahun 2012, kemudian melanjutkan pendidikan S2 di Universitas Negeri Makasar pada program studi pendidikan matematika. Saat ini sedang melanjutkan pendidikan S3 di Universitas Negeri Makasar pada Program studi pendidikan matematika.

Aktif menulis pada berbagai jurnal ilmiah baik nasional maupun internasional. Beberapa tulisan juga telah dimuat dalam Prosiding Internasional seperti *The Analysis Concept of Integers Counting Operations in Traditional Toraja Games Si Goal and Si Patte tahun 2021* dan *Identification Of Fractional Numbers In The Procedure For The Division Of Duku' Tedong At The Solo Sign' Event In Toraja Tahun 2022*. Penulis juga sering telag menulis buku berjudul *Aljabar Linier Tahun 2019*. Saat ini penulis aktif mengajar di Universitas Kristen Indonesia Toraja. Email Penulis: [surikaritutu@gmail.com](mailto:surikaritutu@gmail.com)

# PERTIDAKSAMAAN, INTERVAL, DAN NILAI MUTLAK

**Ayunda Sriwahyuningrum**  
Universitas Indraprasta PGRI

## Pertidaksamaan

Salah satu hal penting dalam kalkulus adalah pemahaman suatu pertidaksamaan. Ketika menyelesaikan pertidaksamaan, ini berarti mencari semua himpunan bilangan real yang membuat pertidaksamaan tersebut berlaku. Berbeda dengan persamaan, himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan pada umumnya sangat banyak dan tak terhingga sehingga hanya dinyatakan dalam selang bilangan atau gabungan dari selang-selang. Perbedaan tersebut dapat terlihat dalam contoh yang terdapat pada Tabel 2.1 terkait dengan solusi atau himpunan penyelesaian beserta grafiknya.

Tabel 2.1 Gambaran Persamaan dan Pertidaksamaan

		Solusi	Grafik
Persamaan	$2x - 3 = 7$	$x = 5$	
Pertidaksamaan	$2x - 3 \leq 7$	$x \leq 5$	

---

## Interval

Interval atau selang diartikan sebagai himpunan bagian bilangan real. Interval dapat menggambarkan selang terbuka (*open interval*), selang tertutup (*closed interval*), maupun selang setengah terbuka (*half-open interval*). Selang terbuka  $a < x < b$  menunjukkan himpunan semua bilangan real antara  $a$  dan  $b$ , dan titik-titik ujung  $a$  dan  $b$  tidak termasuk dalam himpunan. Kondisi ini dinyatakan dengan notasi  $(a, b)$  dan ditandai dengan bulatan kosong ketika digambar pada garis bilangan. Apabila selang tersebut merupakan selang tertutup  $a \leq x \leq b$ , ini berarti turut mencakup titik-titik ujung  $a$  dan  $b$ , yang dinyatakan dengan  $[a, b]$  dan digambar dengan bulatan penuh. Kemungkinan lainnya adalah selang setengah terbuka, yaitu ketika terbuka di salah satu titik dan tertutup di titik lainnya, seperti  $[a, b)$  atau  $(a, b]$ . Tabel 2.2 menunjukkan berbagai kemungkinan untuk menyatakan suatu selang beserta penggambarannya pada garis bilangan.

Berkenaan dengan simbol  $\infty$  (tak hingga) dan  $-\infty$  (negatif tak hingga) di dalam notasi, simbol tersebut pada dasarnya bukan merepresentasikan bilangan real. Simbol  $\infty$  hanya untuk mengindikasikan selang yang tidak berujung ke arah yang positif, sedangkan  $-\infty$  mengindikasikan selang yang tidak berujung ke arah negatif. Hal lain yang perlu diketahui adalah deskripsi himpunan dari pertidaksamaan  $a < x < b$  itu menggambarkan  $a < x$  dan  $x < b$ . Walaupun menampilkan dua pertidaksamaan, kita tetap menyatakan hal tersebut sebagai “sebuah pertidaksamaan.”

Tabel 2.2 Jenis-jenis Interval (Selang)

Notasi	Deskripsi Himpunan	Grafik
$(a, b)$	$\{x   a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$	
$[a, b]$	$\{x   a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	
$[a, b)$	$\{x   a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$	
$(a, b]$	$\{x   a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x   x < b, x \in \mathbb{R}\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x   x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	
$(a, \infty)$	$\{x   x > a, x \in \mathbb{R}\}$	
$[a, \infty)$	$\{x   x \geq a, x \in \mathbb{R}\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{x   x \in \mathbb{R}\}$ (semua himpunan bilangan real)	

### Penyelesaian Pertidaksamaan

Prosedur untuk menyelesaikan pertidaksamaan tidak jauh berbeda dengan prosedur menyelesaikan persamaan.

---

yaitu bekerja untuk menempatkan sebuah variabel di salah satu sisi sehingga himpunan penyelesaiannya jelas, namun turut memperhatikan sifat-sifat urutan bilangan real. Kita dapat melakukan operasi-operasi pada pertidaksamaan dengan ketentuan sebagai berikut:

- A. Kita dapat menambahkan kedua ruas dengan bilangan yang sama.
- B. Kita dapat mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif.
- C. Kita dapat mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif, tetapi kita harus mengubah arah tanda pertidaksamaan.

1. Menyelesaikan Pertidaksamaan Linear

**Contoh 1.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $3x < 7x - 2$  dan perlihatkan grafik himpunan penyelesaiannya!

**Solusi:**

$$\begin{aligned} 3x &< 7x - 2 \\ 3x - 7x &< 7x - 2 - 7x \quad (\text{tambahkan } -7x) \\ -4x &< -2 \\ -4x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) &> -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \quad (\text{kalikan dengan } -\frac{1}{4} \text{ sehingga tanda berbalik arah)} \\ x &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $3x < 7x - 2$  adalah semua bilangan yang lebih besar dari  $\frac{1}{2}$ . Dengan kata lain,  $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$  atau  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ , dan grafiknya ditunjukkan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1

**Contoh 2.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $5 \leq 8x + 3 < 9$ .

**Solusi:**

$$5 \leq 8x + 3 < 9 \quad (\text{selanjutnya ditambah } -3)$$

$$2 \leq 8x < 6 \quad (\text{selanjutnya dikalikan dengan } \frac{1}{8})$$

$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah atau  $\left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$ , seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.2.



Gambar 2.2

2. Menyelesaikan Pertidaksamaan Nonlinear

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat ataupun pangkat lainnya. Suatu faktor linear  $(x - a)$  bernilai positif untuk  $x > a$  dan bernilai negatif untuk  $x < a$ . Adapun hasil kali  $(x - a)(x - b)$  bernilai nol apabila salah satu faktor atau keduanya bernilai nol, yaitu ketika  $x = a$  dan/atau  $x = b$ . Titik-titik pembuat nol ini disebut titik-titik pemecah (*split points*), yang

---

diartikan sebagai titik-titik yang memecah atau membagi garis bilangan menjadi beberapa bagian (selang). Titik-titik tersebut menjadi patokan dalam menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan bentuk kuadrat atau bentuk yang lebih rumit lagi.

**Contoh 3.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $x^2 + 2x < 15$ .

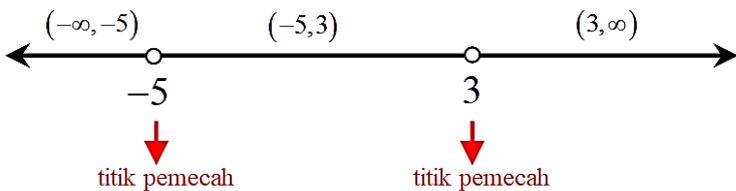
**Solusi:**

$$x^2 + 2x < 15 \quad (\text{selanjutnya ditambah } -15)$$

$$x^2 + 2x - 15 < 0 \quad (\text{selanjutnya faktorkan})$$

$$(x-3)(x+5) < 0$$

Hasil kali  $(x-3)(x+5)$  bernilai nol ketika  $x-3=0$  dan/atau  $x+5=0$  sehingga didapatkan titik-titik pembuat nol, yaitu 3 dan  $-5$ , yang selanjutnya disebut titik-titik pemecah. Titik-titik tersebut membagi garis bilangan menjadi tiga selang,  $(-\infty, -5)$ ,  $(-5, 3)$ , dan  $(3, \infty)$ , seperti pada gambar 2.3.



Gambar 2.3

Hasil dari  $(x-3)(x+5)$  di setiap selang itu bertanda tetap (selalu positif atau selalu negatif). Cara memastikannya adalah dengan menggunakan titik uji (*test point*), yakni menguji salah satu titik (sebarang

---

titik) yang ada di selang-selang tersebut. Hasilnya terlihat pada gambar 2.4.

Titik uji  $x = -7$ , maka tanda

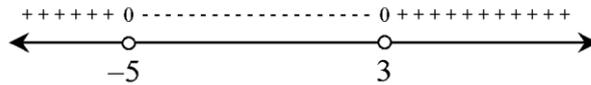
$$(x-3)(x+5) = (-7-3)(-7+5) = (-)(-) = (+)$$

Titik uji  $x = 0$ , maka tanda

$$(x-3)(x+5) = (0-3)(0+5) = (-)(+) = (-)$$

Titik uji  $x = 5$ , maka tanda

$$(x-3)(x+5) = (5-3)(5+5) = (+)(+) = (+)$$



Gambar 2.4

Karena  $(x-3)(x+5) < 0$ , artinya hasil kali  $(x-3)(x+5)$  harus kurang dari nol atau negatif, sehingga himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah  $(-5, 3)$  atau  $\{x \mid -5 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ , seperti pada gambar 2.5.



Gambar 2.5

---

**Contoh 4.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $3x^2 - 5x - 2 > 0$ .

**Solusi:**

$$3x^2 - 5x - 2 > 0 \quad (\text{selanjutnya faktorkan})$$

$$\frac{(3x-6)(3x+1)}{3} > 0 \quad (\text{proses memfaktorkan})$$

$$\frac{3(x-2)(3x+1)}{3} > 0 \quad (\text{proses memfaktorkan})$$

$$(x-2)(3x+1) > 0$$

Titik-titik pemecahnya adalah 2 dan  $-\frac{1}{3}$  sehingga garis bilangan terbagi menjadi tiga selang, yaitu  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ , dan  $(2, \infty)$ . Selanjutnya, menemukan tanda di setiap selang.

Titik uji  $x = -5$ , maka tanda

$$(x-2)(3x+1) = (-5-2)(3 \cdot (-5)+1) = (-)(-) = (+)$$

Titik uji  $x = 0$ , maka tanda

$$(x-2)(3x+1) = (0-2)(3 \cdot 0+1) = (-)(+) = (-)$$

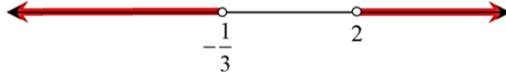
Titik uji  $x = 4$ , maka tanda

$$(x-2)(3x+1) = (4-2)(3 \cdot 4+1) = (+)(+) = (+)$$

Karena  $(x-2)(3x+1) > 0$  (hasil kalinya harus positif), himpunan penyelesaian yang

memenuhi adalah  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$ , yang berarti  $\left\{x \mid x < -\frac{1}{3} \text{ atau } x > 2, x \in \mathbb{R}\right\}$ .

Grafiknya seperti pada gambar 2.6.



Gambar 2.6

**Contoh 5.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $x(x-2)^2(x-5) \leq 0$ .

**Solusi:**

Titik-titik pemecahnya adalah 0, 2, dan 5 sehingga garis bilangan terbagi menjadi empat selang, yaitu  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[2, 5]$ , dan  $[5, \infty)$ . Selanjutnya, menemukan tanda di setiap selang, dengan menggunakan titik-titik uji:

$x = -1$ , maka tanda

$$x(x-2)^2(x-5) = (-1)(-1-2)^2(-1-5) = (-)(+)(-) = (+)$$

$x = 1$ , maka tanda

$$x(x-2)^2(x-5) = (1)(1-2)^2(1-5) = (+)(+)(-) = (-)$$

$x = 3$ , maka tanda

$$x(x-2)^2(x-5) = (3)(3-2)^2(3-5) = (+)(+)(-) = (-)$$

$x = 7$ , maka tanda

$$x(x-2)^2(x-5) = (7)(7-2)^2(7-5) = (+)(+)(+) = (+)$$

Karena  $x(x-2)^2(x-5) \leq 0$ , himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah  $[0, 2] \cup [2, 5]$ , dan dapat ditulis  $[0, 5]$ , artinya  $\{x | 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$ . Grafiknya seperti pada gambar 2.7.



Gambar 2.7

---

**Contoh 6.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} \geq 0$ .

**Solusi:**

Titik-titik pemecahnya adalah 1, -2, dan 4 sehingga garis bilangan terbagi menjadi empat selang, namun kita harus memastikan bahwa  $x-4 \neq 0$  atau  $x \neq 4$ , sehingga selangnya adalah  $(-\infty, -2]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[1, 4)$ , dan  $(4, \infty)$ . Selanjutnya, menemukan tanda di setiap selang.

Titik uji  $x = -3$ , maka tanda

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} = \frac{(-3-1)(-3+2)}{-3-4} = \frac{(-)(-)}{(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Titik uji  $x = 0$ , maka tanda

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} = \frac{(0-1)(0+2)}{0-4} = \frac{(-)(+)}{(-)} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

Titik uji  $x = 2$ , maka tanda

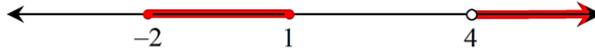
$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} = \frac{(2-1)(2+2)}{2-4} = \frac{(+)(+)}{(-)} = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Titik uji  $x = 5$ , maka tanda

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} = \frac{(5-1)(5+2)}{5-4} = \frac{(+)(+)}{(+)} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

---

Karena  $\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} \geq 0$  (hasil baginya harus positif), himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah  $[-2,1] \cup (4,\infty)$ , yang berarti  $\{x | -2 \leq x \leq 1 \text{ atau } x > 4, x \in \mathbb{R}\}$ . Grafiknya seperti pada gambar 2.8.



Gambar 2.8

### Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real, dilambangkan dengan  $|x|$ , didefinisikan sebagai:

$$|x| = x \quad \text{jika } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{jika } x < 0$$

Definisi nilai mutlak ini memberikan suatu pemahaman bahwa  $|x|$  tidak pernah bernilai negatif, contohnya  $|5| = 5$ ,  $|0| = 0$ , dan  $|-3| = -(-3) = 3$ . Nilai mutlak seringkali dikaitkan dengan konsep jarak (tanpa memperhatikan arahnya) karena jarak selalu positif atau nol sehingga dapat dinyatakan  $|x| \geq 0$ .

Berkenaan dengan jarak, jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real, maka jarak antara titik  $a$  dan  $b$  pada suatu garis bilangan adalah  $d(a,b) = |b-a|$ . Ini sekaligus mengarahkan kita bahwa jarak dari  $a$  ke  $b$  sama saja dengan jarak dari  $b$  ke  $a$  sehingga  $|b-a| = |a-b|$ . Adapun penulisan  $|x-a|$  berarti menyatakan jarak antara  $x$  dengan  $a$ , sedangkan bentuk  $|x|$  sama saja dengan  $|x-0|$

---

diartikan sebagai jarak antara  $x$  dengan 0, atau jarak antara  $x$  dengan titik asal.

1. Sifat-sifat Nilai Mutlak

a.  $|ab| = |a| \cdot |b|$

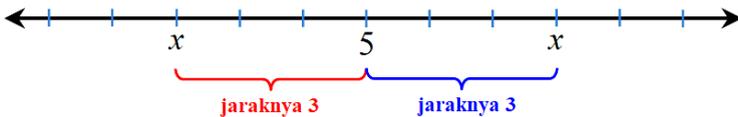
b.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

c.  $|a+b| \leq |a| + |b|$  (Ketaksamaan Segitiga)

d.  $|a-b| \geq ||a| - |b||$

2. Persamaan Nilai Mutlak

Ketika menyelesaikan persamaan nilai mutlak, konsep jarak dapat menjadi ilustrasi yang logis dalam menggambarkan definisi nilai mutlak. Sebagai contoh, bentuk  $|x-5|=3$  berarti jarak antara  $x$  dan 5 adalah 3. Fakta ini ditunjukkan pada gambar 2.9.



Gambar 2.9

Penyelesaian dengan gambar di atas memperlihatkan bahwa titik  $x$  dapat diletakkan di depan 5 dan di belakang 5 yang masing-masing berjarak 3 sehingga  $x$  memiliki dua kemungkinan jawaban, yaitu 2 dan 8 atau ditulis  $\{2,8\}$ . Konsep jarak ini memberikan pemahaman bahwa kita perlu menunjukkan dua kemungkinan kondisi dalam menyelesaikan persoalan nilai mutlak, yaitu kondisi titik berada di depan (jarak bisa diasumsikan bernilai positif) dan kondisi titik

---

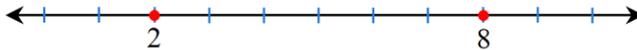
---

yang berada di belakang (jarak bisa diasumsikan bernilai negatif). Secara formal, contoh tersebut dapat diselesaikan sebagai berikut:

(i)  $x-5=3$  (jarak diasumsikan bernilai positif, posisi  $x$  berada di depan)  
 $x=3+5$   
 $x=8$

(ii)  $x-5=-3$  (jarak diasumsikan bernilai negatif, posisi  $x$  berada di belakang)  
 $x=-3+5$   
 $x=2$

Jadi, solusinya adalah  $x=2$  atau  $x=8$ , dapat ditulis  $\{2,8\}$ . Grafiknya seperti pada gambar 2.10.



Gambar 2.10

**Contoh 1.**

Selesaikanlah persamaan  $|2x-7|=5$ .

**Solusi:**

(i)  $2x-7=5$       (ii)  $2x-7=-5$   
 $2x=12$                $2x=2$   
 $x=6$                    $x=1$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $\{1,6\}$ , seperti pada gambar 2.11.

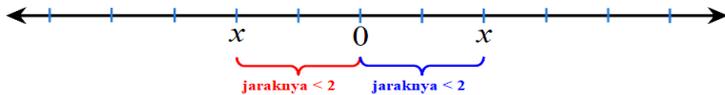


Gambar 2.11

---

### 3. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak pada dasarnya menggunakan konsep jarak seperti sebelumnya, yakni adanya asumsi jarak bernilai positif dan negatif, namun kita harus mengubah arah tanda pertidaksamaan untuk jarak yang diasumsikan bernilai negatif. Sebagai contoh,  $|x| < 2$  berarti jarak antara  $x$  dan titik asal harus lebih kecil dari 2, seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.12, sehingga nilai-nilai  $x$  harus lebih kecil dari 2 dan lebih besar dari  $-2$  atau ditulis  $-2 < x < 2$ .



Gambar 2.12

Apabila kondisinya adalah  $|x| > 2$ , agar jarak antara  $x$  dan titik asal lebih besar dari 2, maka haruslah  $x > 2$  atau  $x < -2$ . Secara umum, kondisi ini mendasari suatu pernyataan berikut:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$$

Fakta di atas tentunya juga berlaku pada tanda  $\leq$  dan  $\geq$ .

#### **Contoh 2.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $|3x - 4| < 2$ .

---

**Solusi:**

Pertidaksamaan  $|3x - 4| < 2$  ekuivalen dengan

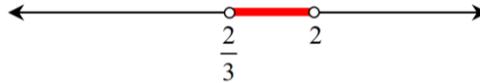
$$-2 < 3x - 4 < 2 \quad (\text{selanjutnya masing-masing ditambah 4})$$

$$2 < 3x < 6 \quad (\text{selanjutnya dikalikan dengan } \frac{1}{3})$$

$$\frac{2}{3} < x < 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah  $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ , yang

berarti  $\left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2, x \in \right\}$ , dan grafiknya seperti pada gambar 2.13.



Gambar 2.13

**Contoh 3.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $|4x + 5| \geq 17$ .

---

**Solusi:**

Pertidaksamaan  $|4x+5| \geq 17$  ekuivalen dengan

$$4x+5 \geq 17 \quad \text{atau} \quad 4x+5 \leq -17 \quad (\text{selanjutnya ditambah } -5)$$

$$4x \geq 12 \qquad 4x \leq -22 \quad (\text{selanjutnya dikalikan dengan } \frac{1}{4})$$

$$x \geq 3 \qquad x \leq -\frac{22}{4}$$

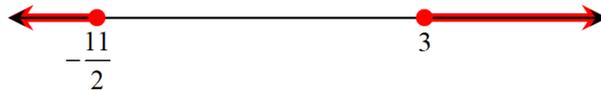
$$x \leq -\frac{11}{2}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah

$$\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right] \cup [3, \infty), \text{ yang berarti}$$

$$\left\{x \mid x \leq -\frac{11}{2} \text{ atau } x \geq 3, x \in \mathbb{R}\right\}$$

seperti pada gambar 2.14.



Gambar 2.14

Apabila bekerja pada pengkuadratan bilangan-bilangan tak negatif, maka kondisi ini berlaku, yaitu  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ . Dengan kata lain, hal tersebut dapat diterapkan dalam nilai mutlak bahwa:

$$|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

**Contoh 6.**

Selesaikanlah pertidaksamaan  $|3x-1| < 2|x-4|$ .

---

**Solusi:**

Pertidaksamaan  $|3x-1| < 2|x-4|$  ekuivalen dengan

Pertidaksamaan  $|3x-1| < 2|x-4|$  ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} |3x-1| &< |2x-8| \\ (3x-1)^2 &< (2x-8)^2 \\ (3x-1)^2 - (2x-8)^2 &< 0 && \rightarrow \text{Ingat bahwa } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ (3x-1+(2x-8))(3x-1-(2x-8)) &< 0 \\ (3x-1+2x-8)(3x-1-2x+8) &< 0 \\ (5x-9)(x+7) &< 0 \end{aligned}$$

Titik-titik pemecahnya adalah  $\frac{9}{5}$  dan  $-7$  sehingga garis bilangan terbagi menjadi tiga selang, yaitu  $(-\infty, -7)$ ,  $(-7, \frac{9}{5})$ , dan  $(\frac{9}{5}, \infty)$ .

Selanjutnya, menemukan tanda di setiap selang.

Titik uji  $x = -8$ , maka tanda

$$(5x-9)(x+7) = (5 \cdot (-8) - 9)(-8+7) = (-)(-) = (+)$$

Titik uji  $x = 0$ , maka tanda

$$(5x-9)(x+7) = (5 \cdot 0 - 9)(0+7) = (-)(+) = (-)$$

Titik uji  $x = 2$ , maka tanda

$$(5x-9)(x+7) = (5 \cdot 2 - 9)(2+7) = (+)(+) = (+)$$

Karena  $(5x-9)(x+7) < 0$  (hasil kalinya harus negatif), himpunan penyelesaian yang memenuhi adalah

$$\left(-7, \frac{9}{5}\right), \text{ yang berarti } \left\{x \mid -7 < x < \frac{9}{5}, x \in \mathbb{R}\right\},$$

---

seperti pada gambar 2.15.



Gambar 2.15

### Latihan Soal

**Nomor 1-4.** Tunjukkan himpunan penyelesaian berikut pada garis bilangan real.

1.  $(-7, 4]$
2.  $[2, \infty)$
3.  $[2, 5] \cup [8, 12]$
4.  $(-\infty, -3) \cup [6, \infty)$

**Nomor 5-20.** Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dan buatlah sketsa grafik himpunan penyelesaiannya.

5.  $5x + 7 \leq 3$
6.  $\frac{1}{2}x - 4 > 8 - 3x$
7.  $2 \leq 3x - 6 < 9$
8.  $(2x + 1)(x - 3) < 0$
9.  $x^2 - 5x > 0$
10.  $x^2 - 10x + 21 \geq 0$
11.  $(x + 3)^2(x - 1)(x + 5) \leq 0$
12.  $\frac{2x + 8}{x - 3} \geq 0$
13.  $\frac{x - 6}{x + 2} < 5$
14.  $\frac{3}{x + 1} - \frac{2}{x} \leq 0$
15.  $\left| \frac{1}{3}x \right| < 4$
16.  $|5x - 2| \geq 8$
17.  $4 - |x - 6| < 2$
18.  $|4x - 3| \leq |2x - 1|$
19.  $|x - 8| - |3x + 2| < 0$
20.  $|2x - 6| \geq |x + 1|$

- 
1. Buktikan bahwa  $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ .
  2. Buktikan bahwa jika  $0 < x < y$ , maka  $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ .
  3. Untuk dua bilangan positif  $a$  dan  $b$ , buktikanlah bahwa  $|a+b| \leq |a|+|b|$ .  
Ini dikenal sebagai bentuk **ketaksamaan segitiga** yang menggambarkan panjang setiap sisi segitiga kurang dari atau sama dengan jumlah kedua sisi lainnya.
  4. Untuk dua bilangan positif  $a$  dan  $b$ , buktikanlah bahwa  $||a|-|b|| \leq |a-b|$ .
  5. Bilangan  $\sqrt{ab}$  disebut **rataan geometri** dari  $a$  dan  $b$ .
    - a) Jika  $0 \leq a \leq b$ , maka buktikanlah bahwa  $a \leq \sqrt{ab} \leq b$ .
    - b) Jika  $0 \leq a \leq b$ , maka buktikanlah bahwa  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

---

## Daftar Pustaka

- Patrick, D. (2015). *The Art of Problem Solving: Calculus*. San Diego: AoPS Inc.
- Rohde, U. L., Jain, G. G., Poddar, A. K., & Ghosh, A. K. (2012). *Introduction to Differential Calculus: Systematic Studies with Engineering Application for Beginners*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2007). *Calculus: One and Several Variables, Tenth Edition*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2016). *Precalculus: Mathematics for Calculus, Seventh Edition*. Boston, MA: Cengage Learning.
- Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2014). *Calculus Early Transcendentals: Pearson New International Edition*. London: Pearson Education Limited.

---

## Profil Penulis



### **Ayunda Sri Wahyuningrum**

Ketertarikan penulis terhadap matematika mulai diperdalam sejak tahun 2010 di Universitas Negeri Jakarta. Penulis memilih program studi Pendidikan Matematika, dan berhasil menyelesaikan studi S1 pada tahun 2014. Penulis selanjutnya menempuh pendidikan S2 program studi Pendidikan Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia tahun 2015-2017. Sejak tahun 2018, selain menjadi dosen matematika di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta, penulis juga aktif menjadi pelatih lomba bidang matematika tingkat nasional dan internasional, khususnya jenjang Sekolah Dasar, di bawah lembaga Klinik Pendidikan MIPA (KPM) Bogor.

Penulis turut mengembangkan potensi diri dan berkontribusi di bidang pendidikan matematika dengan menjadi seorang peneliti untuk riset-riset kualitatif, seperti *design research* dan *didactical design research*. Penulis memiliki ketertarikan riset yang berkaitan dengan pembelajaran matematika di sekolah menengah hingga perguruan tinggi serta pengembangan desain pembelajaran matematika. Bentuk perhatian penulis terhadap kualitas pembelajaran matematika menjadi suatu kekuatan bagi penulis untuk melahirkan berbagai tulisan guna menghadirkan pemahaman dan membangun ide rancangan pembelajaran matematika, hingga tulisan yang disusun dalam bentuk buku matematika agar bisa memudahkan siapapun dalam belajar matematika.

Email Penulis: [ayunda.sriwahyu@gmail.com](mailto:ayunda.sriwahyu@gmail.com)

---

---

# DEFINISI DAN PENGOPERASIAN FUNGSI

**Ul'fah Hernaeny**

Universitas Indraprasta PGRI

## **Definisi Fungsi**

Konsep suatu fungsi adalah salah satu konsep paling mendasar dalam ilmu matematika. Didalam kalkulus konsep tersebut memegang peranan yang sangat luas. Dalam matematika, fungsi merupakan relasi (hubungan) khusus yang sering juga disebut dengan “relasi fungsional” karena tidak semua relasi merupakan fungsi. Suatu relasi antara A dan B disebut fungsi apabila setiap unsur (anggota) himpunan A sebagai domain dipasangkan tepat satu unsur (anggota) himpunan B sebagai kodomain. Secara matematis, fungsi  $f$  dari  $x$  ke  $y$  disimbolkan dengan  $f: x \rightarrow y$ , dimana bentuknya dapat berupa fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi eksponensial, fungsi logaritma, dan lain-lain. Dan bila dibuat grafiknya untuk menggambarkan pola hubungan antara  $x$  dan  $y$ , maka gambar grafiknya akan berbeda-beda sesuai dengan nama dan jenis fungsi yang disebutkan tadi.

Fungsi dalam istilah matematika merupakan pemetaan setiap anggota sebuah himpunan (dinamakan sebagai domain atau variabel bebas) kepada anggota himpunan yang lain (dinamakan sebagai kodomain atau variabel terikat) yang dapat dinyatakan dengan lambang  $y = f(x)$ , atau dapat menggunakan lambang  $g(x)$ ,  $P(x)$ . Istilah ini berbeda pengertiannya dengan kata yang sama yang

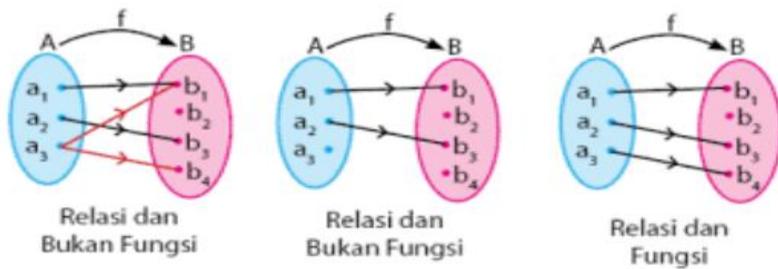
---

dipakai sehari-hari, seperti “alatnya berfungsi dengan baik.” Konsep fungsi adalah salah satu konsep dasar dari matematika dan setiap ilmu kuantitatif. Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim. Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Contohnya adalah sebuah fungsi dengan domain dan kodomain himpunan bilangan riil, misalkan  $y = f(2x)$ , yang menghubungkan suatu bilangan riil dengan bilangan riil lain yang dua kali lebih besar. Dalam hal ini kita dapat menulis  $f(5) = 10$ .

Fungsi sebagai relasi  $\rightarrow$  Sebuah fungsi  $f$  dapat dimengerti sebagai relasi antara dua himpunan, dengan unsur pertama hanya dipakai sekali dalam relasi tersebut. Domain, Kodomain, Range  $\rightarrow$  Domain adalah daerah asal, Kodomain adalah daerah kawan, sedangkan Range adalah daerah hasil.

Relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  disebut fungsi atau pemetaan jika dan hanya jika setiap anggota himpunan  $A$  berpasangan dengan tepat satu anggota himpunan  $B$ .

Suatu fungsi atau pemetaan dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, rumus, diagram panah, atau diagram cartesius. Fungsi  $f$  yang memetakan himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  ditulis dengan notasi  $f: A \rightarrow B$ .



Gambar 3.1 Diagram Panah Relasi Fungsi dan Bukan Relasi Fungsi

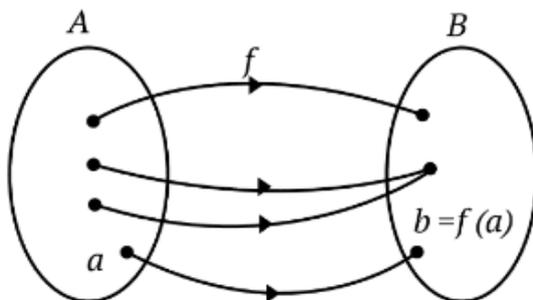
Sumber: Matematika Diskrit untuk Pendidikan Matematika Edisi Revisi

$f$  adalah fungsi yaitu padanan atau cara pengkaitannya dengan notasi  $f : A \rightarrow B$  sering pula sebuah fungsi disebut pemetaan, yang memetakan Daerah Asal pada Daerah Hasil. Jadi bisa disimpulkan bahwa sebuah fungsi melibatkan tiga hal berikut :

1. Sebuah himpunan tak kosong yang disebut Daerah Asal
2. Suatu aturan padanan, elemen-elemen dari kedua himpunan atau fungsinya
3. Sebuah himpunan tak kosong yang disebut Daerah Hasil

Untuk menotasikan suatu fungsi itu sendiri berdasarkan kesepakatan adalah sebagai berikut :

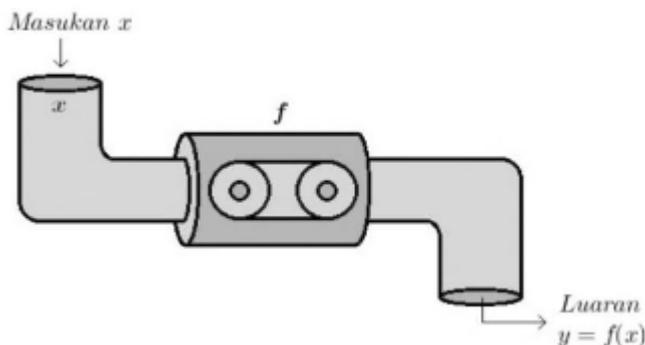
1. Suatu fungsi umumnya dituliskan dengan bentuk huruf tunggal :  $f, g, h, F, A$  dan seterusnya.
2. Notasi  $f(x)$  dibaca  $f$  dari  $x$  atau  $f$  pada  $x$ .



Gambar 3.2 Domain, Kodomain dan Range  
 Sumber :Buku Kalkulus Diferensial dan Integral

Himpunan A dinamakan domain (daerah asal, daerah definisi). Himpunan B dinamakan kodomain (daerah kawan). Himpunan peta-peta di B dinamakan range (daerah nilai, daerah hasil). Range fungsi  $f$ , dinamakan  $R_f$ . Suatu fungsi atau pemetaan dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, rumus, diagram panah, dan diagram Cartesius.

Fungsi juga sering diilustrasikan sebagai sebuah mesin dimana ada input dan output seperti gambar berikut :



Gambar 3.3 Ilustrasi fungsi sebagai mesin  
 Sumber: Buku Kalkulus Diferensial

---

Apabila kita memberikan masukan (input) pada mesin, maka mesin akan mengolah masukan ini sesuai dengan kerja mesin yang telah dirancang dan pada akhirnya kita mendapatkan sebuah luaran (output). Apabila masukan adalah  $x$  dan mesin adalah fungsi  $f$  (dengan rumus fungsi tertentu), maka luaran adalah nilai fungsi di titik  $x$ , yakni  $f(x)$ .

Berikut adalah beberapa metode yang digunakan untuk merepresentasikan suatu fungsi :

1. Menggunakan Tabel Nilai

Dibawah ini ditampilkan dua buah tabel yang menerangkan sebuah fungsi dan bukan fungsi.

**Fungsi**

x	0	1	2	3
y	2	4	6	8

**Bukan Fungsi**

x	0	1	1	2
y	2	4	6	8

$x$  : Daerah Asal

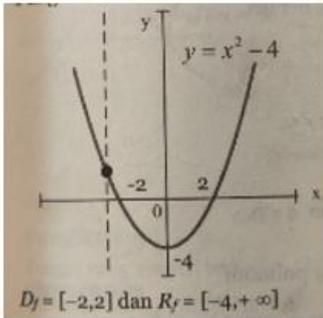
$y$  : Daerah Hasil

Ciri-ciri fungsi dari sebuah tabel nilai adalah :

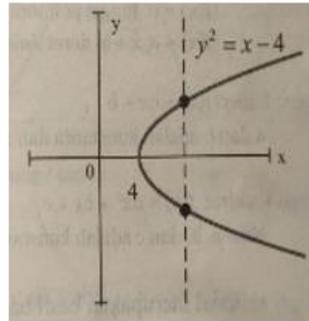
- $x$  dan  $y$  merupakan bilangan riil
- Data-data  $x$  merupakan bilangan tunggal.

2. Menggunakan Grafik

Di bawah ini ditampilkan dua buah grafik yang menerangkan sebuah fungsi dan bukan fungsi.



Gambar 4. Fungsi  
Sumber : Matematika Teknik



Gambar 5. Bukan Fungsi

Ciri-ciri fungsi dari suatu grafik adalah :

- a. Bila ditarik sebuah garis sejajar sumbu y, maka garis tersebut akan memotong grafik satu kali saja.
- b.  $D_f =$  Proyeksi kurva pada sumbu x (Daerah Asal)
- c.  $R_f =$  Proyeksi kurva pada sumbu Y (Daerah Hasil)

### 3. Menggunakan Persamaan Analitik

Contoh :

$$y = x^2 - 4$$

$$y = f(x)$$

Ciri-ciri fungsi dari suatu persamaan analitik adalah untuk setiap nilai x yang riil dalam Daerah Asal, hanya memiliki satu nilai riil di Daerah Hasil.

## Macam-macam Fungsi

### 1. Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah fungsi yang menggunakan operasi-operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan penarikan akar. Fungsi aljabar meliputi:

---

a. Fungsi Irasional

Fungsi irasional adalah fungsi yang variabel bebasnya terdapat di bawah tanda akar. Misalnya  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1} + 3$  dan sebagainya.

b. Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi yang variabel bebasnya berpangkat bilangan bulat. Fungsi rasional meliputi : fungsi polinom, fungsi kubik, fungsi kuadrat, fungsi linear, fungsi pangkat, dan fungsi pecahan.

1) Fungsi Polinom

Fungsi polinom (suku banyak) memiliki bentuk  $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ , dengan  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  adalah bilangan real,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 =$  suku tetap, dan  $n$  bilangan bulat positif. Fungsi polinom itu disebut fungsi polinom berderajat  $n$ . Misalnya fungsi polinom  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x - 5$ ,  $f(x) = x^7 - 2x^3 + 5x^2 - 6$ , dan sebagainya.

2) Fungsi Kubik

Fungsi kubik adalah fungsi yang berpangkat tiga. Misalnya  $f(x) = x^3$  adalah fungsi kubik yang paling sederhana.

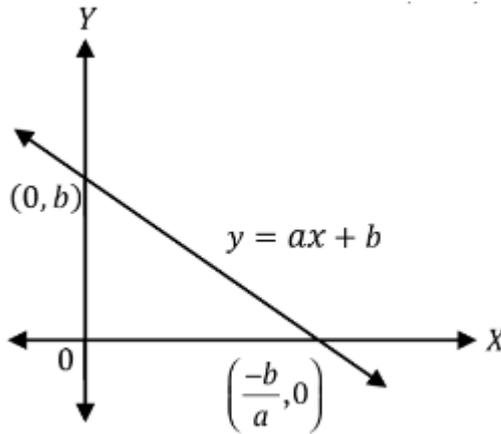
3) Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi yang berbentuk  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dengan  $a, b$ , dan  $c$  adalah konstanta dan  $a \neq 0$  dinamakan fungsi kuadrat. Grafik persamaan  $y = ax^2 + bx + c$  berbentuk parabola.

4) Fungsi Linier

Fungsi  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yang ditentukan oleh  $f(x) = ax + b$ , dengan  $a$  dan  $b$  konstanta disebut fungsi

linier. Kurva fungsi linier adalah garis  $y = ax + b$  yang selalu melalui titik  $(0, b)$  dan  $(\frac{-b}{a}, 0)$ .



Gambar 3.6 Kurva Fungsi Linier

Sumber : Kalkulus Diferensial dan Integral

5) Fungsi Pangkat

Fungsi pangkat dinyatakan dengan  $y = f(x) = x^n$ , dengan  $n$  adalah bilangan asli.

Jika,  $n = 2 \rightarrow$  maka grafiknya berbentuk parabola

$n = 3 \rightarrow$  maka grafiknya berbentuk parabola kubik

$n = 4 \rightarrow$  maka grafiknya berbentuk parabola bi kuadrat

Bentuk umum dari fungsi pangkat :

$$y = f(x) = x^n, y = f(x) = ax^n, y = ax^n + c$$

6) Fungsi Pecahan

Hasil bagi dari fungsi-fungsi polinom dinamakan fungsi rasional atau fungsi pecahan. Bentuk umum fungsi pecahan adalah :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

---

Fungsi pecahan yang dijelaskan disini adalah fungsi pecahan linier dan fungsi pecahan kuadrat.

a) Fungsi Pecahan Linier

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

b) Fungsi Pecahan Kuadrat

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \quad \text{dan} \quad y = f(x) \\ = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

## 2. Fungsi Transenden

Fungsi transenden adalah fungsi yang bukan merupakan fungsi aljabar. Yang termasuk fungsi transenden adalah :

a. Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen adalah fungsi variabel bebasnya menjadi pangkat dari suatu bilangan. Fungsi eksponen dinyatakan dalam bentuk umum  $y = f(x) = a^x$ , dengan  $a \neq 0$  dan  $a \in \mathbb{R}$ . Sebagai ilustrasi fungsi eksponen  $f(x) = 3^x$ ,  $g(x) = 15^x$ , dan sebagainya.

b. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dengan bilangan dasar  $a > 0$  dan  $a \neq 1$  adalah invers dari fungsi eksponen dengan bilangan dasar  $a$ . fungsi eksponen  $y = g(x) = a^x$ , inversnya adalah fungsi logaritma  $y = f(x) = a \log x$ .

c. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri antara lain meliputi fungsi-fungsi  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ , dan

---

sebagainya, dengan  $x$  menyatakan besar suatu sudut (radian atau derajat) dan  $y$  menyatakan nilai fungsi.

d. Fungsi Siklometri

Fungsi siklometri adalah invers dari fungsi trigonometri, seperti  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ , dan  $y = \arctan x$ , dan sebagainya.

$$\text{Catatan : } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ dapat ditulis } \frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

e. Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik antara lain :

$$y = \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dan,

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

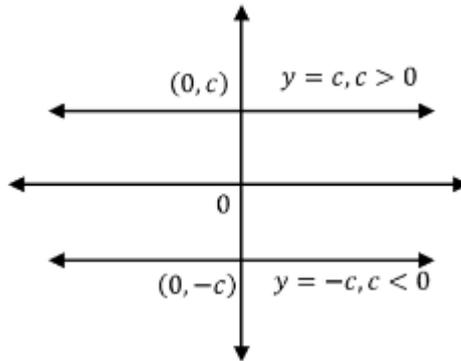
Dan sebagainya, dengan catatan  $e = 2,71828$

3. Fungsi Khusus

Fungsi khusus antara lain meliputi fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi modulus, dan fungsi dengan parameter.

a. Fungsi Konstan

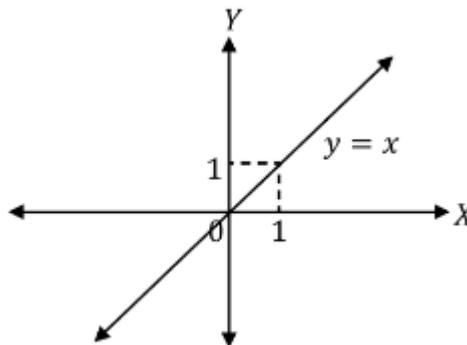
Fungsi  $f : x \rightarrow c$  atau  $f(x) = c$ . dengan  $c$  adalah konstanta disebut fungsi konstan. Fungsi konstan  $f$  memasangkan setiap bilangan real dengan konstanta  $c$ . kurva fungsi konstan berupa garis  $y = c$  yang sejajar dengan sumbu  $X$  dan melalui titik  $(0, c)$ .



Gambar 3.7 Kurva Fungsi Konstan  
 Sumber : Kalkulus Diferensial dan Integral

b. Fungsi Identitas

Fungsi  $I : A \rightarrow A$  yang ditentukan oleh  $I(x)$  disebut fungsi identitas pada  $A$ . Fungsi  $I$  memasangkan setiap elemen daerah asal dengan dirinya sendiri. Kurva fungsi identitas adalah garis  $y = x$  yang melalui titik pangkal  $O (0,0)$  seperti pada gambar berikut :



Gambar 8. Kurva Fungsi Identitas  
 Sumber: Kalkulus Diferensial dan Integral

---

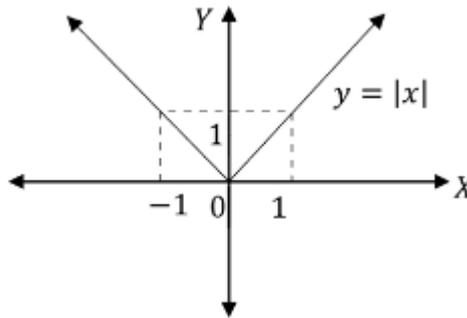
c. Fungsi Modulus

Fungsi  $f : x \rightarrow |x|$  atau  $f(x) = |x|$  yang ditentukan oleh :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Disebut fungsi modulus (mutlak).

Kurva fungsi modulus  $y = |x|$  diperlihatkan pada gambar berikut :



Gambar 9. Kurva Fungsi Modulus  
Sumber: Kalkulus Diferensial dan Integral

d. Fungsi Parameter

Fungsi dengan parameter adalah  $x = at + b$ ,  $y = 2t^2 + c$ , dengan  $t$  adalah parameter yang menetapkan fungsi itu.

4. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

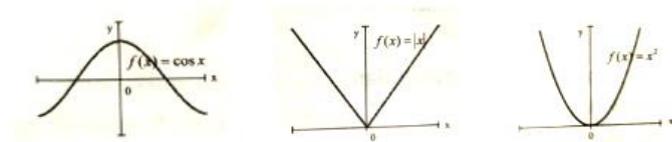
a. Fungsi Genap

Jika  $f(x) = f(-x)$ , maka grafik tersebut simetri terhadap sumbu Y. Fungsi yang demikian disebut fungsi genap.

---

Contoh :

$f(x) = x^2 - 2$ , sesuai dengan persyaratan fungsi genap yaitu  $f(x) = f(-x)$  maka dapat kita selesaikan  $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2$ , didapatkan hasil yang sama yaitu  $f(x) = f(-x)$ . Fungsi yang simetri terhadap sumbu y  $\rightarrow f(x) = f(-x)$  adalah  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = x^2$ .



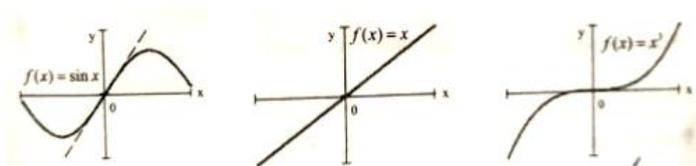
Gambar 10. Grafik Fungsi Genap  
Sumber : Matematika Teknik

b. Fungsi Ganjil

Fungsi  $f(-x) = -f(x)$ , maka grafik tersebut simetri terhadap titik asal atau titik pusat koordinat O. Fungsi demikian disebut fungsi ganjil.

Contoh :

$f(x) = x^3 - 2x$ , sesuai dengan persyaratan fungsi genap yaitu  $f(-x) = -f(x)$  maka dapat kita selesaikan  $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x$  dan  $-f(x) = -(x^3 - 2x) = -x^3 + 2x$ , didapatkan hasil yang sama yaitu  $f(-x) = -f(x)$ . fungsi yang simetri terhadap titik asal (titik  $(0,0)$ )  $\rightarrow f(-x) = -f(x)$  adalah  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^3$ .



Gambar 11. Grafik Fungsi Ganjil  
Sumber : Matematika Teknik

---

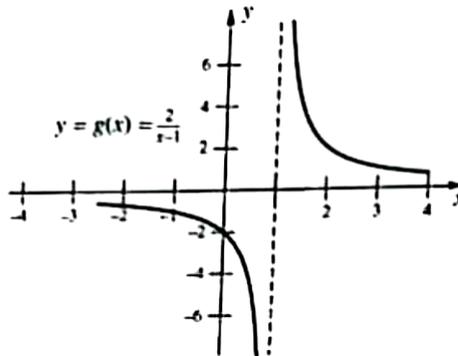
c. Bukan Fungsi Genap dan Bukan Fungsi Ganjil

Jika  $f(x) \neq f(-x)$  dan  $f(-x) \neq -f(x)$ , maka grafiknya tidak simetri terhadap sumbu Y atau titik asal. Fungsi yang demikian disebut bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

Contoh :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)}$$

Kita akan mengecek apakah fungsi di atas adalah fungsi genap atau fungsi ganjil. Untuk melihat ini, amati bahwa  $f(-x) = 2/(-x-1)$  tidak sama dengan  $-f(x) = -(2/(x-1))$  dan tidak sama juga dengan  $f(x)$ . Perhatikan bahwa grafiknya tidak simetri terhadap sumbu-y ataupun titik asal.



Gambar 3.12 Grafik Bukan Fungsi Genap ataupun Fungsi Ganjil

Sumber : Matematika Teknik

5. Sifat-sifat Fungsi

a. Fungsi Surjektif

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut *fungsi surjektif* atau *fungsi onto* atau *fungsi kepada* jika setiap elemen di B mempunyai pasangan di A atau  $R_f = B$ , atau

---

jika untuk setiap  $y \in B$  terdapat  $x \in A$  demikian sehingga  $f(x) = y$ .

b. Fungsi Into

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut *fungsi into* atau *fungsi ke dalam*, jika terdapat elemen  $B$  yang tidak mempunyai pasangan atau prapeta di  $A$ .

c. Fungsi Injektif

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu jika setiap elemen dari  $B$  mempunyai pasangan tepat satu elemen dari  $A$ . Dengan lain kata lain :

- 1) Fungsi  $f : A \rightarrow B$  dikatakan fungsi injektif jika untuk setiap  $x_1, x_2 \in A$  dan  $x_1 \neq x_2$ , maka  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- 2) Fungsi  $f : A \rightarrow B$  dikatakan fungsi injektif jika untuk  $x_1, x_2 \in A$  dan  $f(x_1) = f(x_2)$  maka  $x_1 = x_2$ .

d. Fungsi Bijektif

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi bijektif, jika  $f$  adalah fungsi injektif dan sekaligus surjektif. Oleh karena itu himpunan  $A$  dan himpunan  $B$  dikatakan berada dalam korespondensi satu-satu.

### **Pengoperasian Suatu Fungsi**

Fungsi bukanlah bilangan, jadi pengoperasian pada suatu fungsi sedikit berbeda dengan pengoperasian suatu bilangan. Jika  $f$  dan  $g$  adalah dua buah fungsi yang diketahui, maka jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi kedua fungsi itu, serta pangkat suatu fungsi dengan daerah asal  $D_f$  dan  $D_g$  adalah:

- 
1.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , dengan  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
  2.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ , dengan  $D_{f-g} = D_f - D_g$
  3.  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ , dengan  $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
  4.  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  dengan  $g(x) \neq 0$  dan  $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$
  5.  $f^n(x) = [f(x)]^n$

$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$  Contoh soal dan pembahasannya

1. Tentukan himpunan semua nilai x agar fungsi terdefinisi!

Pembahasan :

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$f(x) = \sqrt{1-x}$  dan  $g(x) = \sqrt{xy}$  terdefinisi jika  $(x^2 + 1) \neq 0$  dan  $x \in$  bilangan riil atau (D)

2. Pembahasan :

$D_f = (-\infty, 1]$  dan  $D_g = [0, \infty)$ , maka  $D_f \cap D_g = [0, 1]$

Rumus	Domain
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$	[0,1]
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$	[0,1]
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{x}) = \sqrt{x(1-x)} = \sqrt{x-x^2}$	[0,1]
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$	[0,1]

---

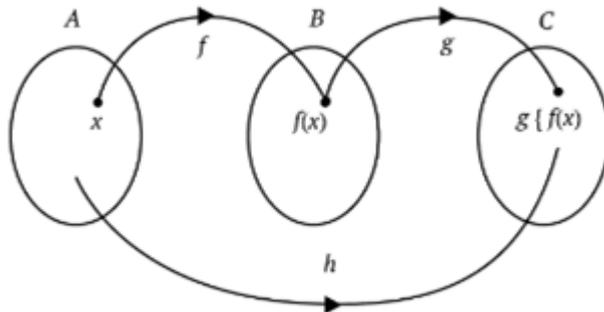
3. Pembahasan :

$D_f = [-1, \infty)$  dan  $D_g = [4, \infty)$ , maka  $D_f \cap D_g = [4, \infty)$

Rumus	Domain
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$	$[4, \infty)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$	$[4, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{(x+1)(x-4)}$	$[4, \infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$	$[4, \infty)$

### Komposisi Fungsi

1. Jika fungsi  $f : A \rightarrow B$  dan  $g : B \rightarrow C$ , maka fungsi  $h : A \rightarrow C$  disebut fungsi komposisi yang ditentukan oleh rumus  $h = g \circ f = g \circ f(x) = (g \circ f)(x)$ .
2. Sifat fungsi komposisi tidak kumulatif  $f \circ g \neq g \circ f$



Gambar 3.13. Komposisi Fungsi  
Sumber : *Kalkulus Diferensial dan Integral*

---

### Contoh soal dan pembahasannya

1. Diketahui  $f(x) = 2x + 5$  dan  $g(x) = \frac{x-1}{x+4}$ . Jika  $(f \circ g)(a) = 5$ . Hitung nilai  $a$ !

Pembahasan :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f \circ g(x) &= f\left(\frac{x-1}{x+4}\right) = 2\left(\frac{x-1}{x+4}\right) + 5 = \frac{2x-2+5(x+4)}{x+4} \\ &= \frac{7x+18}{x+4}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f \circ g(a) = 5 \rightarrow 5 = \frac{7a+18}{a+4}$$

$$5a + 20 = 7a + 18$$

$$2a = 2 \rightarrow a = 1$$

2. Diketahui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x + 3$  dan  $(f \circ g)(x) = 12x^2 + 32x + 26$ . Tentukan rumus  $f(x)$ !

Pembahasan :

$$\Leftrightarrow g(x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 12x^2 + 32x + 26$$

$$f(2x + 3) = 3(2x + 3)^2 - 2(2x + 3) + 5$$

Misal :  $(2x + 3) = a$ , maka

$$f(a) = 3a^2 - 2a + 5$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

3.  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  dan  $g(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$ , tentukan fungsi  $f\{g(x)\}$ !

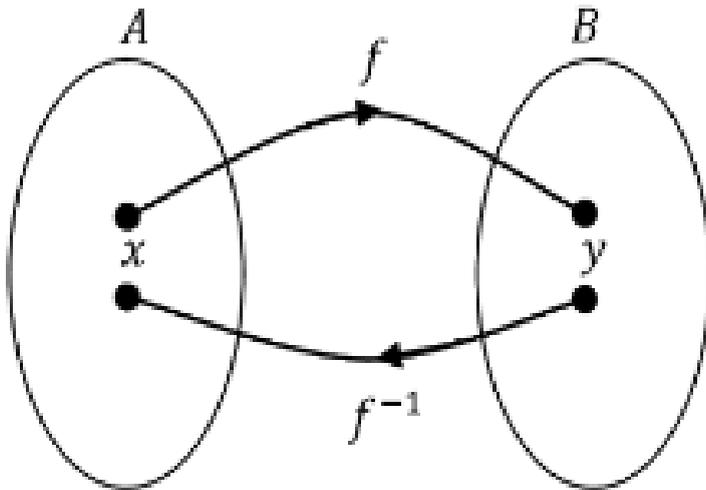
$$\Leftrightarrow f\{g(x)\} = f\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right) = \frac{\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)-1}{\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)+1}$$

Pembahasan :

$$= \frac{x^2 + 1 - (1 - x^2)}{x^2 + 1 + 1 - x^2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

---

## Fungsi Invers



Gambar 3.14. Fungsi Invers  
*Sumber : Kalkulus Diferensial dan Integral*

1. Suatu fungsi  $f : A \rightarrow B$  mempunyai fungsi invers  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , jika semua elemen himpunan A dan elemen himpunan B berkorespondensi satu-satu.
2. Notasi fungsi invers adalah :
3. Jika  $f(x) = y$ , maka  $f^{-1}(y) = x$  atau  $y^{-1} = f^{-1}(x)$
4. Sifat komposisi fungsi invers :  $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$

Beberapa rumus fungsi invers :

$$-f(x) = ax + b \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$-f(x) = \sqrt{ax + b} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x^2 - b)$$

$$-f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

$$-f(x) = ax^2 + bx + c$$

---

### Contoh soal dan pembahasannya

1. Jika ditentukan  $f(x) = \frac{4x+1}{x-4}$

dengan  $x \in \mathbb{R}$  dan  $x \neq 4$ . Tentukan fungsi invers  $f^{-1}(x)$   
Pembahasan :

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{4x+1}{x-4} = y$$

$$4x+1 = xy-4y$$

$$4x - xy = -4y - 1 \rightarrow \text{dikali } -1$$

$$xy - 4x = 4y+1$$

$$x = \frac{4y+1}{y-4}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{4y+1}{y-4}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-4}$$

2. Jika  $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$  dan  $g(x) = 2x + 4$ . Tentukan fungsi  $f^{-1}(x)$  !

Pembahasan :

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$$

$$f(2x+4) = 4x^2 + 8x - 3$$

$$f(2x+4) = (2x+4)^2 - 4(2x+4) - 3$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) = x^2 - 4x - 3$$

$$y = (x-2)^2 - 7$$

$$(y+7) = (x-2)^2$$

---

$$(x - 2) = \sqrt{y + 7}$$

$$x = 2 + \sqrt{y + 7}$$

↔ Jadi inversnya adalah  $2 + \sqrt{y + 7}$

3. Jika  $f(x) = 3^{x-1}$ . Hitunglah nilai  $f^{-1}(81)$  !

Pembahasan :

$$\leftrightarrow y = f(x) = 3^{x-1}$$

$$(x - 1) = {}^3\log y$$

$$x = {}^3\log y + 1$$

$$\leftrightarrow f^{-1}(x) = {}^3\log x + 1$$

$$f^{-1}(x) = {}^3\log 81 + 1$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

### Soal Latihan

1. Tentukan  $D_f$  dan  $R_f$  dari fungsi berikut !

a.  $y = \sqrt{1 - x^2}$

b.  $y = \tan x$

c.  $y = |x - 1|$

2. Jika diketahui  $f(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ , maka apakah  $f(x)$  termasuk dalam fungsi ganjil, genap, keduanya atau tidak kedua-duanya !

3. Tentukan syarat agar  $y = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}}$  bernilai riil !

4. Fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diketahui  $f(x) = 2x - 3$  dan  $g(x) = x^2 + 2x - 3$ . Hitunglah nilai dari  $(f \circ g)(2)$  !

- 
5. Fungsi  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ditentukan oleh  $g(x) = x^2 - 3x + 1$  dan fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sehingga  $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 6x - 1$ . Tentukanlah fungsi  $f(x)$  !
6. Diberikan fungsi  $f(x) = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2$ . Tentukan invers dari  $f(x)$  !

---

## Daftar Pustaka

- Hakim, A. R., Apriyanto, M. T. (2016). *Matematika Diskrit untuk Pendidikan Matematika Edisi Revisi*. Jakarta : Unindra Press.
- Palobo, M. (2020). *Kalkulus Diferensial Pendekatan Blended Learning*. Yogyakarta : Deepublish.
- Ratnadewi, Prijono, A., Andrianto, H., Pasaribu, N. T., Hasugian, M. J. (2016). *Matematika Teknik*. Bandung : Rekayasa Sains.
- Rifa'i, Mohammad. (2020). *Kalkulus Diferensial (Limit, Turunan, dan Aplikasi Turunan)*. Yogyakarta : Deepublish.
- Rosyadi, A. A. P. (2019). *Kalkulus Diferensial*. Malang : UMM Press.
- Sudaryono. Dr. (2017). *Kalkulus Diferensial dan Integral*. Jakarta : Kencana.
- Suryawan, H. P. (2016). *Kalkulus Diferensial*. Yogyakarta : Sanata Dharma University Press.

---

## Profil Penulis



### **Ul'fah Hernaeny**

Penulis lahir di Jakarta pada tahun 1984. Penulis adalah Dosen mata kuliah Kalkulus Diferensial, Kalkulus Integral, Matematika Keuangan, Matematika Ekonomi dan Statistik Lanjut di Universitas Indraprasta PGRI (UNINDRA) Jakarta. Penulis menyelesaikan Studi S1 di Prodi Pendidikan Matematika Universitas Indraprasta PGRI (UNINDRA) Jakarta pada tahun 2006. Tahun 2008, penulis berkesempatan melanjutkan studi S2 di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) di Universitas Indraprasta PGRI (UNINDRA) Jakarta yang diselesaikan pada tahun 2010. Melalui beasiswa kampus tahun 2019, saat ini penulis masih aktif sebagai mahasiswi sekolah pascasarjana S3 di Program Studi Manajemen Pendidikan Pakuan Bogor.

Penulis memiliki kepakaran dibidang Pendidikan Matematika. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti dibidang kepakarannya tersebut. Beberapa penelitian yang telah dilakukan didanai oleh internal perguruan tinggi dan juga Kemenristek DIKTI. Selain peneliti, penulis juga aktif sebagai Koordinator Rieviever Internal Khusus pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) di Universitas Indraprasta PGRI (UNINDRA) Jakarta. Peneliti juga aktif sebagai bendahara di Pusat Kajian Pembelajaran Matematika Universitas Indraprasta PGRI (UNINDRA) Jakarta.

Email Penulis: [ulfah141414@gmail.com](mailto:ulfah141414@gmail.com)

**Nurhayati**

Universitas Indraprasta

### **Defenisi Limit**

Perkataan limit sudah sering kita dengar dalam kehidupan sehari-hari, bahkan tak asing lagi. Misalnya, dengan perasaan cemas seorang anak akan mengatakan “Hampir nenek tua tersebut tertabrak mobil saat akan menyebrang jalan” atau “Atlet tersebut hampir saja mencapai garis finish”. Dari kedua pernyataan tersebut di atas kita akan membayangkan bahwa nenek tua tersebut “sedikit lagi” akan celaka, atau atlet tersebut “mendekati” garis finish.

Kata-kata “sedikit lagi”, “hampir”, “mendekati”, dan sebagainya dalam matematika dapat disamakan dengan “limit”. Untuk lebih jelasnya, mari kita perhatikan contoh berikut.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{3} = 0,333$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

$$\frac{1}{6} = 0,1666$$

$$\frac{1}{100} = 0,01....\text{dan seterusnya}$$

---

Dari contoh-contoh di atas jika kita perbesar terus menerus nilai penyebutnya, maka hasilnya akan mendekati nilai 0. Dalam matematika dapat ditulis  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$

Limit merupakan konsep dasar yang mempunyai peranan yang sangat penting didalam kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Dalam matematika, limit mempunyai arti nilai suatu fungsi jika didekati dari titik tertentu ditulis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . L didefinisikan sebagai jika x mendekati a tetapi berlainan dengan a, maka  $f(x)$  dekat ke L”

Teorema limit fungsi

1.  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$      dimana  $a \in R$  dan  $k =$  konstanta
2.  $\lim_{x \rightarrow a} k \times f(x) = k \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
8.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} n}$

Untuk menyelesaikan limit bentuk ini kita dapat menggunakan

1. **Cara langsung.** Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  maka substitusi langsung  $x \rightarrow a$  dibaca (x mendekati a) sebagai  $x = a$  kedam fungsi terkait.

Contoh:

---

Tentukan nilai dari limit berikut

1.  $\lim_{x \rightarrow -4} x^2 - 3x + 4$

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow -4} x^2 - 3x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} (-4)^2 - 3(-4) + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} 32 = 32$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+7}{2x-5} \right)$

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+7}{2x-5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2+7}{2(2)-5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -9 = -9$$

3.  $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{-3x + x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{-3(-4) + (-4)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{-3(-4) + (-4)^3} = \sqrt{-52}$$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , dimana  $f(a)$  merupakan bentuk tak tentu  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ , maka untuk penyelesaiannya dapat dilakukan dengan cara

a. Manipulasi aljabar

b. Pendugaan

c. Teknik dalil L'hospital (konsep Turunan)

---

Contoh . Hitunglah nilai limit dari fungsi berikut!

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

Jawab:

Jika kita substitusi langsung maka

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1^2 - 1}{1 - 1} \right) = \frac{0}{0}$$

Karena hasil dari limit diatas adalah  $\frac{0}{0}$  (bentuk tak tentu) maka kita akan gunakan cara lain:

### **Manipulasi Aljabar**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

### **Pendugaan**

Untuk teknik pendugaan ini, sesuai dengan definisi limit kita boleh ambil sembarang bilangan dari arah kanan atau arah kiri mendekati dua

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	?	3	4

Dengan melihat tabel diatas pada saat  $x = 1$  menghasilkan nilai yang tidak terdefinisi. Dengan menggunakan teknik pendugaan, kita akan menduga nilai diantara 1 dan 3 yaitu 2. Sehingga dapat disimpulkan bahwa

---

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2$$

### **Teknik dalil L'hospital (konsep Turunan)**

Untuk teknik dalil L'hospital pada kesempatan ini tidak akan dijelaskan, karena konsep dari dalil l'hospital ini harus menguasai turunan.

2.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

Jawab :

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{x-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{9}+3 = 6$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} \times \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x) - (2-x)}{x \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}$$

---


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x) - (2-x)}{x\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Cara pengerjaan untuk limit Limit fungsi aljabar yang berbentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$**

Rumus-rumus dasar limit

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$ , dimana  $a \in R$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a_n}{ax^m + ax^{m-1} + ax^{m-2} + \dots + a_m} \begin{cases} = \frac{a}{b} & \text{jika } n = m \\ = 0 & \text{jika } n < m \\ = \infty & \text{jika } n > m \end{cases}$

Untuk menyelesaikan limit betuk tersebut ada beberapa cara dalam menyelesaikannya dan tidak terlepas dari aturan dan rumus-rumus dalam limit

1. Mengaliakan dengan faktor sekawan

Contoh.

Tentukan nilai limit dari

**Membagi dengan pangkat tertinggi**

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}) \times \left( \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+3) - (x+2)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} \right)$$

---


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} \right) = \frac{0}{2} = 0$$

Teorema-teorema limit **untuk bilangan e**:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{b} \right)^x = \begin{cases} 1 & \text{jika } a = b \\ 0 & \text{jika } a < b \\ \infty & \text{jika } a > b \end{cases}$$

Contoh: Tentukan nilai limit dari

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{8x}$

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{8x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{16x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right)^{16} = e^{16}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$

Jawab

---

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{2}{2x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\left(\frac{2}{\sin^2 x}\right)\left(-\frac{\sin^2 x}{2x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 - \sin^2 x)^{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} \right)^{\frac{2\sin^2 x}{2x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 - \sin^2 x)^{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} \right)^{\left(-\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$e^{-1 \times 1} = \frac{1}{e}$$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{2+x}\right)^{2x}$

Jawab.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{2+x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2+3}{2+x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2+x} + \frac{3}{2+x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2+x}\right)^{\left(\frac{x+2}{3}\right)\left(\frac{3}{x+2}\right)(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{3}{2+x}\right)^{\left(\frac{x+2}{3}\right)} \right)^{\frac{6x}{x+2}} = e^6$$

---

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2^x}{2+3^x}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2^x}{2 + 3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2^x \left( 3 \left( \frac{1}{2^x} \right) + 1 \right)}{3^x \left( 2 \left( \frac{1}{3^x} \right) + 1 \right)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2^x}{3^x} \right) \frac{3 \left( \frac{1}{2^x} \right) + 1}{2 \left( \frac{1}{3^x} \right) + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^x \frac{3 \left( \frac{1}{2} \right)^x + 1}{2 \left( \frac{1}{3} \right)^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 0 \left( \frac{3(0) + 1}{2(0) + 1} \right) = 0$$

### Limit fungsi trigonometri

Rumus-rumus dasar limit trigonometri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

---

Contoh tentukan nilai limit dari

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{4x}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{3}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 3x}{3x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x}{\tan 7x}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x}{\tan 7x}$$

$$2 \times \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{7x}{\tan 7x} \times \frac{4}{7} \right)$$

$$\left( 2 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{7} \right) = \frac{8}{7}$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{\frac{4}{x} \left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(0)}{4} = 0$$

### Limit Sepihak

Definisi:

“Suatu fungsi dikatakan mempunyai limit pada  $x = a$ , jika dan hanya jika”

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{terdefinisi (ada)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{terdefinisi (ada)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Contoh. Periksalah apakah  $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$  mempunyai limit di  $x$  mendekati  $-3$

Jawab

Kita akan cek dari dua sisi

Limit kiri

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(x+2)}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} x + 2 = -1$$

Limit kanan

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)(x+2)}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} x + 2 = -1$$

---

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ maka } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = -1$$

Terdapat beberapa fungsi yang memungkinkan limit kiri tidak sama dengan limit kanan, yaitu:

1. Fungsi bersyarat / tangga
2. Fungsi mutlak
3. Fungsi bilangan bulat terbesar

Contoh:

Periksalah apakah  $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$  mempunyai limit dari  $x$  mendekati 1

Jawab

Limit kiri

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{2} = 1$$

Limit kanan

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{2} = 1$$

Karena  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

maka  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|}{x+1} = \text{tidak ada}$

---

## Kontinuitas

### Definisi kontinu disuatu titik

Misalkan fungsi  $f(x)$  terdefinisi disekitar  $a$ .  $f(x)$  dikatakan kontinu di  $a$  bila

1.  $f(a)$  = terdefinisi
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  = terdefinisi
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Jika salah satu dari ketiga syarat tersebut tidak terpenuhi, maka  $f(x)$  dikatakan kontinu di  $a$ . Suatu fungsi dikatakan diskontinu jika danya loncatan/gap pada grafik fungsi.

Terdapat 3 jenis diskontinu:

1. *tak hingga* di  $a$  jika limitnya (kiri dan kanan) tak hingga (tidak ada);
2. *loncat berhingga* di  $a$  jika limit kiri dan kanannya berhingga namun taksama;
3. *dapat dihapuskan/dihilangkan* di  $a$  jika nilai fungsi dan limitnya ada, tetapi tidak sama,

### sifat-sifat fungsi kontinu

1. Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  kontinu di  $a$ , maka:
  - $f(x) \pm g(x), f(x) \times g(x)$ , kontinu pula
  - $\frac{f(x)}{g(x)}$  juga dikatakan kontinu di  $a$  jika  $g(x) \neq 0$
  - $\sqrt[n]{f(x)}$  kontinu di  $c$ , jika  $f(c) > 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  dan  $f(x)$  kontinu di  $L$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L)$
3. Jika  $g(x)$  kontinu di  $a$  dan  $f(x)$  kontinu di  $a$  maka fungsi komposit  $f \circ g(x)$  kontinu di  $a$

- 
4.  $f(x)$  kontinu pada selang terbuka  $(a,b)$  jika  $f(x)$  kontinu di setiap titik  $(a,b)$ .  $f(x)$  kontinu pada selang tertutup  $[a,b]$  jika  $f(x)$  kontinu pada  $(a,b)$ , kontinu di kanan  $a$  dan kontinu di kiri  $b$ .

Contoh:

1. Tentukan apakah  $f(x) = 2x^3 - 6$  kontinu di titik  $x = 2$ ?

Jawab

$$\triangleright f(x) = 2x^3 - 6 \qquad \triangleright \lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 - 6$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 6 \qquad \lim_{x \rightarrow 2} 10 = 10$$
$$= 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2(2)^3 - 6$$

Karena  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  maka  $f(x)$  kontinu di  $x = 2$

2.  $g(t) = \frac{t^3-8}{t-2}$ , apakah kontinu di  $t = 2$  ?

Jawab

$g(t) = \frac{t^3-8}{t-2}$  tidak akan kontinu di  $t = 2$  karena  $t = 2$  menyebabkan penyebut menjadi 0

3. Tentukan nilai  $a$  dan  $b$  agar fungsi kontinu di semua  $x$

$$f(x) \begin{cases} x + 2 & \text{jika } x \leq 1 \\ ax + b & \text{jika } 1 < x < 2 \\ 3x & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$$

---

Jawab:

suatu fungsi dikatakan kontinu jika  $f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  
maka

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Untuk  $x = 1$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$a(1) + b = \lim_{x \rightarrow 1} x + 2$$

$$a + b = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + 2$$

$$a + b = 3 \dots (1)$$

Untuk  $x = 2$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$a(2) + b = \lim_{x \rightarrow 1} 3x$$

$$2a + b = \lim_{x \rightarrow 1} 3(2)$$

$$2a + b = 6 \dots (2)$$

$$a + b = 3$$

$$2a + b = 6$$

$$a = -3 \dots \text{substitusi kepersamaan 1}$$



$$a + b = 3$$

$$-3 + b = 3$$

$$b = 6$$

### Latihan Soal

1. Tentukan nilai limit dari

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 - 4x}{x^2 + 2x + 6}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x + 2} - \sqrt{x + 1}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x + 15}{6x^4 + x + 30}$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{3 + 5 + 7 + \dots + x}$

e.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x + 8x^2}}$

2. Tentukan nilai limit dari

---

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \tan \frac{2}{3}x}{5x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3} \sin \frac{3}{5}x}{7 \tan \frac{2}{3}x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2 \cos 2x}{x^2}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{6 \sin \frac{3}{2}x}{\tan 3x} \times \frac{2x \cotan x}{1-\sin^2 x} \right)$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{x^2} - \frac{3 \sin 4x}{x^2 \tan 2x} \right)$

3. Selidiki apakah fungsi berikut kontinu di  $x = 1$  dan  $x = 3$ , jika

$$f(x) \begin{cases} 4x^2 - 2 & \text{jika } x < 1 \\ x + 1 & \text{jika } 1 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{2x + 3} & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

4. Nyatakan fungsi berikut kontinu atau diskontinu, berikan penjelasannya

a.  $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

b.  $g(x) = \frac{t^3-8}{t-2}$

c.  $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{jika } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$

5. Tentukan kontinuitas fungsi  $f(x) \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{untuk } x \neq 3 \\ 25 & \text{untuk } x = 3 \end{cases}$

6. Tentukan Limit dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+5x-6}{x-5}$

---

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 4}{x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

7. Tentukan limit dari:

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 6}{4x^4 + 7x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - x^4 + 8x^2 - 1}{4x^5 + 8x^2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8^x - 7}{1 - 8^x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+6}{x-7} \right)^x$

e.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{x+2} \right)^2$

8. Buktikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^4 \cos \frac{2}{x} \right) = 0$

---

## Daftar Pustaka

- Ayres, F & Mendelson, E. (1990). *Schaum's outline of theory and problems of differential and integral calculus*. McGraw-Hill
- Baisuni, Hasyim H.M. Hasyim. (2011). *Kalkulus*. Jakarta: UIP
- Stewart, James. (2003). *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.
- Purcell, Edwin J. (1995). *Kalkulus dan Geometri analitis jilid 1 Edisi 5*. Jakarta: Erlangga.
- Soemoenar. *Kalkulus*. (2004). Jakarta: Universitas Trisakti
- Sumartojo, Noenik. (1992). *Kalkulus Dasar*. Jakarta: UIP

---

## Profil Penulis



### **Nurhayati**

lahir di Pandeglang tahun 1983. Memperoleh gelar S1 sarjana pendidikan dari program studi pendidikan matematika di universitas Indraprasta PGRI dan memperoleh gelar Megister pendidikan dari program studi pendidikan MIPA di universitas Indraprasta PGRI. Penulis adalah dosen tetap di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta di program studi pendidikan matematika sejak tahun 2009. Mata kuliah yang diampuh adalah Kalkulus diferensial, Kalkulus Integral, Kalkulus peubah banyak, metode penelitian, statistik deskriptif dan seminar matematika.

Email penulis: [nurhaypdg@gmail.com](mailto:nurhaypdg@gmail.com)

---

---

## KONTINUITAS FUNGSI

**Farah Indrawati**

Universitas Indraprasta PGRI

### Definisi Kontinuitas Fungsi

Kontinuitas fungsi adalah salah-satu konsep inti dari kalkulus dan analisis matematika yang membahas perubahan suatu fungsi secara kontinu (berkesinambungan) dengan variabel dan keluarannya, serta melibatkan konsep limit pada suatu titik tertentu. Variabel dan keluaran fungsi tersebut dapat berupa bilangan riil, dan atau bilangan kompleks.

### Syarat Kontinuitas Fungsi

Adapun suatu fungsi dikatakan kontinu, jika memenuhi tiga syarat sebagai berikut:

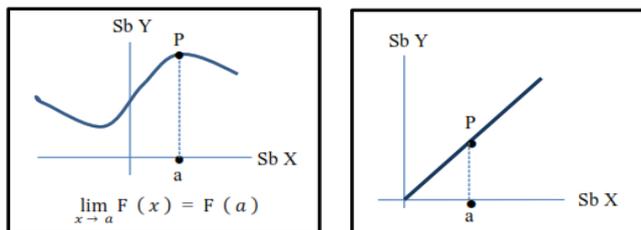
1.  $F(a)$  ada atau terdefinisi
2.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  ada atau terdefinisi
3.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$

$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) \rightarrow$  Fungsi kontinu di sisi kanan untuk  $x = a$

$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a) \rightarrow$  Fungsi kontinu di sisi kiri untuk  $x = a$

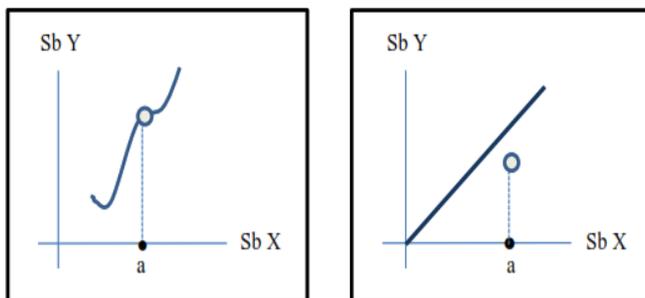
Jika salah-satu syarat tersebut diatas tidak terpenuhi, maka fungsi dikatakan sebagai fungsi diskontinu di  $x = a$ .

Fungsi yang kontinu dapat dilihat pada gambar berikut ini:

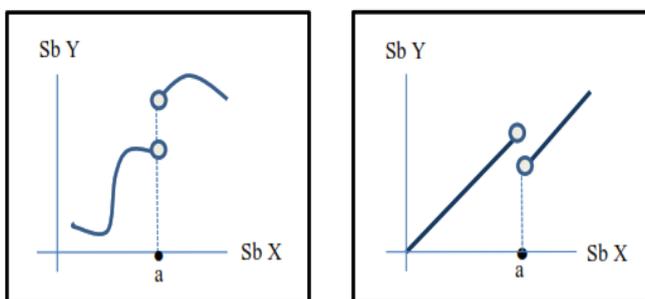


Gambar 5.1 Grafik Kontinu

sedangkan fungsi diskontinu yang terbagi dua, yaitu fungsi diskontinu dapat dihapus dan fungsi diskontinu tidak dapat dihapus (pasti), dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 5. 2. Grafik Diskontinu Dapat Dihapus



Gambar 5. 3. Grafik Diskontinu Tidak Dapat Dihapus (Pasti)

---

Fungsi diskontinu dapat dihapus terjadi jika:

1.  $F(a)$  tak terdefinisi
2.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  ada atau terdefinisi
3.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) \neq F(a)$

dan untuk fungsi diskontinu yang tidak dapat dihapus (pasti) atau yang disebut diskontinu essensial, pada umumnya mempunyai nilai  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  yang tak terdefinisi.

### **Sifat Dasar Kontinuitas Fungsi**

Sifat dasar suatu fungsi yang kontinu adalah:

1. Penjumlahan ( $F + G$ )
2. Pengurangan ( $F - G$ )
3. Perkalian ( $F \cdot G$ )
4. Perkalian Konstanta ( $k \cdot F$ )
5. Pembagian ( $\frac{F}{G}$ ,  $G(a) \neq 0$ )

### **Contoh Soal**

1. Selidiki kontinuitas dari fungsi berikut:
  - a.  $H(x) = |2x^2 + 9x - 5|$  pada semua bilangan riil
  - b.  $F(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  pada  $x = 3$
  - c.  $F(x) = x^2 - 5$  pada  $x = 5$
  - d.  $F(x) = |x - 3|$  pada  $x = 3$
  - e.  $F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ , pada  $x = 0$

---

Jawab:

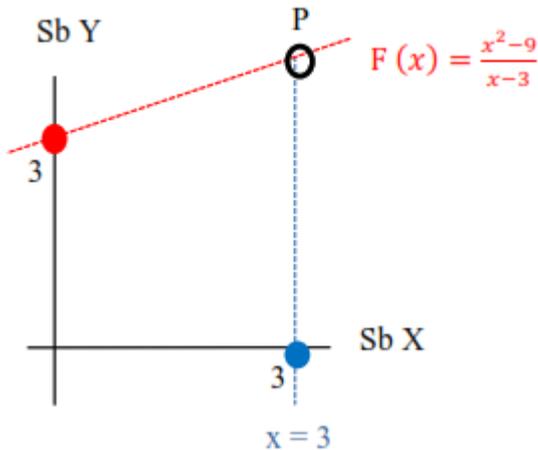
a. Misal:

$F(x) = |x|$  kontinu pada semua bilangan riil,

$G(x) = 2x^2 + 9x - 5$  kontinu pada semua bilangan riil,

maka fungsi komposisi  $H(x) = F(G(x)) = |2x^2 + 9x - 5|$  adalah kontinu pada semua bilangan riil

b.



$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = F(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} \right) = \left( \frac{(x)^2 - 9}{x - 3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} \right) = \left( \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = \left( \frac{9 - 9}{3 - 3} \right)$$

---

$$(3 + 3) = \left(\frac{0}{0}\right)$$

6  $\neq$  tak terdefinisi

$\Rightarrow$  Diskontinu pada  $x = 3$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  merupakan diskontinu dapat di hapus pada  $x = 3$ , dengan memberikan nilai  $F(3) = 6$  (disamakan dengan nilai limitnya)

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$  dapat kontinu pada  $x = 3$ , setelah lubang P tertutup di  $F(3) = 6$

c.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 5 = F(5)$$

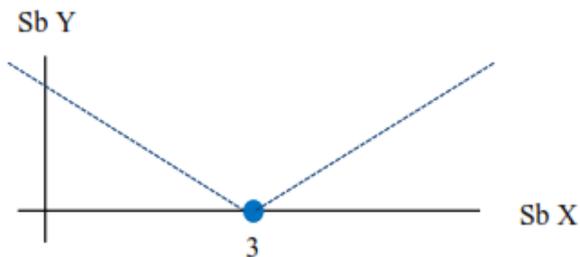
$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 5 = x^2 - 5$$

$$(5)^2 - 5 = (5)^2 - 5$$

$$20 = 20$$

$\Rightarrow F(x) = x^2 - 5$  kontinu pada  $x = 5$

d.  $Y = F(x) = |x - 3| \begin{cases} Y = x - 3, & x \geq 3 \\ Y = -(x - 3), & x < 3 \end{cases}$



---

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = F(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = (x - 3)$$

$$(3 - 3) = (3 - 3)$$

$$0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = F(3)$$

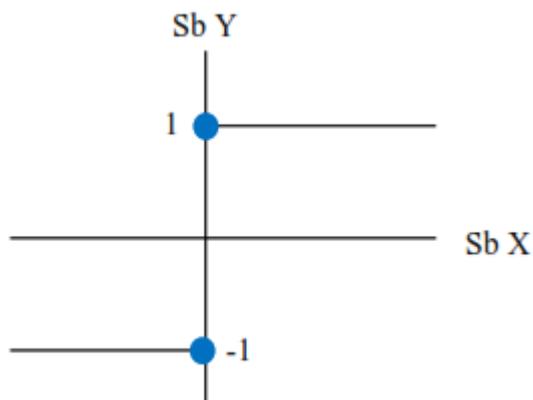
$$\lim_{x \rightarrow 3} -(x - 3) = -(x - 3)$$

$$-(3 - 3) = -(3 - 3)$$

$$0 = 0$$

$\Rightarrow F(x) = |x - 3|$  kontinu pada  $x = 3$

e.



---

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1 = F(0)$$

$$1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = F(0)$$

$$-1 = -1$$

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  diskontinu tak dapat dihapus pada  $x = 0$

2. Tentukan nilai a dan b dari fungsi

$$F(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases} \text{ pada selang } (-\infty, \infty)!$$

Jawab:

a.  $x = 1$

$$F(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = a(1) + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = a + b$$

---

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$$

$$1 = a + b \dots\dots\dots \text{persamaan 1}$$

b.  $x = 4$

$$F(4) = -2 \cdot (4)$$

$$F(4) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} -2 \cdot (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) = a(4) + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) = 4a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} F(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} F(x)$$

$$-8 = 4a + b \dots\dots\dots \text{persamaan 2}$$

c. Persamaan 1 dan Persamaan 2

$$a + b = 1$$

$$4a + b = -8$$

$$-3a = 9$$

$$\mathbf{a = -3}$$

$$a + b = 1$$

$$-3 + b = 1$$

$$b = 1 + 3$$

$$\mathbf{b = 4}$$

---

3. Tentukan titik kontinu dan diskontinu dari fungsi

$$F(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x + 2} !$$

Jawab:

$$F(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x + 2}$$

$$F(x) = \frac{(x - 3)(x - 5)}{(x - 1)(x - 2)}$$

Sifat dasar kontinuitas  $\rightarrow$  Pembagian  $\rightarrow \frac{F(x)}{G(x)}$ ,

$$G(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x + 2} \text{ kontinu di titik } x = 3 \text{ dan } x = 5$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x + 2} \text{ diskontinu di titik } x = 1 \text{ dan } x = 2$$

### Latihan Soal

1. Selidiki kontinuitas dari fungsi berikut:

a.  $F(x) = \sin x$  pada  $x = \pi$

b.  $F(x) = \frac{3|x|+x}{7|x|-5x}$  pada  $x = 0$

c.  $F(x) = -6x^2 + 7x + 3$  pada  $x = 1$  dan  $x = 5$

d.  $F(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$  pada  $x = -2$

e.  $F(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

- 
2. Tentukan nilai a dan b, sehingga  $F(x)$  kontinu pada semua nilai x dari fungsi berikut:

a. 
$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$$

b. 
$$F(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-3}, & x \leq -2 \\ 2x-b, & -2 < x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Tentukan nilai  $F(x) = \begin{cases} \frac{1-2a}{x}, & x \leq 2 \\ a^2 x^2, & x > 2 \end{cases}$  agar kontinu pada  $x = 2$ !

4. Tentukan  $F(0)$  agar  $F(x)$  kontinu pada  $x = 0$  dari fungsi:

$$F(x) = x \cot x!$$

5. Tentukan titik kontinu dan diskontinu dari fungsi berikut:

a. 
$$F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}{x^2 - 3x}$$

b. 
$$F(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 3x + 2}$$

c. 
$$F(x) = \frac{x+6}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

d. 
$$F(x) = \frac{x^2}{-3x+5}$$

---

6. Jika diketahui  $F(x) = \sqrt{x}$  dan  $G(x) = x^2 - x - 6$  merupakan fungsi yang kontinu pada semua bilangan riil, maka tunjukkan bahwa operasi berikut adalah kontinu:

a.  $F + G$

b.  $F - G$

c.  $F \cdot G$

d.  $\frac{G}{F}$

e.  $F \circ G$

---

## Daftar Pustaka

- Gazali, W., dan Soedadyatmodjo. (2007). Kalkulus. Graha Ilmu. Yogyakarta
- Pardede, J. (2010). Kalkulus I. Erlangga. Jakarta
- Ratnadewi, dkk. (2013). Matematika Teknik. Rekayasa Sains. Bandung.
- Soemoenar. (1982). Kalkulus I. Utama. Jakarta.
- Tju Ji Long. (2022). Limit dan Kekontinuan. Jagostat.com.  
<https://jagostat.com/kalkulus1/limit-dan-kekontinuan>
- Virgana. (2013). Kalkulus I Differensial. Pustaka Mandiri. Tangerang

---

## Profil Penulis



### Farah Indrawati

Penulis merupakan dosen tetap Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indraprasta PGRI. Penulis menyelesaikan Pendidikan S1 di Program Studi Mekanisasi Pertanian, Fakultas Teknologi Industri Pertanian, Institut Teknologi Indonesia pada tahun 1998. Selanjutnya Penulis menyelesaikan Pendidikan S2 di Program Pascasarjana Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indraprasta PGRI pada tahun 2013, dan menyelesaikan Pendidikan S3 Program Studi Manajemen Pendidikan, Sekolah Pascasarjana Universitas Pakuan pada tahun 2022. Penulis aktif dalam dunia pendidikan dengan mengawali karirnya sebagai dosen pada tahun 2010 sampai dengan saat ini. Penulis aktif menulis beberapa artikel dan buku mulai tahun 2015. Beberapa artikel terkait yang dituliskan oleh penulis, diantaranya adalah mengenai kemampuan numerik, kemampuan pemahaman konsep kalkulus dan trigonometri, kemampuan komunikasi matematika, sumber daya manusia yang kompetitif, model pembelajaran, komitmen terhadap profesi, serta beberapa artikel lainnya. Salah-satu buku yang dituliskan oleh penulis adalah buku *chapter* berjudul “Kalkulus Integral” yang dituliskan dan diterbitkan pada tahun 2021.

Email Penulis: [farah\\_indrawati@yahoo.com](mailto:farah_indrawati@yahoo.com)

---

---

## DEFINISI TURUNAN

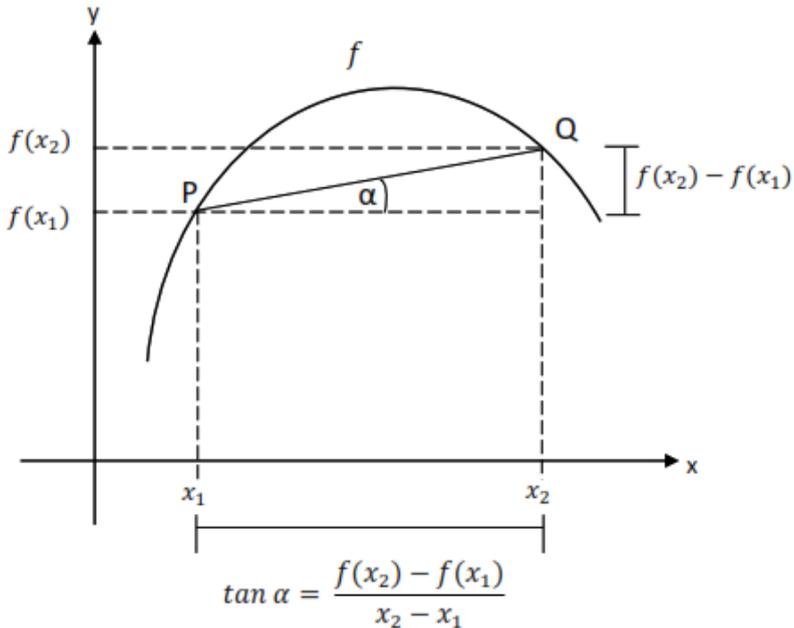
**Andry Fitrian**

Universitas Indraprasta PGRI

### **Pengertian**

Terdapat perbedaan antara turunan/derivatif dengan diferensial/turunan fungsi. Turunan atau disebut derivatif adalah perubahan nilai fungsi yang ditimbulkan dari perubahan kecil pada variabel bebas. Sedangkan diferensial atau turunan fungsi adalah fungsi lain dari suatu fungsi sebelumnya semisal fungsi  $f$  menjadi  $f'$  yang memiliki nilai tidak beraturan atau dapat dikatakan sebagai proses menemukan tingkat perubahan suatu fungsi. Manfaat dari perhitungan ini yaitu sebagai alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam ekonomi, geometri, mekanika dan lainnya.

Semisal  $f$  adalah fungsi yang kontinu di  $x = x_1$  dan titik  $P(x_1, f(x_1))$  dan  $Q(x_2, f(x_2))$  terletak pada grafik berikut:



Perhatikan koefisien arah garis  $PQ$ .

Jika kita ambil  $\Delta x = x_2 - x_1$  maka dapat kita tulis  $x_2 = x_1 + \Delta x$  sehingga

$$\tan \alpha = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Jika kita anggap  $P$  adalah titik yang tetap, lalu  $Q$  mendekati  $P$  sehingga  $Q$  cukup dekat dengan  $P$  atau  $\Delta x \rightarrow 0$  maka garis  $PQ$  menjadi dekat sekali dengan garis singgung di titik  $P$  pada  $f$ . Sehingga saat  $\Delta x \rightarrow 0$  maka  $PQ$  menjadi garis singgung di titik  $P$  pada  $f$  dengan kemiringan sebesar  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  jika limit tersebut ada.

---

## Notasi Turunan

Ada beberapa notasi untuk menyatakan turunan yang sampai saat ini masih dipakai:

### 1. Notasi Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, seorang filsuf dan matematikawan berkebangsaan Jerman menggunakan simbol  $y$  sebagai fungsi dari  $x$  seperti berikut:

$$y \text{ atau } f(x)$$

Dengan turunan pertama ditulis,

$$\frac{dy}{dx} \text{ atau } \frac{df}{dx} \text{ atau } \frac{d}{dx}f$$

Lalu turunan kedua ditulis,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ atau } \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

### 2. Notasi Lagrange

Joseph-Louis Lagrange, seorang matematikawan dan astronom kelahiran Italia menggunakan simbol prima yang mirip simbol petik seperti berikut:

$$f$$

Dengan turunan pertama ditulis,

$$f'$$

Lalu turunan kedua ditulis,

$$f'' \text{ atau } (f)'$$

### 3. Notasi Newton

Sir Isaac Newton, seorang fisikawan, matematikawan, dan ilmuwan berkebangsaan Inggris menggunakan notasi dot atau titik sebagai berikut:

$$y \text{ atau } f(t)$$

---

Dengan turunan pertama ditulis,

$$\dot{y}$$

Lalu turunan kedua ditulis,

$$\ddot{y}$$

Catatan: Notasi Newton saat ini hanya digunakan untuk turunan terhadap waktu dan panjang busur dan sulit digunakan untuk turunan tingkat tinggi ataupun fungsi multivariabel.

#### 4. Notasi Euler

Leonhard Euler, seorang matematikawan dan fisikawan berkebangsaan Swiss menggunakan operator diferensial yaitu:

$$D \text{ atau } D_x y \text{ atau } D_x f(x)$$

Dengan turunan pertama ditulis,

$$Df$$

Lalu turunan kedua ditulis,

$$D^2 f$$

Sehingga notasi yang sering digunakan yaitu:  $y, \frac{dy}{dx}, f(x)$  yang memiliki makna yang sama. Proses untuk mendapatkan fungsi turunan disebut penurunan fungsi.

### **Sifat Turunan Fungsi**

1. Jika  $y = k$  maka  $y' = 0$

Keterangan:  $k$  adalah konstanta, dapat juga ditulis  $c$   
Ini berlaku bagi semua konstanta

---

Contoh:

- $y = 2$  maka  $y' = 0$
- $y = 10$  maka  $y' = 0$
- $y = 4500$  maka  $y' = 0$

2. Jika  $y = x^n$  maka  $y' = n \cdot x^{n-1}$

Ini berlaku bagi semua bilangan  $n$

Contoh:

- $y = x^1$  atau biasa ditulis  $y = x$  dengan  $y' = 1 \cdot x^{1-1}$  maka  $y' = 1$
- $y = x^2$  dengan  $y' = 2 \cdot x^{2-1}$  maka  $y' = 2x$
- $y = 3x^3$  dengan  $y' = 9 \cdot x^{3-1}$  maka  $y' = 9x^2$

3. Jika  $y = U \pm V$  maka  $y' = U' \pm V'$

Contoh:

- $y = 4x^3 + 2x$  maka  $y' = 12x^2 + 2$
- $y = 5x^3 - 3x^2$  maka  $y' = 15x^2 - 6x$
- $y = -2x^{-1} - x$  maka  $y' = 2x^{-2} - 1$

4. Jika  $y = U \cdot V$  maka  $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$

Contoh:

- $y = (2x^2 + x)(2x + 1)$

Untuk  $U = (2x^2 + x)$  maka  $U' = 4x + 1$

Untuk  $V = (2x + 1)$  maka  $V' = 2$

Sehingga  $y' = (4x + 1)(2x + 1) + (2x^2 + x)(2)$

$$y' = (8x^2 + 4x + 2x + 1) + (4x^2 + 2x)$$

$$y' = 8x^2 + 4x^2 + 4x + 2x + 2x + 1$$

$$y' = 12x^2 + 8x + 1$$

- $y = (x - 1)^2(x + 2)$

---

Untuk  $U = (x - 1)^2$  maka  $U' = 2(x - 1) = 2x - 2$

Untuk  $V = (x + 2)$  maka  $V' = 1$

Sehingga  $y' = (2x - 2)(x + 2) + (x - 1)^2 \cdot 1$

$$y' = 2x^2 + 4x - 2x - 4 + x^2 - 2x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

- $y = x^3 \cdot \cos 2x$

Untuk  $U = x^3$  maka  $U' = 3x^2$

Untuk  $V = \cos 2x$  maka  $V' = -2 \sin 2x$

Sehingga  $y' = 3x^2 \cdot \cos 2x + x^3(-2 \sin 2x)$

$$y' = 3x^2 \cos 2x - 2x^3 \sin 2x$$

5. Jika  $y = \frac{U}{V}$  maka  $y' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$

Contoh:

- $y = \frac{(x^2+2)}{(x-2)}$

Untuk  $U = x^2 + 2$  maka  $U' = 2x$

Untuk  $V = x - 2$  maka  $V' = 1$

Sehingga  $y' = \frac{2x \cdot (x-2) - (x^2+2) \cdot 1}{(x-2)^2}$

$$y' = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 2}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2} \quad \text{atau} \quad y' = \frac{x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

- $y = \frac{2x-x^2}{2x^3-x}$

Untuk  $U = 2x - x^2$  maka  $U' = 2 - 2x$

Untuk  $V = 2x^3 - x$  maka  $V' = 6x^2 - 1$

Sehingga  $y' = \frac{(2-2x)(2x^3-x) - (2x-x^2)(6x^2-1)}{(2x^3-x)^2}$

---

- 
- $f(x) = \frac{2x-2}{2x+2}$  maka  $f'(0)$  ?

Untuk  $U = 2x - 2$  maka  $U' = 2$

Untuk  $V = 2x + 2$  maka  $V' = 2$

Sehingga  $f'(x) = \frac{2 \cdot (2x+2) - (2x-2) \cdot 2}{(2x+2)^2}$

$$f'(x) = \frac{4x+4-4x+4}{(2x+2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{4 \cdot 0 + 4 - 4 \cdot 0 + 4}{(2 \cdot 0 + 2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{8}{4} = 2$$

### **Gradien Garis Singgung**

Pada  $y', \frac{dy}{dx}$ , atau  $f'(x)$  menyatakan bahwa gradien garis singgung di seberang titik  $(x, f(x))$  pada kurva  $y = f(x)$ . Maka gradien garis singgung berada di titik  $P(x_1, f(x_1))$  yaitu

$$m = f'(x_1)$$

Sedangkan persamaan garis singgung di  $P(x_1, y_1)$  dengan gradien  $= m$  yaitu

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dimana  $y_1 = f(x_1)$

Garis normal adalah garis tegak lurus dari garis singgung di titik singgung.

Gradien garis normal di  $P(x_1, f(x_1))$  yaitu

$$m_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

Sehingga didapatkan persamaan garis normal yaitu

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

---

Contoh:

Tentukan gradien dan persamaan garis singgung pada kurva  $y = 2x^3 - x^2 + x + 5$  pada titik  $x = -1$ . Tentukan pula persamaan garis normalnya!

Jawab:

Untuk  $x = -1$  maka dari  $y = 2x^3 - x^2 + x + 5$  didapatkan  $y_1 = 1$

Sehingga titiknya di  $P(-1,1)$

dari  $y = 2x^3 - x^2 + x + 5$  didapatkan  $y' = 6x^2 - 2x + 1$

Untuk  $x = -1$  maka  $m = f'(-1) = 6(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 9$

Didapatkan gradien garis singgung di  $P(-1,1)$  adalah  $m = 9$  sehingga didapatkan persamaan garis singgungnya yaitu

$$y - 1 = 9(x - (-1))$$

$$y - 1 = 9(x + 1)$$

$$y = 9x + 9 + 1$$

$$y = 9x + 10$$

Sehingga persamaan garis normalnya yaitu

$$y - 1 = -\frac{1}{9}(x + 1)$$

$$\frac{y-1}{-1} = x + 1$$

$$-9y + 9 = x + 1$$

$$0 = x + 9y + 1 - 9$$

$$x + 9y - 8 = 0$$

---

## Menentukan Fungsi Sketsa Kurva

Untuk menentukan Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun:

- Jika  $f'(x) > 0$  maka fungsi  $f(x)$  atau  $y$  naik
- Jika  $f'(x) < 0$  maka fungsi  $f(x)$  atau  $y$  turun

Untuk menentukan Keadaan Stasioner Fungsi

Jika suatu fungsi  $y$  atau  $f(x)$  dalam keadaan stasioner pada saat  $f'(x) = 0$

Pada saat fungsi stasioner maka diperoleh titik-titik stasioner yang jenisnya sebagai berikut:

- Titik balik maksimum syaratnya  $f'(x) = 0$  dan  $f''(x) < 0$
- Titik balik minimum syaratnya  $f'(x) = 0$  dan  $f''(x) > 0$
- Titik belok horizontal syaratnya  $f'(x) = 0$  dan  $f''(x) = 0$  dan  $f''(x) \neq 0$
- Titik belok normal syaratnya  $f'(x) \neq 0$  dan  $f''(x) = 0$  dan

$$f''(x) \neq 0$$

Contoh 1

- Fungsi dari  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$  turun untuk seluruh  $x$  yang memenuhi adalah....

Jawaban

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$  sehingga syarat  $f(x)$  turun  $f'(x) < 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 < 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) < 0$$

$$3x - 9 < 0 \quad \text{atau} \quad x - 1 < 0$$

$$3x < 9 \quad \quad \quad x > 1$$

---

$$x < 3$$

Maka Interval  $f(x)$  turun yaitu  $\{1 < x < 3\}$

Contoh 2

- Gradien garis singgung  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + \frac{5}{4}$  menurun pada selang....

Jawaban

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + \frac{5}{4} \text{ maka } m = f'(x)$$

$$f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

Ingat, syarat  $f'(x)$  turun adalah  $f''(x) < 0$

$$f''(x) = 6x^2 - 18x + 12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{dibagi 6}$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x - 1)(x - 2) < 0$$

$$x - 1 < 0 \quad \text{atau} \quad x - 2 < 0$$

$$x > 1 \quad \quad \quad x < 2$$

Maka Interval  $f(x)$  turun yaitu  $\{1 < x < 2\}$



Contoh 3

- Jika fungsi  $f(x) = x^5 - 15x^3$  akan mencapai minimum di titik....

Jawaban

$$f(x) = x^5 - 15x^3$$

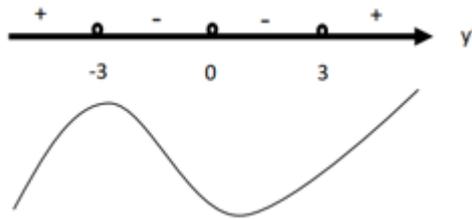
$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 - 9) = 0$$

$$5x^2(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = -3$$

---



Dari gambar di atas terlihat bahwa kurva maksimum terjadi pada saat  $x = -3$

$$f(-3) = x^5 - 15x^3$$

$$f(-3) = (-3)^5 - 15(-3)^3 = 162 \quad (\text{ini adalah nilai balik maksimum})$$

Jadi  $f(x)$  mencapai minimum di titik  $(3, -162)$

### Soal Terapan Turunan

1. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal  $v_0$  m/s. Jika tinggi peluru setelah  $t$  detik dinyatakan dengan fungsi  $h(t) = 50 + 40t - 4t^2$ . Berapakah tinggi maksimum yang dapat dicapai oleh peluru tersebut?

Jawaban:

$$h(t) = 50 + 40t - 4t^2$$

Tinggi maksimum akan tercapai saat  $h'(t) = 0$

$$\text{Maka } h'(t) = 40 - 8t = 0$$

$$-8t = -40$$

$$t = \frac{-40}{-8} = 5$$

Sehingga  $h(5) = 50 + 40t - 4t^2$

$$h(5) = 50 + 40 \cdot 5 - 4(5)^2 = 150 \text{ m}$$

- 
2. Bila posisi suatu benda bergerak sepanjang garis lurus setiap saat telah dinyatakan  $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ . Bagaimana benda tersebut bergerak?

Jawaban:

$v(t)$  adalah kecepatan setiap saat (*velocity*) terhadap waktu (*time*)

- Benda bergerak ke kiri jika  $v < 0$

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

$$3(t - 4)(t - 2) < 0$$

$$t < 4 \quad \text{atau} \quad t > 2$$

Jadi, benda bergerak ke kiri saat  $2 < t < 4$

- Benda bergerak ke kanan jika  $v > 0$

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

$$3(t - 4)(t - 2) > 0$$

$$t > 4 \quad \text{atau} \quad t < 2$$

Jadi, benda bergerak ke kanan saat  $t < 2$  atau  $t > 4$

- Benda berhenti bergerak jika  $v = 0$

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

$$3(t - 4)(t - 2) = 0$$

$$t = 4 \quad \text{atau} \quad t = 2$$

---

Jadi, benda bergerak ke kanan saat  $t = 2$   
atau  $t = 4$

3. Suatu pembangunan dapat dikerjakan selama  $p$  hari dengan biaya setiap harinya  $\left(2p + \frac{1200}{p} - 20\right)$  juta rupiah. Jika biaya minimum pembangunan tersebut yaitu  $Q$  juta rupiah maka berapakah biaya yang dikeluarkan?

Jawaban:

Biaya pembangunan  $p$  hari yaitu

$$Q(x) = p \cdot \left(2p + \frac{1200}{p} - 20\right)$$

$$= 2p^2 + 1200 - 20p$$

$$= 2p^2 - 20p + 1200$$

Biaya pembangunan minimum yaitu saat  $Q'(x) = 0$

$$Q'(x) = 4p - 20$$

$$4p - 20 = 0$$

$$4p = 20$$

$$p = 5$$

Biaya pembangunan minimum yaitu

$$Q(p) = 2p^2 - 20p + 1200$$

$$Q(5) = 2(5)^2 - 20(5) + 1200$$

$$= 50 - 100 + 1200$$

$$= 1.150 \text{ Juta Rupiah atau } 1 \text{ Milyar } 150 \text{ Juta Rupiah}$$

---

## Daftar Pustaka

- Andari, Ari. (2019). *Kalkulus Diferensial*. Malang: UB Press.
- Hw. Slamet. (2017). *Kalkulus Diferensial*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- Palobo, Markus. (2020). *Kalkulus Diferensial Pendekatan Blended Learning*. Yogyakarta: Deepublish.
- Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2003). *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Purcell, E.J., Varberg, D., & Rigdon, S.E. (2004). *Kalkulus Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Razali, M., Siregar, M.N., & Marpaung, F. (2010). *Kalkulus Diferensial*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- Sudaryono. (2015). *Kalkulus Diferensial dan Integral (Teori dan Aplikasi)*. Jakarta: Kencana.

---

## Profil Penulis



### **Andry Fitrian**

Lahir di Purworejo, pada 18 Mei 1989. Penulis berlatarbelakang pendidikan S1 di prodi Pendidikan Fisika Universitas Negeri Jakarta, lulus pada tahun 2013. Kemudian, penulis menyelesaikan studi S2 di prodi Pendidikan Fisika Universitas Negeri Jakarta, lulus pada tahun 2016.

Penulis memiliki pengalaman sebagai pengajar mulai dari mengajar SMP, MTS, SMA dan SMK. Kemudian penulis bekerja menjadi dosen di Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Indraprasta PGRI dari Tahun 2019 sampai saat ini dengan selalu aktif pada kegiatan Tridarma Perguruan Tinggi. Pernah mengikuti *book chapter* / bunga rampai pada BAB Penilaian Berbasis Kelas untuk Buku Evaluasi Pembelajaran Dalam Bidang Pendidikan dan mengikuti *book chapter* / bunga rampai pada BAB Konveksi Paksa untuk Buku Perpindahan Kalor.  
Email Penulis: andryakira@gmail.com

---

---

## TEOREMA TURUNAN FUNGSI ALJABAR

**Rofinda Taubah**  
SMP N 1 Wedarijaksa

### Definisi

Turunan fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca " $f$  aksen") yang nilainya pada sembarang bilangan  $c$  adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada. Jika limit ini memang ada,  $f$  terdeferensialkan di  $c$ . Pecarian turunan disebut pendiferensialan, bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus differensial. (2001, Varberg, D. & Purcell, E.J)

Fungsi-fungsi kalkulus dasar terdeferensialisasikan, kecuali mungkin pada titik terisolasi, pada selang definisinya. Jika suatu fungsi terdeferensialisasi, fungsi tersebut harus kontinu. Proses pencarian turunan suatu fungsi disebut diferensiasi. (2002, George J. Hademenos).

Contoh soal:

Andaikan  $f(x) = 21x - 8$ . Carilah  $f'(5)$ .

Penyelesaian:

$$f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

---

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[21(5+h) - 8] - [21(5) - 8]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{21(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 21 = 21 \end{aligned}$$

### **Teorema Turunan Fungsi Aljabar**

Setelah mengetahui definisi dari turunan, maka dapat ditemukan turunan fungsi aljabar dengan menggunakan definisi fungsi turunan dan atau cara-cara penurunan fungsi.

### **Teorema Fungsi Konstanta**

Jika  $f(x) = C$  dengan  $C$  suatu konstanta maka untuk sembarang  $x$ ,  $f'(x) = 0$ ,

yaitu

$$\frac{dy}{dx}(C) = 0$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Contoh soal:

Tentukan  $f'(x)$  dari fungsi  $f(x) = 17$

Penyelesaian:

$$f(x) = 17$$

$$f'(x) = 0$$

### **Teorema Fungsi Identitas**

Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$ ,

yaitu

---

---

$$\frac{dy}{dx}(x) = 1$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1) = 1$$

Contoh Soal:

Tentukan  $f'(x)$  dari fungsi  $f(x) = x$

Penyelesaian:

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

### **Teorema Pangkat**

Jika  $f(x) = x^n$  dengan  $n$  bilangan bulat positif, maka

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

yaitu

$$\frac{dy}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x h^{n-1} + C_n x^n) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \{C_1 x^{n-1} + h(C_2 x^{n-2} + \dots + C_n h^{n-2})\}$$

$$= C_1 x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

**Ingat!**

$$C_k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

---

(2010, Hw dan Khotimah)

Contoh Soal:

Tentukan  $f'(x)$  dari fungsi  $f(x) = x^8$

Penyelesaian:

$$f(x) = x^8$$

$$f'(x) = 8x^{8-1}$$

$$f'(x) = 8x^7$$

### **Teorema Kelipatan Konstanta**

Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ , yaitu

$$\frac{dy}{dx} [k \cdot f(x)] = k \cdot \frac{dy}{dx} f(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= k \cdot f'(x) \end{aligned}$$

---

Contoh Soal:

Tentukan  $f'(x)$  dari fungsi  $f(x) = 3x^5$

Penyelesaian:

$$f(x) = 3x^5$$

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^{5-1}$$

$$f'(x) = 15x^4$$

### **Teorema Jumlah**

Jika  $f$  dan  $g$  suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Yaitu

$$\frac{dy}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{dy}{dx} f(x) + \frac{dy}{dx} g(x)$$

Dengan kata-kata, ini mengatakan bahwa turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan. (2001, Varberg dan Purcell)

Bukti :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Contoh Soal:

Tentukan  $y'$  dari fungsi  $f(x) = 5x^6 + x^4$

Penyelesaian:

$$f(x) = 5x^6 + x^4$$

---

$$y = 5x^6 + x^4$$

$$y' = 5.6 x^{6-1} + 4x^{4-1}$$

$$y' = 30 x^5 + 4x^3$$

### **Teorema Selisih**

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

yakni,

$$\frac{dy}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{dy}{dx} f(x) - \frac{dy}{dx} g(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} [f(x) - g(x)] &= \frac{dy}{dx} [f(x) + (-1)g(x)] \\ &= \frac{dy}{dx} f(x) + \frac{dy}{dx} [(-1)g(x)] \\ &= \frac{dy}{dx} f(x) + (-1) \frac{dy}{dx} g(x) \\ &= \frac{dy}{dx} f(x) - \frac{dy}{dx} g(x) \end{aligned}$$

Contoh soal:

Cari turunan dari fungsi aljabar  $10x^7 - 3x^2$ .

Penyelesaian:

$$y = 10x^7 - 3x^2$$

$$y' = 10.7 x^{7-1} - 3.2 x^{2-1}$$

$$y' = 70 x^6 - 6x$$

---

### **Teorema Hasil Kali**

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

yakni,

$$\frac{dy}{dx} [f(x)g(x)] = f(x) \frac{dy}{dx} g(x) + g(x) \frac{dy}{dx} f(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\quad + g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

Turunan dari suatu hasilkali fungsi tidak sama dengan hasilkali dari turunan fungsi-fungsi. Turunan hasilkali dua fungsi adalah fungsi pertama dikalikan turunan fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turunan fungsi yang pertama. (2001, Varberg dan Purcell).

Contoh Soal:

Carilah turunan dari fungsi  $y = (4x^3 - 2x)(x^2 - 6x + 9)$

---

Penyelesaian:

$$y' = (4x^3 - 2x)(2x - 6) + (x^2 - 6x + 9)(12x^2 - 2)$$

$$y' = 8x^4 - 24x^3 - 4x^2 + 12x + 12x^4 - 2x^2 - 72x^3 + 12x + 108x^2 - 19$$

$$y' = 20x^4 - 96x^3 + 102x^2 + 24x - 19$$

### **Teorema Hasil Bagi**

Andaikan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan  $g(x) \neq 0$ , maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

yaitu

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\frac{dy}{dx}f(x) - f(x)\frac{dy}{dx}g(x)}{g^2(x)}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\ &= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] \cdot \frac{1}{g(x)g(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]}{g^2(x)}$$

Turunan suatu hasilbagi adalah sama dengan penyebut kali turunan pembilang dikurangi pembilang kali turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut. (2001, Varberg dan Purcell).

Contoh Soal:

Cari turunan dari  $y = \frac{3-2x}{3+2x}$

Penyelesaian:

$$y' = \frac{(3 + 2x) \frac{d}{dx} (3 - 2x) - (3 - 2x) \frac{d}{dx} (3 + 2x)}{(3 + 2x)^2}$$

$$y' = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2}$$

$$y' = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

(2002, George J. Hademenos)

**Kesimpulan teorema turunan fungsi aljabar:**

1.  $\frac{d}{dx} (C) = 0$  , berlaku untuk semua konstanta C.
2.  $\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$  , berlaku untuk sembarang bilangan n.
3.  $\frac{d}{dx} (Cx^n) = C.nx^{n-1}$  , C konstanta.
4.  $y = U + V \rightarrow y' = U' + V'$
5.  $y = U - V \rightarrow y' = U' - V'$
6.  $y = U.V \rightarrow y' = U.V' + V.U' ; y' = \frac{dy}{dx} ; U' = \frac{dU}{dx}$
7.  $y = \frac{U}{V} \rightarrow y' = \frac{V.U' - U.V'}{V^2}$

---

### Soal Dan Pembahasan

1. Cari  $f'(x)$  jika  $y = x^{10} + 7x^5 - 3x^{-2}$

Penyelesaian:

$$y' = 10x^9 + 35x^4 + 6x^{-3}$$

2. Carilah turunan dari  $y = (5x^3 + x^2)(x^4 - 2x)$

Penyelesaian:

$$y' = (5x^3 + x^2) \frac{d}{dx}(x^4 - 2x) + (x^4 - 2x) \frac{d}{dx}(5x^3 + x^2)$$

$$y' = (5x^3 + x^2)(4x^3 - 2) + (x^4 - 2x)(15x^2 + 2x)$$

$$y' = (20x^6 - 10x^3 + 4x^5 - 2x^2) + (15x^6 + 2x^5 - 30x^3 - 4x^2)$$

$$y' = 35x^6 + 6x^5 - 40x^3 - 6x^2$$

3. Tentukan  $y'$  jika

$$y = \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2}$$

Penyelesaian:

$$y = \frac{2x^2 + 3x}{3x^3}$$

$$y' = \frac{(3x^3) \frac{d}{dx}(2x^2 + 3x) - (2x^2 + 3x) \frac{d}{dx}(3x^3)}{(3x^3)^2}$$

$$y' = \frac{(3x^3)(4x + 3) - (2x^2 + 3x)(9x^2)}{9x^6}$$

$$y' = \frac{(12x^4 + 9x^3) - (18x^4 + 27x^3)}{9x^6}$$

$$y' = \frac{-6x^4 - 18x^3}{9x^6}$$

---

4. Cari turunan jika

$$y = \frac{8}{3x^5 + 2} + \frac{2}{x^2}$$

Penyelesaian:

$$y' = \frac{(3x^5 + 2) \frac{d}{dx}(8) - (8) \frac{d}{dx}(3x^5 + 2)}{(3x^5 + 2)^2}$$

$$+ \frac{x^2 \frac{d}{dx}(2) - (2) \frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$y' = \frac{(3x^5 + 2)(0) - (8)(15x^4)}{(3x^5 + 2)^2} + \frac{x^2(0) - (2)(2x)}{x^4}$$

$$y' = \frac{-120x^4}{(3x^5 + 2)^2} - \frac{4x}{x^4}$$

5. Tentukan  $y'$  dari fungsi aljabar

$$y = \left(3\sqrt{x} - \frac{4}{2x\sqrt{x}}\right)^2$$

Penyelesaian:

$$y = 9x - 12x^{-1} + 2x^{-3}$$

$$y' = 9 + 12x^{-2} - 6x^{-4}$$

---

## Daftar Pustaka

- Varberg, D. & Purcell, E.J. (2001). *Kalkulus Jilid Satu Edisi ke Tujuh*. Batam: Interaksara.
- Hademenos, George J. (2002). *Kalkulus Schaum's Easy Outlines*. Jakarta: Erlangga.
- Hw, Slamet & Khotimah, Rita P. (2010). *Kalkulus 1 Edisi Kedua*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.

## Profil Penulis

### Rofinda Taubah



Penulis tertarik terhadap ilmu matematika dimulai pada tahun 2004 silam, saat masuk bangku SMP. Pendidikan penulis dimulai pada bangku SD dan belajar SDN 04 Trangkil. Kemudian dilanjutkan sekolah SMP Negeri 1 Wedarijaksa. Semenjak ketertarikan ilmu matematika saat itu. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke SMA Negeri 2 Pati dengan memilih Jurusan IPA dan berhasil lulus pada tahun 2010. Penulis kemudian melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi dan berhasil menyelesaikan studi S1 di prodi PENDIDIKAN MATEMATIKA UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SURAKARTA pada tahun 2014. Dua tahun kemudian, menyelesaikan studi S2 di prodi MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG.

Penulis sekarang aktif bekerja di SMP Negeri 1 Wedarijaksa sebagai guru mapel matematika. Dan untuk mewujudkan karir sebagai guru, penulis pun aktif di berbagai Lembaga bimbil untuk memajukan Pendidikan terutama di bidang matematika. Selain sebagai guru, penulis juga aktif menulis buku dengan harapan dapat memberikan kontribusi positif bagi bangsa dan negara yang sangat tercinta ini.

Email Penulis: rofindataubah@gmail.com

# NILAI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI, EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

**I Putu Tedy Indrayana**

Program Studi Fisika, FMIPA Universitas Udayana

## **Pendahuluan**

Pada Bab 6 telah dibahas secara detail terkait turunan fungsi, yaitu mulai dari definisi dan aturan-aturan dasar turunan fungsi yang disertai dengan contoh-contoh soal dan penyelesaiannya. Fungsi seperti yang kita ketahui memiliki banyak ragam bentuk, seperti fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi trigonometri, fungsi eksponen, serta fungsi logaritma. Masing-masing fungsi tersebut memiliki karakteristik tersendiri. Oleh karena itu, turunan dari masing-masing fungsi tersebut juga memiliki aturan-aturan yang khas. Fungsi trigonometri beserta turunannya memiliki berbagai aplikasi penting dalam penyelesaian kasus-kasus fisika mulai dari fisika klasik yang berkaitan dengan gerak melingkar, gerak harmonik, dan gelombang, hingga fisika modern yang berkaitan dengan fungsi gelombang elektron.

Disisi lain, fungsi eksponen dan logaritma juga memiliki berbagai aplikasi penting dalam penyelesaian kasus-kasus fisika berkaitan dengan peluruhan inti unsur-unsur radioaktif maupun dalam bidang biologi yang

---

berkaitan dengan laju perkembangbiakan bakteri, serta bidang akuntansi seperti penjualan. Sementara itu, fungsi logaritma memiliki berbagai aplikasi dalam bidang biologi yaitu menghitung fungsi regangan dari otot-otot manusia akibat beban. Dalam bidang biologi, fungsi logaritma juga diaplikasikan untuk menghitung laju penyelaman diatom (alga) ke bawah permukaan samudra.

Selain fungsi, turunan fungsi trigonometri, eksponensial, maupun logaritma juga sangat penting untuk berbagai aplikasi tersebut. Oleh karena itu, bab ini menguraikan secara detail tentang turunan fungsi tersebut disertai contoh soal dan penyelesaian, serta contoh aplikasinya dalam penyelesaian kasus dalam kehidupan sehari-hari. Dalam beberapa kondisi, penyelesaian operasi turunan dari fungsi-fungsi tersebut memerlukan teknik turunan berantai. Oleh karena itu, pembaca sudah diasumsikan menguasai teknik turunan berantai (*chain rule technique*).

### **Turunan Fungsi Trigonometri**

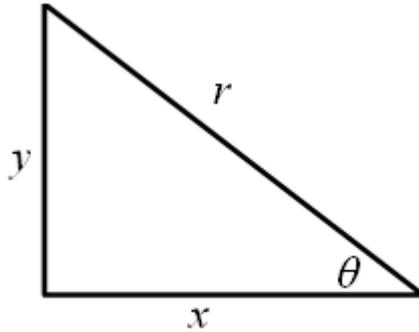
Fungsi trigonometri secara umum dikenal sebagai fungsi sudut. Secara matematis, fungsi trigonometri dapat dituliskan sebagai berikut,

$$f = f(\theta) \dots\dots\dots 8.1)$$

dimana  $f(\theta)$  bisa berupa:

- $f(\theta) = \sin \theta$
- $f(\theta) = \cos \theta$
- $f(\theta) = \tan \theta$
- $f(\theta) = \csc \theta$
- $f(\theta) = \sec \theta$
- $f(\theta) = \cot \theta$

Keenam persamaan fungsi tersebut merupakan fungsi-fungsi dasar trigonometri yang secara geometri menyatakan hubungan antara sisi-sisi segitiga siku-siku, seperti ilustrasi pada Gambar 8.1,



Gambar 8.1. Segitiga siku-siku.

Berdasarkan Gambar 8.1, definisi setiap fungsi dasar trigonometri tersebut dapat dituliskan sebagai berikut,

- $f(\theta) = \sin \theta = \frac{y}{r}$
- $f(\theta) = \csc \theta = \frac{r}{y}$
- $f(\theta) = \cos \theta = \frac{x}{r}$
- $f(\theta) = \sec \theta = \frac{r}{x}$
- $f(\theta) = \tan \theta = \frac{y}{x}$
- $f(\theta) = \cot \theta = \frac{x}{y}$

Apabila turunan fungsi  $f(\theta)$  didefinisikan sebagai berikut,

$$f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} f(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta} \dots\dots\dots 8.2)$$

maka bentuk turunan fungsi-fungsi dasar trigonometri tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut.

**Turunan fungsi  $f(\theta) = \sin \theta$**

Pada persamaan 8.2 terdapat suku  $f(\theta + \Delta\theta)$ , maka untuk fungsi  $f(\theta) = \sin \theta$  bentuk  $f(\theta + \Delta\theta)$  menjadi  $f(\theta + \Delta\theta) = \sin(\theta + \Delta\theta)$ , dimana

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin \theta \cos \Delta\theta + \cos \theta \sin \Delta\theta \dots\dots\dots 8.3)$$

Oleh karena itu, turunan fungsi  $f(\theta) = \sin \theta$  menjadi,

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \cos \Delta\theta + \cos \theta \sin \Delta\theta - \sin \theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta (\cos \Delta\theta - 1) + \cos \theta \sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \sin \theta \cdot \frac{(\cos \Delta\theta - 1)}{\Delta\theta} \right) + \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \cos \theta \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \right)$$

$$f'(\theta) = \sin \theta \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \Delta\theta - 1}{\Delta\theta} \right) + \cos \theta \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \right)$$

$$f'(\theta) = \sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot 1$$

$$f'(\theta) = \cos \theta$$

Dengan demikian,

$$f(\theta) = \sin \theta \Rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \dots\dots\dots 8.4$$

**Contoh:**

Turunkan persamaan fungsi-fungsi berikut:

1.  $f(\theta) = 2\theta^2 + 2 \sin \theta$
2.  $f(\theta) = -2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta + 7$

---

**Solusi:**

1.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (2\theta^2 + 2 \sin \theta) = 4\theta + 2 \cos \theta$

2.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (-2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta + 7) = -4 \sin \theta \cos \theta + 5 \cos \theta$

**Turunan fungsi**  $f(\theta) = \cos \theta$

Apabila  $f(\theta) = \cos \theta$  maka  $f(\theta + \Delta\theta) = \cos(\theta + \Delta\theta)$ , dimana

$$\cos(\theta + \Delta\theta) = \cos \theta \cos \Delta\theta - \sin \theta \sin \Delta\theta \dots\dots\dots 8.5)$$

Oleh karena itu, turunan fungsi  $f(\theta) = \cos \theta$  menjadi,

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta + \Delta\theta) - \cos \theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \cos \Delta\theta - \sin \theta \sin \Delta\theta - \cos \theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta (\cos \Delta\theta - 1) - \sin \theta \sin \Delta\theta}{\Delta\theta}$$

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \cos \theta \cdot \frac{(\cos \Delta\theta - 1)}{\Delta\theta} \right) - \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \sin \theta \cdot \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \right)$$

$$f'(\theta) = \cos \theta \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \Delta\theta - 1}{\Delta\theta} \right) - \sin \theta \cdot \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} \right)$$

$$f'(\theta) = \cos \theta \cdot 0 - \sin \theta \cdot 1$$

$$f'(\theta) = -\sin \theta$$

Dengan demikian,

$$f(\theta) = \cos \theta \Rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta \dots\dots\dots 8.6)$$

**Contoh:**

Turunkan persamaan fungsi-fungsi berikut:

1.  $f(\theta) = 2 \cos \theta - 2\theta^2$
2.  $f(\theta) = -2 \cos(\theta^2 + 1) + \cos 2\theta + 7\theta$

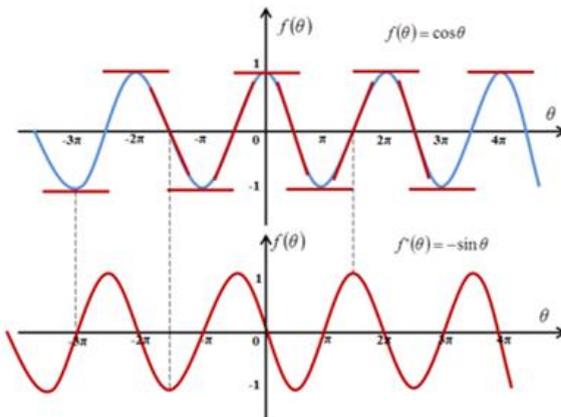
**Solusi:**

1.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (2 \cos \theta - 2\theta^2) = -2 \sin \theta - 4\theta$

2.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (-2 \cos(\theta^2 + 1) + \cos 2\theta + 7\theta)$

$$f'(\theta) = 4\theta \sin(\theta^2 + 1) - 2 \sin 2\theta + 7$$

Secara visual, kita dapat menggambarkan bentuk grafik fungsi  $f(\theta) = \cos \theta$  dan  $f'(\theta) = -\sin \theta$ , seperti Gambar 8.2 berikut,



Gambar 8.2 Hubungan antara grafik fungsi fungsi  $f(\theta) = \cos \theta$  dan  $f'(\theta) = -\sin \theta$

Gambar 8.2 menunjukkan bahwa nilai fungsi  $f'(\theta) = -\sin \theta$  merupakan gradien dari grafik fungsi  $f(\theta) = \cos \theta$ .

**Turunan fungsi  $f(\theta) = \tan \theta$**

Fungsi  $f(\theta) = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  memiliki turunan sebagai berikut,

$$f(\theta) = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Dengan demikian,  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  dan turunan fungsi  $f'(\theta)$  menjadi

$$f'(\theta) = \frac{\left(\frac{d}{d\theta} \sin \theta\right) \cos \theta - \sin \theta \left(\frac{d}{d\theta} \cos \theta\right)}{\cos^2 \theta}$$

$$f'(\theta) = \frac{\cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$f'(\theta) = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$f'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$f'(\theta) = \sec^2 \theta$$

Dengan demikian,

$$f(\theta) = \tan \theta \Rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \sec^2 \theta \dots\dots\dots 8.7)$$

---

**Contoh:**

Turunkan persamaan fungsi-fungsi berikut:

1.  $f(\theta) = \tan^2 \theta$

2.  $f(\theta) = \tan \theta^2$

**Solusi:**

1.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\tan^2 \theta) = \frac{d}{d\theta}(\tan \theta)^2$

$$f'(\theta) = 2 \tan \theta \frac{d}{d\theta}(\tan \theta)$$

$$f'(\theta) = 2 \tan \theta \sec^2 \theta$$

2.  $f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\tan \theta^2) = \frac{d}{d\theta^2}(\tan \theta^2) \cdot \frac{d\theta^2}{d\theta}$

$$f'(\theta) = \sec^2(\theta^2) \cdot 2\theta = 2\theta \sec^2(\theta^2)$$

Dengan menggunakan definisi turunan  $f'(\theta)$  maka dengan mudah kita dapat buktikan bentuk-bentuk turunan dari fungsi trigonometri lainnya sebagai berikut,

▪  $f(\theta) = \sec \theta \rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\sec \theta) = \sec \theta \tan \theta$

▪  $f(\theta) = \csc \theta \rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\csc \theta) = -\csc \theta \cot \theta$

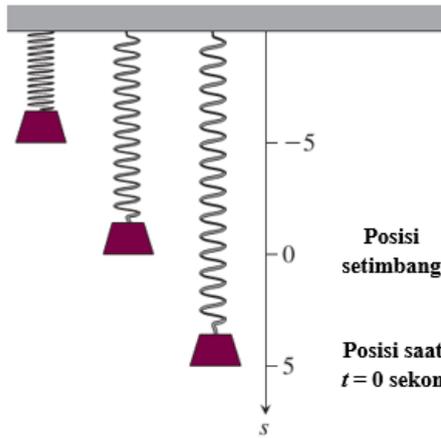
▪  $f(\theta) = \cot \theta \rightarrow f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\cot \theta) = -\csc^2 \theta$

---

**Contoh kasus:**

Dalam praktikum Fisika Dasar I, seorang mahasiswa memperoleh tugas untuk menganalisis kecepatan dan percepatan gerak harmonik sebuah benda bermassa  $m$  yang digantungkan pada ujung sebuah pegas dengan konstanta kekakuan  $k$ . Mula-mula pegas ditarik ke posisi bawah sehingga meregang sebesar 5 meter (Gambar 8.3). Pegas dalam keadaan teregang statis. Ketika benda dilepas, maka benda akan mengalami osilasi naik-turun secara periodik. Persamaan posisi benda  $m$  setiap waktu  $t$  sepanjang lintasannya dinyatakan dengan  $s(t) = 5 \cos t$  meter.

1. Turunkan persamaan kecepatan dan percepatan benda ini sebagai fungsi waktu  $t$ !
2. Kapan benda mencapai posisi  $s = 0$  meter untuk pertama kalinya setelah dilepaskan?
3. Kapan benda mencapai posisi saat pegas tertekan maksimum untuk pertama kalinya setelah dilepaskan?
4. Kapan benda akan kembali mencapai posisi mula-mula untuk yang pertama kalinya setelah dilepaskan?



Gambar 8.3 Ilustrasi gerakan benda yang bergerak secara harmonik sederhana.

**Penyelesaian:**

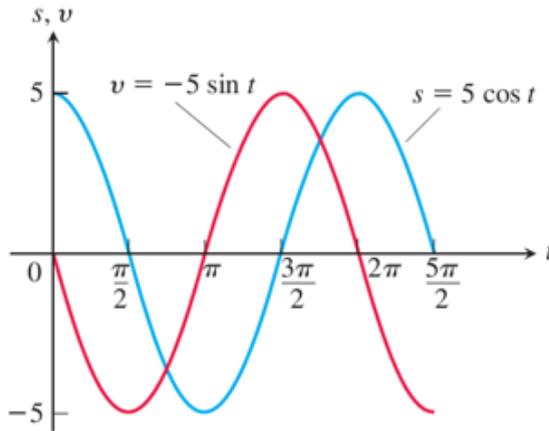
Berdasarkan persamaan posisi benda yang telah diketahui, maka persamaan kecepatan dan percepatan benda dapat ditentukan dengan menggunakan teknik turunan fungsi dalam hal ini turunan fungsi trigonometri.

- Kecepatan didefinisikan sebagai perpindahan yang ditempuh benda setiap satu-satuan waktu. Oleh karena itu, kecepatan benda dapat ditentukan dengan cara menurunkan persamaan posisi benda  $s(t)$  terhadap waktu  $t$ ,

$$v(t) = \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} 5 \cos t = -5 \sin t .$$

Persamaan  $v(t)$  ini memberikan informasi bahwa pada saat mula-mula ( $t = 0$  sekon) benda berada dalam keadaan diam ( $v = 0$  m/s). Ketika  $t = \pi$  sekon benda akan kembali berada dalam keadaan diam. Begitu pula selanjutnya ketika  $t = 2\pi$  sekon,  $3\pi$  sekon,  $4\pi$  sekon,  $5\pi$  sekon, dan seterusnya setiap kelipatan bulat  $\pi$  maka benda berada dalam keadaan diam. Akan tetapi, saat  $t = \pi/2$  sekon,  $3\pi/2$  sekon,  $5\pi/2$

sekon,  $7\pi/2$  sekon,  $9\pi/2$  sekon, dan seterusnya benda justru bergerak dengan kecepatan maksimum. Oleh karena itu, secara visual kita dapat menggambarkan grafik fungsi posisi  $s(t)$  dan kecepatan  $v(t)$  benda seperti Gambar 8.4,



Gambar 8.4 Grafik fungsi posisi dan kecepatan benda  $m$ .

- Percepatan didefinisikan sebagai perubahan kecepatan benda setiap satuan waktu. Oleh karena itu, persamaan percepatan gerak benda  $m$  dapat dicari dengan menurunkan persamaan kecepatan terhadap waktu  $t$ , yaitu

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} (-5 \sin t) = -5 \cos t .$$

Berdasarkan persamaan percepatan  $a(t)$ , maka benda akan mengalami percepatan maksimum  $5 \text{ m/s}^2$  atau  $-5 \text{ m/s}^2$  saat waktu  $t = 0$  sekon,  $\pi$  sekon,  $2\pi$  sekon,  $3\pi$  sekon,  $4\pi$  sekon,  $5\pi$  sekon, dan seterusnya. Sementara itu, saat  $t = \pi/2$  sekon,  $3\pi/2$  sekon,  $5\pi/2$  sekon, dan seterusnya benda akan mengalami percepatan  $0 \text{ m/s}^2$ .

- 
- Berdasarkan kedua uraian tersebut di atas dan Gambar 8.4, maka dapat disimpulkan bahwa periode gerakan benda adalah  $2\pi$  sekon. Jadi, benda akan mencapai posisi  $s = 0$  meter untuk pertama kalinya setelah bergerak selama  $\pi/2$  sekon. Pada posisi ini benda akan memiliki kecepatan maksimum seperti ditampilkan oleh grafik kecepatan pada Gambar 8.4. Benda akan mencapai posisi saat pegas tertekan maksimum untuk pertama kalinya setelah bergerak selama  $\pi$  sekon. Terakhir, benda akan kembali mencapai posisi mula-mula untuk yang pertama kalinya setelah bergerak selama  $2\pi$  sekon, yaitu satu kali periode gerakannya.

### **Turunan Fungsi Eksponensial**

Selama ini kita sangat familiar dengan bentuk-bentuk fungsi aljabar, seperti:

- $f(x) = x^2 + 2x + 1$
- $f(x) = 3x^2 + 5$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = x^{2/3}$
- $f(x) = (\sqrt{x})^{2/3}$

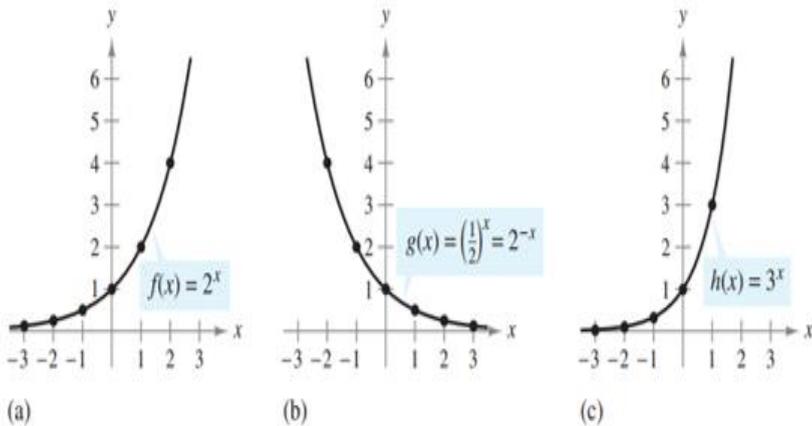
Fungsi tersebut mengandung variabel  $x$  yang mana nilai fungsi  $f(x)$  akan berubah jika dan hanya jika nilai  $x$  berubah. Artinya  $f(x)$  gayut terhadap  $x$ . Pangkat dari variabel  $x$  berupa bilangan riil. Lalu, bagaimana jika variabel  $x$  justru posisinya sebagai pangkat dari bilangan riil tersebut? Perhatikan contoh berikut ini:

- $f(x) = 3^x$
- $f(x) = 5^{2x} + 1$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $f(x) = 3^x \cdot 2^{(x+1)}$

Keempat fungsi tersebut merupakan contoh fungsi eksponen (fungsi pangkat). Fungsi eksponen didefinisikan sebagai berikut,

**“Jika  $k > 0$  dan  $k \neq 1$ , maka fungsi eksponensial  $f(x)$  dengan basis  $k$  dinyatakan sebagai  $f(x) = k^x$ .”**

Gambar 8.5 berikut ini menampilkan beberapa contoh grafik fungsi eksponensial.



Gambar 8.5 Contoh grafik fungsi eksponensial.

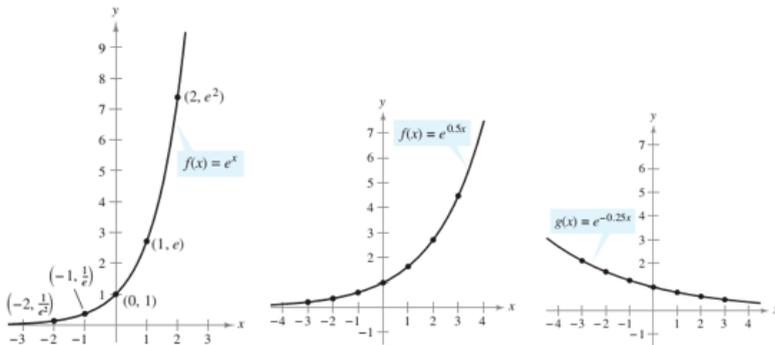
Dalam kalkulus, basis  $k$  untuk fungsi eksponensial juga umumnya dinyatakan dengan sebuah bilangan  $e$ , yaitu

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} \dots\dots\dots 8.5)$$

dimana  $e \approx 2,718281828$ . Dengan demikian, contoh-contoh fungsi eksponensial dengan menggunakan basis  $e$ , yaitu:

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{-x}$
- $f(x) = e^{0,5x}$
- $f(x) = e^{-0,25x}$
- $f(x) = e^{2x+1}$
- $f(x) = e^{-x/2}$

Contoh grafik dari fungsi  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = e^{0,5x}$ , dan  $f(x) = e^{-0,25x}$  ditampilkan pada Gambar 8.6.,



Gambar 8.6 Grafik eksponensial fungsi  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = e^{0,5x}$ , dan  $f(x) = e^{-0,25x}$

### Turunan fungsi eksponensial $f(x) = e^x$

Berdasarkan persamaan 8.5, maka  $e$  juga dapat didefinisikan dengan persamaan yang sama untuk  $x \rightarrow \Delta x$  yang bernilai sangat kecil  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} \dots\dots\dots 8.6)$$

sehingga  $e \approx (1 + \Delta x)^{1/\Delta x}$  dan  $e^{\Delta x} \approx (1 + \Delta x)$ . Pendekatan ini akan digunakan dalam menentukan nilai turunan fungsi  $f(x)$ .

Berdasarkan persamaan 8.2, turunan fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  dapat didefinisikan sebagai,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots\dots\dots 8.7)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (1 + \Delta x - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Dengan demikian,

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x \dots\dots\dots 8.8)$$

**Contoh:**

Turunkan fungsi-fungsi eksponensial berikut:

1.  $f(x) = xe^x$
2.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$
3.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4.  $f(x) = xe^x - e^x$
5.  $f(x) = (e^x + 2)^{3/2}$
6.  $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

**Solusi:**

---

$$1. f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = xe^x + e^x(1)$$

$$f'(x) = (x+1)e^x$$

$$2. f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{xe^x - e^x(1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$3. f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$4. f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x - e^x) = (xe^x + e^x(1)) - e^x$$

$$f'(x) = xe^x$$

$$5. f'(x) = \frac{d}{dx}\left((e^x + 2)^{3/2}\right) = \frac{3}{2}(e^x + 2)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(e^x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}e^x(e^x + 2)^{1/2}$$

$$6. f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(e^{-x} + x)) = \frac{1}{e^{-x} + x}(-e^{-x} + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e^{-x} + x}$$

Apabila  $x$  diganti dengan sebuah fungsi  $u(x)$ , sehingga  $f(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^{u(x)}$ , maka turunan fungsi  $f(x)$  menjadi,

---

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} e^{u(x)} = e^{u(x)} \cdot \frac{d}{dx} u(x) \dots\dots\dots 8.9)$$

**Contoh:**

Turunkan fungsi-fungsi eksponensial berikut:

1.  $f(x) = 3e^{(4x^2+1)}$

2.  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

3.  $f(x) = e^{\sin\sqrt{x}}$

4.  $f(x) = -3e^{x^2+\tan x}$

**Solusi:**

1.  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( 3e^{(4x^2+1)} \right) = 3e^{(4x^2+1)} \cdot \frac{d}{dx} (4x^2 + 1)$

$$f'(x) = 24x \cdot e^{(4x^2+1)}$$

2.  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^{-x^2/2} \right) = e^{-x^2/2} \cdot \frac{d}{dx} \left( -\frac{x^2}{2} \right)$

$$f'(x) = -x \left( e^{-x^2/2} \right)$$

3.  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^{\sin\sqrt{x}} \right) = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx} (\sin\sqrt{x})$

$$f'(x) = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

---

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\cos \sqrt{x}) e^{\sin \sqrt{x}}$$

$$4. \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left( -3e^{x^2 + \tan x} \right) = -3e^{x^2 + \tan x} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + \tan x)$$

$$f'(x) = -3e^{x^2 + \tan x} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + \tan x)$$

$$f'(x) = -3(2x^2 + \sec^2 x) e^{x^2 + \tan x}$$

### **Contoh Kasus 1: Peluruhan Unsur Radioaktif**

Isotop radioaktif meluruh secara spontan. Jumlah peluruhan unsur radioaktif sebagai fungsi waktu dinyatakan dengan  $W(t)$  dan konstanta peluruhannya dinyatakan dengan  $\lambda$ . Jumlah peluruhan yang terjadi setiap satuan waktu dinyatakan dengan persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W$$

Tunjukkan bahwa  $W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$  adalah solusi persamaan peluruhan tersebut dimana  $W_0$  menyatakan jumlah peluruhan yang terjadi saat  $t = t_0$ !

#### **Solusi:**

Jumlah peluruhan yang terjadi setiap satuan waktu adalah  $\frac{dW}{dt} = -\lambda W$  sehingga kita substitusikan solusi persamaan ini, yaitu  $W(t)$  ke persamaan diferensial ini, yaitu

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (W_0 e^{-\lambda t}) = -\lambda (W_0 e^{-\lambda t})$$

---


$$\Rightarrow W_o \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}) = -\lambda(W_o e^{-\lambda t})$$

$$\Rightarrow -\lambda(W_o e^{-\lambda t}) = -\lambda(W_o e^{-\lambda t}) \text{ (terbukti)}$$

Persamaan terakhir menunjukkan bahwa ruas kiri dan ruas kanan persamaan adalah sama sehingga  $W(t) = W_o e^{-\lambda t}$  merupakan solusi persamaan diferensial  $W$  terhadap  $t$ .

### **Contoh Kasus 2: Pertumbuhan populasi**

Pertumbuhan populasi bakteri *Escheria coli* dalam sebuah ekosistem memenuhi model pertumbuhan logistik dengan persamaan,

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K - 1)e^{-rt}}$$

dimana  $K$  dan  $r$  adalah konstanta-konstanta positif.

- a. Tentukan hasil dari  $\frac{d}{dt} N(t)$ !
- b. Tunjukkan bahwa  $N(t)$  memenuhi persamaan diferensial berikut,

$$\frac{d}{dt} N(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

### **Solusi:**

- a. Hasil dari  $\frac{d}{dt} N(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{1 + (K - 1)e^{-rt}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = K \frac{d}{dt} \left( 1 + (K - 1)e^{-rt} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = -K \left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{d}{dt}(1) + \frac{d}{dt}(K-1)e^{-rt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = -K \left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^{-2} \cdot \left(0 - r(K-1)e^{-rt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = rK(K-1)e^{-rt} \cdot \left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2}$$

b. Apabila diketahui  $\frac{d}{dt} N(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ , maka bisa kita uji bahwa

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} N(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} = r \left(\frac{K}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{K}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right)}{K}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} = r \left(\frac{K}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right) \left(1 - \frac{1}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} = r \left(\frac{K}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right) \left(\frac{1 + (K-1)e^{-rt}}{1 + (K-1)e^{-rt}} - \frac{1}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} = r \left(\frac{K}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right) \left(\frac{(K-1)e^{-rt}}{1 + (K-1)e^{-rt}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{\left(1 + (K-1)e^{-rt}\right)^2} \quad \text{(terbukti)}$$

---

## Turunan Fungsi Logaritma

Sebelumnya kita sudah mempelajari secara detail tentang persamaan eksponen, yaitu

$$b^y = x \dots\dots\dots 8.10)$$

dimana ( $b > 0, b \neq 1$ ).

Fungsi eksponen seperti persamaan 8.10 digunakan untuk menghitung nilai perpangkatan  $b$  terhadap  $y$  yaitu  $x$ . Apabila diketahui bilangan hasil perpangkatannya  $x$  dan basisnya  $b$ , maka nilai pangkat  $y$  dapat dihitung menggunakan fungsi logaritma, yaitu

$$y = \log_b x \dots\dots\dots 8.10)$$

dimana  $x > 0$ .

Fungsi-fungsi logaritma memenuhi aturan-aturan berikut,

1.  $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$
2.  $\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$
3.  $\log_b m^n = n \log_b m$
4.  $\log_b 1 = 0$
5.  $\log_b b = 1$

Selain itu, terdapat juga fungsi logaritma natural, yaitu

$$\ln x = \log_e x \dots\dots\dots 8.11)$$

Fungsi logaritma natural ini menggunakan bilangan basis  $e \approx 2.71828$ . . . . Bentuk pangkat eksponen dari persamaan 8.11 adalah

$$x = e^{\ln(x)} \dots\dots\dots 8.11)$$

Lalu, bagaimana dengan turunan dari fungsi logaritma ini? Fokus pada persamaan 8.11. Apabila  $f(x) = \ln x$  maka,

$$x = e^{f(x)} \dots\dots\dots 8.12)$$

Turunkan kedua ruas dari persamaan 8.12 terhadap  $x$  sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(e^{f(x)}) \\ \Rightarrow 1 &= e^{f(x)} \cdot f'(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{e^{f(x)}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \dots\dots\dots 8.13)$$

untuk  $x \neq 0$ .

**Contoh:**

Tentukan turunan fungsi logaritma berikut:

1.  $f(x) = \ln(2x)$
2.  $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$
3.  $f(x) = x \ln(x)$
4.  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
5.  $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4}$

---

**Solusi:**

$$1. f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(2x) = \frac{1}{2x} \cdot \frac{d}{dx} (2x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

$$2. f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(2x^2 + 4) = \frac{1}{2x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx} (2x^2 + 4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 4} \cdot 4x = \frac{2x}{x^2 + 2}$$

$$3. f'(x) = \frac{d}{dx} x \ln(x) = \frac{dx}{dx} \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d \ln x}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} x \ln(x) = \ln(x) + 1$$

$$4. f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) = \frac{\frac{d \ln(x)}{dx} \cdot x - \ln(x) \cdot \frac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

5. Ubah terlebih dahulu fungsi  $f(x)$  menjadi

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4} = \frac{\ln(x^{3/2})}{x^4} = \frac{3 \ln(x)}{2 x^4}$$

sehingga

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{3 \ln(x)}{2 x^4} \right) = \frac{3}{2} \left[ \frac{\frac{d \ln(x)}{dx} \cdot x^4 - \ln(x) \cdot \frac{dx^4}{dx}}{x^8} \right]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left[ \frac{x^3 - 4x^3 \ln(x)}{x^8} \right]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left[ \frac{1 - 4 \ln(x)}{x^5} \right]$$

### **Contoh Kasus 1: Regangan (strain) pada Tulang Belakang**

Regangan yang terjadi pada tulang belakang manusia dewasa sebagai fungsi dari beban  $x$  (dalam kilogram) dinyatakan dengan persamaan,

$$f(x) = 7.2956 \ln(0,0645012x^{0,95} - 1)$$

Berapa laju perubahan regangan terhadap beban  $x$  ketika beban bernilai 100 kg?

#### **Solusi:**

Laju perubahan regangan terhadap beban  $x$  dapat dinyatakan dengan persamaan,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left[ 7.2956 \ln(0,0645012x^{0,95} - 1) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 7.2956 \cdot \frac{1}{(0,0645012x^{0,95} - 1)} \cdot \left( \frac{d}{dx} (0,0645012x^{0,95}) - \frac{d}{dx} 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 7.2956 \cdot \frac{1}{(0,0645012x^{0,95} - 1)} \cdot 0,0645012 \cdot 0,95 \cdot x^{-0,05}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{0,4470}{(0,0645012x^{0,95} - 1)} x^{-0,05}$$

Jadi, ketika  $x = 100$  kg, maka  $\frac{d}{dx} f(x)$  menghasilkan

$$\Rightarrow f'(100) \approx \frac{0,4470}{(0,0645012 \cdot 100^{0,95} - 1)} 100^{-0,05}$$

---

$$\Rightarrow f'(100) \approx 0,086$$

### Contoh Kasus 2: Diatom

Diatom merupakan salah satu spesies alga laut yang belakangan ini banyak diteliti karena kemampuan melakukan fotosintesis secara maksimal. Walaupun diatom dapat hidup di permukaan air laut, tetapi diatom ini memiliki densitas yang lebih besar dibandingkan densitas air laut sehingga secara pelan-pelan diatom akan tenggelam ke bawah permukaan air laut. Kemampuan menyelam diatom ke bawah permukaan air laut dipengaruhi oleh faktor bentuk dan dimensi tubuhnya yang justru berkontribusi terhadap besarnya resistansi fluida dinamis yang dialami. Sebagai contoh, diatom yang memiliki bentuk tubuh berupa filamen memanjang dengan panjang  $L$  dan radius  $a$ , maka laju penyelaman diatom tersebut dapat dirumuskan yaitu

$$U = W \frac{\ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2}}{4\pi\mu L}$$

dimana  $W$  menyatakan selisih berat diatom dan air di sekitarnya,  $\mu$  viskositas air laut. Tentukan persamaan  $dU/dL$ !

### Solusi:

Persamaan  $dU/dL$  dapat ditentukan sebagai berikut,

$$\Rightarrow \frac{dU}{dL} = \frac{d}{dL} \left[ W \frac{\ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2}}{4\pi\mu L} \right] = \frac{W}{4\pi\mu} \frac{d}{dL} \left[ \frac{\ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2}}{L} \right]$$

---

$$\Rightarrow \frac{dU}{dL} = \frac{W}{4\pi\mu} \frac{d}{dL} \left[ \frac{\ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2}}{L} \right] = \frac{W}{4\pi\mu} \frac{d}{dL} \left[ \frac{\ln\left(\frac{2}{a}\right) + \ln(L) + \frac{1}{2}}{L} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dL} = \frac{W}{4\pi\mu} \left[ \frac{\frac{1}{L} \cdot L - \left( \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \frac{1}{2} \right)}{L^2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dL} = \frac{W}{4\pi\mu L^2} \left[ \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{2L}{a}\right) \right]$$

---

## Daftar Pustaka

- Hoffmann, L.D & Bradley, G.L (2010). *Calculus For Business, Economics, and the Social and Life Sciences* (Tenth Edition). The United State of America: Mc. Graw Hill.
- Larson, R & Falvo, D.C. (2009). *Applied Calculus for the Life and Social Sciences*. The United State of America: Houghton Mifflin Company.
- Larson, R. (2009). *Brief Calculus: An Applied Approach* (Eight Edition). The United State of America: Houghton Mifflin Company.
- Neuhauser, C. (2011). *Calculus for Biology and Medicine* (Third Edition). The United State of America: Prentice Hall.
- Roper, M. L & Neuhauser, C. (2018). *Calculus for Biology and Medicine* (Fourth Edition). The United State of America: Prentice Hall.
- Tan, S. T. (2011). *Applied Calculus for the Managerial, Life, and Social Sciences* (Eighth Edition). The United State of America: Brooks/Cole Cengage Learning.
- Thomas, G.B., Hass, J., Heil, C., & Weir, M.D. (2018). *Thomas' Calculus* (Fourteenth Edition). The United State of America: Pearson Publishing Company.

---

## Profil Penulis



### **I Putu Tedy Indrayana**

Penulis lahir di Desa Gunaksa, Kecamatan Dawan, Kabupaten Klungkung Bali pada tanggal 23 Agustus 1991. Penulis telah menyelesaikan studi sarjana dari Jurusan Pendidikan Fisika FMIPA Universitas Pendidikan Ganesha Singaraja pada tahun 2013 dan jenjang magister di Program studi S2 Fisika Departemen Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 2016. Saat ini penulis menjadi Staf Dosen Program Studi Fisika, FMIPA Universitas Udayana. Penulis sangat tertarik dengan bidang ilmu fisika dan matematika, termasuk didalamnya adalah kalkulus. Selain aktif melaksanakan tugas Tri Dharma Perguruan Tinggi, penulis juga aktif membimbing siswa SMP maupun SMA dalam bidang olimpiade Fisika, Matematika, serta Astronomi. Informasi lebih detail tentang penulis dalam diperoleh dari website <https://bit.ly/SidewiTedyFisika>.

# PENERAPAN ATURAN RANTAI UNTUK MENENTUKAN TURUNAN

**Sudirman**

UIN Alauddin Makassar

## **Pengantar**

Aturan rantai digunakan untuk menentukan turunan fungsi komposisi. Misalnya kita akan menentukan turunan dari  $(x + 2)^3$ . Untuk menentukan turunan fungsi tersebut, kita bisa saja mengalikan  $(x + 2)$  terlebih dahulu sebanyak tiga kali. Sampai di sini, kegunaan aturan rantai belum begitu terasa. Akan tetapi, coba bayangkan jika fungsi yang akan dicari turunannya adalah  $g(x) = (x+2)^{10}$ . Sangat tidak efisien, jika kita menguraikannya terlebih dahulu. Risiko kesalahannya pun menjadi lebih besar.

Contoh di atas masih dapat diselesaikan tanpa menggunakan aturan rantai, meskipun akan memakan waktu yang cukup lama. Namun, terdapat fungsi-fungsi tertentu yang memang sulit atau bahkan tidak bisa dicari turunannya tanpa menggunakan aturan rantai. Salah satunya adalah fungsi  $f(x) = 2x^2 + 1$ . Kita pahami bahwa aturan rantai sangat membantu dalam menentukan turunan suatu fungsi. Selanjutnya, akan dibahas lebih lanjut tentang aturan rantai, termasuk bagaimana penerapan aturan rantai dalam menentukan turunan fungsi.

---

Fungsi yang akan dicari turunannya dengan aturan rantai tidak mesti ditulis secara eksplisit sebagai komposisi dari beberapa fungsi. Jika dilihat secara langsung,  $f(x)=x^2+4x+4$  bukanlah fungsi komposisi. Tetapi, fungsi ini dapat ditulis sebagai  $f(x) = (x + 2)^2$  yang merupakan komposisi dari fungsi  $g(x) = x^2$  dan  $h(x) = x + 2$ . Karenanya, turunan  $f(x)$  ini dapat dicari dengan aturan rantai, meskipun lebih mudah jika dicari secara langsung.  $f(x)=\sin(\cos 2x)$  juga merupakan fungsi komposisi.  $f(x)$  dapat ditulis sebagai  $(g \circ h \circ i)(x)$ , dengan  $g(x)=\sin x$ ,  $h(x)=\cos x$ , dan  $i(x)=2x$ .

### **Teorema Aturan Rantai**

Misalkan  $y=f(u)$  dan  $u=g(x)$ . Jika  $g$  terdiferensialkan pada  $x$  dan  $f$  terdiferensialkan pada  $u=g(x)$ , maka fungsi komposisi  $f \circ g$  yang didefinisikan sebagai  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  terdiferensialkan pada  $x$ , dengan  $D_x (f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$  atau  $dx dy = du dy \cdot dx du$

Dari bentuk di atas, terlihat bahwa seakan-akan  $du$  pada ruas kanan dapat dicoret, sehingga ruas kanan menjadi sama persis dengan ruas kiri. Meskipun, sebenarnya tidak seperti ini, tetapi hal ini dapat memudahkan kita dalam mengingat aturan rantai pada turunan

### **Aturan Rantai untuk menentukan Fungsi**

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas cara menghitung turunan fungsi yang sederhana yaitu turunan fungsi yang berbentuk  $y = u^n$ . Misalnya untuk mencari turunan dari  $y = (4x-6)^2$ , lebih dahulu harus menjabarkan  $(4x-6)^2$  menjadi  $14x^2-48x+36$  kemudian menurunkan satu persatu dengan menggunakan cara mengerjakan turunan fungsi yang berbentuk  $y = u \pm v$ . Mencari turunan dari  $y = (4x-6)^2$  dapat dikerjakan dengan menggunakan cara mengerjakan turunan fungsi yang berbentuk  $y = u^n$ . Tetapi kamu belum bisa

---

mencari turunan fungsi yang berbentuk  $y = \sqrt{(2 + x^2)}$  atau  $y = (3x + 7)^{99/4}$  dengan cara menjabarkannya terlebih dahulu. Misalkan ada contoh soal seperti ini carilah  $dy/dz$  dari persamaan  $y = (4x-6)^2$  dan  $x = z^2 + 4$ . Bagaimana cara mengerjakan soal seperti itu?

Untuk mengerjakan soal mencari  $dy/dz$  perlu dikembangkan teknik yang erat hubungannya dengan fungsi-fungsi majemuk yang telah kita pelajari sebelumnya. Jadi, anda harus memahami konsep-konsep sebelumnya. Untuk lebih jelasnya, pelajarilah uraian berikut.

Jika  $y = f \circ g$  sedemikian hingga  $y = f(g(x))$  di mana  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka  $y$  juga mempunyai turunan sehingga:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dalam bentuk lain dapat diuraikan sebagai berikut.

Misalnya:

$$z = g(x), \text{ è } g'(x) = dz/dx \text{ dan } f'(g(x)) = f'(z) = dy/dz$$

$$\text{sehingga } y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$dy/dx = dy/dz \cdot dz/dx$$

Jadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

### **Penerapan Aturan Rantai**

*Soal 1.*

Tentukan turunan pertama dari  $y = (4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{12}$

*Penyelesaian:*

Misal:

$$z = 4x^3 + 5x^2 - x + 4 \rightarrow dz/dx = 12x^2 + 10x - 1$$

---

$$y = z^{12} \rightarrow dy/dz = 12z^{11}$$

$$y' = (dy/dz).(dz/dx)$$

$$y' = 12z^{11} \cdot (12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11} (12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(12x^2 + 10x - 1)(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11}$$

*Soal 2*

Carilah  $dy/dz$  dari persamaan  $y = 4x^4 - 6$  dan  $x = z^2 + 4$ .

*Penyelesaian:*

$$y = 4x^4 - 6 \rightarrow dy/dx = 16x^3$$

$$x = z^2 + 4 \rightarrow dx/dz = 2z$$

$$dy/dz = (dy/dx).(dx/dz)$$

$$dy/dz = (16x^3).(2z)$$

$$dy/dz = 32x^3z$$

*Soal 3*

Jika  $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ , tentukan  $D_x y$ .

Jawab:

Dimisalkan  $y$  adalah pangkat ke-60 dari fungsi  $x$  tersebut, maka  $y = u^{60}$  dan  $u = 2x^2 - 4x + 1$ .

Fungsi luarnya adalah  $f(u) = u^{60}$  dan fungsi dalamnya adalah  $u = g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ .

Maka:

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

---

*Soal 4*

Jika  $y =$

$$1/(2x^5 - 7)^3,$$

tentukan  $\frac{dy}{dx}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{Misalkan } y &= \frac{1}{u^3} = \\ &u^{-3} \text{ dan } u = \\ &2x^5 - 7 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4} \end{aligned}$$

*Soal 5*

Tentukan  $\frac{d}{dx} \frac{1}{(2x-1)^3}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{(2x-1)^3} &= \frac{d}{dx} (2x-1)^{-3} = -3(2x-1)^{-3-1} \frac{d}{dx} (2x-1) \\ &= -\frac{6}{(2x-1)^4} \end{aligned}$$

**Soal Latihan**

1. Tentukan  $F'(y)$  dimana  $F(y) = y \sin y^2$ .
2. Jika  $y = \sin 2x$ , tentukan  $\frac{dy}{dx}$

---

3. Gunakan aturan Rantai untuk menentukan

$$D_t \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{13}$$

Kunci Jawaban:

- $$\begin{aligned} F(y) &= yD_y[\sin y^2] + (\sin y^2)D_y(y) \\ &= y(\cos y^2)D_y(y^2) + (\sin y^2)(1) \\ &= 2y^2 \cos y^2 + \sin y^2 \end{aligned}$$
- $$\frac{dy}{dx} = (\cos 2x) \left( \frac{d}{dx} 2x \right) = 2\cos 2x$$
- $$\begin{aligned} 3. D_t \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{13} &= 13 \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{13-1} D_t \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right) \\ &= 13 \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{12} \frac{(t^4 + 3)(3t^2 - 2) - (t^3 - 2t + 1)(4t^3)}{(t^4 + 3)^2} \\ &= 13 \left( \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3} \right)^{12} \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{(t^4 + 3)^2} \end{aligned}$$

### **Penerapan Aturan Rantai Lebih dari Sekali**

Berikut ini adalah contoh-contoh penerapan Aturan Rantai lebih dari sekali penggunaan:

Contoh 1:

Tentukan  $D_x \sin^3(4x)$ .

Jawab:

$$D_x \sin^3(4x) = D_x[\sin(4x)]^3 \square 3[\sin(4x)]^{3-1} D_x[\sin(4x)]$$

Sekarang kita akan menerapkan Aturan Rantai sekali lagi terhadap turunan fungsi di dalamnya:

$$\begin{aligned} D_x \sin^3(4x) &= 3[\sin(4x)]^{3-1} D_x[\sin(4x)] \\ &= 3[\sin(4x)]^2 \cos(4x) D_x(4x) \\ &= 3[\sin(4x)]^2 \cos(4x)(4) \\ &= 12\cos(4x)\sin^2(4x) \end{aligned}$$

---

Contoh 2:

Tentukan  $D_x \sin[\cos(x^2)]$ .

Jawab:

$$\begin{aligned} D_x \sin[\cos(x^2)] &= \cos[\cos(x^2)] \cdot [\sin(x^2)] \cdot 2x \\ &= -2x \sin(x^2) \cos[\cos(x^2)] \end{aligned}$$

Bukti dari Aturan Rantai

Selanjutnya akan ditunjukkan, pembuktian bahwa  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .

Bukti:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ diadaptasi dari notasi Leibniz untuk turunan} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \text{ dengan } \Delta u \neq 0 \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ asalkan nilai kedua limit ada} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ karena } \Delta u \rightarrow 0 \text{ jika } \Delta x \rightarrow 0 \\ &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

### Review Konsep

Setelah Aturan Rantai dapat dibuktikan, maka mahasiswa akan dikuatkan lagi pemahaman mereka tentang konsep yang sudah dipelajari, bahwa:

1. Jika  $y = f(u)$ , dimana  $u = g(t)$ , maka  $D_t y = D_u y \cdot D_t u$ .  
Dalam notasi fungsi,  $(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t)$ .
2. Jika  $w = G(v)$ , dimana  $v = H(s)$ , lalu  $D_s w = D_v w \cdot D_s v$ .  
Dalam notasi fungsi

$$(G \circ H)'(s) = G'(H(s))H'(s).$$

---

3.  $D_x \cos[(f(x))^2] = -\sin((f(x))^2) \cdot D_x((f(x))^2)$ .

4. Jika  $y = (2x + 1)^3 \sin(x^2)$ , lalu  $D_x y = (2x + 1)^3 \cdot 2x \cos(x^2) + \sin(x^2) \cdot 6(2x + 1)^2$ .

Setelah konsep mahasiswa tentang materi Aturan Rantai sudah dikuatkan, maka mahasiswa akan diberikan Latihan Soal sebagai berikut:

1. a.  $y = u^{11}$  dan  $u = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \times D_x u \\ &= (11u^{10})(3x^2 - 4x + 3) \\ &= 11(3x^2 - 4x + 3)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{10} \end{aligned}$$

b.  $y = u^{-5}$  dan  $u = x + 3$

$$D_x y = D_u y \times D_x u$$

$$(-5u^{-6})(1) = -5(x + 3)^{-6} = -\frac{5}{(x+3)^6}$$

c.  $y = u^4$ ,  $u = \sin v$ , dan  $v = 3x^2$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \times D_v D_x v \\ &= (4u^3)(\cos v)(6x) \\ &= 24x \sin^3(3x^2) \cos(3x^2) \end{aligned}$$

d.  $y = u^3$ ,  $u = \cos v$ , dan  $v = \frac{x^2}{1-x}$

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \times D_v u \times D_x v = (3u^2)(-\sin v) \frac{(1-x)D_x(x^2) - (x^2)D_x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= -3\cos^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \sin\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \frac{(1-x)(2x) - (x^2)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-3(2x - x^2)}{(1-x)^2} \cos^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \sin\left(\frac{x^2}{1-x}\right) \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
 \text{d. } D\theta[\cos^4(\sin \theta^2)] &= 4 \cos^3(\sin \theta^2) D\theta \cos(\sin \theta^2) \\
 &= 4 \cos^3(\sin \theta^2)[- \sin(\sin \theta^2)]D\theta (\sin \theta^2) \\
 &= -4 \cos^3(\sin \theta^2)\sin(\sin \theta^2)(\cos \theta^2)D\theta(\theta^2) \\
 &= -8\theta \cos^3(\sin \theta^2)\sin(\sin \theta^2)(\cos \theta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } D_x[x \sin^2(2x)] &= xD_x \sin^2(2x) + \sin^2(2x) D_x x \\
 &= x [2 \sin(2x) \cos(2x) D_x(2x)] + \sin^2(2x)(1) \\
 &= x[2 \sin(2x)\cos(2x)(2)] + \sin^2(2x) \\
 &= x[4\sin(2x)\cos(2x)] + \sin^2(2x) \\
 &= 2x \sin(4x) + \sin^2(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a. } D_x[\sin^4(x^2 + 3x)] &= 4\sin^3(x^2 + 3x)D_x \sin(x^2 + 3x) \\
 &= 4\sin^3(x^2 + 3x)\cos(x^2 + 3x) D_x(x^2 + 3x) \\
 &= 4\sin^3(x^2 + 3x)\cos(x^2 + 3x)(2x + 3) \\
 &= 4(2x + 3)\sin^3(x^2 + 3x)\cos(x^2 + 3x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } D_t [\cos^5(4t - 19)] &= 5\cos^4(4t - 19)D_t \cos(4t - 19) \\
 &= 5\cos^4(4t - 19)[- \sin(4t - 19)]D_t (4t - 19) \\
 &= -5\cos^4(4t - 19)\sin(4t - 19)(4) \\
 &= -20 \cos^4(4t - 19) \sin(4t - 19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } D_x\{\sin[\cos(\sin 2x)]\} &= \cos[\cos(\sin 2x)]D_x \cos(\sin 2x) \\
 &= \cos[\cos(\sin 2x)][- \sin(\sin 2x)]D_x (\sin 2x) \\
 &= - \cos[\cos(\sin 2x)]\sin(\sin 2x)(\cos 2x)D_x (2x) \\
 &= -2\cos[\cos(\sin 2x)]\sin(\sin 2x)(\cos 2x)
 \end{aligned}$$


---

---

## Daftar Pustaka

Purcell, Edwin J., Dale Verberg., dan Steve Rigdon. (2007).  
Calculus, ed 9. Penerbit Pearson.

George B. Thomas, Jr.; Maurice D. Weir, Joel R.Hass,  
Kalkulus Thomas Jilid 1, edisi 13, Erlangga, 2017.

<https://www.kimiamath.com/post/aturan-rantai-pada-turunan>

<https://jagostat.com/kalkulus1/aturan-rantai>

<https://maths.id/aturan-rantai-turunan-dan-turunan-fungsi-komposisi>

---

## Profil Penulis



### **Sudirman**

lahir di Tanete pada tanggal 17 Agustus 1990. Penulis diangkat menjadi Dosen tetap di Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar pada tahun 2018. Selama menempuh Pendidikan magister, penulis juga pernah bekerja sebagai *teaching assistant* pada *Eureka Laboratory, School of Education, University College Cork, Ireland* Tahun 2016 hingga 2017. Penulis melanjutkan studi ke luar negeri dengan beasiswa LPDP (Lembaga Pengelola Dana Pendidikan) pada Tahun 2015 dan menyelesaikan studi S-2 *Program Master by Research* pada Tahun 2017. Penulis aktif menulis dan melakukan penelitian diantaranya, Buku "*Medical Physics Module for Transition Year Student in Ireland*" pada tahun 2017. Buku Belajar dan Pembelajaran pada Tahun 2020. Penulis juga aktif menulis *bookchapter* rumpun Matematika dan IPA. Mendapatkan hibah penelitian dengan judul "*Pengembangan modul fisika dasar berbasis integrasi Al-Quran*" pada tahun 2018-2019 dan pada tahun 2019-2020 dengan judul penelitian "*Pengembangan Asesmen Kinerja Praktikum terintegrasi nilai-nilai keislaman*". Saat ini terdaftar sebagai Mahasiswa Program Doktor di Program Studi Ilmu Pendidikan, Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar.

Email Penulis: [Sudirman.raja@uin-alauddin.ac.id](mailto:Sudirman.raja@uin-alauddin.ac.id)

---

---

## TURUNAN TINGKAT TINGGI

Seruni

Universitas Indraprasta PGRI

**Turunan Fungsi Tingkat Tinggi**

Turunan fungsi tingkat tinggi adalah turunan fungsi yang tidak hanya sampai turunan pertama saja, bisa sampai turunan kedua, turunan ketiga, turunan keempat, turunan ke  $n$ . Jika  $f$  fungsi yang diturunkan dinotasikan  $f'$  dan  $f'$  merupakan sebuah fungsi, sehingga fungsi  $f'$  bisa jadi mempunyai turunan tersendiri, sehingga dapat di notasikan  $(f')' = f''$ . Fungsi  $f''$  ini dapat dikatakan sebagai turunan kedua dari fungsi  $f$ . Dalam bentuk eksplisit  $y = f(x)$  turunan kedua, ketiga, keempat, kelima, sampai ke- $n$  dari fungsi  $f$  dapat dituliskan sebagai berikut:

1.  $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) \rightarrow$  Turunan tingkat satu/ pertama
2.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) \rightarrow$  Turunan tingkat dua/kedua
3.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) \rightarrow$  Turunan tingkat tiga/ketiga
4.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^3y}{dx^3} \right) = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = f^{(4)}(x) \rightarrow$  Turuan tingkat empat/keempat

- 
5.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right) = \frac{d^5 y}{dx^5} = y^{(5)} = f^{(5)}(x) \rightarrow$  Turunan tingkat lima/kelima
6.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) \rightarrow$  Turunan tingkat n/ke-n

**Contoh 1.** Tentukan Turunan keempat dari  $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 25$ !

Penyelesaian  $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 25$

$$y' = (3 \times 2x^{3-1}) + (2 \times 3x^{2-1}) - (10x^{1-1}) - 0 = 6x^2 + 6x - 10$$

$$y'' = (2 \times 6x^{2-1}) + 6x^{1-1} - 0 = 12x + 6$$

$$y''' = 12x^{1-1} + 0 = 12$$

$$y^{(4)} = 0$$

Jadi, Turunan keempat dari  $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 25$  adalah 0

**Contoh 2.** Tentukan Turunan keenam dari  $(x) = \sin 2x$  !

Penyelesaian  $f(x) = \sin 2x$

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$

$$f''(x) = 2 \times 2 \times (-\sin 2x) = -4 \sin 2x$$

$$f'''(x) = -4 \times 2 \times \cos 2x = -8 \cos 2x$$

$$f^{(4)}(x) = -8 \times 2 \times (-\sin 2x) = 16 \sin 2x$$

$$f^{(5)}(x) = 16 \times 2 \times \cos 2x = 32 \cos 2x$$

$$f^{(6)}(x) = 32 \times 2 \times (-\sin 2x) = -64 \sin 2x$$

Jadi, Turunan keenam dari  $f(x) = \sin 2x$  adalah  $-64 \sin 2x$

---

**Contoh 3.**

Tentukan Turunan kelima dari  $y = x^6 - \cos x + e^{-2x}$  !

Penyelesaian  $y = x^6 - \cos x + e^{-2x}$

$$y' = 6x^5 - (-\sin x) + (-2)e^{-2x} = 6x^5 + \sin x - 2e^{-2x}$$

$$y'' = 5 \times 6x^4 + \cos x - (-2) \times 2e^{-2x} = 30x^4 + \cos x + 4e^{-2x}$$

$$y''' = 4 \times 30x^3 + (-\sin x) + (-2) \times 4e^{-2x} = 120x^3 - \sin x - 8e^{-2x}$$

$$y^{(4)} = 3 \times 120x^2 - \cos x - (-2) \times 8e^{-2x} = 360x^2 - \cos x + 16e^{-2x}$$

$$y^{(5)} = 2 \times 360x - (-\sin x) + (-2) \times 16 = 720x + \sin x - 32e^{-2x}$$

Jadi, Turunan kelima dari  $y = x^6 - \cos x + e^{-2x}$

adalah  $720x + \sin x - 32e^{-2x}$

**Contoh 4.** Tentukan  $y''$  dari  $y = (x^2 - 2)e^{3x}$  !

**Ingat :**

$$f(x) = u \cdot v$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Penyelesaian  $y = (x^2 - 2)e^{3x}$

Misalkan

$$u = x^2 - 2 \rightarrow u' = 2x, \quad v = e^{3x} \rightarrow v' = 3e^{3x}$$

Maka

$$y' = 2xe^{3x} + (x^2 - 2)(3e^{3x}) = 2xe^{3x} + 3(x^2 - 2)e^{3x}$$

Misalkan

$$u = 2x \rightarrow u' = 2, \quad v = e^{3x} \rightarrow v' = 3e^{3x}$$

Maka

$$y'' = \{2e^{3x} + 2x(3e^{3x})\} + 3\{3(x^2 - 2)e^{3x}\}$$

$$y'' = 2e^{3x} + 6xe^{3x} + 9(x^2 - 2)e^{3x}$$

Jadi,  $y''$  dari  $y = (x^2 - 2)e^{3x}$  adalah  $2e^{3x} + 6xe^{3x} + 9(x^2 - 2)e^{3x}$

---

**Contoh 5.** Jika  $f(x) = \frac{1}{x}$ , Carilah  $f^{(n)}(x)$

Penyelesaian  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2} =$$

$$f''(x) = (-2)(-1)x^{-3} = 2x^{-3}$$

$$f'''(x) = (-3)(-2)(-1)x^{-4} = -6x^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = (-4)(-3)(-2)(-1)x^{-5} = 24x^{-5}$$

$$f^{(5)}(x) = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1)x^{-6} = -120x^{-6}$$

$$f^{(6)}(x) = (-6)(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)x^{-7} = 720x^{-7}$$

⋮

⋮

$$f^n(x) = (-1)^n \times n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \times x^{-(n+1)}$$

$$f^n(x) = (-1)^n \times n! \times x^{-(n+1)}$$

Jadi,  $f^{(n)}(x)$  dari  $f(x) = \frac{1}{x}$  adalah  $(-1)^n \times n! \times x^{-(n+1)}$

**Contoh 6.** Jika  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ , Carilah  $g^{(12)}(x)$ .

Penyelesaian  $g(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$

$$g'(x) = (-1)(x-1)^{-2} = -(x-1)^{-2}$$

$$g''(x) = (-2)(-1)(x-1)^{-3} = (2)(1)(x-1)^{-3}$$

$$g'''(x) = (-3)(2)(1)(x-1)^{-4} = -(3)(2)(1)(x-1)^{-4}$$

$$g^{(4)}(x) = -(-4)(3)(2)(1)(x-1)^{-5} = (4)(3)(2)(1)(x-1)^{-5}$$

⋮

⋮

⋮

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n(n)(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1)(x-1)^{-(n+1)}$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n(n!)(x-1)^{-(n+1)}$$

Jadi,  $g^{(12)}(x) = (-1)^{12}(12!)(x-1)^{-13} = 479001600(x-1)^{-13}$

---

**Contoh 7.** Jika  $f(x) = \cos 2x$ , Carilah  $f^{(25)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Penyelesaian  $f(x) = \cos 2x$

$$f'(x) = -2 \sin 2x$$

$$f''(x) = -2 \times 2 \cos 2x = -(2)^2 \cos 2x$$

$$f'''(x) = -2 \times 2 \times 2 \times (-\sin 2x) = 2^3 \sin 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \times 2^3 \times \cos 2x = 2^4 \cos 2x$$

$$f^{(5)}(x) = 2 \times 2^4 \times (-\sin 2x) = -(2)^5 \sin 2x$$

$$f^{(6)}(x) = -2 \times 2^5 \times \cos 2x = -(2)^6 \cos 2x$$

$$f^{(7)}(x) = -(2)^6 \times 2 \times (-\sin 2x) = 2^7 \sin 2x$$

$$f^{(8)}(x) = 2 \times 2^7 \times \cos 2x = 2^8 \cos 2x$$

⋮

Dapat dilihat bahwa turunan beruntun muncul pada kelipatan 4, maka didapat:

$$f^{(24)}(x) = 2^{24} \cos 2x$$

Maka,

$$f^{(25)}(x) = 2 \times 2^{24} \times (-\sin 2x) = -(2)^{25} \sin 2x$$

$$\text{Jadi, } f^{(25)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -33554432 \sin \frac{2\pi}{3} = -33554432 \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -16777216\sqrt{3}$$

**Contoh 8.**

Jika  $g(t) = (2 - t^2)^6$ , Carilah  $g(0)$ ,  $g'(0)$ ,  $g''(0)$ , dan  $g'''(0)$

Penyelesaian

$$g(t) = (2 - t^2)^6$$

$$g(0) = (2 - 0^2)^6 = 2^6 = 64$$

---

Selanjutnya akan dicari  $g'(t)$  dan  $g'(0)$

$$g'(t) = 6(2 - t^2)^5 \times 2t$$

$$g'(t) = 12t(2 - t^2)^5$$

$$g'(0) = 12(0)(2 - 0^2)^5 = 0$$

Selanjutnya akan dicari  $g''(t)$  dan  $g''(0)$

$$g''(t) = 12(2 - t^2)^5 + 12t(2 - t^2)^4(2t)$$

$$g''(t) = 12(2 - t^2)^5 + 24t^2(2 - t^2)^4$$

$$g''(0) = 12(2 - 0^2)^5 + 24(0)^2(2 - 0^2)^4$$

$$g''(0) = 12(2)^5 + 0 = 12 \times 32 = 384$$

Selanjutnya akan dicari  $g'''(t)$  dan  $g'''(0)$

$$g'''(t) = 12(2 - t^2)^4(2t) + 48t(2 - t^2)^4 + 24t^2(2 - t^2)^3(2t)$$

$$g'''(t) = 24t(2 - t^2)^4 + 48t(2 - t^2)^4 + 48t^3(2 - t^2)^3$$

$$g'''(t) = 72t(2 - t^2)^4 + 48t^3(2 - t^2)^3$$

$$g'''(0) = 72(0)(2 - 0^2)^4 + 48(0)^3(2 - 0^2)^3 = 0$$

### **Turunan Parsial Tingkat Tinggi**

Bentuk umum turunan parsial pertama dari sebuah fungsi parsial  $z = f(x, y)$  adalah  $\frac{\partial z}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , dimana:

$\frac{\partial z}{\partial x}$  artinya fungsi parsial  $z$  hanya diturunkan terhadap  $x$  saja dan  $y$  dianggap sebagai konstanta.

$\frac{\partial z}{\partial y}$  artinya fungsi parsial  $z$  hanya diturunkan terhadap  $y$  saja dan  $x$  dianggap sebagai konstanta.

Berdasarkan turunan parsial pertama diatas, maka setiap turunan pertama dapat diturunkan lagi terhadap  $x$  dan :

1. Jika  $\frac{\partial z}{\partial x}$  diturunkan lagi terhadap  $x$  maka akan menjadi  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  dapat dinotasikan  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = z_{xx}$

- 
2. Jika  $\frac{\partial z}{\partial x}$  diturunkan lagi terhadap  $y$  maka akan menjadi  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  dapat dinotasikan  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx} = z_{yx}$
  3. Jika  $\frac{\partial z}{\partial y}$  diturunkan lagi terhadap  $x$  maka akan menjadi  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  dapat dinotasikan  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy} = z_{xy}$
  4. Jika  $\frac{\partial z}{\partial y}$  diturunkan lagi terhadap  $y$  maka akan menjadi  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$  dapat dinotasikan  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = z_{yy}$

**Contoh 9.** Tentukan  $z_{xx}, z_{yx}, z_{xy}, z_{yy}$  dari fungsi  $= 2x^4y^2 - x^3y^5$  !

Penyelesaian  $z = 2x^4y^2 - x^3y^5$

- Turunkan  $z$  terhadap  $x$  terlebih dahulu,  $y$  dianggap sebagai konstanta

$$z_x = (4y^2 \times 2x^{4-1}) - (y^5 \times 3x^{3-1})$$

$$z_x = 8x^3y^2 - 3x^2y^5$$

- Lalu  $z_x$  diturunkan kembali terhadap  $x$  dan  $y$

Ketika  $z_x$  diturunkan kembali terhadap  $x$ , maka  $y$  dianggap konstanta

$$z_{xx} = (8y^2 \times 3x^2) - (3y^5 \times 2x) = 24x^2y^2 - 6xy^5$$

Ketika  $z_x$  diturunkan kembali terhadap  $y$ , maka  $x$  dianggap konstanta

$$z_{yx} = (8x^3 \times 2y) - (3x^2 \times 5y^4) = 16x^3y - 15x^2y^4$$

- Turunkan  $z$  terhadap  $y$  terlebih dahulu,  $x$  dianggap sebagai konstanta

$$z_y = (2x^4 \times 2y^{2-1}) - (x^3 \times 5y^{5-1})$$

$$z_y = 4x^4y - 5x^3y^4$$

- 
- Lalu  $z_y$  diturunkan kembali terhadap  $x$  dan  $y$

Ketika  $z_y$  diturunkan kembali terhadap  $x$ , maka  $y$  dianggap konstanta

$$z_{xy} = (4y \times 4x^3) - (5y^4 \times 3x^2) = 16x^3y - 14x^2y^4$$

Ketika  $z_y$  diturunkan kembali terhadap  $y$ , maka  $x$  dianggap konstanta

$$z_{yy} = (4x^4 \times 1) - (5x^3 \times 4y^3) = 4x^4 - 20x^3y^3$$

**Contoh 10.** Tentukan  $f_{xx}, f_{yx}, f_{zx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{zy}, f_{xz}, f_{yz}, f_{zz}$  dan Buktikan  $f_{xy} = f_{yx}, f_{xz} = f_{zx}, f_{yz} = f_{zy}$  dari fungsi  $f = 4x^2y^5 - xy^3z^2 + 5y^2z^4$  !

Penyelesaian  $f = 4x^2y^5 - xy^3z^2 + 5y^2z^4$

Turunkan  $f$  terhadap  $x$  terlebih dahulu,  $y$  dan  $z$  dianggap sebagai konstanta

$$f_x = 8xy^5 - y^3z^2$$

Lalu  $f_x$  diturunkan kembali terhadap  $x, y$ , dan  $z$

- $f_{xx} = 8y^5$
- $f_{yx} = 40xy^4 - 3y^2z^2$
- $f_{zx} = -2y^3z$

Turunkan  $f$  terhadap  $y$  terlebih dahulu,  $x$  dan  $z$  dianggap sebagai konstanta

$$f_y = 20x^2y^4 - 3xy^2z^2 + 10yz^4$$

Lalu  $f_y$  diturunkan kembali terhadap  $x, y$ , dan  $z$

- $f_{xy} = 40xy^4 - 3y^2z^2$
- $f_{yy} = 80x^2y^3 - 6xy^2z^2 + 10z^4$
- $f_{zy} = -6xy^2z + 40yz^3$

---

Turunkan  $f$  terhadap  $z$  terlebih dahulu,  $x$  dan  $y$  dianggap sebagai konstanta

$$f_z = -2xy^3z + 20y^2z^3$$

Lalu  $f_z$  diturunkan kembali terhadap  $x$ ,  $y$ , dan  $z$

- $f_{xz} = -2y^3z$
- $f_{yz} = -6xy^2z + 40yz^3$
- $f_{zz} = -2xy^3 + 60y^2z^2$

Berdasarkan hasil di dapat:

1. Pembuktian 1

$$\begin{aligned}f_{xy} &= f_{yx} \\40xy^4 - 3y^2z^2 &= 40xy^4 - 3y^2z^2\end{aligned}$$

2. Pembuktian 2

$$\begin{aligned}f_{xz} &= f_{zx} \\-2y^3z &= -2y^3z\end{aligned}$$

3. Pembuktian 3

$$\begin{aligned}f_{yz} &= f_{zy} \\-6xy^2z + 40yz^3 &= -6xy^2z + 40yz^3\end{aligned}$$

Contoh 11. Jika  $f_{(x,y)} = xy^2 \cos(xy)$ . Buktikan  $f_{xy} = f_{yx}$ !

Penyelesaian  $f = xy^2 \cos(xy)$  **Ingat :**

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\f'(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'\end{aligned}$$

Misalkan:  $u = xy^2$ ,  $u_x = y^2$ ,  $u_y = 2xy$

$$v = \cos(xy), \quad v_x = -y \sin(xy), \quad v_y = -x \sin(xy)$$

Maka,

---

Didapat  $f_x$  dan  $f_{yx}$

$$f_x = (u_x \times v) + (u \times v_x)$$

$$= y^2 \cos(xy) + xy^2(-y \sin(xy))$$

$$= y^2 \cos(xy) - xy^3 \sin(xy)$$

$$u = xy^3 \rightarrow u_y = 3xy^2$$

$$v = \sin(xy) \rightarrow v_y = x \cos(xy)$$

$$u = y^2 \rightarrow u_y = 2y$$

$$v = \cos(xy) \rightarrow v_y = -x \sin xy$$

$$f_{yx} = \{(u_y \times v) + (u \times v_y)\} - \{(u_y \times v) + (u \times v_y)\}$$

$$= \{2y \cos(xy) + y^2(-x \sin xy)\} - \{3xy^2 \sin(xy) + xy^3(x \cos(xy))\}$$

$$= 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy) - 3xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

$$= 2y \cos(xy) - 4xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

Dan didapat juga  $f_y$  dan  $f_{xy}$

$$f_y = (u_y \times v) + (u \times v_y)$$

$$= 2xy \cos(xy) + xy^2(-x \sin(xy))$$

$$= 2xy \cos(xy) - x^2y^2 \sin(xy)$$

$$u = x^2y^2 \rightarrow u_x = 2xy^2$$

$$v = \sin(xy) \rightarrow v_x = y \cos(xy)$$

$$u = 2xy \rightarrow u_x = 2y$$

$$v = \cos(xy) \rightarrow v_x = -y \sin xy$$

$$f_{xy} = \{(u_x \times v) + (u \times v_x)\} - \{(u_x \times v) + (u \times v_x)\}$$

$$= \{2y \cos(xy) + 2xy(-y \sin(xy))\} - \{2xy^2 \sin(xy) + x^2y^2(y \cos(xy))\}$$

$$= 2y \cos(xy) - 2xy^2 \sin(xy) - 2xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

$$= 2y \cos(xy) - 4xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

Berdasarkan dari perhitungan ternyata  $f_{xy} = f_{yx}$  terbukti terlihat dari hasil perhitungan:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$2y \cos(xy) - 4xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

$$= 2y \cos(xy) - 4xy^2 \sin(xy) - x^2y^3 \cos(xy)$$

---

## **Daftar Pustaka**

- Arhami, M. (2018). *Kalkulus untuk Politeknik*. Yogyakarta, Indonesia: ANDI.
- Baisuni, H. M. H. (2011). *Kalkulus*. Jakarta, Indonesia: UI-Press.
- Gazali, W., & Soedadyatmodjo. (2007). *Kalkulus Edisi Kedua*. Yogyakarta, Indonesia: Graha Ilmu.
- Stewart, J. (2001). *Kalkulus Edisi Keempat Jilid 1*. Jakarta, Indonesia: Erlangga.

---

## Profil Penulis



### **Seruni**

Penulis tertarik dengan bidang matematika dimulai karena memiliki ayah yang sangat pintar pada bidang matematika. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 60 Jakarta dengan memilih Jurusan IPA pada tahun 2001-2004. Selanjutnya Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Indraprasta PGRI Jakarta pada tahun 2005-2009 jurusan S1 Pendidikan Matematika dan 2010-2013 jurusan S2 Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA).

Riwayat pekerjaan penulis dimulai menjadi Sales Promotion Girl (SPG) pada tahun 2004 sampai 2006, kemudian pada tahun 2008 sampai 2011 menjadi Guru IPA dan Matematika di SMP Dharma Putra Nusantara 86. Sebagai guru privat matematika dan IPA pada tahun 2007-2016 Selanjutnya pada tahun 2010 sampai sekarang menjadi dosen tetap di Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Indraprasta PGRI. Penulis juga pernah menjadi Juri dan Pembuat Soal Matematika pada Kompetisi Sains Nasional (KSN) yang di selenggarakan oleh Puspresnas pada tahun 2021, serta menjadi Reviewer Internal Khusus Prodi Pendidikan Matematika pada tahun 2021-Sekarang.

Email Penulis: [taso8060@gmail.com](mailto:taso8060@gmail.com)

## TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

**Iman Noor**

Universitas Indraprasta PGRI Jakarta

### **Fungsi Implisit**

Fungsi implisit adalah fungsi yang memuat lebih dari satu variabel, berjenis variabel bebas dan variabel terikat yang berada dalam satu ruas, sehingga tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda.

Suatu fungsi yang dinyatakan oleh  $y = f(x)$  disebut fungsi eksplisit, Sedangkan di dalam bentuk  $f(x,y) = 0$  terkadang suatu fungsi, yang disebut fungsi implisit. Dalam matematika, sebuah fungsi implisit adalah fungsi yang mana variabel tak bebas tidak diberikan secara "eksplisit" dalam bentuk variabel bebas. Menyatakan sebuah fungsi  $f$  secara eksplisit adalah memberikan cara untuk menentukan nilai keluaran dari sebuah fungsi  $y$  dari nilai masukan  $x: y = f(x)$ .

Sebaliknya, sebuah fungsi adalah implisit apabila nilai  $y$  didapatkan dari  $x$  dengan memecahkan persamaan dalam bentuk:  $F(x,y) = 0$ . Dengan kata lain, sebuah variabel dapat menentukan variabel lainnya, namun kita tidak diberikan rumus eksplisit untuk suatu variabel dalam bentuk variabel lainnya.

---

Beberapa contohnya sebagai berikut:

$$x^2y + xy^2 = 3$$

$$(x + y)^3 - (x - y)^4 = xy$$

$$\frac{x^3y^2}{x^3 + y^2} = 3x^4 + 2y + 7$$

Secara umum, fungsi  $f(x,y)=c$  dengan  $c$  bilangan real disebut sebagai persamaan fungsi implisit. Untuk menurunkan fungsi implisit, aturan turunan fungsi dasar (fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel) tetap berlaku, tetapi pada fungsi implisit, notasi turunan yang dipakai bukan tanda aksen lagi, melainkan notasi *Leibniz*, seperti  $dy/dx$ .

Ada beberapa hal yang perlu dipahami dalam proses menurunkan fungsi implisit, khususnya yang terdiri dari 2 variabel.

1. Jika suku hanya mengandung variabel  $x$ , maka turunannya terhadap  $x$  adalah  $x \frac{d}{dx}$
2. Jika suku hanya mengandung variabel  $y$ , maka turunannya terhadap  $x$  adalah  $y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}$
3. Jika suku mengandung variabel  $x$  dan  $y$  sekaligus, misalnya  $xy$ , maka turunannya terhadap  $x$  adalah  $xy \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}$

Misalnya  $y(x)=4x^3+3x$ , maka  $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 3$ . Namun, bagaimana dengan persamaan fungsi berikut:

$$4x^2y - x^3y = x^2 - 1$$

Persamaan di atas mendefinisikan  $y$  sebagai fungsi implisit dari  $x$ , tetapi dengan dilakukannya manipulasi bentuk aljabar,  $y$  dapat dinyatakan sebagai fungsi eksplisit dari  $x$ .

---


$$(4x^2 - x^3)y = x^2 - 1$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{4x^2 - x^3}$$

Turunannya dapat dicari dengan menggunakan Aturan Hasil Bagi sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(4x^2 - x^3) - (x^2 - 1)(4x^2 - x^3)}{(4x^2 - x^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3 - 2x^4 - (4x^4 - x^5 - 4x^2 + x^3)}{(4x^2 - x^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 4x^2}{(4x^2 - x^3)^2}$$

Meskipun demikian, tidak semua persamaan fungsi implisit dapat diubah menjadi fungsi eksplisit, contohnya:

$$y^4 - 2y = 4x^2 - 1$$

Adanya fungsi semacam ini mengakibatkan munculnya aturan untuk menentukan turunannya. Aturan tersebut dikenal dengan aturan turunan fungsi implisit. Apabila terdapat persamaan fungsi implisit yang dapat diubah menjadi fungsi eksplisit, maka hasil turunannya pasti sama, baik menggunakan aturan dasar turunan maupun aturan turunan fungsi implisit.

Berikut contoh menurunkan fungsi secara implisit.

$$2y^3 - y = 4x^2$$

Untuk menurunkan fungsi implisit ini terhadap variabel  $x$ , diferensialkan tiap suku.

$$\frac{d}{dx}(2y^3) - \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(4x^2)$$

Jika diturunkan terhadap  $x$ , ekspresi aljabar yang memuat  $y$  tidak boleh dipandang sebagai suatu konstanta. Variabel  $y$  adalah fungsi implisit dari  $x$ , maka turunannya dapat dicari dengan menggunakan Aturan Rantai. Misalkan  $u=2y^3-y$  sehingga:

---


$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= (6y^2 - 1) \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Secara teknis untuk mencari turunan pada suku yang memuat  $y$ , kita anggap saja turunan suku tersebut terhadap  $y$  dengan penambahan ekspresi  $\frac{dy}{dx}$

Jadi, hasil turunannya secara keseluruhan, yaitu:

$$6y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$(6y^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{6y^2 + 1}$$

### Soal dan Pembahasan

1. Tentukan  $dy/dx$  dari persamaan fungsi implisit  $y$  berikut:

$$ax^2 + by^2 = 1, b \neq 0$$

Jawab:

Diferensialkan setiap suku terhadap  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2ax + \left(0 + 2by \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$2by \frac{dy}{dx} = -2ax$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2ax}{2by}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ax}{by}$$


---

- 
2. Tentukan  $dy/dx$  dari persamaan fungsi implisit  $y$  berikut:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

Jawab:

Diferensialkan setiap suku terhadap  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(a)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

3. Tentukan  $dy/dx$  dari persamaan fungsi implisit  $y$  berikut:

$$\sin x + \sin y = \pi$$

Jawab:

Diferensialkan setiap suku terhadap  $x$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\pi)$$

$$\cos x + \left(0 + \cos y \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\cos y}$$

- 
4. Tunjukkan bahwa fungsi  $3xy - 4 = x$  memiliki turunan yang sama terhadap  $x$  bila dalam bentuk fungsi eksplisit maupun fungsi implisit.

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi  $3xy - 4 = x$  ekuivalen dengan  $y = \frac{x+4}{3x}$

Maka  $y$  dinyatakan fungsi eksplisit dari  $x$ . Gunakan sifat turunan untuk suatu fungsi hasil bagi. Misalkan:

$$\begin{aligned}u &= x + 4 \Rightarrow u' = 1 \\v &= 3x \Rightarrow v' = 3 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1(3x) - (x+4)(3)}{(3x)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x - 3x - 12}{9x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-12}{9x^2} = -\frac{4}{3x^2}\end{aligned}$$

Sekarang, turunkan fungsi  $3xy - 4 = x$  secara implisit. Diferensialkan setiap suku terhadap  $x$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3xy) - \frac{d}{dx}(4) &= \frac{d}{dx}(x) \\ \left(3y + 3x \frac{dy}{dx}\right) - 0 &= 1 \\ 3x \frac{dy}{dx} &= 1 - 3y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1 - 3y}{3x}\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan hasil turunan dari fungsi implisit, perhatikan bahwa pada ruas kanan masih terdapat variabel  $y$ , sehingga substitusikan variabel  $y = \frac{x+4}{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3\left(\frac{x+4}{3x}\right)}{\frac{3x}{3x} - \frac{3x+12}{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12}{9x^2} = -\frac{4}{3x^2}$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi  $3xy-4=x$  memiliki turunan yang sama terhadap  $x$  bila dalam bentuk fungsi eksplisit maupun fungsi implisit

5. Tunjukkan bahwa fungsi  $x^2y-6xy+9y=4$  memiliki turunan yang sama terhadap  $x$  bila dalam bentuk fungsi eksplisit maupun fungsi implisit.

Jawab:

Persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9)y &= 4 \\ (x - 3)^2y &= 4 \\ y &= \frac{4}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

Maka  $y$  dinyatakan fungsi eksplisit dari  $x$ . Gunakan sifat turunan untuk suatu fungsi hasil bagi. Misalkan:

$$\begin{aligned} u &= 4 \Rightarrow u' = 0 \\ v &= (x - 3)^2 \Rightarrow v' = 2(x - 3) = 2x - 6 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0(x - 3)^2 - 4(2x - 6)}{((x - 3)^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8x + 24}{(x - 3)^4}$$

Sekarang, turunkan fungsi  $x^2y-6xy+9y=4$  secara implisit. Diferensialkan setiap suku terhadap  $x$

---


$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(6xy) + \frac{d}{dx}(9y) &= \frac{d}{dx}(4) \\ \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx}\right) - 6\left(y + x \frac{dy}{dx}\right) + 9 \frac{dy}{dx} &= 0 \\ (x^2 - 6x + 9) \frac{dy}{dx} &= -2xy + 6y \\ (x - 3)^2 \frac{dy}{dx} &= (-2x + 6)y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(-2x + 6)y}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan hasil turunan dari fungsi implisit, perhatikan bahwa pada ruas kanan masih terdapat variabel  $y$ , sehingga substitusikan variabel  $y = \frac{4}{(x-3)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(-2x + 6) \left(\frac{4}{(x - 3)^2}\right)}{(x - 3)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-8x + 24}{(x - 3)^4} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi  $x^2y - 6xy + 9y = 4$  memiliki turunan yang sama terhadap  $x$  bila dalam bentuk fungsi eksplisit maupun fungsi implisit.

6. Turunan pertama fungsi implisit  $f(x,y) = (x+2y)^8$  terhadap  $x$  adalah...

Jawab:

Misalkan  $f(x,y) = (x+2y)^8$ , sehingga berdasarkan aturan rantai dan aturan fungsi implisit diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= 8(x + 2y)^7 \left( x \frac{d}{dx} + 2y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx} \right) \\ f'(x,y) &= 8(x + 2y)^7 \left( 1 + 2 \frac{dy}{dx} \right) \end{aligned}$$


---

---

$$f'(x, y) = 8(x + 2y)^7 + 16(x + 2y)^7 \frac{dy}{dx}$$

7. Tentukan turunan pertama implisit dari fungsi eksplisit  $y = \frac{x}{x^2+1}$

Jawab:

Fungsi eksplisit di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$
$$y(x^2 + 1) = x$$
$$x^2y + y - x = 0$$

Masing-masing suku didiferensialkan terhadap  $x$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(x) = 0$$
$$\left(x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy\right) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$
$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 1 - 2xy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{x^2 + 1}$$

8. Tentukan turunan implisit dari  $xy + (x+y+1)^3=0$

Jawab:

Masing-masing suku didiferensialkan terhadap variabel  $x$ . Gunakan aturan hasil kali untuk suku pertama dan aturan rantai untuk suku kedua.

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(x + y + 1)^3 = 0$$
$$\left(x \frac{dy}{dx} + y\right) + 3(x + y + 1)^2 \frac{d}{dx}(x + y + 1) = 0$$

---


$$x \frac{dy}{dx} + y + 3(x + y + 1)^2 \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} + y + 3(x + y + 1)^2 + 3(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + 3(x + y + 1)^2) \frac{dy}{dx} = -(y + 3(x + y + 1)^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(y + 3(x + y + 1)^2)}{(x + 3(x + y + 1)^2)}$$

9. Tentukan turunan implisit dari  $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 2xy^2 = 19$

Jawab:

Berdasarkan fungsi di atas, terlebih dahulu turunkan untuk suku  $2xy^2$  terhadap  $x$  agar memudahkan dalam penulisan.

$$\frac{d}{dx}(2xy^2) = 2 \frac{d}{dx}(xy^2)$$

$$2 \left( \frac{d}{dx}(x)y^2 + x \frac{d}{dx}(y)^2 \right)$$

$$2 \left( 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \frac{dy}{dx} \right)$$

$$2 \left( y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} \right)$$

Dengan demikian, turunan implisit dari fungsi tersebut secara keseluruhan adalah:

$$x^2 \frac{d}{dx} + y^2 \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx} - 5x \frac{d}{dx} + 8y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx} + 2y^2 + 4xy \frac{dy}{dx}$$

$$= 19 \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 5 + 8 \frac{dy}{dx} + 2y^2 + 4xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y + 8 + 4xy) \frac{dy}{dx} + 2x - 5 + 2y^2 = 0$$


---

---

$$(2y + 8 + 4xy) \frac{dy}{dx} = 5 - 2x - 2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 2x - 2y^2}{2y + 8 + 4xy}$$

10. Tentukan turunan pertama implisit dari fungsi

$$f(x, y) = \frac{y-x^2}{y^2-x}$$

Jawab:

Fungsi  $f$  dinyatakan dalam bentuk pecahan, sehingga dapat digunakan aturan hasil bagi untuk menentukan turunannya.

Misalkan:

$$u = (y - x^2) \rightarrow u' = \frac{dy}{dx} - 2x$$

$$v = y^2 - x \rightarrow v' = 2y \frac{dy}{dx} - 1$$

Dengan demikian, turunan dari fungsi di atas adalah:

$$f'(x, y) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x, y) = \frac{\left(\frac{dy}{dx} - 2x\right)(y^2 - x) - (y - x^2)\left(2y \frac{dy}{dx} - 1\right)}{(y^2 - x)^2}$$

$$f'(x, y) = \frac{(y^2 - x - 2y^2 + 2x^2y) \frac{dy}{dx} - 2x^2y + 2x^2 + y - x^2}{(y^2 - x)^2}$$

$$f'(x, y) = \frac{(-x - y^2 + 2x^2y) \frac{dy}{dx} - 2x^2y + x^2 + y}{(y^2 - x)^2}$$

---

## Daftar Pustaka

Arfken, G. (1970). *Mathematical Method for Physicists*. New York: Academic Press.

Kreyszig, E. (1972). *Advanced Engineering Mathematics*. New York: Wiley.

Mary L. Boas. (1983). *Mathematical Method in The Physical Sciences*. AS: WIE Wiley.

## Profil Penulis

### Iman Noor



Ketertarikan penulis terhadap fisika teori dan komputasi bidang pindah panas dimulai pada tahun 2009 silam. Hal tersebut membuat penulis memilih untuk masuk ke Institut Pertanian Bogor dengan memilih Jurusan S1 Fisika dan berhasil lulus pada tahun 2014. Pada tahun yang sama, penulis kemudian melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi yang sama dan berhasil menyelesaikan studi S2 di prodi Biofisika pada tahun 2016. Setelah menyelesaikan studi S2, penulis pernah bekerja di perusahaan konsultan engineering sebagai analis. Dua tahun kemudian, penulis aktif mengajar menjadi dosen di program studi Pendidikan Fisika Universitas Indraprasta PGRI Jakarta, serta mengajar di Universitas Nusa Bangsa Bogor.

Penulis memiliki kepakaran dibidang Fisika Pindah Panas. Dan untuk mewujudkan karir sebagai dosen profesional, penulis pun aktif sebagai peneliti dibidang kepakarannya tersebut. Penelitian – penelitian yang dilakukan terbit di penerbit jurnal nasional dan internasional. Selain peneliti, penulis juga aktif menulis buku dengan harapan dapat memberikan kontribusi positif bagi bangsa dan negara yang sangat tercinta ini.

Email Penulis: iman.noor009@gmail.com

**Prahesti Tirta Safitri**

Universitas Muhammadiyah Tangerang

### **Definisi Nilai Ekstrim**

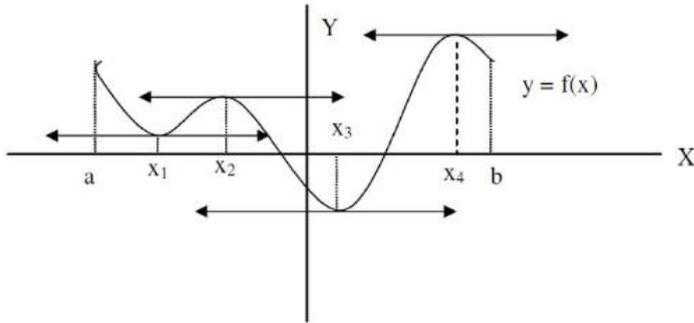
Nilai ekstrim fungsi adalah nilai yang berkaitan dengan maksimum atau minimum fungsi tersebut. Ada dua jenis nilai ekstrim, yaitu:

1. Nilai Ekstrim Mutlak (Global)

Fungsi  $y=f(x)$  yang didefinisikan dalam selang tutup  $[a, b]$  mencapai nilai maksimum mutlak di  $x=x_0$ ,  $a \leq x_0 \leq b$ , jika untuk setiap  $a \leq x \leq b$  dan  $x \neq x_0$ , maka  $f(x_0) \geq f(x)$  sementara mencapai minimum mutlak jika  $f(x_0) \leq f(x)$ .

2. Nilai Ekstrim Relatif (Lokal)

Fungsi  $y=f(x)$  yang didefinisikan dalam selang tutup  $[a, b]$  mencapai nilai maksimum relatif di  $x=x_0$ ,  $a \leq x_0 \leq b$ , jika untuk setiap  $c \leq x \leq d$  dengan  $a \leq c \leq d \leq b$  dan  $x \neq x_0$ , maka  $f(x_0) \geq f(x)$  sementara mencapai minimum relatif jika  $f(x_0) \leq f(x)$ .



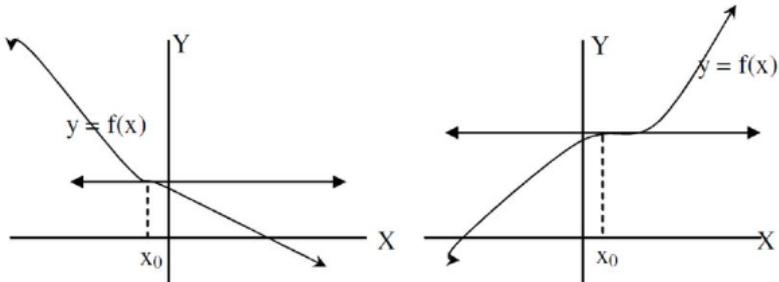
Gambar 12.1 Garis Singgung pada Titik Ekstrim

Pada gambar 12.1 terlihat garis-garis singgung pada titik-titik ekstrim selalu sejajar dengan sumbu- $x$ . Hal ini bermakna koefisien arah garis singgung pada titik ekstrim selalu sama dengan 0. Jika hal ini dikaitkan dengan turunan fungsi pada sebuah titik, maka fungsi  $y=f(x)$  memiliki nilai ekstrim di  $x=x_0$  jika  $f'(x_0)=0$ . Untuk menentukan jenis ekstrimnya, dapat ditelaah dari tanda turunan kedua di titik tersebut,  $f''(x_0)$  seperti di bawah ini:

1. Jika  $f''(x_0) > 0$ , maka titik ekstrim adalah titik minimum (relatif atau mutlak), dan jika  $f''(x_0) < 0$  adalah titik maksimum (relatif atau mutlak).
2. Jika  $f''(x_0) = 0$ , maka harus dilakukan telaahan tanda dari  $f'(x)$  di sekitar  $x=x_0$ 
  - a. Jika  $f'(x) > 0$  untuk  $x < x_0$  dan  $f'(x) < 0$  untuk  $x > x_0$ , maka titik  $x = x_0$  merupakan titik maksimum
  - b. Jika  $f'(x) < 0$  untuk  $x < x_0$ , dan  $f'(x) > 0$  untuk  $x > x_0$ , maka titik  $x = x_0$  merupakan titik minimum

- c. Jika tanda  $f'(x)$  tidak berubah untuk  $x < x_0$  maupun  $x > x_0$ , maka titik  $x = x_0$  adalah titik belok.

Berdasarkan keterangan di atas dijelaskan lebih lanjut bahwa titik ekstrim dan titik belok dinamakan titik stasioner.



Gambar 12.2 Titik  $x = x_0$  Titik Belok Fungsi  $y = f(x)$

Nilai-nilai ekstrim didapat dengan cara menghitung untuk setiap titik kritis. Hasil yang terbesar adalah nilai maksimum dan yang terkecil adalah nilai minimum. Berbeda dari titik stasioner, titik pada grafik  $f$  dalam keadaan sudut tajam, garis singgung vertikal, atau berupa lompatan disebut sebagai titik singular. Walaupun dalam masalah praktis hal ini sangat langka, nilai ekstrim dapat terjadi pada titik singular.

### Contoh 1

Carilah titik-titik kritis dari  $f(x) = x^3 - 15x^2 + 30$  pada  $-1 \leq x \leq 12$

Penyelesaian:

Titik-titik kritis dari fungsi di atas adalah sebagai berikut.

1. Titik ujung selang, yaitu  $x = -1$  atau  $x = 12$
2. Titik Stasioner. Untuk mencari titik stasioner kita selesaikan  $f'(x) = 0$

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 30 ,$$

---

$$f'(x) = 3x^2 - 30x$$

$$= 3x(x - 10)$$

$$3x = 0 \text{ atau } x - 10 = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 10$$

Dari perhitungan di atas diperoleh  $x = 0$  atau  $x = 10$  dan Kedua titik stasioner jatuh di dalam selang yang ditentukan.

3. Titik singular. Namun dalam contoh soal ini tidak memiliki titik singular.

Dengan demikian, kordinat titik kritis dari fungsi di atas adalah titik-titik dengan absis  $\{-1, 0, 10, \text{ dan } 12\}$ .

Lalu koordinat titik kritis dapat kita lengkapi dengan mensubstitusikan absis-absis tersebut ke dalam fungsi

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 30$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 15(-1)^2 + 30$$

$$f(-1) = -1 - 15 + 30 = \mathbf{14}$$

$$f(0) = (0)^3 - 15(0)^2 + 30$$

$$f(0) = \mathbf{30}$$

$$f(10) = (10)^3 - 15(10)^2 + 30$$

$$f(10) = 1000 - 1500 + 30 = \mathbf{-470}$$

$$f(12) = (12)^3 - 15(12)^2 + 30$$

$$f(12) = 1728 - 2160 + 30 = \mathbf{-402}$$

Sehingga kita peroleh koordinat titik kritisnya adalah  $(-1, 14)$ ,  $(0, 30)$ ,  $(10, -470)$ ,  $(12, -402)$

---

**Contoh 2**

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 30$ , pada selang  $-2 \leq x \leq 9$ .

Penyelesaian:

Titik-titik kritis dari fungsi di atas adalah sebagai berikut.

1. Titik ujung selang, yaitu  $x = -2$  atau  $x = 9$
2. Titik Stasioner. Untuk mencari titik stasioner kita selesaikan  $f'(x) = 0$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 30,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x$$

$$= 3x \left( x - \frac{10}{3} \right)$$

$$3x = 0 \text{ atau } x - \frac{10}{3} = 0$$

$$x = \frac{0}{3} = 0 \text{ atau } x = \frac{10}{3}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh  $x = 0$  atau  $x = \frac{10}{3}$

3. Titik singular. Namun dalam contoh soal ini tidak memiliki titik singular

Dengan demikian, titik kritis dari fungsi di atas adalah  $x = -2, 0, \frac{10}{3}$ , dan  $9$ .

Selanjutnya, substitusikan titik-titik kritis tersebut ke dalam fungsi  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 30$  sebagai berikut.

$$f(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 + 30$$

$$= -8 - 5(4) + 30$$

$$= -8 - 20 + 30 = 2$$

$$f(0) = (0)^3 - 5(0)^2 + 30 = 30 \quad \text{(Maksimum)}$$

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 30$$

---

$$= \frac{1000}{27} - \left(\frac{1500}{27}\right) + 30$$

$$= -\frac{500}{27} + 30 = 11,48$$

$$f(9) = (9)^3 - 5(9)^2 + 30$$

$$= -729 - 405 + 30$$

$$= -1104 \qquad \text{(Minimum)}$$

Dengan demikian nilai maksimum mutlakny adalah 30 (dicapai pada  $x = 0$ ), dan nilai minimum mutlakny adalah  $-1104$  (dicapai pada  $x = 9$ ).

### Contoh 3

Sebuah fungsi  $f(x) = x^3 - 25x + 12$  didefinisikan pada selang  $[-3, 6]$  sebagai berikut. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi tersebut.

Penyelesaian

Titik-titik Kritis dari fungsi di atas adalah sebagai berikut.

1. Titik ujung selang, yaitu  $x = -3$  atau  $x = 6$
2. Titik Stasioner yaitu

$$f'(x) = 3x^2 - 25 = 0$$

$$= 3(x^2 - 25) = 0$$

$$3(x + 5)(x - 5) = 0$$

Dari perhitungan di atas diperoleh  $x = -5$  (di luar selang  $[-3, 6]$ , jadi tidak memenuhi) dan  $x = 5$ , atau

3. Titik singular. Namun dalam soal ini tidak memiliki titik singular,

Dengan demikian, titik kritis dari fungsi di atas adalah  $x = -3, 5$ , dan  $6$ .

---

Setelah mendapatkan titik kritis, maka substitusikanlah titik kritis tersebut ke dalam fungsi  $f(x) = x^3 - 25x + 12$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}f(-3) &= -3^3 - 27(-3) + 12 \\ &= -27 + 81 + 12 = 66\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5^3 - 25(5) + 12 \\ &= 125 - 125 + 12 = 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(6) &= 6^3 - 25(6) + 12 \\ &= 216 - 150 + 12 = 78\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai maksimum mutlakny adalah 78 (dicapai pada  $x = 6$ ), sedangkan nilai minimum mutlakny adalah 12 (dicapai pada  $x = 5$ ).

#### **Contoh 4**

Suatu Perusahaan memproduksi  $x$  unti barang dengan biaya  $(4x^2 + 14x + 40)$  dalam ribu rupiah untuk tiap unitnya. Jika barang tersebut terjual habis dengan harga Rp200.000,00 tiap unit, maka keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut adalah

Penyelesaian

Fungsi yang diharapkan pada soal diatas adalah fungsi keuntungan

Biaya Produksi total = biaya produksi  $x$  barang

$$\begin{aligned}&= (4x^2 + 14x + 40).x \\ &= 4x^3 + 14x^2 + 40x \text{ (dalam ribu rupiah)}\end{aligned}$$

Hasil penjualan total = Harga Jual  $x$  banyak barang

$$= 200x \text{ (dalam ribu rupiah)}$$

Untung = Jual - Biaya Produksi

$$U = 200x - (4x^3 + 14x^2 + 40x)$$

$$U = -4x^3 - 14x^2 + 160x \text{ (dalam ribu rupiah)}$$

---

Untuk mendapatkan keuntungan maksimum, kita perlu mencari titik stasioner fungsi dengan  $U' = 0$

$$U' = -12x^2 - 28x + 160$$

$$U' = 0$$

$$-12x^2 - 28x + 160 = 0$$

$$-4(3x^2 + 7x - 40) = 0$$

$$-4(3x - 8)(x + 5) = 0$$

Dari persamaan di atas diperoleh  $x = \frac{8}{3}$  dan  $x = -5$

Karena  $x > 0$  maka  $x = -5$  tidak memenuhi, sehingga  $x = \frac{8}{3}$  menjadi penyelesaian. Untuk mendapatkan untung maksimum, maka kita substitusi  $x = \frac{8}{3}$  ke dalam fungsi untung.

$$U = -4x^3 - 14x^2 + 160x$$

$$U = -4\left(\frac{8}{3}\right)^3 - 14\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 160\left(\frac{8}{3}\right)$$

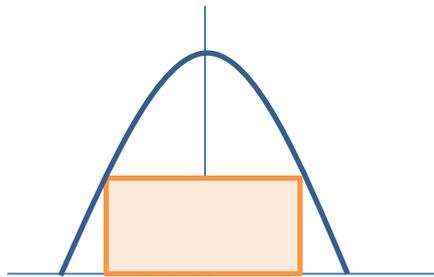
$$U = -\frac{2048}{27} - \frac{896}{9} + \frac{1280}{3}$$

$$U = 251,259$$

Jadi keuntungan maksimumnya adalah Rp251.259,00

### Contoh 5

Sebuah segiempat memiliki dua sudut pada sumbu  $x$  dan dua sumbu lainnya pada parabola  $y = 27 - x^2$ , dengan  $y \geq 0$  (lihat gambar 12.3). Cari dimensi segiempat yang memberikan luas segiempat maksimum.



Gambar 12.3 Dimensi Segiempat

---

Penyelesaian

Perhatikan gambar. Luas segiempat adalah

$$L = 2xy, \text{ dengan } x, y \geq 0$$

$$y = 27 - x^2 \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} L &= 2x(27 - x^2) \\ &= 54x - 2x^3 \end{aligned}$$

Dalam kasus ini, titik kritis sama dengan titik stasionernya maka

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= 54 - 6x^2 \\ &= 6(9 - x^2) = 0 \\ &= 6(3 - x)(3 + x) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $x = -3$  (tidak termasuk karena tidak memenuhi  $x \geq 0$ ) atau  $x = 3$ . Dengan demikian, dimensi segiempat yang memberikan luas maksimum adalah

$$\text{Lebar} : 2x = 2 \cdot 3 = 6 \text{ satuan}$$

$$\text{Panjang} : y = 27 - x^2 = 27 - 3^2 = 27 - 9 = 18 \text{ satuan}$$

### **Contoh 6**

Tentukan nilai ekstrim lokal dari sebuah fungsi  $f(x) = x^2 - 12x + 35$  pada  $(-\infty, \infty)$ .

Penyelesaian

Fungsi polinom  $f$  kontinu dimana-mana dan turunannya adalah

$$f'(x) = 2x - 12 \text{ ada untuk semua } x \text{ . jadi, satu-satunya titik kritis untuk } f \text{ adalah penyelesaian tunggal dari } f'(x) = 0 \text{ yaitu}$$

---

$$2x - 12 = 0$$

$$2(x - 6) = 0$$

$$x = 6$$

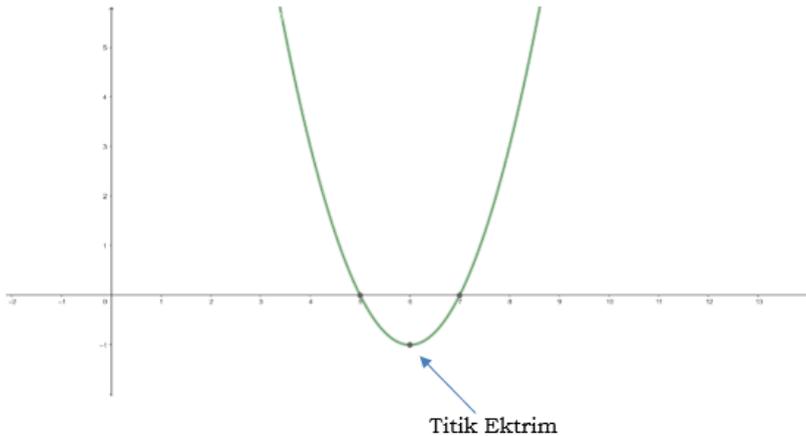
Karena  $f'(x) = 2(x - 6) < 0$  untuk  $x < 6$ ,  $f$  turun pada  $(-\infty, 6]$ ; dan karena  $2(x - 6) > 0$  untuk  $x > 6$ ,  $f$  turun pada  $[6, \infty)$ . Karena itu, menurut Uji Turunan Pertama,

$$f(6) = (6)^2 - 12(6) + 35$$

$$f(6) = 36 - 72 + 35$$

$$f(6) = -1 \text{ (nilai minimum lokal } f)$$

Karena 6 adalah satu-satunya bilangan kritis, tidak terdapat nilai ekstrim lain. Grafik  $f$  diperlihatkan dalam gambar 12.3. Perhatikan bahwa dalam kasus ini  $f(6)$  sebenarnya adalah nilai minimum (global).

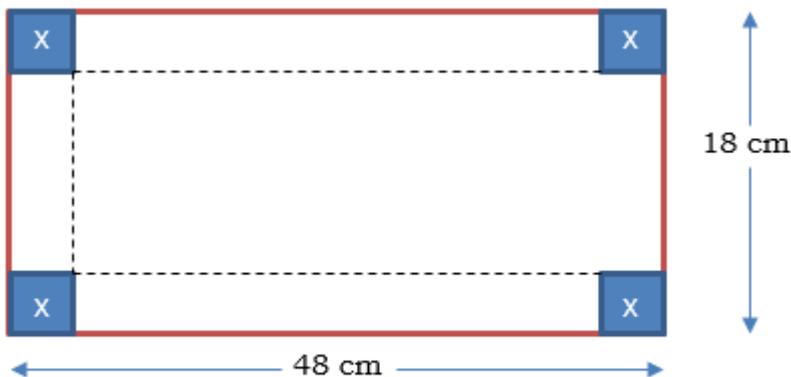


Gambar 12.4 Nilai Minimum Global

### Contoh 7

Kardus makanan berbentuk balok tanpa tutup dibuat dari selembar karton yang berukuran Panjang 48 cm dan lebar 18 cm. dengan memotong persegi identik pada keempat

pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya seperti gambar di bawah.



Gambar 12.5 Karton untuk Wadah Makanan

- Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum!
- Tentukan volume!

### Penyelesaian

Andaikan  $x$  adalah sisi bujur sangkar yang akan dipotong, dan  $V$  adalah volume kotak yang dihasilkan, maka

$$\begin{aligned}
 V &= (48 - 2x)(18 - 2x)(x) \\
 &= (864 - 96x - 36x + 4x^2)(x) \\
 &= 864x - 96x^2 - 36x^2 + 4x^3 \\
 &= 864x - 132x^2 + 4x^3
 \end{aligned}$$

$$V' = 864 - 264x + 12x^2$$

Titik Stasioner  $V' = 0$

$$864 - 264x + 12x^2 = 0$$

$$12(72 - 22x + x^2) = 0$$

$$12(6 - x)(12 - x) = 0$$

$$6 - x = 0 \text{ atau } 12 - x = 0$$

---

$$x = 6 \text{ atau } x = 12$$

Karena ketika kita substitusi  $x = 12$  ke dalam fungsi

$$18 - 2x = 18 - 2(12) = 18 - 24 = -6$$

(tidak ada ukuran panjang yang bernilai negatif) maka  $x = 12$  tidak memenuhi untuk persoalan di atas. Selanjutnya Kita ambil  $x = 6$  sebagai penyelesaian dari masalah di atas sebagai tinggi kotak.

a. Jadi ukuran kotaknya adalah

$$\text{Panjang} : 48 - 2x = 48 - 2(6) = 48 - 12 = 36$$

$$\text{Lebar} : 18 - 2x = 18 - 2(6) = 18 - 12 = 6$$

$$\text{Tinggi} : 6$$

b. Volume maksimum dari kotak tersebut adalah

$$V = p \times l \times t$$

$$V = 36 \times 6 \times 6 = 1296 \text{ cm}^3$$

### Latihan

1. Carilah titik-titik kritis dari  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$  pada  $-2 \leq x \leq 6$
2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 10$ , pada selang  $-1 \leq x \leq 6$ .
3. Sebuah fungsi  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18$  didefinisikan pada selang  $[-2, 5]$  sebagai berikut. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi tersebut.

---

## Daftar Pustaka

- Kristanto, Yosep Dwi. (2015). *Penerapan Turunan: Nilai Ekstrim Fungsi pada Suatu Selang*.  
<https://yos3prens.wordpress.com/2015/03/19/penerapan-turunan-nilai-ekstrim-fungsi-pada-suatu-selang/>.
- Setiawan, Andri. (2019). *Nilai Ekstrim*. Website Sumber belajar kemdikbud.  
<https://sumber.belajar.kemdikbud.go.id> (diakses pada 10 Oktober pukul 13.38).
- Setiawan, Andri. (2019). *Titik Kritis*. Website Sumber belajar kemdikbud.  
<https://sumber.belajar.kemdikbud.go.id> (diakses pada 10 Oktober pukul 15.00)
- Stewart, D. & Simmons, M. (2010). *The Business Playground: Where Creativity and Commerce Collide*. Berkeley, AS: New Riders Press.
- Rerung, R. R., Fauzan, M., & Hermawan, H. (2020). Website Quality Measurement of Higher Education Services Institution Region IV Using Webqual 4.0 Method. *International Journal of Advances in Data and Information Systems*, 1(2), 89-102.
- Varbeg, Dale, Purcell, Edwin J., dan Rigdon, Steven E. (2010). *Kalkulus Edisi kesembilan*. Jakarta: Erlangga.

---

## Profil Penulis

### **Prahesti Tirta Safitri**



Dilahirkan di Kota Tangerang pada tanggal 14 Maret 1988. Penulis merupakan anak pertama dan tiga bersaudara pasangan Tirta Hidayat dan Sri Karyanti. Pendidikan menjadi bidang yang mulai digeluti sejak tahun 2005 pada saat duduk di bangku S1 dengan jurusan pendidikan matematika di Universitas Sultan Ageng Tirtayasa dan lulus pada tahun 2010.

Berkecimpung di dunia belajar mengajar membuat penulis memilih untuk melanjutkan sekolah pada jenjang magister di Universitas Pendidikan Indonesia Bandung dan lulus pada tahun 2013. Saat ini penulis bekerja di Universitas Muhammadiyah Tangerang dengan pengalaman selama 13 tahun berkecimpung di dunia pendidikan matematika mulai dari mengajar di bimbingan belajar hingga saat ini mengajar di perguruan tinggi. Pendidikan menjadi jantung penulis karena sudah merasakan bahwa pendidikan merupakan jalan untuk menuju kebahagiaan setiap manusia. Melalui pendidikan manusia dapat menjalankan perannya dengan baik. Penulis rutin menulis artikel ilmiah dan mengikuti kegiatan pelatihan untuk mengembangkan kemampuan yang dimiliki demi menunjang karir sebagai dosen. Ketertarikan penulis dalam bidang pendidikan juga dijumpai melalui sekolah pascasarjana (S3) pada program studi teknologi pendidikan di Universitas Negeri Jakarta mulai tahun 2022. Dengan sekolah lagi penulis berharap memiliki kemampuan lebih baik lagi guna menyebarkan ilmu kepada mahasiswa di tempat ia mengajar juga untuk kebermanfaatan ilmu secara umum dalam bermasyarakat.

Email Penulis: [prahestitirtasafitri@gmail.com](mailto:prahestitirtasafitri@gmail.com)

## KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

**Kus Andini Purbaningrum**

Universitas Muhammadiyah Tangerang

Jika terdefiniskan suatu fungsi  $f$  pada selang  $S$  (terbuka, tertutup ataupun bukan keduanya), maka fungsi  $f$  dapat disimpulkan dalam dua kategori yaitu fungsi naik atau fungsi turun melalui sketsa grafik fungsi  $f$  tersebut. Sketsa grafik diawali dengan menentukan  $f(x)$  dari nilai  $x$  yang dipilih, kemudian menghubungkan titik-titik yang diperoleh menjadi sebuah kurva. Pemilihan nilai  $x$  terkendala hanya dibatasi pada bilangan bulat atau bilangan yang mudah untuk dioperasikan terhadap fungsi  $f$ . Hal ini menunjukkan ketidakpastian apakah sketsa grafik dilakukan dengan benar pada nilai  $x$  yang tidak dioperasikan terhadap fungsi  $f$ . Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan suatu definisi yang jelas dan tepat untuk semua nilai  $x$  pada selang  $S$ .

### **Kemonotonan**

#### A. Definisi Kemonotonan

Jika diketahui fungsi  $f$  didefinisikan pada selang  $S$  (terbuka, tertutup ataupun bukan keduanya), maka

- 
1. fungsi  $f$  disebut **monoton naik** pada selang  $S$  jika untuk setiap pasang titik  $x_1$  dan  $x_2$  pada selang  $S$  berlaku

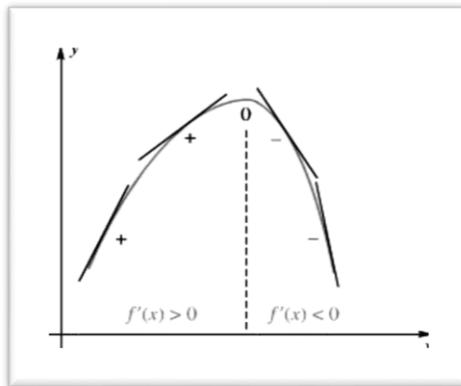
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. fungsi  $f$  disebut **monoton turun** pada selang  $S$  jika untuk setiap pasang titik  $x_1$  dan  $x_2$  pada selang  $S$  berlaku

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3. fungsi  $f$  disebut **monoton murni** jika  $f$  monoton naik atau turun pada selang  $S$

Kemonotonan suatu fungsi  $f$  pada selang  $S$ , dapat ditentukan oleh nilai dari turunan pertama fungsi tersebut. Nilai turunan pertama yaitu  $f'(x)$  menunjukkan kemiringan dari garis singgung pada grafik  $f(x)$  di titik  $x$ .



Gambar 11.1

Perhatikan Gambar 11.1

Jika  $f'(x) > 0$  maka garis singgung **naik ke kanan**.

Jika  $f'(x) < 0$  maka garis singgung **turun ke kanan**.

---

## B. Teorema Kemonotonan

Jika diketahui fungsi  $f$  kontinu dan terdiferensialkan di setiap titik di dalam selang  $S$ , maka

1. Jika  $f'(x) > 0$  untuk setiap titik  $x$  dalam selang  $S$ , fungsi  $f$  **monoton naik** pada selang  $S$
2. Jika  $f'(x) < 0$  untuk setiap titik  $x$  di dalam selang  $S$ , fungsi  $f$  **monoton turun** pada selang  $S$
3. Jika  $f'(x) = 0$  untuk setiap titik  $x$  di dalam selang  $S$ , fungsi  $f$  **nilai stasioner** pada selang  $S$

*Pembuktian:*

Diketahui fungsi  $f$  yang terdefiniskan untuk setiap titik  $x$  di dalam selang  $S$ .

Jika  $x \leq x + h \in S$ ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

1.  $f'(x) > 0$  berlaku

$$f(x+h) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x+h) > f(x)$$

Sesuai Definisi Kemonotonan maka fungsi  $f(x)$  disebut **monoton naik**

2.  $f'(x) < 0$  berlaku

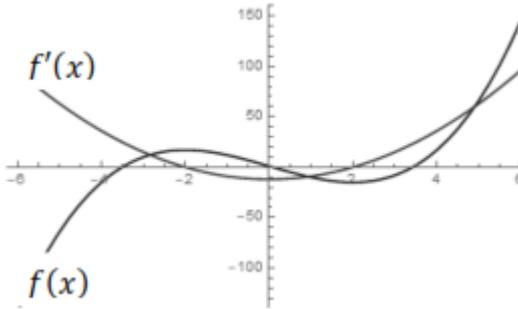
$$f(x+h) - f(x) < 0 \Rightarrow f(x+h) < f(x)$$

Sesuai Definisi Kemonotonan maka fungsi  $f(x)$  disebut **monoton turun**

---

**Contoh Soal 1**

Jika diketahui  $f(x) = x^3 - 12x + 1$ , tentukan dimana  $f$  monoton naik dan dimana  $f$  monoton turun!



*Penyelesaian:*

Turunan pertama fungsi  $f$  adalah

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2)$$

Fungsi  $f$  monoton naik jika  $f'(x) > 0$

$$3(x + 2)(x - 2) > 0$$

$$x < -2 \text{ atau } x > 2$$

Jadi fungsi  $f$  monoton naik pada selang  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Fungsi  $f$  monoton turun jika  $f'(x) < 0$

$$3(x + 2)(x - 2) < 0$$

$$-2 < x < 2$$

Jadi fungsi  $f$  monoton turun pada selang  $(-2, 2)$

**Contoh Soal 2**

Tentukan interval dimana fungsi  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  monoton naik dan monoton turun!

---

*Penyelesaian:*

Turunan pertama fungsi  $f$  adalah  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Fungsi  $f$  monoton naik jika  $f'(x) > 0$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

$$x < -1 \text{ atau } x > 1$$

Jadi fungsi  $f$  monoton naik pada selang  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Fungsi  $f$  monoton turun jika  $f'(x) < 0$

$$3(x+2)(x-2) > 0$$

$$-2 < x < 2$$

Jadi fungsi  $f$  monoton turun pada selang  $(-2, 2)$

### **Latihan Soal 1**

Tentukanlah interval yang membuat fungsi berikut ini naik atau turun!

1.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

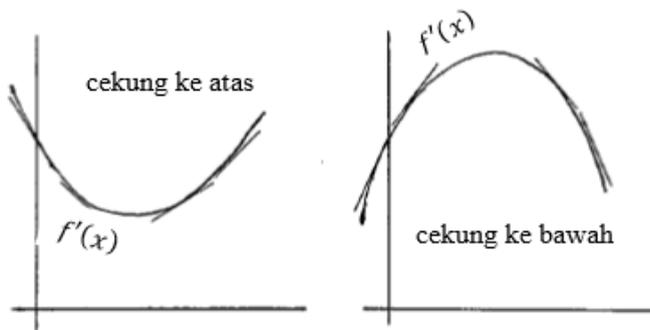
2.  $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

### **Kecekungan**

A. Definisi Kecekungan

Jika diketahui fungsi  $f$  didefinisikan pada selang  $S = (a, b)$  dengan arah grafik dari kiri ke kanan, maka

1. fungsi  $f$  disebut **cekung ke atas** pada selang  $S$  jika grafik  $f'(x)$  membentuk kurva yang berlawanan dengan arah jarum jam pada selang  $S$ ,
2. fungsi  $f$  disebut **cekung ke bawah** pada selang  $S$  jika grafik  $f'(x)$  membentuk kurva yang searah dengan arah jarum jam pada selang  $S$



Gambar 11.2

Perhatikan Gambar 11.2

Grafik fungsi  $f'(x)$  digambarkan dari kiri ke kanan bergerak melengkung ke bawah berlawanan dengan arah jarum jam menunjukkan adanya perubahan dari grafik yang turun menjadi grafik yang naik pada selang  $S = (a, b)$ , sehingga fungsi  $f$  disebut *cekung ke atas*. Namun, jika grafik  $f'(x)$  digambarkan dari kiri ke kanan bergerak melengkung ke atas yang searah dengan arah jarum jam menunjukkan adanya perubahan dari grafik yang naik menjadi grafik yang turun pada selang  $S = (a, b)$ , sehingga fungsi  $f$  disebut *cekung ke bawah*.

Kondisi ini disebut dengan kecekungan dimana disebut *cekung ke atas* atau *cekung ke bawah* dari fungsi  $f(x)$  pada selang  $S = (a, b)$ . Sesuai Teorema Kemonotonan, maka terdapat kriteria sederhana dalam menentukan kecekungan dari kurva dari fungsi  $f(x)$  pada selang  $S = (a, b)$ , yaitu turunan pertama dari  $f'(x)$  atau turunan kedua dari  $f(x)$ . Hal ini menunjukkan bahwa turunan kedua  $f(x)$  mempengaruhi kecengungan dari suatu fungsi  $f(x)$

---

## B. Teorema Kecekungan

Jika diketahui fungsi  $f$  terdiferensialkan dua kali dalam selang  $S = (a, b)$ , berlaku

1. Jika  $f''(x) > 0$  untuk setiap titik  $x$  dalam selang  $S = (a, b)$ , fungsi  $f(x)$  **cekung ke atas** pada selang  $S = (a, b)$
2. Jika  $f''(x) < 0$  untuk setiap titik  $x$  dalam selang  $S = (a, b)$ , fungsi  $f(x)$  **cekung ke bawah** pada selang  $S = (a, b)$

*Pembuktian:*

Teorama Kemonotonan:

1.  $f'(x) > 0, \forall x \in S \Rightarrow f(x)$  naik pada selang  $S$
2.  $f'(x) < 0, \forall x \in S \Rightarrow f(x)$  turun pada selang  $S$

Sehingga  $f''(x)$  adalah turunan pertama  $f'(x)$  pada selang  $S$ .

Jika  $f'(x) = g(x)$ , maka sesuai Teorama Kemonotonan:

1.  $g(x) > 0, \forall x \in S \Rightarrow f(x)$  naik pada selang  $S$
2.  $g(x) < 0, \forall x \in S \Rightarrow f(x)$  turun pada selang  $S$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

1.  $f''(x) > 0, \forall x \in S \Rightarrow f'(x)$  naik pada selang  $S$   
 $f'(x)$  naik pada  $S \Rightarrow f(x)$  cekung ke atas pada selang  $S = (a, b)$
2.  $f''(x) < 0, \forall x \in S \Rightarrow f'(x)$  turun pada selang  $S$   
 $f'(x)$  turun pada  $S \Rightarrow f(x)$  cekung ke bawah pada selang  $S = (a, b)$

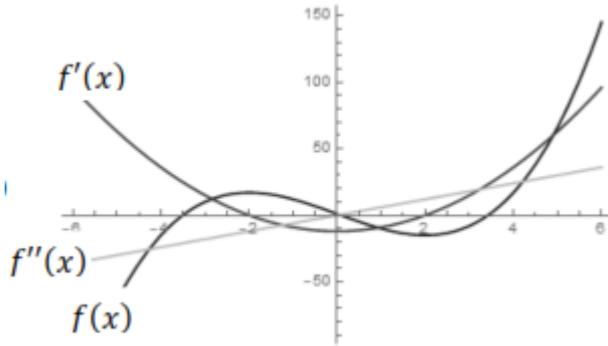
Namun, jika  $f(x)$  kontinu di  $x = k$ , maka  $(k, f(k))$  adalah suatu titik stasioner dari grafik fungsi  $f(x)$  yang berlaku jika  $f'(k)$  berada di antara cekung ke atas dan cekung ke bawah atau tidak keduanya. Jika  $f'(k) = 0$

---

maka  $f(k)$  adalah nilai stasioner  $f(x)$  pada  $x = k$ . Nilai ini dapat sebagai nilai maksimum, nilai minimum atau titik belok pada grafik  $f(x)$ .

**Contoh Soal 3**

Jika diketahui  $f(x) = x^3 - 12x + 1$ , tentukan dimana  $f$  cekung ke atas dan dimana  $f$  cekung ke bawah!



*Penyelesaian:*

Turunan pertama fungsi  $f$  adalah

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2)$$

Turunan kedua fungsi  $f$  adalah

$$f''(x) = 6x$$

Fungsi  $f$  cekung ke atas jika  $f''(x) > 0$

$$6x > 0$$

$$x > 0$$

Jadi fungsi  $f$  cekung ke atas pada selang  $(0, \infty)$

Fungsi  $f$  cekung ke bawah jika  $f''(x) < 0$

$$6x < 0$$

$$x < 0$$

Jadi fungsi  $f$  cekung ke bawah pada selang  $(-\infty, 0)$

---

**Contoh Soal 4**

Tentukan selang dimana fungsi  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , cekung ke atas dan cekung ke bawah!

*Penyelesaian:*

Turunan pertama fungsi  $f$  adalah  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

Turunan kedua fungsi  $f$  adalah  $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

Fungsi  $f$  cekung ke atas jika  $f''(x) > 0$

$$\frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} > 0$$

$$2x(x^2 - 3) > 0$$

Jadi fungsi  $f$  cekung ke atas pada selang  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

Fungsi  $f$  cekung ke bawah jika  $f''(x) < 0$

$$\frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} < 0$$

$$2x(x^2 - 3) < 0$$

Jadi fungsi  $f$  cekung ke bawah pada selang  $(-\infty, \sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

**Latihan Soal 2**

Tentukan selang pada fungsi berikut ini cekung ke atas dan cekung ke bawah!

1.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

2.  $g(x) = \frac{x-1}{x^2}$

---

## Uji Kompetensi

A. Pilihlah satu jawaban yang paling benar!

1. Fungsi  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  untuk  $0 < x < \infty$  maka selang fungsi  $f(x)$  monoton turun adalah ...
  - a.  $(-1,1)$
  - b.  $(1, \infty)$
  - c.  $(0,1)$
  - d.  $(-\infty,1)$
  - e.  $(-1, \infty)$
2. Selang untuk monoton naik pada fungsi  $f(x) = x^3 - 12x$  dalam selang  $(-5, 5)$  adalah ...
  - a.  $(-2,2)$
  - b.  $(-5, -2) \cup (2,5)$
  - c.  $(-5,2)$
  - d.  $(-5,2) \cup (-2,5)$
  - e.  $(-2,5)$
3. Fungsi  $f(x) = |\sin x|$  untuk  $0 < x < 2\pi$  monoton naik pada selang ...
  - a.  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$
  - b.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  atau  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
  - c.  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$
  - d.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  atau  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
  - e.  $0 < x < \pi$
4. Selang pada fungsi  $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$  yang monoton turun adalah ...

- 
- a. (0,1)  
b. (1,  $\infty$ )  
c. (-1,1)  
d. ( $-\infty$ , -1)  
e. (-1,0)
5. Grafik fungsi  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$  pada selang (-1, 3) adalah ...  
a. Monoton turun  
b. Monoton naik  
c. Tidak monoton  
d. Monoton naik lalu turun  
e. Monoton turun lalu naik
6. Fungsi  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50$  cekung ke bawah pada selang ...  
a. (0,6)  
b. (6,  $\infty$ )  
c. (-6,6)  
d. ( $-\infty$ , -6)  
e. (-6,0)
7. Grafik fungsi  $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$  cekung ke bawah dalam selang  $-2\pi < x < 2\pi$  adalah ...  
a.  $-\infty < x < \pi$   
b.  $0 < x < \pi$   
c.  $-2\pi < x < 0$   
d.  $0 < x < 2\pi$   
e.  $\pi < x < \infty$
-

- 
8. Selang pada fungsi  $f(x) = x^3 - 8x^2 + x + 42$  yang cekung ke atas adalah ...
- a.  $(-\infty, \frac{8}{3})$
  - b.  $(-\frac{8}{3}, \infty)$
  - c.  $(\frac{8}{3}, \infty)$
  - d.  $(-\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$
  - e.  $(-\infty, -\frac{8}{3})$
9. Fungsi  $f(x) = 4x^4 - 11x^2 - 5x - 3$  untuk  $-\infty < x < \infty$  cekung ke bawah pada selang ...
- a.  $-\frac{1}{12}\sqrt{66} < x < \frac{1}{12}\sqrt{66}$
  - b.  $-\infty < -\frac{1}{12}\sqrt{66}$  atau  $0 < x < \frac{1}{12}\sqrt{66}$
  - c.  $-\frac{1}{12}\sqrt{66} < x < 0$
  - d.  $-\frac{1}{12}\sqrt{66} < x < 0$  atau  $\frac{1}{12}\sqrt{66} < x < \infty$
  - e.  $0 < x < \frac{1}{12}\sqrt{66}$
10. Grafik fungsi  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  adalah ...
- a. Cekung ke atas
  - b. Cekung ke bawah
  - c. Tidak cekung
  - d. Cekung atas dan bawah
  - e. Tidak terdefinisi

---

B. Uraikan jawaban dengan benar

1. Tentukanlah selang pada fungsi  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  yang monoton atau monoton turun!
2. Tentukan selang pada fungsi  $f(x) = 2x^2 - \sin^2 x$  yang cekung ke atas atau cekung ke bawah!
3. Sketsa grafik fungsi  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ !
4. Sketsa grafik fungsi  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ !
5. Tentukanlah nilai a, b, c agar fungsi polinomial kubik

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  menjadi fungsi naik!

---

## Daftar Pustaka

- Pinem, Mhd. Daud. (2015). *Kalkulus Untuk Perguruan Tinggi*. Penerbit: Rekayasa Sains. Bandung.
- Razali, Muhammad. dkk. (2010). *Kalkulus Diferensial*. Penerbit: Ghalia Indonesia. Bogor.
- Subandi, Ayub. (2019). *Aljabar dan Kalkulus*. Penerbit: Rekayasa Sains. Bandung.
- Sudaryono. (2017). *Kalkulus Diferensial dan Integral*. Penerbit: Kencana. Jakarta

## Profil Penulis



### **Kus Andini Purbaningrum**

Sejak dini, penulis berminat pada bidang sains khususnya bidang fisika. Hal ini menjadi dorongan bagi penulis untuk memilih menempuh pendidikan di Departemen Fisika Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Airlangga di Surabaya dan lulus pada tahun 2008. Kemudian pada tahun 2009, penulis memilih untuk melanjutkan pendidikan ke program Pascasarjana pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Sriwijaya di Palembang hingga lulus tahun 2011.

Penulis mengabdikan sebagai dosen di Universitas PGRI Palembang pada Program Studi Pendidikan Fisika sejak tahun 2010-2012. Kemudian tahun 2012, penulis mengabdikan sebagai dosen di Universitas Muhammadiyah Tangerang hingga saat ini. Penulis telah lama mengembangkan keterampilan dalam menulis suatu modul perkuliahan hingga buku ajar. Kebutuhan akan bahan ajar pada mata kuliah yang diampu oleh penulis menjadi dasar ketertarikan penulis untuk mencoba menghasilkan bahan ajar yang relevan. Beberapa judul yang telah dihasilkan adalah Trigonometri dan Geometri Analitik Ruang hingga *Microteaching*. Penulis akan terus mengembangkan keterampilan dalam menulis hingga mampu memberikan kontribusi maksimal dalam ketercapaian pemahaman informasi bagi pembaca.

Email Penulis: kusandini27@gmail.com

## PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

**Jan Setiawan**

Badan Riset dan Inovasi Nasional - Universitas Pamulang

### **Pengantar Persamaan Diferensial Biasa**

Persamaan yang dibangun oleh satu atau dua fungsi beserta turunannya dikenal dengan persamaan diferensial. Turunan dari fungsi didefinisikan sebagai laju perubahan suatu fungsi pada titik tertentu. Persamaan diferensial digunakan dalam berbagai bidang baik bidang sosial maupun keteknikan. Persamaan diferensial secara umum dituliskan dalam bentuk *derivative* sebagai berikut (Weir, Hass dan Thomas. 2011; Ross, 2007),

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

dengan  $f(x)$  merupakan fungsi yang diketahui, dan  $y$  merupakan fungsi dari  $x$  yang tidak diketahui. Persamaan diferensial dapat mengandung turunan parsial maupun turunan biasa. Persamaan diferensial menggambarkan sebuah hubungan antara kuantitas yang kontinu bervariasi terhadap perubahan yang terjadi pada kuantitas lainnya. Dapat dikatakan juga persamaan diferensial mengandung variabel tak bebas dan turunannya terhadap variabel bebas. Untuk persamaan diferensial mengandung turunan dari variabel dependen (tak bebas) terhadap satu variabel independen (bebas)

---

disebut dengan **persamaan diferensial biasa** (PDB) yang berikutnya hanya dituliskan sebagai persamaan diferensial. Sedangkan persamaan diferensial yang memuat turunan dari variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas dikenal sebagai **persamaan diferensial parsial** (PDP) (Stewart, Clegg dan Watson, 2020). **Tingkat/orde** suatu persamaan diferensial dapat ditentukan dari tingkat tertinggi yang dimiliki turunan dalam persamaannya. Contoh dari tingkat persamaan diferensial sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = 2(1+x) \quad , \text{tingkat persamaan diferensialnya adalah } 1$$

Contoh dari persamaan diferensial ini turunan tertingginya hanya 1 ditunjukkan oleh  $dy/dx$ .

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y - 5 = 0 \quad , \text{tingkat persamaan diferensialnya adalah } 2$$

Pada contoh ini ada dua turunan yaitu  $d^2y/dt^2$  dengan  $dy/dt$ , sebagai tingkatnya menggunakan turunan tertingginya yaitu  $d^2y/dt^2$ , sehingga tingkatnya adalah 2.

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 2\frac{d^2y}{dz^2} + 3\frac{dy}{dz} + y = 7z \quad , \text{tingkat persamaan diferensialnya adalah } 3$$

Serupa dengan contoh sebelumnya, pada persamaan diferensial ini memiliki suku turunan lebih dari satu. Tingkat persamaan diferensial ditentukan oleh suku  $d^3y/dz^3$ , sehingga tingkatnya adalah 3.

Penentuan **derajat** persamaan diferensial dapat ditentukan oleh pangkat tertinggi yang dimiliki oleh

---

---

turunan dengan tingkat tertinggi dalam persamaannya. Derajat persamaan diferensial dapat dicontohkan sebagai berikut,

$$y + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \quad , \text{ persamaan diferensial tingkat 2,}$$

$$= 2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{derajat 1}$$

Pada persamaan diferensial ini memiliki dua suku turunan dengan tingkat turunan yang berbeda. Untuk derajat persamaan diferensial ditentukan pangkat pada suku dengan tingkat turunan tertinggi, sehingga persamaan diferensial ini memiliki tingkat 2 dengan derajat satu.

$$\left[ \frac{d^3y}{dt^3} \right]^3 + 3 \frac{d^2y}{dt^2} + y \quad , \text{ persamaan diferensial tingkat 3,}$$

$$= 5 \quad \text{derajat 3}$$

Untuk persamaan diferensial ini, memiliki tingkat 3 dengan derajat 3. Hal ini dapat dilihat pangkat tertinggi berada pada suku turunan tertingginya.

Persamaan diferensial biasa dengan orde-n dikatakan linier apabila memiliki bentuk (Ross, 2007),

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y \quad (2)$$

$$= f(x)$$

dengan  $a_0(x) \neq 0$ . Bila  $f(x) = 0$ , persamaan diferensial linier tersebut dikenal sebagai persamaan diferensial **homogen** atau tereduksi atau komplementer. Sedangkan untuk  $f(x) \neq 0$  persamaan diferensial linier tersebut dikenal sebagai persamaan diferensial **tak homogen** atau lengkap.

---

Dalam permasalahan persamaan diferensial ada kalanya diberikan nilai kondisi awal sebagai syarat. Pada persamaan diferensial dengan syarat awal dikenal dengan **permasalahan nilai awal**. Sangat dimungkinkan syarat yang diberikan lebih dari satu nilai, nilai ini dikenal sebagai syarat batas. Persamaan diferensial dengan syarat batas dikenal dengan **permasalahan nilai batas**. Solusi dari persamaan diferensial sendiri dapat dibagi atas **bentuk eksplisit** dan **implisit**. Solusi persamaan diferensial eksplisit merupakan solusi yang memiliki bentuk  $y = f(x)$  di mana variabel tak bebas  $y$  dapat dibedakan dengan jelas dari variabel bebas ( $x$ )-nya. Untuk solusi persamaan diferensial implisit di mana solusi yang diperoleh memiliki bentuk  $f(x) = 0$  di mana variabel tak bebas  $y$  tidak sepenuhnya dapat dibedakan dari variabel bebas ( $x$ )-nya. Selanjutnya solusi dari persamaan diferensial dapat dibedakan juga sebagai solusi **umum**, **khusus** dan **singular**. Seperti pada umumnya penyelesaian permasalahan integral tak tentu, pada solusi umum untuk persamaan diferensial apabila mengandung konstanta yang tidak diketahui misalkan  $c$ . Pada solusi khusus, seperti pada penyelesaian integral tentu, solusi khusus persamaan diferensial tidak lagi mengandung konstanta  $c$ , yang diperoleh karena adanya nilai awal atau nilai batas. Untuk solusi singular merupakan solusi yang tidak dapat ditentukan secara langsung hanya melakukan substitusi atau manipulasi untuk memperoleh nilai konstanta pada solusi umumnya.

### **Persamaan Diferensial Orde Satu**

Bentuk persamaan diferensial orde satu selain dapat dituliskan seperti bentuk pada Persamaan 1, dapat disampaikan dalam bentuk *differential* yang ditulis berupa (Ross, 2007),

---

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

Setiap persamaan diferensial sangat dimungkinkan ditulis berupa Persamaan 1 ataupun seperti bentuk Persamaan 3. Contohnya sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + y}{x + 3y}$$

bila ditulis seperti pada Persamaan 3 menjadi,

$$(x + 3y)dy = (\sin x + y)dx$$

$$(\sin x + y)dx - (x + 3y)dy = 0$$

$$(\sin x + y)dx + (3y - x)dy = 0$$

Terdapat beberapa bentuk persamaan diferensial orde satu yang mempengaruhi teknik penyelesaiannya.

A. Persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan integrasi langsung (Stewart, Clegg dan Watson, 2020).

Sebagai contoh tentukan penyelesaian persamaan diferensial untuk

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{2}{x}$$

Jawab:

$$dy = \left(3x + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$dy = 3x dx + \left(\frac{2}{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int 3x dx + \int \left(\frac{2}{x}\right) dx$$

dikarenakan pada kedua ruas merupakan integrasi tak tentu, cukup menuliskan satu konstanta saja.

$$y = \frac{3}{2}x^2 + 2 \ln|x| + c$$

---

Dari contoh tersebut, nilai  $c$  tidak dapat ditentukan, kecuali diketahui nilai awal atau nilai batas untuk persamaan diferensialnya. Solusi dengan konstanta sembarang  $c$  disebut sebagai solusi umum (primitif). Sebagai contoh tentukan penyelesaian persamaan diferensial untuk

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{2x}$$

bila diketahui  $y(0) = 3$ .

Jawab:

$$dy = 3e^{2x} dx$$

$$\int dy = \int 3e^{2x} dx$$

$$y = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

diketahui nilai awal  $y(0) = 3$ , nilai  $c$  ditentukan dengan mengganti  $x = 0$ , sehingga menjadi

$$y(0) = \frac{3}{2}e^{2(0)} + c = 3$$

$$= \frac{3}{2}(1) + c = 3$$

$$c = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Solusi khusus dari persamaan diferensial tersebut adalah,

$$y = \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(e^{2x} + 1)$$

- B. Persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel (Stewart, Clegg dan Watson, 2020; Nagle, Saff dan Snider, 2019).

---

Dalam persamaan diferensial tertentu, adakalanya variabel tak bebas ( $y$ ) dapat dipisahkan dari variabel bebas ( $x$ ) sehingga berbeda ruas di mana variabel tak bebas ( $y$ ) berkumpul dengan  $dy$  dan variabel bebas ( $x$ ) berkumpul dengan  $dx$ . Setelah pemisahan variabel, masing-masing dapat diselesaikan secara terpisah. Sebagai contoh tentukan penyelesaian persamaan diferensial untuk,

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-y}(\cos x)$$

Jawab:

$$\frac{1}{2e^{-y}} dy = (\cos x) dx$$

$$\int \frac{1}{2e^{-y}} dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{1}{2} \int e^y dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{1}{2} e^y = \sin x + c$$

$$e^y = 2 (\sin x + c)$$

$$\ln e^y = \ln(2 (\sin x + c))$$

$$y = \ln(2 (\sin x + c))$$

dengan demikian solusi dari  $\frac{dy}{dx} = 2e^{-y}(\cos x)$  adalah  $y = \ln(2 (\sin x + c))$ .

- C. Persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan substitusi  $y = vx$  (Ross, 2004).

Bentuk persamaan diferensial yang dibahas merupakan persamaan diferensial homogen yang tidak dapat diselesaikan dengan integrasi langsung maupun pemisahan variabel. Proses penyelesaiannya dengan melakukan substitusi  $x$  dari persamaan  $y = vx$ ,

---

dengan  $v$  merupakan fungsi dari  $x$ . Turunan pertama dari persamaan ini yang dapat dituliskan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad (4)$$

Berikut ini contoh persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan substitusi  $y = vx$ ,

$$(x + y)dx - x dy = 0$$

Jawab:

$$x dy = (x + y)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

Selanjutnya substitusikan  $y = vx$ , sehingga persamaannya dapat dituliskan menjadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + vx}{x} = 1 + v$$

Kemudian untuk suku  $dy/dx$  dapat disubstitusikan dengan hubungan pada Persamaan 4, sehingga dapat dituliskan menjadi,

$$v + x \frac{dv}{dx} = 1 + v$$

$$x \frac{dv}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\int dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$v = \ln|x| + c$$

substitusikan kembali  $v = y/x$  sehingga diperoleh,

---

---

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + c$$

$$y = x \ln|x| + cx$$

dengan demikian solusi umum dari  $(x + y)dx - x dy = 0$  adalah  $y = x \ln|x| + cx$ .

- D. Persamaan diferensial linier dalam bentuk  $[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$  (Weir, Hass dan Thomas. 2011; Nagle, Saff dan Snider, 2019).

Persamaan diferensial bentuk ini dapat dituliskan juga dalam bentuk,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$P(x)$  dan  $Q(x)$  dapat berupa fungsi  $x$  ataupun konstanta. Persamaan diferensial ini dapat diselesaikan dengan mengalikan kedua ruas dengan **faktor integrasi ( $\mu$ )**,

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

Sebagai contoh tentukan penyelesaian untuk,

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$$

diketahui  $P(x) = 2$  dan  $Q(x) = 3e^x$ , faktor integrasi dapat dituliskan sebagai,  $\mu = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ .

Setiap ruas dikalikan dengan faktor integrasi,

$$e^{2x} \left( \frac{dy}{dx} + 2y \right) = e^{2x} (3e^x)$$

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{3x}$$

dapat dilihat bentuk diruas kiri merupakan bentuk diferensiasi dari

$$\frac{d}{dx} (e^{2x}y) = e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y$$

---

sehingga dapat disusun ulang menjadi,

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = 3e^{3x}$$

$$d(e^{2x}y) = 3e^{3x}dx$$

$$\int d(e^{2x}y) = \int 3e^{3x}dx$$

$$e^{2x}y = e^{3x} + c$$

penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah,

$$y = \frac{e^{3x} + c}{e^{2x}} = e^x + \frac{c}{e^{2x}}$$

- E. Persamaan diferensial linier Bernoulli (Weir, Hass dan Thomas. 2011; Nagle, Saff dan Snider, 2019).

Bentuk persamaan diferensial Bernoulli adalah  $[P(x)y - Q(x)y^n]dx + dy = 0$  yang dapat dituliskan juga sebagai,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$P(x)$  dan  $Q(x)$  dapat berupa fungsi  $x$  ataupun konstanta. Sebagai contoh tentukan penyelesaian untuk,

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

setiap ruas dibagi dengan  $y^3$

$$\frac{\frac{dy}{dx} + y}{y^3} = \frac{xy^3}{y^3}$$

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

dimisalkan  $z = y^{-2}$  dengan turunan pertamanya terhadap  $x$  adalah  $dz/dx = -2y^{-3} dy/dx$ . Agar variabel  $z$  dapat disubstitusikan ke dalam persamaan di atas, perlu diubah dengan mengalikan ruas kiri dengan  $-2/-2$ ,

$$\left(\frac{-2}{-2}\right)y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

selanjutnya substitusikan  $z$ , sehingga menjadi,

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + z = x$$

atau ditulis dalam bentuk,

$$\frac{dz}{dx} - 2z = -2x$$

Bentuk ini memenuhi bentuk persamaan diferensial linier dalam bentuk  $[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$ , dengan  $P(x) = -2$  dan  $Q(x) = -2x$ . Faktor integrasi ditentukan dengan  $\mu = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ .

Selanjutnya setiap ruas dikalikan dengan faktor integrasi menjadi,

$$e^{-2x}\left(\frac{dz}{dx} - 2z\right) = e^{-2x}(-2x)$$

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} - 2ze^{-2x} = -2x(e^{-2x})$$

$$e^{-2x}z = \int -2x(e^{-2x}) dx$$

$$e^{-2x}z = -2\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + c$$

$$e^{-2x}z = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

$$z = x + \frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-2x}}$$

---

Dari permisalan diketahui  $z = y^{-2}$ , dengan demikian  $z$  yang diperoleh dapat dituliskan kembali menjadi

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-2x}}$$

untuk penyelesaian persamaan diferensial dari  $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$  adalah,

$$y = \pm \left( x + \frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-2x}} \right)^{-1/2}$$

- F. Persamaan diferensial eksak dan faktor integrasi (Ross, 2007; Polyanin dan Zaitsev, 2017; Nagle, Saff dan Snider, 2019).

Persamaan diferensial yang dituliskan dalam bentuk Persamaan 3, dikatakan eksak apabila terdapat fungsi  $F(x,y)$  yang terdiri dari dua variabel  $x$  dan  $y$  sedemikian sehingga bentuk diferensial totalnya memiliki bentuk yang sama dengan fungsi tersebut. Dalam penyelesaiannya perlu dilakukan identifikasi apakah persamaan diferensial tersebut eksak atau tidak. Bila persamaan diferensial tidak eksak, dapat diubah menjadi eksak dengan menentukan **faktor integrasi**. Bila diketahui persamaan diferensial dalam bentuk,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Di mana  $M$  dan  $N$  memiliki turunan pertama parsial yang kontinu untuk setiap  $(x,y)$  pada domain  $R$ . Persamaan diferensial **eksak** memiliki hubungan

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (5)$$

untuk setiap  $(x,y)$  pada domain  $R$ .

---

Penyelesaiannya dapat melakukan integrasi  $M(x, y)$  terhadap  $x$  atau  $N(x, y)$  terhadap  $y$ .

1) Menggunakan  $M(x, y)$

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = c$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = N(x, y)$$

dari persamaan ini diperoleh  $g'(y)$  yang kemudian diintegrasikan terhadap  $y$  untuk memperoleh nilai  $g(y)$ . Solusi umum dari persamaan diferensial eksak dalam bentuk

$$\int M(x, y) dx + g(y) = c$$

2) Menggunakan  $N(x, y)$

$$Q(x, y) = \int N(x, y) dy + r(x) = c$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = M(x, y)$$

dari persamaan ini diperoleh  $r'(x)$  yang kemudian diintegrasikan terhadap  $x$  untuk memperoleh nilai  $r(x)$ . Solusi umum dari persamaan diferensial eksak dalam bentuk

$$\int N(x, y) dy + r(x) = c$$

Sebagai contoh tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut,

$$(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$$

Jawab:

---

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini lakukan pengujian untuk menentukan persamaan diferensial tersebut eksak atau tidak eksak melalui hubungan yang dituliskan pada Persamaan 5.

$$M(x, y) = 3x + 2y$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial M(3x + 2y)}{\partial y} = 2$$

dan

$$N(x, y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial N(2x + y)}{\partial x} = 2$$

terlihat syarat Persamaan 5 terpenuhi, sehingga persamaan diferensial  $(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$  merupakan persamaan diferensial eksak.

Untuk penyelesaian kali ini dilakukan menggunakan integrasi  $M(x, y)$  terhadap  $x$

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = c$$

$$F(x, y) = \int (3x + 2y) dx + g(y)$$

$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx + g(y) \right)$$

$$2x + y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{3}{2}x^2 + 2xy + g(y) \right)$$

$$2x + y = 2x + g'(y)$$

$$g'(y) = y$$

diperoleh  $g(y) = \frac{1}{2}y^2$ , sehingga  $F(x, y)$  dapat dituliskan menjadi

---


$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 = c$$

dengan demikian solusi dari  $(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$  adalah,

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 = c$$

Untuk penyelesaian persamaan diferensial **tak eksak** diperlukan menentukan faktor integrasi  $\mu(x, y)$  sehingga dapat dibentuk persamaan diferensial bentuk eksaknya. Secara singkatnya bentuk  $\mu(x, y)$  yang diperoleh dari hubungan  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  dituliskan sebagai berikut,

$$\mu(x, y) = - \frac{\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} N(x, y)}{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}} \quad (6)$$

Berikut ini beberapa kasus dalam penentuan faktor integral,

1. Bilamana  $\frac{1}{N(x, y)} \left( \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) = f(x)$ , maka faktor integrasinya dapat dituliskan sebagai,

$$\mu(x, y) = \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

2. Bilamana  $\frac{1}{M(x, y)} \left( \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) = g(y)$ , maka faktor integrasinya dapat dituliskan sebagai,

$$\mu(x, y) = \mu(y) = e^{\int g(y) dy}$$

3. Bilamana  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  merupakan persamaan diferensial homogen dan  $xM(x, y) +$

---

$yN(x,y) \neq 0$  maka faktor integrasinya dapat dituliskan sebagai,

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}$$

4. Bilamana  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  dapat dibentuk menjadi  $xf(xy) + yg(xy) = 0$  dan  $xM(x,y) - yN(x,y) \neq 0$  maka faktor integrasinya dapat dituliskan sebagai,

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) - yN(x,y)}$$

Sebagai contoh, akan diselesaikan persamaan diferensial berikut,

$$(3 - 2y)dx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Jawab:

Pertama, lakukan pengujian eksak atau tidaknya persamaan diferensial tersebut dengan melihat,

$$M(x,y) = 3 - 2y$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M(3 - 2y)}{\partial y} = -2$$

dan

$$N(x,y) = x^2 - 1$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x^2 - 1)}{\partial x} = 2x$$

Terlihat  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ , dengan demikian persamaan diferensial tersebut tak eksak. Faktor integrasinya ditentukan

---


$$f(x) = \frac{1}{N(x,y)} \left( \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{1}{(x^2 - 1)} (-2 - 2x) = \frac{-2}{(x - 1)}$$

Dari kondisi  $P(x)$  terlihat hanya memuat variabel  $x$  saja, dengan demikian faktor integrasinya adalah

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int \frac{-2}{x-1} dx} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Selanjutnya faktor integrasi ini dikalikan ke persamaan diferensialnya sehingga diperoleh persamaan diferensial eksak.

$$\frac{1}{(x-1)^2} (3-2y) dx + \frac{1}{(x-1)^2} (x^2-1) dy = 0$$

$$\left( \frac{3-2y}{(x-1)^2} \right) dx + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) dy = 0$$

Pembuktian eksaknya,

$$M(x,y) = \frac{3-2y}{(x-1)^2}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial M\left(\frac{3-2y}{(x-1)^2}\right)}{\partial y} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

dan

$$N(x,y) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\partial x} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Terlihat  $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ , dengan demikian persamaan diferensial tersebut sudah menjadi persamaan diferensial eksak. Langkah

---

selanjutnya menyelesaikan persamaan diferensial eksak untuk memperoleh solusi umumnya.

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y) = c$$

$$F(x, y) = \int \left( \frac{3 - 2y}{(x - 1)^2} \right) dx + g(y)$$

$$F(x, y) = -\frac{3 - 2y}{x - 1} + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx + g(y) \right)$$

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{3 - 2y}{x - 1} + g(y) \right)$$

$$\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2}{x - 1} + g'(y)$$

$$g'(y) = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

diperoleh  $g(y) = y$ , sehingga  $F(x, y)$  dapat dituliskan menjadi

$$F(x, y) = -\frac{3 - 2y}{x - 1} + y = c$$

dengan demikian solusi dari  $(3 - 2y)dx + (x^2 - 1)dy = 0$  adalah,

$$\frac{y + xy - 3}{x - 1} = c$$

### Soal Latihan

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial berikut,

- $$\frac{dy}{dx} = 2x(y^2 + 1)$$

- 
2.  $(e^y - 1) \frac{dy}{dx} = 2 + \cos x$
  3.  $xy' = y + 3$
  4.  $y' + y = 2 \sin x$
  5.  $xy' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$
  6.  $xy' + y = 3x^2$
  7.  $(e^y - x)dx + (xe^y - e^{2y})dy = 0$
  8.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{x \sin y - y^2}$
  9.  $(3x + 2y^2)dx + 2xy dy = 0$
  10.  $xy^3 dx + (x^2 y^2 + 1)dy = 0$

## Daftar Pustaka

- Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2019). *Fundamentals of differential equations*. Harlow, United Kingdom: Pearson Education Limited.
- Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (2017). *Handbook of ordinary differential equations: exact solutions, methods, and problems*. Chapman and Hall/CRC.
- Ross, C. C. (2004). *Differential equations: an introduction with Mathematica®*. Springer Science & Business Media.
- Ross, S. L. (2007). *Differential equations*. John Wiley & Sons.
- Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2020). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning
- Weir, M. D., Hass, J., & Thomas, G. B. (2011). *Thomas' Calculus, with Second-order Differential Equations*. Addison-Wesley.

## **Profil Penulis**

### **Jan Setiawan**



Penulis lahir di Jakarta pada tahun 1980. Saat ini penulis adalah staf Peneliti Ahli Madya pada Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN). Penulis menyelesaikan studi S1 di prodi Fisika Institut Pertanian Bogor pada tahun 2003. Penulis melanjutkan studi S2 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia yang diselesaikan pada tahun 2010. Penulis menyelesaikan studi S3 pada tahun 2015 di prodi Ilmu Bahan-bahan Universitas Indonesia. Bidang kepakaran penelitian Penulis adalah teknik material. Selain berkarir sebagai peneliti Penulis juga aktif menjadi pengajar pada Program Studi Teknik Elektro - Universitas Pamulang. Penulis juga aktif menjadi mitra bestari untuk jurnal ilmiah baik nasional maupun internasional. Penulis mulai berkecimpung dalam penulisan buku untuk bidang MIPA dan keteknikan semenjak tahun 2020.

Email Penulis: [jansetiawan.lecturer@gmail.com](mailto:jansetiawan.lecturer@gmail.com)

- 1 SISTEM BILANGAN REAL  
Suri Toding Lembang
- 2 PERTIDAKSAMAAN, INTERVAL, DAN NILAI MUTLAK  
Ayunda Sriwahyuningrum
- 3 DEFINISI DAN PENGOPERASIAN FUNGSI  
Ul'fah Hernaeny
- 4 LIMIT FUNGSI  
Nurhayati
- 5 KONTINUITAS FUNGSI  
Farah Indrawati
- 6 DEFINISI TURUNAN  
Andry Fitriani
- 7 TEOREMA TURUNAN FUNGSI ALJABAR  
Rofinda Taubah
- 8 NILAI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI, EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA  
I Putu Tedy Indrayana
- 9 PENERAPAN ATURAN RANTAI UNTUK MENENTUKAN TURUNAN  
Sudirman
- 10 TURUNAN TINGKAT TINGGI  
Seruni
- 11 TURUNAN FUNGSI IMPLISIT  
Iman Noor
- 12 NILAI EKSTRIM  
Prahesti Tirta Safitri
- 13 KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN  
Kus Andini Purbaningrum
- 14 PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA  
Jan Setiawan

*Editor :*

Suci Haryanti

Untuk akses **Buku Digital**,  
Scan **QR CODE**



**Media Sains Indonesia**  
Melong Asih Regency B.40, Cijerah  
Kota Bandung - Jawa Barat  
Email : [penerbit@medsan.co.id](mailto:penerbit@medsan.co.id)  
Website : [www.medsan.co.id](http://www.medsan.co.id)

