

Universidad  
Autónoma  
Metropolitana



Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

# Sobre los fundamentos geométricos de la propagación de la luz en medios

DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA DE MATERIALES  
22 DE MAYO DE 2023

*David García Peláez Cruz*

*Director de tesis:*

*Dr. César Simón López Monsalvo  
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A*

*Co-Director de tesis:*

*Dr. Alberto Rubio Ponce  
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A*

## **Agradecimientos**

Agradezco a la UAM- Azcapotzalco y al posgrado en Ciencias e Ingeniería por haberme dado la oportunidad de realizar mi proyecto doctoral. Al área de Física Atómica Molecular Aplicada (FAMA) por todo el apoyo, los espacios y las herramientas de trabajo para poder desarrollar este proyecto de manera satisfactoria. Quiero agradecer además al CONACYT por la beca doctoral CVU 425313. Agradezco a mi familia y amigos por el apoyo. Sin ellos no estaría aquí...

# 1. Contenido

<b>1. Contenido</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>3. Electromagnetismo</b>	<b>9</b>
3.1. Nociones básicas de electromagnetismo con cálculo vectorial . . . . .	10
3.2. Nociones básicas de electromagnetismo en formas diferenciales . . . . .	12
3.3. Relaciones constitutivas geométricas . . . . .	18
3.4. Conductores y ley de Ohm . . . . .	25
<b>4. La métrica óptica y algunas aplicaciones</b>	<b>29</b>
4.1. La permitividad y permeabilidad en términos del tensor constitutivo . . . . .	29
4.2. La métrica óptica . . . . .	32
4.2.1. Ejemplos de medios equivalentes . . . . .	32
4.3. La geometría de medios en movimiento . . . . .	37
4.3.1. Medio en rotación con transformación relativista . . . . .	44
4.3.2. Medio óptico con geometría no trivial . . . . .	46
<b>5. Geometría de Contacto y Principio de Huygens</b>	<b>49</b>
5.1. Ecuaciones diferenciales y geometría . . . . .	50
5.2. Conceptos básicos de geometría de contacto . . . . .	54
5.2.1. Mecánica clásica con conceptos de geometría de contacto . . . . .	54
5.2.2. Flujos geodésicos . . . . .	56
5.2.3. Elementos de contacto y transformaciones de contacto . . . . .	57
5.3. El principio de Huygens y la propagación de frentes de ondas . . . . .	60
5.3.1. Frentes de onda y subvariedades isotrópicas . . . . .	62
<b>6. Propagación de la luz en medios ópticos</b>	<b>66</b>
6.1. La variedad del medio . . . . .	66
6.2. Rayos, frentes de onda y el flujo de Reeb . . . . .	67
6.3. Medio óptico en una geometría Euclidiana de 2 dimensiones . . . . .	72
6.4. Medio óptico en una geometría Euclidiana de 3 dimensiones . . . . .	73
6.5. Medio óptico en una geometría hiperbólica de 2 dimensiones . . . . .	74
<b>7. Superconductividad e invariantes topológicos</b>	<b>82</b>
7.1. Helicidad y Campos de Beltrami . . . . .	82
7.2. Campos de Beltrami y superconductividad . . . . .	85
7.3. Invariantes topológicos . . . . .	86
<b>8. Conclusiones</b>	<b>90</b>

**9. Referencias**

**94**

## 2. Introducción

La ciencia de los materiales ha dado pasos agigantados en el desarrollo de teoría que permita el diseño y creación de nuevos materiales, capaces de realizar funciones nunca antes vistas. Este es el caso del área de los **metamateriales**, donde los arreglos geométricos de algunas estructuras básicas prediseñadas determinan las propiedades físicas del medio y no sus características atómicas o moleculares. Esto permite que se puedan diseñar medios con propiedades electromagnéticas “hechas a la medida” imposibles de encontrar de forma natural (química) y que incluso puedan ser activadas o desactivadas a voluntad.

El estudio y diseño de metamateriales han avanzado de manera promisoría, permitiendo avances significativos en el procesamiento de información óptica e información cuántica. Se ha planteado la idea que estos metamateriales podrían reproducir efectos físicos fundamentales y poco entendidos como la superconductividad. En el campo del electromagnetismo, los metamateriales han apuntado hacia nuevas respuestas eléctricas y magnéticas de medios, para generar propiedades tales como las de los *espejos magnéticos*, la propagaciones de ondas asimétricas, estructuras de invisibilidad para algunas frecuencias, y la generación de medios quirales *a voluntad*, en donde se pueda controlar la polarización de la luz e incluso conseguir índices de refracción negativos [1].

En años recientes, la óptica de transformaciones ha sido el formalismo responsable del diseño de metamateriales ópticos, que “controlen” la propagación de la luz. Con este formalismo, ha sido posible hacer los primeros experimentos de invisibilidad electromagnética para frecuencias en las microondas [2, 3]. La óptica de transformaciones se basa en dotar a las propiedades electromagnéticas de los medios parámetros dependientes de las coordenadas. Así, las transformaciones de coordenadas en el espacio representan propiedades electromagnéticas diferentes bajo este formalismo [4], [5], [6], [7]. Dicha característica, no queda bien entendida bajo el lente de la física y la geometría, pues de manera intuitiva, las propiedades físicas no deberían de depender de las coordenadas elegidas. Aún cuando esta técnica ha sido utilizada de manera satisfactoria, los fundamentos teórico-matemáticos no quedan del todo resueltos. Incluso, las mismas transformaciones para generar los metamateriales deseados son propuestas y no deducidas de un formalismo elemental. A raíz de esta falta de fundamentos teórico y matemáticos, es que surge la idea de este proyecto. Este trabajo pretende abordar los fundamentos geométricos de la propagación de la luz en medios para entender la óptica de transformaciones y poder generar una base sobre la cual, de manera canónica, se puedan diseñar nuevos materiales.

En las nociones básicas del electromagnetismo vectorial, podemos plantear uno de los problemas fundamentales de toda teoría de campos: Si se conocen las fuentes que generan los campos, encontrar dichos campos. En el caso del electromagnetismo, este problema se traduce a encontrar los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  a partir de conocer las fuentes que los generan  $\rho_{ext}$  y  $\vec{j}_{ext}$ . Sin embargo, podemos observar que en las ecuaciones de Maxwell, no hay una relación entre los campos externos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  y fuentes que los producen  $\vec{j}_{ext}$  y  $\rho_{ext}$ . En dichas ecuaciones, las fuentes se encuentran únicamente relacionadas con los campos inducidos en los medios, en este caso  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$ . Por tanto, para resolver este problema es necesario introducir una serie de ecuaciones extra que nos permita vincular los campos inducidos con los campos externos. Esas ecuaciones reciben el nombre de *relaciones constitutivas*. Dichas relaciones, modelan la respuesta electromagnética que tiene un medio al estar en presencia de un campo electromagnético ex-

terno. Estas relaciones, están determinadas de manera general, por “convoluciones”, donde se promedia el efecto del campo en todo el espacio y el tiempo.

El electromagnetismo puede ser escrito con un lenguaje más contemporáneo y compacto en términos de formas diferenciales. Bajo este lenguaje, las relaciones constitutivas marcan, de manera clara, una relación directa entre las propiedades electromagnéticas de un medio y la geometría de su espacio. Los campos externos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se escriben en términos de una 2-forma diferencial conocida como la 2-forma de Faraday o la 2-forma de fuerza  $F$ . Por su parte, los campos inducidos se escriben en términos de otra 2-forma llamada la 2-forma de desplazamiento  $G$ . Las relaciones constitutivas relacionan la 2-forma  $F$  con la 2-forma  $G$ . Estas relaciones, en su forma más simple, quedan determinadas por el operador diferencial de Hodge. Éste, depende directamente de una métrica del espacio-tiempo. Es aquí donde la relación electromagnetismo-geometría se establece. En el capítulo 3 de este trabajo, empezamos abordando algunos conceptos elementales de la teoría electromagnética en su forma vectorial, para posteriormente abordar dichos conceptos en términos de formas diferenciales. Esto pretende sentar bases sólidas de una formulación métrica del electromagnetismo. Mostramos que el lenguaje geométrico nos permite encontrar de manera explícita, las componentes de los campos electromagnéticos inducidos en un medio dieléctrico, independientemente de las coordenadas y del marco de referencia en el que se midan. Finalmente, podemos hacer una generalización del formalismo para conductores. Escribimos la ley de Ohm de forma completamente geométrica para un observador dado y planteamos una 3-forma de densidad de flujo de energía-momento, la cual nos permite escribir las versiones geométricas del teorema de Poynting y la conservación de la energía. De estas versiones, mostramos que se puede recuperar la estructura vectorial previamente conocida.

Desde mediados del siglo XX, se ha proclamado por la comunidad científica, que el electromagnetismo es una de las teorías físicas mejor entendidas por la humanidad. Sin embargo, esto es cierto únicamente en el vacío. Cuando se introducen medios materiales a la teoría, la complejidad de ésta escala rápidamente generando una amplia variedad de fenómenos poco entendidos.

La teoría de la Relatividad Especial surge desde el electromagnetismo como respuesta a las preguntas sobre la simetría e invariancia de las ecuaciones de Maxwell. Más adelante, con el desarrollo de la Relatividad General, la geometría diferencial comenzó a tener relevancia como herramienta para su entendimiento. Con la consolidación tanto de la Relatividad como de la geometría diferencial, surgieron las primeras analogías entre las interacciones de la materia con campos gravitacionales y las del electromagnetismo con la materia. [8, 9].

En 1923, Gordon plantea que el espacio-tiempo puede considerarse un medio óptico, dado que su métrica codifica la velocidad efectiva de la luz en él. En las coordenadas adecuadas, esta métrica conocida como *métrica óptica* incluye esta velocidad de manera explícita en la componente temporal [8]. Una vez más, queda de manifiesto que las propiedades electromagnéticas de los medios quedan determinadas a partir de conceptos geométricos.

En los conceptos básicos de la óptica, el índice de refracción de un medio se encuentra determinado a partir de ciertas características electromagnéticas del medio, en particular la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ . Sin embargo, para medios inhomogéneos y anisotrópicos no queda del todo claro cómo calcular su índice de refracción, aún conociendo sus tensores de permitividad y permeabilidad. Es en estos casos, que la métrica óptica toma relevancia, pues nos ofrece una forma geométrica de encontrar el índice de refracción del medio a partir de la velocidad efectiva de la luz en él.

Por otra parte, las relaciones constitutivas de un medio se pueden expresar a partir de un tensor *constitutivo* de rango 4, que es justamente la expresión coordinada de la relación de Hodge entre las 2-formas electromagnéticas. A partir de dicho tensor, existen algunas maneras de encontrar de forma explícita las componentes de los tensores de permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y los efectos magnetoeléctricos [8]. Esto abre la puerta para poder introducir conceptos de geometría métrica de contacto que sean relevantes en el entendimiento de las relaciones constitutivas de los medios.

La geometría de contacto se ha vuelto un marco matemático para unificar diferentes teorías de la física que han ido evolucionando en el tiempo. Tal es el caso de la termodinámica, la mecánica clásica para sistemas no conservativos, teoría de control, entre varios otros [10–16]. El caso del electromagnetismo no ha sido diferente y en particular la óptica ha tomado en la geometría de contacto un marco capaz de unificar sus dos principios fundamentales; el principio de Fermat y el de Huygens. Si bien, ambos principios no son principios deducidos directamente de la teoría electromagnética, ha sido ampliamente revisado por distintos autores que ha cierta aproximación, las formulaciones son equivalentes.

La propagación de la luz en un medio, se puede modelar de dos formas naturales. La primera, haciendo una especie de símil mecánico, donde la luz se propaga por trayectorias definidas conocidas como *rayos de luz*. Este modelo se encuentra regido por el famoso **principio de Fermat**, el cual establece que la luz sigue las trayectorias que minimizan el tiempo para ir de un punto a otro. Dada una geometría simple espacio-temporal, estas trayectorias coinciden con las trayectorias que minimizan las distancias, conocidas como curvas *geodésicas*. Dichas curvas han sido ampliamente estudiadas en el contexto de la geometría y satisfacen una ecuación diferencial de 2<sup>o</sup> orden, que depende de los coeficientes del concepto geométrico llamado *conexión*. Esta ecuación depende únicamente de la geometría y de las estructuras geométricas con que se haya dotado al espacio. Por otra parte, la segunda forma de modelar la propagación de la luz en un medio, es a través de frentes de ondas. Dado que la luz es una onda electromagnética, ésta sigue el principio ondulatorio. Los frentes de onda son generados por una fuente y éstos al evolucionar en el medio se vuelven nuevas fuentes para generar frentes de ondas secundarios. Estas ondas secundarias pueden interferir con las ondas originales, generando los patrones de dispersión y difracción vistos en diferentes experimentos. Existe un frente de onda global, el cual está dado por la envolvente de todos los frentes secundarios al tiempo  $t$ . Al principio que explica esta dinámica se le conoce como *principio de Huygens*.

Tanto el símil mecánico de la propagación de la luz, como el principio ondulatorio, pueden ser modelados usando geometría de contacto. Es en este lenguaje, de manera natural, se puede mostrar que el principio de Fermat es equivalente al principio de Huygens.

Un medio óptico se puede representar como una variedad Riemanniana, dado por el espacio físico  $\mathcal{B}$  y una métrica  $g$  inmerso en un espacio-tiempo bi-métrico  $(\mathcal{M}, g_0, \tilde{g})$ . La métrica  $g_0$  es considerada la métrica del “medio ambiente”, mientras que  $\tilde{g}$  es la métrica óptica asociada. De esta manera, se puede mostrar que la métrica del medio óptico  $g$ , es exclusivamente la parte espacial de la métrica óptica. Del haz tangente del espacio físico  $\mathcal{B}$  que representa al medio, es posible definir un par de espacios matemáticos fundamentales: El haz tangente unitario  $ST\mathcal{B}$  y el espacio de elementos de contacto  $\mathcal{N}$ . Este último se encuentra relacionado con el espacio de estructura óptica definida por Perlick [17]. La estructura simpléctica natural que se puede generar en el haz tangente de la variedad, nos permite darle una estructura de contacto al haz tangente unitario de  $\mathcal{B}$ . De la misma forma, el espacio de elementos de contacto posee naturalmente una estructura de contacto tautológica. Este hecho, nos permite relacionar de manera única los elementos del haz tangente unitario con los del espacio de

elementos de contacto a partir del campo vectorial de Reeb asociado a la 1-forma de contacto de Liouville, definida en el haz cotangente unitario de la variedad. Podemos observar que los flujos geodésicos que se generan en el haz tangente, son duales a los flujos del campo de Reeb en el espacio de elementos de contacto. El campo vectorial de Reeb, se convierte así en una especie de campo geodésico dual, que en particular resulta ser el generador infinitesimal de una transformación estricta de contacto que preserva tanto la forma de contacto como la distribución de la misma. Se puede deducir entonces, que el flujo geodésico que caracteriza las trayectorias de un rayo de luz puede ser escrito en términos de una familia uniparamétrica de transformaciones estrictas de contacto. Estas transformaciones, al preservar la distribución de contacto, mantienen invariantes a los elementos de contacto sobre la variedad base, que son hiperplanos de una dimensión menor, tangentes a los frentes de onda.

Cuando hablamos de propagación de luz en medios, otras dos propiedades de los medios aparecen: La quiralidad y la helicidad. Conceptos de suma importancia en temas de polarización y guías de ondas. Para estos fines, los campos de Beltrami han sido ampliamente estudiados para describir estos fenómenos, tanto en el ámbito del electromagnetismo como en la hidrodinámica principalmente [18, 19]. Los campos vectoriales de Beltrami son aquellos campos paralelos a su propio rotacional. Al ser paralelos a su propio rotacional, estos campos reciben el nombre de campos *libres de fuerzas* dado que la fuerza de Lorentz, en el contexto electromagnético, depende del producto exterior (cruz en  $\mathbb{R}^3$ ) de la velocidad con el campo magnético. Los flujos generados por este tipo de campos, en presencia de un campo magnético, no experimentan fuerza de Lorentz. Este tipo de campos vectoriales tienen su contraparte en formas diferenciales. Podemos definir de la misma manera, una forma diferencial (sobre una variedad de dimensión 3) una 1-forma de Beltrami, como aquella que es proporcional a su derivada exterior, en términos de una función no nula y el operador dual de Hodge. De esta forma, la helicidad queda definida como la integral de la 1-forma de Beltrami.

Dada una variedad diferencial 3-dimensional con una estructura de contacto, tal que la 1-forma de contacto sea una forma de Beltrami, genera una estructura geométrica que permite la propagación de los campos libres de fuerzas. Al tener flujos electromagnéticos que no experimentan fuerzas de Lorentz, y por tanto no hay ningún tipo de fuerza que se “oponga” a este flujo, haciendo que exista una *conductividad* perfecta. En 2 dimensiones espaciales, esto se podría entender como un *superconductor* 2-dimensional. La estructura geométrica, aunado a esto, permite deducir las relaciones de London que modelan dicha conductividad, al no ser válida la ley de Ohm en este contexto.

Esta tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera. En el capítulo 3 exponemos las bases del electromagnetismo vectorial y su contraparte en formas diferenciales, haciendo explícita la conversión de un lenguaje a otro. Planteamos las relaciones constitutivas de forma completamente geométrica, y desarrollamos la manera de encontrar las componentes de los campos electromagnéticos inducidos independientes del observador y del marco en referencia. Esta metodología la extendemos a medios en movimiento y proponemos medios estáticos equivalentes. Trabajamos con conductores y escribimos la versión geométrica de la ley de Ohm. Definimos una 3-forma de densidad de flujo de energía-momento con la cual damos una versión geométrica del teorema de Poynting.

En el capítulo 4 mostramos una manera de encontrar los diferentes tensores de permitividad, permeabilidad y las matrices magnetoeléctricas en términos de un tensor constitutivo. Exponemos los fundamentos de la métrica óptica y la usamos para realizar diferentes ejemplos de medios equivalentes a geometrías cosmológicas conocidas.

En el capítulo 5 damos las bases matemáticas de la geometría de contacto partiendo desde

la perspectiva de las ecuaciones diferenciales. Con este lenguaje geométrico escribimos la evolución de la luz tanto en términos de rayos como en frentes de ondas. Finalmente en el capítulo, construimos el principio de Huygens usando los diferentes espacios matemáticos previamente definidos y demostramos con geometría, que la evolución de un frente de onda es la envolvente de los frentes de ondas secundarios producidos.

En el capítulo 6 ahondamos en las estructuras de los espacios matemáticos que subyacen en las diferentes formas de evolucionar la luz en un medio. El haz tangente unitario para un rayo de luz y el espacio de elementos de contacto para la visión ondulatoria. En el capítulo se muestra de manera explícita la equivalencia geométrica de los principios de Fermat y de Huygens y se encuentra que tanto el flujo geodésico como los frentes de onda, pueden ser reconstruidos a partir de encontrar la familia uniparamétrica de transformación de contacto, asociadas al flujo del campo vectorial de Reeb de la forma de contacto de Liouville. Este formalismo, permite recrear tanto las trayectorias de los rayos de luz, sin la necesidad de resolver la ecuación geodésica para la variedad (ecuación diferencial de 2º grado) y permite a su vez reconstruir los frentes de onda, sin resolver de manera directa la ecuación de onda (ecuación diferencial de 2º grado). Todo esto se logra encontrando un flujo vectorial que es una ecuación diferencial de 1º orden. En el capítulo, realizamos una serie de ejemplos, para medios con geometría trivial y no trivial y diferentes dimensiones.

En el capítulo 7 definimos las formas diferenciales de Beltrami en analogía a los campos vectoriales de Beltrami. Partimos de estos campos para definir la helicidad en el contexto de las formas diferenciales, así como otros invariantes topológicos asociados. Usamos estos conceptos para definir la geometría de un superconductor en 2 dimensiones espaciales y deducimos las ecuaciones de London en su forma geométrica.

Finalmente en el capítulo 8 damos las conclusiones del trabajo, así como algunos otros trabajos que se encuentran en elaboración y otros a futuro que se podrían desprender de esta investigación.

### 3. Electromagnetismo

Desde los albores de la Relatividad General, se ha observado que la interacción entre la materia y el electromagnetismo es un fenómeno equivalente a la interacción entre la materia y el campo gravitacional [8, 9]. De la misma manera que la luz obedece el Principio de Fermat para ir de un punto a otro a través de un medio, en la Relatividad General los rayos de luz siguen la trayectorias dadas por las geodésicas nulas de la geometría del espacio-tiempo. Desde la década de los 70's, se ha argumentado que el espacio-tiempo actúa como un medio óptico con un índice de refracción particular, con un tensor métrico capaz de codificar toda esta información [20–23]. Este argumento, incita a tratar geoméricamente los medios ópticos como variedades diferenciales, donde la curvatura del espacio define la trayectoria que seguiría un haz de luz al propagarse por él. [24, 25]. Esta idea ha sido desarrollada y explotada recientemente en el campo de la ciencia e ingeniería de materiales [1, 26–30] dado las diferentes posibilidades que ofrece para modelar metamateriales ópticos que pudieran tener propiedades físicas diferentes a las encontradas en la naturaleza.

En el último siglo, la formulación de teorías de campo en términos de geometría diferencial, ha sido ampliamente desarrolla. Sin embargo, la mayor parte de este avance ha sido concentrado en áreas puramente teóricas [31, 32] y ha sido, hasta fechas recientes que esta herramienta se ha vuelto importante en áreas de aplicación [33–36]. Un ejemplo claro es la ciencia de materiales, en donde toda la información concerniente a las respuestas macroscópicas de un medio a partir de un estímulo electromagnético han sido descritas a partir de un tensor constitutivo, el cuál está estrechamente relacionado con un tensor métrico (o uno de curvatura), dado por la geometría del espacio [8, 25].

Las propiedades eletromagnéticas de un medio, definidas por las respuestas macroscópicas del medio a dichos estímulos, están caracterizadas por las llamadas *relaciones constitutivas*. Estas relaciones se definen a partir de propiedades del medio conocidas como *permitividad eléctrica*, *permeabilidad magnética* y *efectos magnetoeléctricos*, modeladas en términos de matrices (tensores), usualmente interpretadas en términos de un marco de referencia y un conjunto (generalmente único) de coordenadas, dado por el formalismo vectorial del electromagnetismo.

En este trabajo, se pretende llevar de una manera explícita y pedagógica el formalismo vectorial usual del electromagnetismo, a uno independiente del marco de referencia y coordenadas, por medio del lenguaje de las formas diferenciales que ofrece la geometría. En este capítulo, se irá construyendo dicho lenguaje a partir del hecho que las leyes de Maxwell se pueden ver como ecuaciones de conservación del espacio-tiempo y que las relaciones constitutivas son mapeos entre los diferentes elementos de estas ecuaciones de conservación.

En este capítulo, comenzaremos por hacer un acercamiento pedagógico entre el electromagnetismo escrito en el formalismo del cálculo vectorial, para posteriormente ir desarrollando el lenguaje de las formas diferenciales. Los detalles de esta construcción, generalmente son omitidos en la literatura especializada y por tanto poco entendidos. Comenzaremos por la formulación integral tradicional de las ecuaciones de Maxwell en  $\mathbb{R}^3$ , para luego generalizar en términos de formas diferenciales para una variedad  $\mathcal{M}$ . En esta variedad, se puede hacer toda la construcción de las leyes de Maxwell sin la necesidad de dotarla de estructura matemática extrínseca, tal como un tensor métrico.

A lo largo del trabajo, denotaremos como *campos externos* a  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dado que supondremos que éstos se encuentran "presentes" en todo el espacio. Llamaremos *campos inducidos* a los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$  a partir de pensar que está directamente relacionados con las fuentes ( $\rho_{ext}$  y  $\vec{j}_{ext}$ ). En este sentido, se puede observar, a partir de las leyes de Maxwell, que no existe una relación natural o directa entre los campos electromagnéticos externos y las fuentes. Esto hace inconsistente el problema elemental de cualquier teoría de campo, esto es, poder determinar los campos a partir de conocer la información de las fuentes. Por tanto, es imperativo definir una serie de relaciones entre los campos externos y las fuentes. Dichas relaciones son conocidas como *relaciones constitutivas*. Las relaciones constitutivas pueden ser propuestas de múltiples maneras, siendo particularmente conveniente definir las a través de la estructura geométrica del espacio. En este caso, se puede postular que dicha estructura geométrica contenga toda la información relevante de la respuesta electromagnética macroscópica del medio, en el cual se propagan los campos [24]. Diferentes medios serán descritos por diferentes geometrías y las relaciones constitutivas pueden ser expresadas en términos del *operador dual de Hodge*. Este operador está asociado a una métrica del espacio, y por tanto, la postulación de las relaciones constitutivas implica dotar a la variedad  $\mathcal{M}$  con una mayor estructura matemática.

A lo largo de del trabajo consideraremos una métrica para el medio ambiente (fondo) y otra para describir al medio. Esta forma de *geometrizar* las relaciones constitutivas, es probable que no es la más general, pero sí la más simple; y como resultado, podemos encontrar expresiones generales libres de coordenadas y marcos de referencia. Una de las ventajas de este formalismo, el cual se abordará explícitamente al final del capítulo, es que permite encontrar las componentes explícitas de los campos inducidos medidos por observadores arbitrarios.

### 3.1. Nociones básicas de electromagnetismo con cálculo vectorial

El carácter empírico del electromagnetismo radica en el hecho que en la naturaleza los objetos poseen ciertas propiedades que pueden ser percibidas a través de su estado de movimiento o su interacción. Dicha propiedad se conoce como *carga eléctrica* y se puede *observar* que de manera natural se conserva. Acorde con esta idea, se puede inferir la existencia de un campo responsable del cambio inercial de dichas cargas eléctricas y en consecuencia a este movimiento, se generan nuevas configuraciones del campo. Este campo, cumple con sus propias leyes de conservación, las cuales llevan a una teoría dinámica de campos y cargas. Esta se describe a partir de una serie de relaciones observables entre dichos campos y sus fuentes

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds = 0, \quad (3.1)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds, \quad (3.2)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds = \int_{\Omega} \rho_{ext} \, dv \quad (3.3)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds + \int_{\Sigma} \vec{j}_{ext} \cdot \hat{n} \, ds. \quad (3.4)$$

Los términos  $\rho_{ext}$  y  $\vec{j}_{ext}$  son las densidades de carga y corriente eléctrica externa respectivamente y representan las fuentes de los campos. Observemos que los campos inducidos son aquellos que se encuentran relacionados con las fuentes, mientras que las expresiones para los campos fundamentales son independientes. El símbolo  $\partial$  representa el operador de *frontera*.

En este caso, el operador actúa en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que  $\partial\Omega$  es la frontera 2-dimensional de la región  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , mientras que  $\partial\Sigma$  es la curva frontera 1-dimensional de la superficie abierta  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ . Las expresiones (3.1)-(3.4) representan propiedades globales en el espacio, en este caso  $\mathbb{R}^3$ . De la representación global, podemos pasar, por medio de los teoremas de cálculo integral, a expresiones locales dadas por las ecuaciones de Maxwell. Estas expresiones locales, se pueden separar fácilmente en un par de ecuaciones homogéneas

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad (3.6)$$

y un par de ecuaciones inhomogéneas

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}} \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}_{\text{ext}}. \quad (3.8)$$

Si aplicamos la divergencia y sustituimos (3.7) en (3.8), podemos obtener de forma natural una ecuación de continuidad para las fuentes

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{ext}} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ext}} = 0. \quad (3.9)$$

Observamos que esta ley de conservación hace referencia únicamente a las cargas y corrientes externas. Además de estas fuentes externas, cada medio se caracteriza por una función de respuesta a la presencia de los campos externos. Estas respuestas generan cargas y corrientes inducidas dentro del material. Por tanto, asumiendo que las cargas y corrientes se conservan de manera total, tanto cargas y corrientes externas como las inducidas se deberán conservar de manera independiente. Esto nos lleva a decir que no existe intercambio entre las fuentes externas y las inducidas en el medio. Postulando las ecuaciones de Maxwell (3.7)-(3.8) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.10)$$

lo que implica la conservación de las fuentes inducidas

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{ind}} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ind}} = 0. \quad (3.11)$$

donde

$$\rho = \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{ind}} \quad \text{and} \quad \vec{j} = \vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}_{\text{ind}}. \quad (3.12)$$

En prácticamente todas las teorías de campo, existe un problema fundamental, que consiste en determinar los campos a partir de conocer la información de las fuentes. Esto parte de tener cierta información *a priori* de los campos en ciertas regiones del espacio-tiempo. En el caso particular del electromagnetismo, buscamos encontrar los campos eléctrico  $\vec{E}$  y el campo de flujo magnético  $\vec{B}$ , a partir de conocer las funciones en el espacio-tiempo de  $\rho_{\text{ext}}$  y  $\vec{j}_{\text{ext}}$ , junto con el conjunto de condiciones iniciales y de frontera de los campos. Planteando el problema de esta manera, las ecuaciones de Maxwell no son suficientes, pues dichos campos se encuentran únicamente las ecuaciones homogéneas (3.5) y (3.7), y no se relacionan de ninguna manera con las fuentes, que se encuentran en las ecuaciones inhomogéneas (3.7) y (3.8). Por tanto, es necesario proponer una serie de ecuaciones “extra”, conocidas como las *relaciones constitutivas* del medio.

Las relaciones constitutivas contienen la información sobre la respuesta del medio ante los estímulos producidos por los campos externos. De manera general, estas relaciones son expresadas en términos de convoluciones, promediando el efecto del campo sobre todo el espacio y el tiempo. Para el escenario más simple, estas relaciones se pueden describir por medio de una transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} & \bar{\zeta} \\ \bar{\chi} & \bar{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde  $\bar{\varepsilon}$  y  $\bar{\mu}^{-1}$  son la permitividad eléctrica y el inverso de la permeabilidad magnética respectivamente, las cuales son matrices  $3 \times 3$ . Además,  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{\chi}$  son conocidas como las matrices de *efecto magnetoeléctrico*. [27, 37].

### 3.2. Nociones básicas de electromagnetismo en formas diferenciales

Históricamente y de manera tradicional, el electromagnetismo se ha desarrollado en el lenguaje del cálculo vectorial. Sin embargo, éste se puede escribir de una forma más compacta en términos de geometría diferencial. Para ello, usamos el poderoso lenguaje de las formas diferenciales para escribir las ecuaciones de Maxwell de una forma mucho más compacta. Para lograr este cometido, empezaremos definiendo algunos conceptos geométricos básicos. Primero, definiremos un **flujo**  $\Phi$  como

$$\Phi[\Sigma, F] \equiv \Phi_{\Sigma}(F) = \oint_{\Sigma} F \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

para  $\Sigma$  una superficie cerrada y  $F$  una 2-forma diferencial. Definiremos también una **circulación**  $\varepsilon$  como

$$\varepsilon[\gamma, \alpha] \equiv \varepsilon_{\gamma}(\alpha) = \oint_{\gamma} \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

donde  $\gamma$  es una curva cerrada y  $\alpha$  una 1-forma diferencial. En este lenguaje compacto, enunciaremos el teorema de Stokes.

[Teorema de Stokes]. Sea  $F$  una  $n$ -forma diferencial y  $\Omega$  una superficie con dimensión  $n + 1$ ; entonces

$$\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF \quad (3.16)$$

para  $d$  el operador “derivada exterior”<sup>1</sup> y  $\partial\Omega$  la frontera de  $\Omega$ . Podemos observar entonces, que el campo de desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  en el electromagnetismo, corresponde a un flujo. Usando (3.14) tenemos:

$$\Phi_{\Sigma}(D) = \oint_{\Sigma} D = Q, \quad [\text{Ley de Gauss}] \quad (3.17)$$

<sup>1</sup>La derivada exterior la definimos sobre una  $p$ -forma  $\alpha$  donde  $d\alpha$  es una  $p + 1$ -forma dada por

$$d[a(x) dx^i \wedge \dots \wedge dx^k] = da \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^k = \left( \frac{\partial a}{\partial x^r} \right) dx^r \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^k$$

donde  $Q$  se interpreta como la carga total encerrada en la superficie  $\Sigma$ . Si usamos el teorema de Stokes, observamos que

$$\oint_{\Sigma} D = \int_V dD = \int_V \rho \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \int_V (dD - \rho) = 0 \quad (3.19)$$

para  $\Sigma$  la frontera de un volumen  $V$  (i.e.  $\Sigma = \partial V$ ) y  $\rho$  la *densidad de carga*. De esta forma, obtenemos que

$$dD = \rho, \quad (3.20)$$

que es la expresión local de la ley de Gauss. En este contexto,  $\rho$  es una 3-forma (i.e.  $\rho \in \Omega^3$ ). Con la misma idea, el campo magnético  $\mathbf{B}$  también corresponde a un flujo, pero a través de una superficie. Por ley de Gauss para el campo magnético, sabemos que el flujo del campo a través de una superficie cerrada es siempre *cero*. Esto es

$$\Phi_{\Sigma}(B) = \int_{\Sigma} B = 0. \quad (3.21)$$

Aplicando el Teorema de Stokes a (3.21) observamos que

$$\int_{\Sigma} B = \int_V dB = 0 \quad (3.22)$$

para  $\Sigma = \partial V$ , donde  $V$  es un volumen arbitrario. Por consiguiente, podemos decir que

$$dB = 0. \quad (3.23)$$

Esta ecuación se conoce como la **ley de Gauss magnética**. Si el flujo magnético, se hace variar sobre la superficie en el tiempo, obtenemos un trabajo  $\varepsilon$ , dado por

$$\varepsilon_{\gamma}(E) = -\frac{d}{dt} \Phi_{\Sigma}(B) = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \quad (3.24)$$

Usando una vez mas el teorema de Stokes en la circulación del campo eléctrico, tenemos que

$$\varepsilon_{\gamma}(E) = \int_{\gamma} E = \int_{\Sigma} dE \quad (3.25)$$

para  $\gamma$  la frontera de la superficie  $\Sigma$ . Entonces

$$\int_{\Sigma} dE = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \quad [\text{Ley de Faraday}] \quad (3.26)$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} (dE + \frac{d}{dt} B) = 0. \quad (3.27)$$

Por tanto, podemos observar que la expresión local para la ley de Faraday se puede escribir como

$$dE + \frac{\partial}{\partial t} B = 0. \quad (3.28)$$

Por último, la ley de Maxwell-Ampere indica que la corriente eléctrica genera circulación del campo magnético, esto es

$$\varepsilon_\gamma(H) = \frac{d}{dt}\Phi_\Sigma(D) + \Phi_\Sigma(j) \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma H = \int_\Sigma \mathcal{J} + \frac{d}{dt} \int_\Sigma D \quad [\text{Ley de Ampere}] \quad (3.30)$$

donde  $\Phi_\Sigma(j)$  representa el flujo de corriente libre y  $\frac{d}{dt}\Phi_\Sigma(D)$  representa la corriente de desplazamiento. Si aplicamos nuevamente la ley de Stokes a la circulación del campo magnético, podemos obtener

$$\int_\gamma H = \int_\Sigma dH, \quad (3.31)$$

de donde

$$\int_\Sigma dH = \int_\Sigma \mathcal{J} + \frac{d}{dt} \int_\Sigma D \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \left( dH - \mathcal{J} - \frac{d}{dt} D \right) = 0. \quad (3.33)$$

Esto nos permite concluir que la expresión local para la ley de Ampere queda como

$$dH - \frac{\partial}{\partial t} D = \mathcal{J}. \quad (3.34)$$

En resumen, tenemos las ecuaciones de Maxwell, en términos de formas diferenciales [38], que se escriben como

$$\begin{aligned} dB &= 0, & dE + \frac{\partial}{\partial t} B &= 0 \\ dD &= \rho, & dH - \frac{\partial}{\partial t} D &= \mathcal{J}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Hasta el momento, hemos escrito las ecuaciones de Maxwell considerando el tiempo como un parámetro y por ende, hemos supuesto un variedad puramente espacial de 3 dimensiones. Podemos observar, que de manera fenomenológica, las ecuaciones de Maxwell son postulados de conservación de ciertas cantidades. Estas leyes, de manera general se entienden en términos de integrales. Si consideramos flujos cruzando por las fronteras de ciertas regiones, podemos imponer dichas condiciones de conservación. El teorema de Stokes nos permite observar la arbitrariedad de las regiones de interés y hace que la conservación del flujo sea equivalente a pedir una correspondencia con una forma diferencial cerrada

$$0 \stackrel{!}{=} \oint_{\partial\Omega} J = \int_\Omega dJ \quad \forall \Omega \subset \mathcal{M} \implies dJ = 0. \quad (3.36)$$

En este caso  $J$  es una  $p$ -forma (con  $0 < p < \dim \mathcal{M}$ ) representando un  $p$ -flujo,  $\Omega$  es una región  $p + 1$  dimensional de  $\mathcal{M}$  con frontera  $p$ -dimensional  $\partial\Omega$ . Por ejemplo, una superficie 2-dimensional que tiene por frontera una curva cerrada, un volumen 3-dimensional donde su frontera es una superficie cerrada o finalmente, una región 4-dimensional con un volumen cerrado como frontera. En (3.36), el símbolo  $\stackrel{!}{=}$  expresa la imposición empírica de dicha igualdad. Las ecuaciones de Maxwell pueden ser postuladas como leyes de conservación alrededor de una 2-forma  $F$ :

$$\oint_{\partial\Omega^3} F \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \Omega^3 \subset \mathcal{M} \implies dF \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.37)$$

y una  $n - 1$ -forma  $j$

$$\oint_{\partial\Omega^n} j \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \Omega^n \subset \mathcal{M} \implies dj \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.38)$$

Estas afirmaciones como postulados empíricos son completamente generales; es decir, están planteadas libres de coordenadas, independientes del observador y no requieren mayor estructura matemática que la diferenciabilidad de  $\mathcal{M}$ . Ecuación (3.37), postula la conservación total del flujo electromagnético, mientras que (3.38) postula la conservación total de la carga. De esta manera, las ecuaciones de Maxwell (3.5) – (3.8) se pueden escribir en términos de formas diferenciales en una variedad  $\mathcal{M}$  4-dimensional

$$dF = 0, \quad (3.39)$$

y

$$dG - j_{\text{ext}} = 0. \quad (3.40)$$

Al igual que en el caso vectorial, tenemos una ecuación homogénea y otra que relacionada con las fuentes. En este caso,  $F$  y  $G$  son 2-formas que representan a los campos  $(\vec{E}, \vec{B})$  y  $(\vec{D}, \vec{H})$  respectivamente. La 3-forma  $j_{\text{ext}}$  representa a las fuentes externas  $(\rho_{\text{ext}}, \vec{j}_{\text{ext}})$  y corresponde a la parte de la densidad de corriente total que no es inducida por los campos en el medio

$$j_{\text{ext}} = j - j_{\text{ind}}. \quad (3.41)$$

Igual que las ecuaciones (3.5) – (3.8), las ecuaciones (3.39) y (3.40) son independientes de coordenadas, por lo que son válidas a pesar de la elección local de coordenadas para  $\mathcal{M}$ . Para observar que (3.39) y (3.40) son realmente las ecuaciones de Maxwell que se hemos escrito anteriormente en el lenguaje del cálculo vectorial, podemos dotar a  $\mathcal{M}$  de coordenadas cartesianas  $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$ . Si tomamos

$$F = B + E \wedge dt, \quad (3.42)$$

$$G = -D + H \wedge dt \quad (3.43)$$

y

$$j_{\text{ext}} = -\rho_{\text{ext}} + j_{\text{ext}}^{(3)} \wedge dt. \quad (3.44)$$

Los campos  $E$  y  $H$  corresponden a 1-formas cuyas componentes son iguales a sus contrapartes vectoriales. Es decir

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3.45)$$

y

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i dx^i = H_x dx + H_y dy + H_z dz. \quad (3.46)$$

Mientras los flujos  $B$ ,  $D$  y  $j_{\text{ext}}^{(3)}$  corresponden a 2-formas dadas por

$$B = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 B_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (3.47)$$

$$D = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 D_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (3.48)$$

y

$$j_{\text{ext}}^{(3)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 j_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (3.49)$$

donde  $B_{ij}$  (resp.  $D_{ij}$  y  $j_{ij}$ ) representa el flujo magnético (resp. eléctrico y densidad de corriente externa) atravesando un elemento infinitesimal de área orientado  $dx^i \wedge dx^j$  [38], *i.e.* la componente de  $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\vec{D}$  y  $\vec{j}_{\text{ext}}$ ) es ortogonal al espacio generado por  $\hat{e}_{(i)}$  y  $\hat{e}_{(j)}$ , esto es

$$B_{ij} = \vec{B} \cdot \hat{e}_{(k)} = B_k \quad \text{con} \quad \hat{e}_{(i)} \cdot \hat{e}_{(j)} = \hat{e}_{(i)} \cdot \hat{e}_{(k)} = \hat{e}_{(j)} \cdot \hat{e}_{(k)} = 0 \quad (3.50)$$

(resp.  $D_{ij} = \vec{D} \cdot \hat{k} = D_k$  y  $j_{ij} = \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \hat{k} = j_{\text{ext}k}$ ). Finalmente,  $\rho_{\text{ext}}$  corresponde a una 3-forma de densidad de carga externa.

$$\rho_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}} dx \wedge dy \wedge dz. \quad (3.51)$$

Estamos usando el producto externo cartesiano, simplemente para ilustrar cómo se relacionan las componentes de los campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$  con sus correspondientes formas diferenciales. Sin embargo, esto no es una estructura adicional sobre la variedad  $\mathcal{M}$ .

Podemos realizar, de manera directa el cálculo algebraico de la derivada exterior de (3.42) para obtener explícitamente la 3-forma  $dF$

$$\begin{aligned} dF = & \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \\ & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir de las definiciones de  $B_{ij}$  y el operador rotacional, junto con la ecuación (3.50), podemos encontrar las componentes explícitas

$$\begin{aligned} dF = & \left( \nabla \cdot \vec{B} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(z)} \right] dx \wedge dy \wedge dt - \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(y)} \right] dx \wedge dz \wedge dt + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(x)} \right] dy \wedge dz \wedge dt. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por tanto,  $dF = 0$  [ecuación (3.40)] es completamente equivalente al par de ecuaciones homogéneas de Maxwell. De manera similar, las componentes de la 3-forma  $dG$  corresponden al lado izquierdo de las ecuaciones in-homogéneas de Maxwell (3.7) y (3.8). Esto es

$$\begin{aligned} dG = & - \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \\ & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \frac{\partial H_j}{\partial x^i} - \frac{\partial H_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt, \end{aligned} \quad (3.54)$$

en donde el signo está dado por la definición de  $G$  de la ecuación (3.43). Restando la 3-forma  $j_{\text{ext}}$ , de  $dG$  obtenemos

$$\begin{aligned} dG - j_{\text{ext}} = & - \left( \nabla \cdot \vec{D} - \rho_{\text{ext}} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(z)} \right] dx \wedge dy \wedge dt - \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(y)} \right] dx \wedge dz \wedge dt + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(x)} \right] dy \wedge dz \wedge dt, \end{aligned} \quad (3.55)$$

de donde la ecuación (3.40) nos lleva a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (3.7) y (3.8).

La derivada exterior es un operador nilpotente, lo que significa que segundas o más derivadas de este tipo se anulan. Por este motivo, la ley de conservación (3.9) es una consecuencia inmediata de la estructura de las ecuaciones de Maxwell

$$0 = d^2G = dj_{\text{ext}} = \left( \frac{\partial \rho_{\text{ext}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ext}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt. \quad (3.56)$$

Todo parece indicar, que el lenguaje de formas diferenciales aplica perfectamente para el electromagnetismo. Las ecuaciones (3.39) y (3.40), no son simples abreviaciones de sus contrapartes vectoriales como podría parecer en un principio, sino una generalización profunda de éstas que nos permite relacionar la naturaleza local de las ecuaciones diferenciales con los aspectos globales de los espacios en donde están definidos. Esta última idea, es la que ha promovido el uso de esta poderosa herramienta en el electromagnetismo computacional; particularmente en la aplicación de *elemento finito* para resolver problemas en espacios topológicos particularmente complicados. [39–41].

Desde el punto de vista más fundamental, podríamos revertir el argumento de la conservación total de la carga, y postularlo directamente como un hecho empírico. Esto haría que los postulados fundamentales se convirtieran en dos principios locales de conservación, tanto del flujo como de la carga

$$dF = 0 \quad \text{y} \quad dj = 0. \quad (3.57)$$

Esto implica, que de manera local en  $\mathcal{M}$ , existen dos potenciales  $A$  (1-forma) y  $H$  (2-forma), tales que

$$F = dA \quad \text{y} \quad j = dH, \quad (3.58)$$

donde  $H = G + G_{\text{ind}}$ , con

$$dG = j_{\text{ext}} \quad \text{y} \quad dG_{\text{ind}} = j_{\text{ind}}. \quad (3.59)$$

Esto implica la conservación independiente de las cargas inducidas y externas. Esto hace que el problema fundamental de la teoría de campos en el electromagnetismo se pueda plantear de la siguiente manera: Dada una 3-forma *cerrada*  $j_{\text{ext}}$ , determinar la 2-forma *cerrada*  $F$ . O de manera equivalente en términos de los potenciales, determinar la 1-forma  $A$ . Al igual que en la propuesta pasada, este problema requiere información adicional para ser resuelto. Se necesita proponer una relación entre la densidad de flujo  $j$  y la 1-forma del potencial  $A$ . Más conveniente aún, se puede proponer una relación entre la 2-forma  $G$  y la 2-forma de flujo de campo  $F$ . Estas relaciones son justamente las relaciones constitutivas del medio.

### 3.3. Relaciones constitutivas geométricas

Como hemos mencionado anteriormente, las leyes de Maxwell vistas como leyes de conservación del flujo y de la carga únicamente requieren que el espacio matemático  $\mathcal{M}$  sea diferenciable. Lo que quiere decir que estamos caracterizando puramente propiedades topológicas del espacio. Sin embargo, esta estructura matemática elemental, no nos permite relacionar la 2-forma de flujo  $F$  con las fuentes generadoras de los campos  $j_{\text{ext}}$ . Las relaciones constitutivas del medio, son justamente la información faltante y serán introducida en este formalismo, a partir de dotar a  $\mathcal{M}$  con una estructura geométrica. Dicha estructura será un tensor métrico del tipo

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (3.60)$$

para que  $(\mathcal{M}, g)$  sea una variedad (pseudo) Riemanniana<sup>2</sup>.

El tensor métrico nos permite, tal como lo hace el producto punto, calcular longitudes de curvas parametrizadas, ángulos entre diferentes direcciones en un punto y distancias entre diferentes puntos de la variedad  $\mathcal{M}$ . Todo esto, independiente de las coordenadas elegidas. Es decir, estas nociones son *invariantes* bajo cambio de coordenadas. Aunado a todo esto, la métrica nos permite también establecer una equivalencia algebraica entre vectores y 1-formas. Esta equivalencia se da a partir de los isomorfismos musicales<sup>3</sup>

$$g^b(V) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V^i dx^j \quad \text{para cualquier} \quad V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.61)$$

y

$$g^\sharp(\omega) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{para cualquier} \quad \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i. \quad (3.62)$$

En el caso particular de una variedad Riemanniana, un mapeo es el inverso del otro

$$\begin{aligned} g^\sharp \left[ g^b(V) \right] &= \sum_{i,j,k=1}^n g^{ik} g_{kj} V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^i_j V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= V, \end{aligned} \quad (3.63)$$

y por tanto, la métrica nos da un isomorfismo canónico entre vectores y formas diferenciales. Un tensor métrico describe una *geometría* particular en una variedad y cada variedad admite una infinidad de tensores métricos. Una consecuencia de *elegir una geometría* particular para

<sup>2</sup>Una variedad Pseudo-Riemanniana  $(\mathcal{M}, g)$  es aquella en la que el tensor métrico  $g$  acepta vectores nulos diferentes al vector idénticamente cero. En este tipo de variedades, el operador Laplaciano se convierte en un operador hiperbólico y no elíptico como en el caso de las variedades Riemannianas. Esto nos permite tener una estructura geométrica adecuada para describir la propagación de ondas.

<sup>3</sup>El símbolo *flat*  $b$  denota ‘bajar’ los índices de las componentes de un vector, mientras que el símbolo *sharp*  $\sharp$  corresponde a ‘subir’ los índices de las componentes de una forma diferencial.

la variedad, son el tipo de trayectorias o curvas que extremizan la distancia<sup>4</sup> entre un par de puntos en la variedad. Estas curvas pueden cambiar de manera drástica de una geometría a otra. En nuestro caso particular electromagnético, podemos pensar que cada métrica identifica un medio diferente a partir del *principio de Fermat* para la propagación de la luz, o en general de una onda electromagnética.

Empezaremos aplicando esta idea al electromagnetismo en el vacío. Consideremos al vacío como un medio descrito por una métrica (que llamaremos *de fondo*) dada por

$$\eta = \sum_{i,j=1}^3 g_{0ij} dx^i \otimes dx^j - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} dt \otimes dt, \quad (3.64)$$

donde  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, respectivamente. Podemos asumir que esta métrica de fondo corresponde al observador del *laboratorio*, *i.e.* al observador que no se mueve en el espacio, sólo en el tiempo. Por tanto, el vector temporal base definirá el marco de referencia de este observador (también llamado observador “estático”). Dicho vector temporal estará dado por

$$u_{\text{lab}} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.65)$$

y lo normalizaremos con respecto a la métrica del laboratorio

$$\eta(u_{\text{lab}}, u_{\text{lab}}) = -1. \quad (3.66)$$

Consideremos ahora, un medio homogéneo e isótropo simple en reposo con respecto al marco de referencia del laboratorio. Este medio puede ser descrito por una métrica del *material* dada por

$$g = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i \otimes dx^j - \frac{1}{\varepsilon \mu} dt \otimes dt, \quad (3.67)$$

donde  $\varepsilon$  y  $\mu$  serán consideradas constantes y son la permitividad y la permeabilidad del medio, respectivamente. Es preciso observar, que el vector base temporal  $u_{\text{lab}}$  no se encuentra normalizado con respecto a la métrica del medio, esto es

$$g(u_{\text{lab}}, u_{\text{lab}}) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}. \quad (3.68)$$

Buscamos que la estructura geométrica con la que hemos dotado a  $\mathcal{M}$  nos reproduzca las relaciones constitutivas con una estructura como la conocida en el lenguaje de cálculo vectorial (3.13). Por tanto, buscamos un mapeo multilinear<sup>5</sup>  $\tilde{\kappa} : \Omega_{\mathcal{M}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^2$ , tal que

$$G = \tilde{\kappa}[F], \quad (3.69)$$

o en términos de la conservación de carga y la 1-forma del potencial

$$d(\tilde{\kappa}[dA]) = j. \quad (3.70)$$

---

<sup>4</sup>Para una variedad Riemanniana las trayectorias que se extremizan son mínimas, mientras que para una variedad pseudo-Riemanniana podrían ser máximas.

<sup>5</sup>No puede ser proporcional a la identidad.

Buscamos establecer el mapeo  $\tilde{\kappa}$  de manera explícita. Para una variedad Riemanniana, el operador estrella de Hodge es un isomorfismo natural, asociado a la métrica, que vincula las  $p$ -formas con las  $(n - p)$ -formas para  $n = \dim(\mathcal{M})$

$$\star_g : \Omega_{\mathcal{M}}^p \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^{n-p}. \quad (3.71)$$

En nuestro caso, hemos supuesto que  $\dim(\mathcal{M}) = 4$ , y tanto  $F$  como  $G$  son 2-formas, por lo que podemos observar

$$\star_g : \Omega_{\mathcal{M}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^2. \quad (3.72)$$

Así, el operador de Hodge se convierte en el isomorfismo natural que genere las relaciones constitutivas dadas por

$$G = k \star_g F. \quad (3.73)$$

para  $k : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . En la figura 3.1, se puede observar como los diferentes elementos de la teoría electromagnética quedan vinculados a partir de las operaciones diferenciales que hemos propuesto.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{d} & F & & & & \\
 & & & & \star \downarrow & & & & \\
 & & & & G & \xrightarrow{d} & j & \longrightarrow & 0 \\
 \\ 
 \Omega^0 & & \Omega^1 & & \Omega^2 & & \Omega^3 & & \Omega^4
 \end{array}$$

Figura 3.1: Diagrama de la teoría electromagnética a partir de operaciones diferenciales. La fila de abajo representa la dimensión de las formas que se involucran.

Existen muchas formas de postular las relaciones constitutivas de manera geométrica. Definirlas mediante el operador de Hodge, nos genera la formulación métrica más sencilla del electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell, se pueden escribir ahora en términos de la 1-forma de potencial como

$$dG = d[k \star_g F] \quad (3.74)$$

$$= d[k \star_g dA] = j \quad (3.75)$$

que de forma explícita, desarrollando la derivada exterior obtenemos

$$dk \wedge \star_g dA + k d \star_g dA = j. \quad (3.76)$$

Aquí hemos asumido que  $k : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. A partir de ahora, cuando no haya ambigüedad de la métrica con la que estamos trabajando, omitiremos el subíndice  $_g$  del operador  $\star$ . Aplicando el mapeo de Hodge a la ecuación (3.76) podemos obtener las ecuaciones duales de Maxwell<sup>6</sup>:

$$\star (dk \wedge \star dA) + \star (k d \star dA) = \star j, \quad (3.77)$$

usando la linealidad del operador estrella de Hodge

$$\star (dk \wedge \star dA) + k \star d \star dA = \star j. \quad (3.78)$$

<sup>6</sup>Las ecuaciones (3.76) y (3.78) son las mismas ecuaciones en diferentes espacios, dado que (3.76) está en  $\Omega_{\mathcal{M}}^3$  y (3.78) está en  $\Omega_{\mathcal{M}}^1$ .

Usamos la codiferencial, definida como

$$\delta = (-1)^{n(k-1)+1} \text{sign}(g) \star d \star, \quad (3.79)$$

si  $n = 4$ ,  $k = 2$  y  $\text{sign}(g) = -1$ , entonces

$$\delta = \star d \star. \quad (3.80)$$

Finalmente, la ecuación (3.78) se reescribe como

$$\star (dk \wedge \star dA) + k\delta dA = \star j. \quad (3.81)$$

Al igual que el operador de Hodge, podemos introducir un operador Laplaciano dependiente de la métrica  $\Delta_g : \Omega_{\mathcal{M}}^p \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^p$ , definido como

$$\Delta_g \equiv d\delta + \delta d. \quad (3.82)$$

Al igual que antes, omitiremos el subíndice  $g$  cuando no haya ambigüedad en la métrica usada. Si usamos el Laplaciano en el potencial  $A$ , tenemos

$$\delta dA = \Delta A - d\delta A, \quad (3.83)$$

ecuación que hereda la simetría de  $F$ , ya que en general, para  $A' = A + d\psi$  se cumple que  $\delta dA = \delta dA'$  y esto implica que

$$\Delta A' - d\delta A' = \Delta A - d\delta A. \quad (3.84)$$

Así, las ecuaciones de Maxwell se pueden ver como

$$\underbrace{\star(dk \wedge \star dA)}_{\text{medio no homogéneo}} + \underbrace{k(\Delta A - d\delta A)}_{\text{relación constitutiva de Hodge}} = \star j. \quad (3.85)$$

Para explorar un poco más la parte de la relación constitutiva de Hodge, suponemos un medio homogéneo, (i.e.  $k = cte$ ).

$$k(\Delta A - d\delta A) = \star j, \quad (3.86)$$

o de forma dual:

$$\star [k(\Delta A - d\delta A)] = j. \quad (3.87)$$

Recordamos que

$$\star \star \alpha = (-1)^{k(n-k)} \text{sign}(g) \alpha \quad (3.88)$$

y en nuestro caso

$$\star \star j = j. \quad (3.89)$$

Del postulado de conservación de la carga total tenemos que

$$\int_{\Omega} dj = 0 \quad (3.90)$$

y usando la identidad de Stokes obtenemos

$$\int_{\Omega} dj = \int_{\partial\Omega} j = \int_{\partial\Omega} \star [k(\Delta A - d\delta A)] = 0. \quad (3.91)$$

Queremos saber si  $\star k\Delta A$  puede ser una corriente conservada (*i.e.* una 3-forma cerrada, que cumpla la condición de consistencia). Para eso, usamos la libertad de norma

$$\int_{\partial\Omega} \star [k(\Delta A' - d\delta A')] = k \int_{\partial\Omega} j \quad (3.92)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \star [k\Delta A'] = \int_{\partial\Omega} j + \star d\delta A' \quad (3.93)$$

$$= \int_{\partial\Omega} j + \star d\delta(A + d\psi) \quad (3.94)$$

$$= \int_{\partial\Omega} j + \star d(\delta A + \delta d\psi) \quad (3.95)$$

$$= \int_{\partial\Omega} j + \star d(\delta A + \Delta\psi). \quad (3.96)$$

Para que  $j$  se conserve, lo único que necesitamos es que  $\delta A + \Delta\psi = 0$ , por lo que

$$\delta A = -\Delta\psi + c \quad (3.97)$$

para  $c$  una constante. Usando esta condición

$$j = \star [k(\Delta A - d\delta A)] = \star [k(\Delta A - d(c - \Delta\psi))] \quad (3.98)$$

$$= \star [k(\Delta A - d\Delta\psi)] \quad (3.99)$$

$$= \star [k\Delta(A - d\psi)] \quad (3.100)$$

$$= \star k\Delta A'. \quad (3.101)$$

En particular, si  $\Delta\psi = c$  entonces  $\delta A = 0$ . A esta elección de norma se le conoce como la *norma de Lorentz*. Esto implica que

$$\star k\Delta A = \star k\Delta A' = j. \quad (3.102)$$

A partir de las suposiciones hechas sobre la métrica, la ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo, da como resultado una 3-forma que representa una ecuación de onda no homogénea.

En resumen, las ecuaciones de Maxwell (3.57), más la relación constitutiva de Hodge y la elección de la norma de Lorentz se expresa como

$$G = k \star F + \delta A = 0. \quad (3.103)$$

Esto da como resultado las ecuaciones de Maxwell-Hodge para un medio

$$\star(k\Delta A) = \star j \quad \text{homogéneo} \quad (3.104)$$

$$dk \wedge \star dA + \star(k\Delta A) = \star j \quad \text{no-homogéneo}. \quad (3.105)$$

Si partimos del hecho que se cumple (3.104) (o (3.105)), el campo estará dado por  $F = dA$  y la conservación de la carga (corriente) será consecuencia de la norma de Lorentz y de la relación constitutiva de Hodge:

$$\delta A = 0 \quad (3.106)$$

$$\Rightarrow \star j = \star k\Delta A \quad (3.107)$$

$$= \star k(d\delta A + \delta dA) \quad (3.108)$$

$$= \star k\delta F \quad (3.109)$$

$$= \star dG, \quad (3.110)$$

por lo tanto

$$j = dG \quad (3.111)$$

$$\therefore dj = 0. \quad (3.112)$$

Una vez establecida la libertad de norma y las relaciones constitutivas para los potenciales, podemos usar esta herramienta en coordenadas locales para recuperar las expresiones conocidas de los campos en el formalismo vectorial. Como hemos establecido dos métricas, una para el fondo y otra para el medio, denotaremos el operador de Hodge como  $*$  cuando estemos utilizando el asociado a la métrica de fondo (o del marco de referencia del laboratorio)  $\eta$ , mientras que el símbolo  $\star$  lo usaremos cuando nos estemos refiriendo al operador de Hodge asociado a la métrica del medio  $g$ . Como cualquier mapeo lineal, el dual de Hodge se encuentra completamente definido en términos de la acción en las formas de la base

$$*(dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} dx^k \wedge dt, \quad (3.113)$$

$$*(dx^k \wedge dt) = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} dx^i \wedge dx^j, \quad (3.114)$$

$$\star(dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} dx^k \wedge dt \quad (3.115)$$

y

$$\star(dx^k \wedge dt) = -\sqrt{\varepsilon \mu} dx^i \wedge dx^j. \quad (3.116)$$

A partir de la definición del operador de Hodge, podemos observar

$$\begin{aligned} \star F &= \star B + \star(E \wedge dt) \\ &= \star \left( \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) + \star \left( \sum_{k=1}^3 E_k dx^k \wedge dt \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \star(dx^i \wedge dx^j) + \sum_{k=1}^3 E_k \star(dx^k \wedge dt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sum_{k=1}^3 B_k dx^k \wedge dt - \sqrt{\varepsilon \mu} E_k dx^i \wedge dx^j. \end{aligned} \quad (3.117)$$

por tanto, podemos encontrar de manera explícita la constante  $k$  en términos de las coordenadas locales

$$G = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \star F. \quad (3.118)$$

Si desarrollamos  $G$  (cf. ecuación (3.43)) tenemos

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^3 B_k dx^k \wedge dt - \varepsilon E_k dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{k=1}^3 H_k dx^k \wedge dt - \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= H \wedge dt - D. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Podemos observar que las relaciones constitutivas geométricas de Hodge (3.118) asociadas a la métrica del material (3.67) son equivalentes a las de un medio homogéneo e isotrópico con relaciones constitutivas

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \vec{E}_{\text{lab}} \quad \text{y} \quad \vec{H}_{\text{lab}} = \frac{1}{\mu} \vec{B}_{\text{lab}}. \quad (3.120)$$

Los vectores en el marco de referencia del laboratorio se han calculado contrayendo los índices<sup>7</sup> de las 2-forms  $F$  y  $G$  con el vector velocidad del marco de referencia del laboratorio  $u_{\text{lab}}$ , usando la métrica del laboratorio. La 1-forma resultante se mapea a su correspondiente campo vectorial a través del isomorfismo musical

$$\vec{E}_{\text{lab}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} F], \quad (3.121)$$

$$\vec{H}_{\text{lab}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} G] \quad (3.122)$$

y

$$\vec{B}_{\text{lab}} = -\eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} * F], \quad (3.123)$$

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} * G]. \quad (3.124)$$

Notemos que aunque los campos vectoriales (3.121) - (3.124) están sobre la variedad  $\mathcal{M}$ , cada espacio tangente puede ser identificado directamente con vectores espaciales sobre  $\mathbb{R}^3$ , concordando con la formulación vectorial del electromagnetismo. Esta conversión de manera explícita, de forma general no se encuentra en la literatura de las formas diferenciales.

Observamos que el carácter general de este lenguaje lo vuelve una herramienta muy poderosa, ya que nos permite extraer las componentes vectoriales de flujos y campos en cualquier sistema de coordenadas, a partir de la 2-forma de flujo (Faraday)  $F$  y la métrica del material  $g$ . El vector temporal normalizado  $\frac{\partial}{\partial t}$ , juega el papel de *observador* en reposo con respecto al marco de referencia del laboratorio. Este vector es tangente a una curva en  $\mathcal{M}$  sin componentes espaciales. Esto representa a un observador que se encuentra estático en el espacio, pero que evoluciona temporalmente a velocidad unitaria. [cf. ecuaciones (3.66)]. Las ecuaciones (3.121) - (3.124) representan los flujos y los campos que *mide* un observador estático en el marco de referencia del laboratorio.

Las relaciones constitutivas del medio, necesarias para completar las ecuaciones de Maxwell (3.118), pueden ser incorporadas a partir de introducir un tensor métrico que caracteriza al medio. La métrica caracteriza la geometría por la cual se propagan los campos electromagnéticos. Esto fue identificado desde los principios de la teoría general de la relatividad, donde se puede pensar al campo gravitacional como un medio óptico desde el punto de vista de la propagación de la luz. Expresar las propiedades de un medio en términos de una variedad Riemanniana *curva* es un campo activo y fértil para la investigación. Hasta este punto, hemos podido notar que el observador juega un papel central en la recuperación de las expresiones

<sup>7</sup>La contracción entre una  $p$ -forma y un campo vectorial  $v$  está definida en [42]

$$\iota_v \omega [u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}] = p \cdot \omega [v, u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}],$$

donde  $\{u_{(i)}\}_{i=1}^{p-1}$  es un conjunto de campos vectoriales en  $\mathcal{M}$ . La contracción de una  $p$ -forma y un campo vectorial  $v$  da como resultado una  $(p-1)$ -forma

$$\iota_v \omega = p \cdot \omega(v).$$

vectoriales de los campos electromagnéticos. De hecho, la descomposición de los campos en sus partes eléctrico y magnético, depende particularmente del observador.

La ventaja de adoptar este formalismo geométrico para formular las relaciones constitutivas, se centra en su generalidad. Ecuaciones como (3.118), son expresiones independientes del observador y libres de coordenadas. Lo que implica que su validez no depende de las coordenadas que se usen ni del marco de referencia en el que se encuentre, ya sea inercial o no. Aún cuando las ecuaciones (3.121) – (3.124) son las expresiones de los campos electromagnéticos medidos por un observador estático en el marco de referencia del laboratorio, éstas pueden ser generalizadas a cualquier marco de referencia sustituyendo el vector de velocidad espacio-temporal  $\frac{\partial}{\partial t}$  por cualquier otro vector  $u$  tal que  $g(u, u) = -1/\varepsilon\mu$ .

### 3.4. Conductores y ley de Ohm

Una vez expuestos los principios básicos del electromagnetismo en un lenguaje geométrico general, podemos ampliar el formalismo a medios conductores. Estos medios se rigen por la ley de Ohm, la cual se puede escribir como una nueva relación constitutiva. A partir de esta relación se puede generar una versión geométrica del teorema de Poynting y proponer en este mismo lenguaje la conservación de la energía electromagnética.

Como en las secciones anteriores, empezamos con el observador que se encuentra en el marco de referencia estático (marco del laboratorio) que *sólo se mueve en la dirección temporal*

$$\vec{u}_{\text{lab}} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.125)$$

De manera usual, la ley de Ohm se escribe en términos vectoriales como

$$\vec{j}_{\text{ind}} = \sigma \vec{E} \quad (3.126)$$

donde  $j_{\text{ind}}$  es la corriente eléctrica inducida y  $\sigma$  la conductividad del medio [43]. Consideremos un observador en el marco del laboratorio ( $\vec{u}_{\text{lab}}$ ) y un medio homogéneo e isotrópico con conductividad constante  $\sigma$ . Podemos establecer la relación algebraica entre la 2-forma de Faraday  $F$  y la 3-forma de corriente inducida  $j_{\text{ind}}$  que mide dicho observador

$$\star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} j_{\text{ind}} = \sigma \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} F, \quad (3.127)$$

donde  $\star$  es el operador de Hodge. La ecuación (3.127) es la expresión geométrica de la ley de Ohm, que depende explícitamente del observador, a diferencia de la relación constitutiva escrita en (3.118). Con esta información, podemos volver a encontrar la expresión vectorial que mediría el observador del laboratorio dada por

$$\vec{j}_{\text{ind}\vec{u}_{\text{lab}}} = \sqrt{|\det(g)|} g^\sharp (i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} j_{\text{ind}}) \quad (3.128)$$

de donde podemos observar que

$$\begin{aligned} \sqrt{|\det(g)|} g^\sharp (i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} j_{\text{ind}}) &= \sigma g^\sharp (i_{\vec{u}_{\text{lab}}} F) \\ &= \sigma \vec{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} \end{aligned} \quad (3.129)$$

y por tanto, regresar a la ley de Ohm vectorial.

De la misma forma, la **conservación de la energía** depende particularmente del estado de movimiento del observador y de las propiedades particulares del medio en el que se propagan

los diferentes campos electromagnéticos. Este hecho, ha sido discutido ampliamente en diferentes trabajos y no ha sido del todo resuelto. Para poder distinguir el estado de movimiento de un observador a partir de su vector velocidad, es necesario introducir el concepto de *conexión* a la variedad del espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ . Este concepto, generaliza lo que en geometría Euclidiana llamamos *líneas rectas* que caracterizan el movimiento *libre de fuerzas* sobre una variedad. En esta parte del trabajo, nos enfocaremos únicamente en mostrar que existe una 3-forma de corriente de energía-momento, que codifica la energía y el momento disponible en los campos electromagnéticos para un observador cualquiera. Algo más general, debería considerar la interacción entre el estado de movimiento del observador y los mismos campos electromagnéticos; cosa que no haremos en esta parte.

Consideremos la densidad Lagrangiana electromagnética

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F \wedge G, \quad (3.130)$$

y un observador que se mueve a una velocidad  $\vec{u}$  (cumpliendo  $g(\vec{u}, \vec{u}) = -1/\varepsilon\mu$ ). Definimos la 3-forma de **densidad de flujo de energía-momento** como

$$\mathcal{E}_u = i_u \mathcal{L} + F \wedge i_u G. \quad (3.131)$$

Esta densidad representa la cantidad de energía-momento que fluye a través de la frontera de una región 4- dimensional del espacio-tiempo. Las componentes de esta 3-forma tienen la información de la densidad de energía-momento almacenada en los campos electromagnéticos que se encuentra disponible para el observador que se mueve a velocidad  $\vec{u}$ . Para el caso de  $\vec{u}_{\text{lab}}$ , el primer término de (3.131) se desarrolla como:

$$\begin{aligned} i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} i_{\vec{u}_{\text{lab}}} [F \wedge G] \\ &= -\frac{1}{2} i_{\frac{\partial}{\partial t}} [(B + E \wedge dt) \wedge (-D + H \wedge dt)] \\ &= -\frac{1}{2} i_{\frac{\partial}{\partial t}} [(B \wedge H - E \wedge D) \wedge dt] \\ &= \frac{1}{2} (B \wedge H - E \wedge D), \end{aligned} \quad (3.132)$$

mientras que el segundo término queda como

$$\begin{aligned} F \wedge i_{\vec{u}_{\text{lab}}} G &= (B + E \wedge dt) \wedge i_{\vec{u}_{\text{lab}}} (-D + H \wedge dt) \\ &= (B + E \wedge dt) \wedge (-H) \\ &= -B \wedge H + E \wedge H \wedge dt. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Por tanto, la 3-forma queda como

$$\mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} = -\frac{1}{2} (B \wedge H + E \wedge D) + E \wedge H \wedge dt. \quad (3.134)$$

A partir de esta 3-forma, podemos encontrar la 1-forma dual  $\tilde{S} = \star \mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \star \left[ -\frac{1}{2} (B \wedge H + E \wedge D) + E \wedge H \wedge dt \right] \\
&= \star \left[ -\frac{1}{2} (B_{ij} H_k dx^i + E_k D_{ij}) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \right. \\
&\quad \left. (E_i H_j - H_j E_i) dx^i \wedge dx^j \wedge dt \right] \\
&= -\frac{1}{2} (B_k H_k + E_k D_k) dt + |\det(g)| (E_i H_j - H_j E_i) dx^k \\
&= -\frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}) dt + \left[ (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \right] dx^k.
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Inmediatamente, podemos reconocer la densidad de energía almacenada en los campos electromagnéticos, que se encuentra disponible para el observador del laboratorio como

$$U_{\vec{u}_{\text{lab}}} = -i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \tilde{S} = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}), \tag{3.136}$$

que coincide directamente con los resultados vectoriales conocidos. Ahora estamos en posición de definir la 2-forma de **Poynting**  $S$  dada por

$$\begin{aligned}
S &= \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} = \star (E \wedge H) \\
&= \star (E_i H_j - H_j E_i) dx^i \wedge dx^j \\
&= \left[ (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \right] dx^k \wedge dt
\end{aligned} \tag{3.137}$$

de donde podemos recuperar el tradicional vector de Poynting

$$\vec{S}_{\vec{u}_{\text{lab}}} = -g^\sharp [i_{\vec{u}_{\text{lab}}} S] = -g^\sharp [i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \star i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}}] = \vec{E} \times \vec{H}. \tag{3.138}$$

Como podemos observar, efectivamente la 3-forma  $\mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}}$  puede ser interpretada como una corriente de densidad de energía-momento, donde la ley de conservación de energía para un observador en el laboratorio está dada por

$$\oint_{\partial \Omega^4} \mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \Omega^4 \subset M \implies d\mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.139}$$

Es importante notar que esta ley de conservación depende del observador. Su validez depende de que el campo no realice trabajo sobre el observador, ni el observador genere un cambio en la distribución del campo. Bajo estas premisas, la conservación de la energía se representa demandando la siguiente igualdad

$$d\mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} = d [i_{\vec{u}_{\text{lab}}} \mathcal{L} + F \wedge i_{\vec{u}_{\text{lab}}} G] \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.140}$$

Esto se puede sintetizar en

$$di_{\vec{u}_{\text{lab}}} \mathcal{L} + di_{\vec{u}_{\text{lab}}} F \wedge G + F \wedge i_{\vec{u}_{\text{lab}}} j_{\text{ind}} = 0. \tag{3.141}$$

Ahora, podemos dar una versión geométrica (en formas diferenciales) del teorema de Poynting

$$\star_g d\mathcal{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} = \frac{\partial}{\partial t} U_{\vec{u}_{\text{lab}}} + \nabla \cdot \vec{S}_{\vec{u}_{\text{lab}}} + \vec{E}_{\vec{u}_{\text{lab}}} \cdot \vec{j}_{\text{ind}\vec{u}_{\text{lab}}} = 0. \tag{3.142}$$

Estos resultados nos permiten escribir la conservación de la energía y el momento en un sólo objeto matemático: la 3-forma  $\mathcal{E}_u$ . Cabe destacar, que aunque la interpretación de esta 3-forma es la cantidad de energía almacenada en los campos electromagnéticos disponible para el observador  $u$ , en general no es la cantidad total de energía en los campos. Podemos observar, que el medio juega un papel fundamental en la definición de esta 3-forma, en las relaciones constitutivas (3.118) que lo caracterizan.

## 4. La métrica óptica y algunas aplicaciones

En la última década ha crecido de manera significativa el uso de la geometría diferencial y la Relatividad General como herramientas para describir fenómenos electromagnéticos en medios. La estrecha relación entre una métrica del espacio-tiempo y las características electromagnéticas de un medio tales como la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y efectos magnetoeléctricos hacen que dichos formalismos facilitan modelar y controlar estas características para diseñar nuevos metamateriales ópticos. Esta herramienta ha sido previamente explotada en formalismos como la *óptica de transformaciones*, donde se han llevado de manera satisfactoria estos diseños a la práctica. Sin embargo, esta relación entre la métrica del espacio-tiempo y el electromagnetismo no queda del todo bien entendida. Como ejemplo claro de esto, tenemos el índice de refracción. Comúnmente, el índice de refracción  $n$  se define como un escalar dado por el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) y la velocidad efectiva de ésta en un medio ( $v$ ), esto es  $n = \frac{c}{v}$ . De la misma manera, esto puede reescribirse en términos de las propiedades electromagnéticas de un medio dieléctrico como

$$n^2 = \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \quad (4.1)$$

donde  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$  y la velocidad efectiva de la luz en el medio está dada por  $v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$ . Cuando los medios son inhomogéneos e isotrópicos,  $\epsilon$  y  $\mu$  son tensores con una representación matricial  $3 \times 3$  no reducible a escalar. Aunque se conozcan las componentes de estas matrices, no queda clara la forma de obtener el índice de refracción a partir de ellas.

A mediados de los 1920's, Gordon planteó que la geometría del espacio-tiempo puede ser equivalente a la de un medio óptico. Por tanto, el índice de refracción se podría leer de manera directa del término temporal de la métrica del espacio-tiempo en coordenadas isotrópicas cartesianas. A esta métrica se le conoce como la *métrica óptica* [8]. Esta solución, aunque práctica, no es definitiva. Existen geometrías equivalentes a medios ópticos que no pueden ser llevadas a coordenadas isotrópicas cartesianas a partir de transformaciones conformes y al no encontrar la expresión de su métrica óptica, no se puede determinar el índice de refracción.

En este capítulo se abordarán el concepto y las bases para construir un tensor constitutivo, así como el formalismo de la métrica óptica y se mostrarán algunos ejemplos de diferentes geometrías equivalentes a medios ópticos usando este formalismo.

### 4.1. La permitividad y permeabilidad en términos del tensor constitutivo

El electromagnetismo en medios descrito por las ecuaciones de Maxwell, que en el lenguaje del cálculo vectorial se expresan de manera local (diferencial) como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{ext}} \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} &= \vec{j}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como hemos mencionado anteriormente, esta información resulta incompleta para resolver el problema fundamental de teoría de campos: Dadas las fuentes, poder encontrar la expresión de los campos externos. Para completar la información, es necesario introducir una serie de ecuaciones que relacionen los campos externos  $(\vec{E}, \vec{B})$  con los campos inducidos  $(\vec{D}, \vec{H})$ . Estas ecuaciones son conocidas como relaciones constitutivas, y describen la respuesta del medio ante estímulos electromagnéticos externos. La forma más simple de proponer esta respuesta es de manera lineal [cf. ecuación (3.13)]

$$\vec{D} = \bar{\varepsilon}\vec{E} + \bar{\zeta}\vec{B}, \quad (4.3)$$

$$\vec{H} = \bar{\mu}^{-1}\vec{B} + \bar{\xi}\vec{E} \quad (4.4)$$

donde  $\bar{\varepsilon}$  y  $\bar{\mu}$  son las matrices  $3 \times 3$  de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente. Las matrices  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{\xi}$  son las matrices de efectos magnetoelectricos.<sup>1</sup> En trabajos recientes [44], [45] las ecuaciones constitutivas se derivan de un principio variacional, donde el principio de acción para el campo electromagnético está dado por

$$I = -\frac{1}{4} \int \chi^{abcd} F_{ab} F_{cd} d^4x, \quad (4.5)$$

usando la convención de suma de Einstein. En esta formulación, el tensor  $\chi^{\alpha\beta\gamma\delta}$  codifica toda la información electromagnética del medio. A partir de la definición de la acción (4.5), el tensor  $\chi$  cumple con las siguientes simetrías [46] :

$$\chi^{abcd} = -\chi^{bacd} = -\chi^{badc} \quad (4.6)$$

$$\chi^{abcd} = \chi^{cdba}. \quad (4.7)$$

Recapitulando las ecuaciones de Maxwell en términos de las 2-formas diferenciales  $F$  y  $G$  [cf. ecuaciones (3.39) y (3.40)], podemos observar que este tensor constitutivo está relacionado con los conceptos geométricos previamente expuestos. Dadas las relaciones constitutivas de Hodge, tenemos

$$G = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mu}}} \star F, \quad (4.8)$$

que en términos de sus componentes, se puede escribir como

$$G^{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mu}}} g^{ac} g^{bd} F_{[cd]} \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mu}}} \left( g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc} \right) F_{cd}. \quad (4.10)$$

Al convertirlo en un tensor (0, 2) obtenemos

$$G_{ab} = \frac{\sqrt{|\det g|}}{2} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mu}}} \epsilon_{abcd} \left( g^{ce} g^{df} - g^{cf} g^{de} \right) F_{ef}. \quad (4.11)$$

Esta notación se puede compactar si definimos un *tensor constitutivo*  $\kappa$ , tal que

$$G_{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mu}}} \kappa_{ab}{}^{cd} F_{cd}. \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup>Para medios isotrópicos y homogéneos, estas matrices son reales. En la mayoría de los casos, cuando las matrices son complejas, se cumple que  $\bar{\chi} = \bar{\zeta}^\dagger$ . Sin embargo, para no perder generalidad, las consideraremos matrices diferentes.

El tensor  $\kappa$  cuenta con 36 componentes independientes, con la información de todas las propiedades electromagnéticas del medio. Este tensor es antisimétrico por pares de índices

$$\kappa_{ab}{}^{cd} = -\kappa_{ab}{}^{dc} = -\kappa_{ba}{}^{cd}. \quad (4.13)$$

Se puede definir de forma equivalente una *densidad tensorial constitutiva* en el espacio-tiempo [47] que resulte más conveniente:

$$\chi^{abcd} := \frac{1}{2} \epsilon^{abef} \kappa_{ef}{}^{cd}. \quad (4.14)$$

para  $\epsilon^{ijkl}$  es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Esta densidad, tiene las mismas 36 componentes independientes que  $\kappa$ . Estas se pueden descomponer en tres partes irreducibles:  $36 = 20 + 15 + 1$  [47]. Las primeras 20 componentes conforman la parte *principal* simétrica, que es responsable de la respuesta macroscópica usual de los parámetros dieléctricos [45]. Las siguientes 16 componen la parte llamada *skewon* relacionadas con procesos disipativos del medio. El último componente llamado *axion* ha sido tema de estudio en los últimos años, pero su interpretación aún no queda completamente clara.

$$\chi^{mnab} = \underbrace{(1)\chi^{mnab}}_{\text{principal}} + \underbrace{(2)\chi^{mnab}}_{\text{skewon}} + \underbrace{(3)\chi^{mnab}}_{\text{axion}} \quad (4.15)$$

$$= \sum_{A=1}^3 (A)\chi^{mnab}. \quad (4.16)$$

Cabe recalcar, que debido a (4.14), el tensor  $\kappa$  se divide exactamente igual, i.e.

$$\kappa_{mn}{}^{cd} = \sum_{A=1}^3 (A)\kappa_{mn}{}^{cd}. \quad (4.17)$$

Si la relación espacio-temporal puede ser adquirida de un Lagrangiano, entonces las partes de *skewon* y *axion* deben anularse. La parte *skewon* de 15 componentes independientes se puede mapear a un tensor  $\mathcal{S}_\alpha^\beta$  [47] dado por

$$\mathcal{S}_a{}^b := \frac{1}{4} \epsilon_{acde} (2)\chi^{cdeb}, \quad (4.18)$$

mientras la componente de axion se puede mapear a un pseudo-escalar:

$$\alpha := \frac{1}{4!} \epsilon_{abcd} (3)\chi^{abcd}. \quad (4.19)$$

Dada una geometría particular del espacio-tiempo (i.e. dado un tensor métrico  $g$ ), la densidad tensorial constitutiva se puede expresar en términos de este tensor métrico

$$\chi^{abcd} = \frac{1}{2} \sqrt{|\det g|} (g^{ac} g^{bd} - g^{ad} g^{bc}). \quad (4.20)$$

Para un medio y un observador general, la densidad  $\chi$  se puede descomponer en los tensores de permitividad  $\epsilon$ , permeabilidad  $\mu$  y los efectos magnetoeléctricos  $\zeta$  y  $\xi$  [20]. Cada uno de estos tensores es medido en la dirección perpendicular al movimiento del observador y pueden ser expresados en términos de matrices  $3 \times 3$  como se plantea en las ecuaciones (4.3) y (4.4)

$$\chi = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta \\ \xi & \mu^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Ecuaciones (3.121) – (3.124) nos permiten encontrar las componentes de los campos para un observador determinado que se mueve a velocidad  $u$  [45]. Con esta información, podemos encontrar las componentes de cada una de estas matrices [27]

$$\varepsilon^{ab} = -2\chi^{abcd} u_c u_d \quad (4.22)$$

$$[\mu^{-1}]^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{ca}_{ef} \epsilon^{db}_{gh} \chi^{efgh} u_c u_d \quad (4.23)$$

$$\zeta^{ab} = \epsilon^{ab}_{ef} \chi^{efcd} u_c u_d \quad (4.24)$$

para  $u$  el 4-vector de velocidad del observador y  $\epsilon^{abcd}$  el tensor antisimétrico de Levi-Civita. De manera generalizada, se considera que  $\xi = \zeta^\dagger$  tanto para los casos isotrópicos como anisotrópicos. Sin embargo, en las siguientes secciones veremos que para medios en movimiento, se pueden generar medios equivalentes en el laboratorio donde esto no siempre se cumple.

## 4.2. La métrica óptica

A finales de la década de los 60's los fenómenos ópticos en un medio material se empezaron a describir de forma equivalente a la interacción de la luz con un campo gravitacional. De esta forma, podemos caracterizar un medio óptico en términos de la geometría de un espacio-tiempo equivalente. A este medio lo denotamos como un *medio equivalente*<sup>2</sup>. Dadas las características geométricas de esta descripción de fenómenos ópticos, de ahora en adelante estaremos usando unidades geométricas (*i.e*  $c = 1/(\epsilon_0 \mu_0) = 1$  y  $n^2 = 1/v$ , para  $v$  la velocidad efectiva de la luz en el medio).

Para ciertas características de las propiedades electromagnéticas  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$  y  $\xi$  conocidas como *condiciones de compatibilidad* [27], es posible describir por completo al medio (electromagnéticamente) en términos de la métrica  $g$ . Sin embargo, se puede mostrar que siempre existe un observador (o marco de referencia) tal que cualquier condición de compatibilidad se reduce a la condición de *impedancia*  $\epsilon^{ab} = \mu^{ab}$ . Las matrices magnetoeléctricas tienen relevancia únicamente en fenómenos disipativos y con características no-locales.

El elemento de línea de una métrica  $g$  está dado por  $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$ . Para un espacio conformalmente plano, en coordenadas cartesianas tenemos

$$ds^2 = -\frac{1}{n^2} dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (4.25)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio y por tanto, el factor  $1/n^2$  es la velocidad efectiva de la luz en el espacio-tiempo. Particularmente en el vacío  $n = 1$ , recuperamos la métrica de Minkowski, como era de esperarse. Toda métrica con esta estructura se conoce como una *métrica óptica*. Cualquier métrica que se pueda llevar a coordenadas isotrópicas cartesianas por medio de transformaciones conformes, adquiere esta estructura “óptica”. Cabe destacar que las transformaciones conformes, en general cambian la geometría pero no las trayectorias de las geodésicas nulas. Esto implica que en esta nueva geometría las trayectorias de la luz son las mismas, salvo re-parametrizaciones de las curvas. Existen geometrías que no se puede convertir a coordenadas isotrópicas cartesianas por medio de transformaciones conformes. Para este tipo de geometrías no es claro cómo adquirir una métrica óptica.

### 4.2.1. Ejemplos de medios equivalentes

Como hemos observado, podemos modelar las propiedades electromagnéticas de un medio óptico a partir de su geometría. Esto nos lleva a plantear medios hipotéticos que pudieran tener

<sup>2</sup>Equivalente a un campo gravitacional que genere la misma geometría del espacio-tiempo.

la misma geometría de un espacio-tiempo generado por un modelo gravitacional. Estos medios los hemos llamado “medios equivalentes”. A continuación veremos dos ejemplos explícitos de estos medio equivalentes: *el universo de Einstein* y el espacio-tiempo de *Schwarzschild*. Las geometrías de estos dos modelos gravitacionales son isotrópicas y homogéneas, por lo que pueden ser consideradas “simples”. En ambos casos, es posible hacer la transformación conforme a coordenadas isotrópicas cartesianas y adquirir su métrica óptica.. Haremos los cálculos explícitos y mostraremos las geodésicas nulas, que representarían las trayectorias que seguiría la luz en estos medios equivalentes

### El universo de Einstein

En este modelo gravitacional, se asume que el espacio-tiempo es estático y tiene una distribución uniforme de materia. Estas suposiciones llevan a un universo estático, finito y con curvatura espacial esférica. Para este modelo se debe incluir la constante cosmológica  $\Lambda$  propuesta por Einstein. La forma general de la métrica de esta geometría está dada por la métrica

$$g = a(t)^2 \left( 1 - \frac{r^2}{k^2} \right) dr^2 + r^2 d\Omega - dt^2 \quad (4.26)$$

en donde  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ . Resolvemos las ecuaciones de campo de Einstein para esta métrica

$$G + \Lambda = \kappa T, \quad (4.27)$$

donde  $T$  el tensor de energía-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t)) u_\mu u_\nu + p(t) g_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

En este caso  $\rho(t)$  y  $p(t)$  son la densidad y la presión respectivamente, mientras que  $u$  es la velocidad del observador inercial dada por  $u_\alpha = dt$ . Suponemos una solución estática para las ecuaciones de Einstein, lo que significa

$$\ddot{a}(t) = \dot{a}(t) = 0, \quad p(t) = 0. \quad (4.29)$$

Resolvemos (4.27) para encontrar la métrica específica

$$g_0 = \frac{1}{\Lambda(k^2 - r^2)} dr^2 + \frac{r^2}{\Lambda k^2} d\theta^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda k^2} d\varphi^2 - dt^2. \quad (4.30)$$

Con esta métrica, ahora buscamos las hipersuperficies de tiempo constante, que deberían ser conformalmente planas. Para esto, haremos un cambio de coordenadas genérico de  $r \rightarrow R$  dado por  $r = f(R)$ . Sustituimos en (4.30) y obtenemos una métrica de prueba

$$g_{test} = \frac{f'(R)^2}{\Lambda(k^2 - f(R)^2)} dR^2 + \frac{f(R)^2}{\Lambda k^2} d\theta^2 + \frac{f(R)^2 \sin^2 \theta}{\Lambda k^2} d\varphi^2. \quad (4.31)$$

La estructura más general de una métrica conformalmente plana está dada por

$$g_{cf} = \Omega(R)^2 dR^2 + \Omega(R)^2 R^2 d\theta^2 + \Omega(R)^2 R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.32)$$

donde  $\Omega(R)^2$  es el factor conforme de la métrica. Para encontrar las funciones desconocidas  $f(R)$  y  $\Omega(R)$ , imponemos la restricción de que ambas métricas (4.31) y (4.32) deban tener el mismo tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  y el mismo escalar de Ricci  $R$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(g_{test}) = R_{\alpha\beta\mu\nu}(g_{cf}), \quad R(g_{test}) = R(g_{cf}). \quad (4.33)$$

De (4.33) encontramos las funciones desconocidas

$$\Omega(R) = \frac{4k}{\sqrt{\Lambda(R^2 + 4k^2)}}, \quad f(R) = \frac{4k^2 R}{R^2 + 4k^2}. \quad (4.34)$$

Finalmente, podemos hacer la transformación de coordenadas con las soluciones obtenidas en (4.34) de  $f(R)$  y adquirir la métrica isotrópica

$$g_{iso} = \frac{16k^2}{\Lambda(R^2 + 4k^2)^2} dR^2 + \frac{16k^2 R^2}{\Lambda(R^2 + 4k^2)^2} d\theta^2 + \frac{16k^2 R^2 \sin^2 \theta}{\Lambda(R^2 + 4k^2)^2} d\varphi^2 - dt^2. \quad (4.35)$$

Como la métrica óptica es una métrica en coordenadas isotrópicas cartesianas, primero encontramos la métrica conforme en coordenadas esféricas multiplicando por el inverso del factor conforme  $\Omega(R)^2$

$$g_{conf} = \left( \frac{1}{\Omega(R)^2} \right) g_{iso} = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{\Lambda(R^2 + 4k^2)^2}{16k^2} dt^2. \quad (4.36)$$

Finalmente, hacemos la transformación a coordenadas cartesianas

$$g_{optical} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{\Lambda(4k^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2}{16k^2} dt^2. \quad (4.37)$$

De (4.37) podemos leer directamente la velocidad de la luz a partir de su término temporal, además de poder extraer el índice de refracción del medio equivalente

$$n^2 = \frac{16k^2}{\Lambda(R^2 + 4k^2)^2} \quad (4.38)$$

para  $R = x^2 + y^2 + z^2$ .

Para encontrar las geodésicas nulas, resolvemos las ecuaciones geodésicas

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (4.39)$$

y graficamos dichas soluciones. Estas serán las trayectorias que seguirían los rayos de luz en este medio equivalente. Figura 4.1.

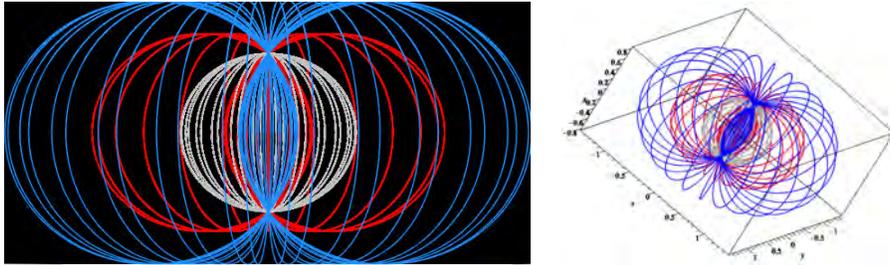


Figura 4.1: Rayos de luz de un medio equivalente a la geometría del universo de Einstein. Estas trayectorias son las soluciones de las ecuaciones geodésicas de la métrica óptica. La imagen izquierda se encuentra restringida al plano  $xy$ , mientras que la imagen de la derecha se muestra en 3D.

## El espacio-tiempo de Schwarzschild

Para este modelo, haremos el mismo ejercicio que en el universo de Einstein. En este caso particular, el modelo cumple con las mismas propiedades que el universo de Einstein, pero supone la existencia de una masa  $M$  que se traduce a una singularidad en el universo y por tanto en el espacio-tiempo. Para este ejemplo, partiremos de la forma isotrópica general de una métrica con una singularidad

$$g = B(r)^2 dr^2 + R(r)^2 d\theta^2 + R(r)^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - N(r) dt^2 \quad (4.40)$$

donde  $B(r)$ ,  $R(r)$  y  $N(r)$  son funciones desconocidas del radio. Calculamos las expresiones explícitas de estas funciones por medio del tensor de Einstein  $G$

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}S g^{\alpha\beta} \quad (4.41)$$

para  $R^{\alpha\beta}$  el tensor de curvatura de Ricci y  $S$  el escalar de Ricci. Resolvemos las ecuaciones diferenciales de donde obtenemos la forma específica de la métrica

$$g_s = -\frac{r}{-r+2M} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi + \frac{2M-r}{r} dt^2. \quad (4.42)$$

En este caso, hemos establecido algunas constantes de integración como  $C_1 = I$  y  $C_2 = 2M$  y hemos sustituido  $R(r) = r$ .

Consideramos ahora, las hipersuperficies de tiempo constante con la métrica inducida. Observamos que éstas son realmente conformalmente planas y encontramos de forma explícita el factor conforme para realizar el cambio de coordenadas. Notemos que nuestro encaje, todavía mantiene una función desconocida  $f(\rho)$ , la que determinaremos igualando las curvaturas de la métrica inducida  $g_{test}$  y la métrica conformalmente plana  $g_{cf}$ . La métrica inducida queda como

$$g_{test} = -\frac{f(\rho)f'(\rho)^2}{2M-f(\rho)} d\rho^2 + f(\rho)^2 d\theta^2 + f(\rho)^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.43)$$

y la métrica conformalmente plana queda como

$$g_{cf} = \Omega(\rho)^2 d\rho^2 + \Omega(\rho)^2 \rho^2 d\theta^2 + \Omega(\rho)^2 \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.44)$$

Resolviendo para las condiciones dadas por (4.33), obtenemos

$$\Omega(\rho) = \frac{C_1(M\rho + C_2)^2}{2\rho^2 C_2}, \quad f(\rho) = \frac{(M\rho + C_2)^2}{2\rho C_2} \quad (4.45)$$

para  $C_1$  y  $C_2$  constantes de integración por definir. Ahora, usamos la función radial obtenida y realizamos la transformación de coordenadas del espacio-tiempo completo de Schwarzschild

$$g_{iso} = \frac{(M\rho + C_2)^4}{4\rho^4 C_2^2} d\rho^2 + \frac{(M\rho + C_2)^4}{4\rho^2 C_2^2} d\theta^2 + \frac{(M\rho + C_2)^4 \sin^2 \theta}{4\rho^2 C_2^2} d\varphi^2 - \frac{(M\rho - C_2)^2}{(M\rho + C_2)^2} dt^2. \quad (4.46)$$

Para fijar la constante  $C_2$ , usamos el límite asintótico de la componente radial de la métrica. Fijamos  $\theta = \pi/2$  y hacemos tender  $\rho \rightarrow \infty$ , obteniendo

$$\frac{M^4}{(2C_2)^2} = 1. \quad (4.47)$$

Por tanto,  $C_2 = M^2/2$ . Encontramos la métrica isotrópica

$$g_{iso} = \frac{(2\rho + M)^4}{16\rho^4} d\rho^2 + \frac{(2\rho + M)^4}{16\rho^2} d\theta^2 + \frac{(2\rho + M)^4 \sin^2 \theta}{16\rho^2} d\varphi^2 - \frac{(M - 2\rho)^2}{(2\rho + M)^2} dt^2. \quad (4.48)$$

Multiplicamos por el inverso del factor conforme  $\Omega(\rho)$  dado por (4.45), para encontrar la métrica isotrópica en coordenadas esféricas

$$g_{conf} = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^{-4} g_{iso} = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi - \frac{16\rho^4(M - 2\rho)^2}{(2\rho + M)^6} dt^2. \quad (4.49)$$

Finalmente, transformamos a coordenadas cartesianas para obtener la métrica óptica

$$g_{optical} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{16(x^2 + y^2 + z^2)^2 (M - 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2}{(2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + M)^6} dt^2 \quad (4.50)$$

de donde podemos leer directamente el índice de refracción del medio equivalente

$$n^2 = \frac{(2\rho + M)^6}{16\rho^4(M - 2\rho)^2} \quad (4.51)$$

para  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Estos resultados, concuerdan con los reportados en [20, 48] usando el tensor constitutivo y sus componentes.

Para observar las trayectorias de la luz, volvemos a resolver las ecuaciones geodésicas (4.39) para esta métrica. En la figura 4.2 se muestran dichas soluciones.

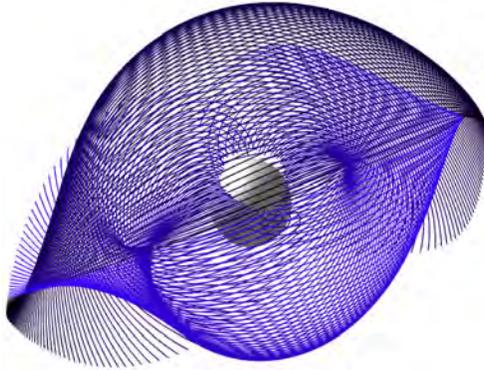


Figura 4.2: Geodésicas nulas (rayos de luz) en la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild. Donde la masa  $M$  representa una singularidad de la geometría fuera de los ejes de simetría.

Los ejemplos previamente revisados, representan geometrías en las que el formalismo de la métrica óptica puede ser empleado directamente. Sin embargo, existen diferentes geometrías que podrían ser equivalentes a medios ópticos, en las que no se puede adquirir una métrica óptica por medio de transformaciones conformes. Para estos casos podemos observar lo siguiente:

Como se ha mencionado antes, de las ecuaciones (4.22) y (4.23) sabemos que la permitividad y la permeabilidad son cantidades dependientes del observador. Consideremos un observador que se mueve a una velocidad  $u$  y consideremos la métrica original del espacio-tiempo de

Schwarzschild en coordenadas esféricas (4.42). En estas coordenadas podemos definir el observador que se encuentra en *caída libre* (observador inercial), a través de pedir que se mueva con velocidad  $u = \partial t$  (llamado también observador estático o de laboratorio). En este marco de referencia, las condiciones de compatibilidad, se deben reducir a la condición de impedancia ( $\varepsilon = \mu$ ). Así, en términos de esta métrica y estas coordenadas, el medio equivalente puede ser caracterizado por los tensores

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \mu^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(2M-r)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r \sin^2 \theta (2M-r)} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

y efectos magnetoeléctricos nulos. Dado que estos tensores no pueden ser reducidos a escalares, el índice de refracción definido como  $n^2 = \varepsilon\mu$  no tiene contraparte tensorial (o matricial). Sin embargo, podemos notar que dichos tensores son tensores del tipo (0, 2), los cuales, pueden ser transformados a tensores del tipo (1, 1), de donde obtenemos representaciones matriciales diagonales. Para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas esféricas originales tenemos

$$\varepsilon_{\alpha}^{\beta} = \mu_{\alpha}^{\beta} = \left( \frac{r}{2M-r} \right) \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (4.53)$$

que en coordenadas isotrópicas cartesianas corresponde directamente al término encontrado en (4.51). Esto nos lleva a pensar que para un observador en “caída libre” que se mueve a velocidad  $u = \partial t$ , el índice de refracción se puede calcular en las coordenadas originales como

$$n^2 = \varepsilon_a^a \mu_a^a \quad (\text{Sin usar la convención de suma}) \quad (4.54)$$

para un índice  $a$  fijo.

### 4.3. La geometría de medios en movimiento

Una de las características más importantes dentro del electromagnetismo, es que las mediciones de los campo eléctrico y magnético dependen del observador y por tanto del marco de referencia. Una carga estática no genera campo magnético para un observador estático en el marco de referencia del laboratorio, pero esa misma carga se vuelve una corriente cuando el observador que mide se mueve con respecto a ella. Dicho observador medirá campo magnético. Alrededor de 1880, Röntgen [49] se dio cuenta que un medio inmerso en un campo únicamente eléctrico medido por un observador estático, parecía magnetizarse cuando éste (el medio) se movía con respecto al marco del laboratorio. De la misma manera, existe una polarización aparente del medio cuando el campo eléctrico se reemplaza por uno magnético. En ambos casos, las relaciones constitutivas resultantes para el medio en movimiento acoplaban los campos magnético y eléctrico, en lo que hoy conocemos como los *efectos magnetoeléctricos* (ver [37] y sus referencias para una descripción adecuada). Esta área del electromagnetismo se ha vuelto muy activa en los últimos años en el campo de la ciencia e ingeniería de materiales, debido a que abre las puertas para poder controlar efectos electromagnéticos importantes. Un ejemplo de esto, es la magnetización de un medio ferromagnético que rota por efecto de un campo eléctrico externo [50]. En esta sección, calculamos las matrices de efectos magnetoeléctricos de medios simples, isotrópicos y homogéneos cuando se mueven con respecto al marco de referencia estático.

Consideremos un campo electromagnético externo y un medio material en movimiento. Asumiremos que el campo  $F$  es producido en el marco de referencia del laboratorio y calcularemos el campo inducido  $G$  en el medio que mediría un observador que se encuentre ‘montado’ en el medio. Encontraremos el tensor métrico del medio, transformando las coordenadas estáticas a las del movimiento y por tanto del observador. Esta transformación inducida

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (4.55)$$

mapea la métrica del laboratorio (marco de referencia estático) al marco de referencia del observador que se mueve junto con el medio

$$h = \phi^*(g), \quad (4.56)$$

coincidentemente, a este mapeo se le conoce como la métrica *inducida* por el mapeo  $\phi$ . Todas las expresiones geométricas en el lenguaje de formas diferenciales se preservan bajo este tipo de transformaciones.

A continuación realizaremos ejemplos explícitos de este hecho. Empezaremos por dos ejemplos sencillos en marcos de referencia inerciales, correspondientes a una transformación Galileana y otra Lorentziana del movimiento. Posteriormente, haremos ejemplos en marcos de referencia no inerciales. Primero una rotación Galileana y otra relativista, para terminar finalmente con un movimiento relativista acelerado. En todos los casos vamos a considerar el campo de la 2-forma  $F$  [cf. ecuaciones (3.42), (3.47) y (3.50)] tal que

$$\vec{B}_{\text{lab}} = B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{\text{lab}} = E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}. \quad (4.57)$$

### Movimiento inercial con transformación Galileana

Consideremos un medio que se mueve a lo largo del eje  $x$  con velocidad constante  $v$ . La transformación de coordenadas asociada a este movimiento está dado por la transformación Galileana

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + vt \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Desde el punto de vista del laboratorio, el medio está descrito por la métrica en las coordenadas adaptadas al movimiento

$$h = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz + v(dx \otimes dt + dt \otimes dx) - \frac{1}{\varepsilon\mu} (1 - v^2\varepsilon\mu) dt \otimes dt. \quad (4.59)$$

Observemos que estas coordenadas, están bien definidas únicamente cuando

$$v^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu}, \quad (4.60)$$

esto significa, que la velocidad del medio es menor que a velocidad de la luz en dicho medio. Las componentes vectoriales de los campos electromagnéticos en el medio en movimiento, medidas por el observador estático (marco de referencia del laboratorio) [cf. ecuaciones (3.121)-(3.124)] son

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) + \varepsilon v (B_z \hat{e}_{(y)} - B_y \hat{e}_{(z)}) \quad (4.61)$$

y

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{B_x}{\mu} \hat{e}_{(x)} + \frac{1}{\mu} (1 - v^2 \varepsilon \mu) (B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}) + \varepsilon v (E_z \hat{e}_{(y)} - E_y \hat{e}_{(z)}). \quad (4.62)$$

De estas expresiones, podemos encontrar directamente las componentes de las relaciones constitutivas (3.13)

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v^2 \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - v^2 \varepsilon \mu \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

y

$$\bar{\zeta} = \bar{\xi} = \varepsilon v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Podemos notar que para la parte puramente eléctrica, el medio continua siendo homogéneo e isotrópico, mientras que para el campo magnético, el medio parece ser anisotrópico en la dirección ortogonal al movimiento. Además, aparecen efectos magnetoeléctricos dados por las matrices  $\zeta$  y  $\xi$ . Desde el marco de referencia del laboratorio, cuando el campo externo es puramente eléctrico, se genera un campo magnético inducido perpendicular al movimiento que rota alrededor del eje de movimiento. De la misma manera, cuando el campo externo aplicado es puramente magnético, el campo eléctrico inducido tendrá las mismas características que su contraparte magnética. Dichos efectos, dependen de la velocidad de desplazamiento del medio con respecto al marco del laboratorio, el cual satisface (4.60). Estos resultados son consistentes con lo mencionado en lo expuesto en la literatura sobre electromagnetismo de medios en movimiento, donde los efectos magnetoeléctricos son caracterizados por un término proporcional a  $\vec{v} \times \vec{B}$  para la parte eléctrica y  $\vec{v} \times \vec{E}$  para la parte magnética.

### Movimiento inercial con transformación Lorentziana

Al igual que en el ejemplo anterior, consideraremos un medio que se mueve a lo largo del eje  $x$ . En esta ocasión, la transformación de coordenadas estará dada por una transformación de Lorentz en donde tendremos consideraciones relativistas

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} (x + vt) \\ y \\ z \\ (1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} (t + vx \varepsilon_0 \mu_0) \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

En este caso, la métrica del medio se transforma como

$$\begin{aligned} h = & \left( \frac{1 - v^2 \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ & + v \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (dx \otimes dt + dt \otimes dx) \\ & - \frac{1}{\varepsilon \mu} \left( \frac{1 - v^2 \varepsilon \mu}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) dt \otimes dt. \end{aligned} \quad (4.66)$$

De nueva cuenta, esta métrica se encuentra bien definida cuando la condición (4.60) se satisface. Podemos observar que aún cuando (3.67) es una métrica de Minkowski, la velocidad de la luz en el medio es diferente que en el vacío. De hecho

$$\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \leq 1, \quad (4.67)$$

lo que corresponde a que la velocidad de la luz sea menor que en el vacío. Aún cuando el vacío es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, éstas cambian la métrica del medio.

El observador en el marco estático mediría los siguientes campos electromagnéticos

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon E_x \hat{e}(x) + \varepsilon \left( \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon\mu} \right) (E_y \hat{e}(y) + E_z \hat{e}(z)) \\ + v\varepsilon \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}{1-v^2} \right) (B_z \hat{e}(y) - B_y \hat{e}(z)) \end{aligned} \quad (4.68)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = \frac{1}{\mu} B_x \hat{e}(x) + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right) (B_y \hat{e}(y) + B_z \hat{e}(z)) \\ + v\varepsilon \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}{1-v^2} \right) (E_z \hat{e}(y) - E_y \hat{e}(z)). \end{aligned} \quad (4.69)$$

El movimiento relativo entre el observador del laboratorio y el medio, hace que el material tenga las siguientes propiedades aparentes

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon\mu} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v^2}{1-v^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

y

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = v\varepsilon \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \\ 1 - v^2 \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Podemos observar que las matrices de permitividad y la permeabilidad se han vuelto anisotrópicas, mientras que las matrices de los efectos magnetoelectricos presentan la misma estructura que en el ejemplo anterior. En el límite Galileano, podemos recuperar las relaciones constitutivas del ejemplo anterior (4.63) y (4.64). Igualmente, en el límite en el que la velocidad de la luz en el medio coincide con la del vacío, el medio vuelve a ser isotrópico y los efectos magnetoelectricos desaparecen. Esto es muestra de la invariancia del vacío bajo las transformaciones de Lorentz.

A primera vista, esto pudiera parecer un mero ejercicio de relatividad especial. Sin embargo, esto muestra que un medio en movimiento relativo adquiere propiedades electromagnéticas no triviales, a diferencia de lo que se muestra en los otros movimientos inerciales. Esto no implica que la física dependa de las coordenadas, sino que muestra que las relaciones constitutivas, en el formalismo no covariante del cálculo vectorial de un medio simple cambian cuando el medio presenta un movimiento relativo.

### Medio en movimiento uniformemente acelerado

Ahora consideraremos que el medio se mueve uniformemente acelerado. Este es el ejemplo más sencillo de un movimiento no inercial. Supongamos que el movimiento sucede en el eje  $z$  con una aceleración  $\alpha$ , tal como si estuviera en caída libre en un campo gravitacional Newtoniano. La transformación de coordenadas se puede escribir como

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ [(\alpha\varepsilon_0\mu_0)^{-1} + z] \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) - (\alpha\varepsilon_0\mu_0)^{-1} \\ \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} [(\alpha\varepsilon_0\mu_0)^{-1} + z] \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) - (\alpha\varepsilon_0\mu_0)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Estas coordenadas se acoplan al movimiento uniforme acelerado del observador. Sin embargo, las coordenadas solo cubren un subespacio de  $\mathcal{M}$ , conocido como “la cuña de Rindler”. La métrica del material adquiere una forma más compleja

$$\begin{aligned} h = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} & \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right) \alpha z - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right] \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) (dz \otimes dt + dt \otimes dz) \\ & - \left[ \varepsilon_0\mu_0 \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right) \alpha^2 z^2 - 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} + \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \alpha z + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) \right] \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} (1 - \alpha z \varepsilon_0\mu_0)^2 \right] dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + \\ & \quad + \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right] dz \otimes dz. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Para que la métrica esté bien definida, debe cumplir una restricción más complicada, dada por

$$\cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) < \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right)^{-1} \quad (4.74)$$

Los campos inducidos medidos por el observador en el marco del laboratorio serán

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon & \left[ \left(\frac{1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}\right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \left(\frac{1}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}\right) \right] (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)}) \\ & + \varepsilon \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right) \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \right] (B_y \hat{e}_{(x)} - B_x \hat{e}_{(y)}) \\ & \quad + \frac{\varepsilon E_z}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0} \hat{e}_{(z)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = \left(\frac{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}{\mu}\right) & \left[ \left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right] (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)}) \\ & + \varepsilon \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \left(1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right) \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \right] (E_y \hat{e}_{(x)} - E_x \hat{e}_{(y)}) \\ & \quad + \left(\frac{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}{\mu}\right) B_z \hat{e}_{(z)}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

En este caso, las relaciones constitutivas quedan de una forma mucho más compleja que en los ejemplos anteriores. En particular, podemos observar que el medio parece dejar de ser homogéneo, ya que aparecen dependencias en la altura y el tiempo. Este resultado no es sorprendente, ya que en esta ocasión los campos electromagnéticos inducidos son *medidos* en un marco de referencia no inercial por un observador inercial. De hecho, podemos ver que si  $\alpha = 0$ , regresamos a un medio homogéneo e isotrópico.

Para poder adquirir un poco de intuición Newtoniana, consideremos el límite de una aceleración pequeña. Así, los campos inducidos quedan como

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} \Big|_{\alpha t \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}}} &= \varepsilon (1 - \alpha z \varepsilon_0 \mu_0) (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) \\ &+ \varepsilon \alpha t \left( 1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) (B_y \hat{e}_{(x)} - B_x \hat{e}_{(y)}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} \Big|_{\alpha t \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}}} &= \frac{1}{\mu} (1 + \alpha z \varepsilon_0 \mu_0) (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}) \\ &+ \varepsilon \alpha t \left( 1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) (E_y \hat{e}_{(x)} - E_x \hat{e}_{(y)}). \end{aligned} \quad (4.78)$$

En este límite, el medio se vuelve isotrópico, pero se mantiene inhomogéneo. Mientras que los efectos magnetoeléctricos son modulados por el cociente entre la velocidad de la luz en el medio y en el vacío. Mientras menor sea la velocidad de la luz en el medio, mayores serán los efectos magnetoléctricos. En el límite cuando  $\varepsilon \mu = \varepsilon_0 \mu_0$  *i.e* el medio en movimiento es el vacío, el medio se vuelve nuevamente isotrópico sin efectos magnetoeléctricos, pero permanece inhomogéneo:

$$\vec{D}_{\text{lab}} \Big|_{\text{vac}} = \varepsilon \left( \frac{1}{1 + \alpha z \varepsilon_0 \mu_0} \right) (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) \quad (4.79)$$

y

$$\vec{H}_{\text{lab}} \Big|_{\text{vac}} = \frac{1}{\mu} (1 + \alpha z \varepsilon_0 \mu_0) (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}). \quad (4.80)$$

Este resultado es equivalente a pensar que el observador es quien se mueve de manera acelerada. En este sentido, aparece una polarización inhomogénea y una magnetización del vacío.

### Medio en rotación con transformación Galileana

Consideremos ahora, un ejemplo de movimiento no inercial un poco más complicado. Supondremos que el medio rota alrededor del eje  $z$  y haremos una transformación de coordenadas Galileana. Partiremos de las métricas (3.64) y (3.67) en coordenadas cilíndricas, esto es

$$\eta = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} dt \otimes dt \quad (4.81)$$

y

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon \mu} dt \otimes dt, \quad (4.82)$$

respectivamente.

En estas coordenadas, la 2-forma electromagnética se escribe como

$$F = E_r dr \wedge dt + r^2 E_\varphi d\varphi \wedge dt + E_z dz \wedge dt + r (B_z dr \wedge d\varphi - E_\varphi dr \wedge dz + E_r d\varphi \wedge dz), \quad (4.83)$$

donde

$$E_r = E_y \sin(\varphi) + E_x \cos(\varphi) \quad (4.84)$$

$$E_\varphi = E_y \cos(\varphi) - E_x \sin(\varphi) \quad (4.85)$$

y

$$E_z = E_z, \quad (4.86)$$

mientras que

$$B_r = B_x \cos(\varphi) + B_y \sin(\varphi), \quad (4.87)$$

$$B_\varphi = B_y \cos(\varphi) - B_x \sin(\varphi), \quad (4.88)$$

$$(4.89)$$

y

$$B_z = B_z. \quad (4.90)$$

Podemos verificar de forma directa que

$$\vec{E}_{\text{lab}} = E_r \hat{e}_{(r)} + E_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + E_z \hat{e}_{(z)} \quad \text{y} \quad \vec{B}_{\text{lab}} = B_r \hat{e}_{(r)} + B_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + B_z \hat{e}_{(z)}. \quad (4.91)$$

La transformación Galileana correspondiente a una rotación uniforme con una velocidad angular constante  $\omega$ , está dada por

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi + \omega t \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

La métrica del medio en movimiento se transforma como

$$h = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + r^2 \omega (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi) + dz \otimes dz - \left( \frac{1}{\varepsilon\mu} - r^2 \omega^2 \right) dt \otimes dt. \quad (4.93)$$

Las coordenadas para cubrir  $\mathcal{M}$  deben satisfacer que

$$r^2 \omega^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu}. \quad (4.94)$$

Esta constricción está dada para satisfacer que la velocidad tangencial no supere la velocidad de la luz en el medio. Los campos inducidos son

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \left( E_r \hat{e}_{(r)} + E_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + E_z \hat{e}_{(z)} \right) + \varepsilon r \omega (B_r \hat{e}_{(z)} - B_z \hat{e}_{(r)}) \quad (4.95)$$

y

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{B_\varphi \hat{e}(\varphi)}{\mu} + \frac{1}{\mu} (1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu) (B_r \hat{e}(r) + B_z \hat{e}(z)) + r \varepsilon \omega [E_r \hat{e}(z) - E_z \hat{e}(r)]. \quad (4.96)$$

Para obtener las matrices constitutivas como en los casos anteriores, transformamos a coordenadas cartesianas

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon (E_x \hat{e}(x) + E_y \hat{e}(y) + E_z \hat{e}(z)) - \varepsilon \omega [B_z x \hat{e}(x) + B_z y \hat{e}(y) - (B_x x + B_y y) \hat{e}(z)] \quad (4.97)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = \frac{1}{\mu} [ & (1 - x^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_x \hat{e}(x) + (1 - y^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_y \hat{e}(y) + (1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_z \hat{e}(z) \\ & - \varepsilon \omega [E_z x \hat{e}(x) + E_z y \hat{e}(y) - (E_x x + E_y y) \hat{e}(z)] \\ & - xy \omega^2 \varepsilon (B_y \hat{e}(x) + B_x \hat{e}(y))] \end{aligned} \quad (4.98)$$

Las relaciones constitutivas quedan como

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

$$\bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 - x^2 \omega^2 \varepsilon \mu & -xy \omega^2 \varepsilon \mu & 0 \\ -xy \omega^2 \varepsilon \mu & 1 - y^2 \omega^2 \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu \end{pmatrix}, \quad (4.100)$$

mientras que las matrices magnetoelectricas estarán dadas por

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = -\varepsilon \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

Estas matrices constitutivas describen un medio con permitividad trivial, pero bastante complejo en la permeabilidad. En este caso el medio es inhomogéneo y anisotrópico. Sin embargo, esto sólo se nota a una distancia considerable del eje de rotación, esto es cuando la velocidad tangencial se aproxima a la velocidad de la luz en el medio. Podemos observar también que los efectos magnetoelectricos no son despreciables para cualquier velocidad angular.

#### 4.3.1. Medio en rotación con transformación relativista

Consideremos de nuevo al medio rotando. En este caso haremos una transformación de coordenadas con consideraciones relativistas para la rotación [51]. Para una velocidad angular  $\omega$ , existe un máximo de distancia  $R$  que nos podemos alejar del eje de rotación. Este valor, corresponde al límite superior de la coordenada radial, que hace que la velocidad tangencial sea menor a la velocidad de la luz en el vacío. En este caso  $R$  es un parámetro de la métrica. Cada valor de la pareja  $R$  y  $\omega$  genera una métrica diferente. Estas coordenadas cubren únicamente una región del espacio-tiempo de Minkowski, por lo que existe un horizonte para cada valor de  $R$  y  $\omega$ . Consideremos la transformación

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{\frac{1}{2}} \\ (\varphi - \omega t)(1 - R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} \\ z \\ t(1 - R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

Como se puede notar en la literatura, existen muchos autores que afirman que esta no es la única forma de describir un marco de referencia en rotación con consideraciones relativistas. De hecho, este problema sigue abierto y cuenta con numerosas paradojas y problemas asociados. Para nuestra consideración, la métrica inducida en el medio queda como

$$h = (1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0) dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + r^2\omega (d\varphi \otimes dr + dt \otimes d\varphi) + dz \otimes dz - \left[ \frac{1}{\varepsilon\mu} - R^2\omega^2 \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \right] dt \otimes dt. \quad (4.103)$$

Podemos observar, que esta métrica cuenta con una estructura más compleja que las anteriores. Los parámetros  $R$  y  $\omega$  deben satisfacer la restricción de que la velocidad tangencial no exceda el valor de la velocidad de la luz en el vacío, esto es

$$R^2\omega^2 < \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (4.104)$$

Además, podemos observar que las coordenadas sólo cubren la región donde

$$r^2\omega^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu} - R^2\omega^2 \left( \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right). \quad (4.105)$$

Dicho límite puede ser pensado como la máxima velocidad tangencial que el medio podría soportar. Notemos que en el límite en el que la velocidad tangencial  $R\omega$  es justamente la velocidad de la luz en el vacío, la región se degenera a un punto. Sin embargo, en el límite no relativista  $R^2\omega^2 \ll 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , la ecuación (4.103) se reduce al caso Galileano de la métrica en rotación (4.103). Finalmente, en el límite cuando  $\omega$  desaparece recuperamos la métrica estática (4.81), como era de esperarse.

Las componentes vectoriales de los campos electromagnéticos inducidos en el marco de referencia del laboratorio son

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) E_r \hat{e}(r) + E_\varphi \frac{\hat{e}(\varphi)}{r} + E_z \hat{e}(z) \right] + \varepsilon\omega r \left[ B_r \hat{e}(z) - \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) B_z \hat{e}(r) \right] \quad (4.106)$$

y

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{1}{\mu} \left[ 1 - R^2\omega^2\varepsilon\mu \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \right] (B_r \hat{e}(r) + B_z \hat{e}(z)) + \frac{B_\varphi}{\mu} \frac{\hat{e}(\varphi)}{r} + \varepsilon\omega r \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) E_r \hat{e}(z) - E_z \hat{e}(r) \right]. \quad (4.107)$$

De nueva cuenta, podemos expresar estos campos en coordenadas cartesianas

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \left( \frac{\varepsilon}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2}\omega^2 y^2 \varepsilon_0\mu_0 \right) E_x \hat{e}(x) + \left( 1 + \frac{R^2}{r^2}\omega^2 x^2 \varepsilon_0\mu_0 \right) E_y \hat{e}(y) \right] + \varepsilon E_z \hat{e}(z) - \varepsilon\omega^2 xy \left( \frac{R^2\varepsilon_0\mu_0}{r^2(1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0)} \right) (E_y \hat{e}(x) + E_x \hat{e}(y)) - \varepsilon\omega \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) (xB_z \hat{e}(x) + yB_z \hat{e}(y)) - (xB_x + yB_y) \hat{e}(z) \right] \quad (4.108)$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\text{lab}} = & \frac{1}{r^2\mu} [\omega^2\varepsilon\mu (x^2y^2 - x^4) + (1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0) x^2] B_x\hat{e}_{(x)} \\
& + \frac{1}{r^2\mu} [\omega^2\varepsilon\mu (x^2y^2 - y^4) + (1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0) y^2] B_y\hat{e}_{(y)} \\
& + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) \left[ 1 - r^2\varepsilon\mu \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \right] B_z\hat{e}_{(z)} \\
& - \varepsilon\omega^2xy \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) (B_y\hat{e}_{(x)} + B_x\hat{e}_{(y)}) \\
& - \varepsilon\omega \left[ (xE_z\hat{e}_{(x)} + yE_z\hat{e}_{(y)}) - \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) (xE_x + yE_y) \hat{e}_{(z)} \right]. \tag{4.109}
\end{aligned}$$

Este marco de referencia, nos lleva a observar propiedades electromagnéticas del medio altamente no triviales. En particular, podemos ver que en todos los casos el comportamiento de la parte magnética es significativamente diferente al comportamiento de la parte eléctrica. En este ejemplo podemos notar que las matrices de efectos magnetoeléctricos no son iguales. De hecho

$$\bar{\zeta} = -\varepsilon\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x}{1+R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \\ 0 & 0 & \frac{y}{1+R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix} \tag{4.110}$$

mientras que

$$\bar{\chi} = -\varepsilon\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ \frac{-x}{1+R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} & \frac{-y}{1+R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.111}$$

Como conclusión de esta serie de ejemplos, podemos destacar que un medio en reposo puede tener propiedades electromagnéticas simples, pero si lo ponemos a moverse, el observador estático mide propiedades no triviales. De esta manera, podemos pensar en un *medio equivalente* estático con las mismas propiedades electromagnéticas del medio en movimiento. El formalismo para encontrar estas propiedades se expresa a partir de contracciones de mapeos canónicos entre formas diferenciales y campos vectoriales, mostrando el poder del formalismo geométrico. Esto nos permite obtener las componentes no covariantes de los campos inducidos en  $\mathbb{R}^3$  junto con las matrices de las relaciones constitutivas.

### 4.3.2. Medio óptico con geometría no trivial

Uno más de los alcances de este formalismo, es poder trabajar con medios geoméricamente no triviales, *i.e.* un medio cuya métrica asociada tenga curvatura diferente de cero. En este ejemplo trataremos con un medio geoméricamente no trivial que ya ha sido estudiado antes en el contexto de la óptica de transformaciones y gravedad análoga [52]. Consideremos un lente tipo *fisheye*<sup>3</sup>, medio óptico el cuál tiene una geometría equivalente al del “Universo de Einstein” (sección 4.2.1)

$$g_\Lambda = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon\mu} \left[ \frac{k\Lambda}{16} \left( \frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2 \right)^2 \right] dt \otimes dt \tag{4.112}$$

---

<sup>3</sup>ojo de pescado

donde  $k$  es una constante que representa la curvatura Gaussiana del espacio y  $\Lambda$  es la constante cosmológica [53]. A diferencia de los ejemplos anteriores, esta geometría no es plana. La curvatura de este espacio queda completamente determinada por el escalar de Ricci

$$S = -\frac{12}{\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.113)$$

La métrica (4.112) está escrita en coordenadas isotrópicas cartesianas, lo que nos permite leer de forma directa la velocidad efectiva de la luz en el medio [cf. ecuación (3.67)]. Tenemos así, que el índice de refracción es

$$n^2 = \frac{9k\Lambda}{S^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (4.114)$$

En este caso, la geometría corresponde a un medio no homogéneo como se puede comprobar con las componentes de los campos inducidos en el marco del laboratorio

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \frac{4\varepsilon}{\left(\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2\right) \sqrt{k\Lambda}} \vec{E}_{\text{lab}} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon \vec{E}_{\text{lab}} \quad (4.115)$$

y

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{\left(\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2\right) \sqrt{k\Lambda}}{4\mu} \vec{B}_{\text{lab}} = -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \vec{B}_{\text{lab}}. \quad (4.116)$$

Las matrices de permitividad y permeabilidad quedan como

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mu}^{-1} = -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Las transformaciones que hemos estudiado, nos proporcionan un modelo algebraico para encontrar tanto la métrica como los campos inducidos, que son un mero ejercicio de geometría diferencial. Como estas expresiones son libres de coordenadas, podemos asegurar que todas las expresiones coordenadas son auto-consistentes con el formalismo. Consideremos la transformación Galileana a un marco de referencia en rotación que realizamos en la sección 4.3. En este marco los campos inducidos medidos por el observador en reposo quedan como

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} &= -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon [E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}] \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon [-B_z (x \hat{e}_{(x)} + y \hat{e}_{(y)}) + (B_x x + B_y y) \hat{e}_{(z)}] \end{aligned} \quad (4.118)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} &= -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ \left( 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 + \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \right) B_y - \left( \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy \right) B_x \right] \hat{e}_{(y)} \\ &\quad - \frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ \left( 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 \right) B_x - \left( \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy \right) B_y \right] \hat{e}_{(x)} \\ &\quad - \frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \right] B_z \hat{e}_{(z)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon [-E_z (x \hat{e}_{(x)} + y \hat{e}_{(y)}) + (E_x x + E_y y) \hat{e}_{(z)}]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

De nueva cuenta, podemos leer directamente las matrices constitutivas para el medio en movimiento como las mediría un observador el marco del laboratorio. Observamos que la matriz de permitividad permanece igual que en (4.117), mientras que la matriz de permeabilidad se convierte en

$$\bar{\mu}^{-1} = -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \begin{pmatrix} 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 & \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy & 0 \\ \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy & 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 + \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \end{pmatrix}. \quad (4.120)$$

Observemos que los términos no triviales en esta expresión son cuadráticos en la velocidad angular. Para velocidades tangenciales pequeñas comparadas con la velocidad de la luz en el medio, la permeabilidad se reduce a la encontrada en (4.117).

Finalmente, al igual que la ecuación (4.101) en la sección 4.3, las matrices magnetoeléctricas quedan como

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

En este ejemplo hemos obtenido, como era de esperarse, resultados similares a los obtenidos en 4.3. Sin embargo, la curvatura juega un papel muy importante en las relaciones constitutivas. Este ejemplo nos permite observar la efectividad del formalismo para obtener expresiones explícitas de las matrices constitutivas de un medio en movimiento, en cualquier tipo de coordenada, para un marco de referencia arbitrario. Podemos observar que para un régimen de velocidades bajas, el índice de refracción no se ve alterado a pesar de que los efectos magnetoeléctricos no sean despreciables.

Usando los postulados de las relaciones constitutivas de Hodge hechas en el capítulo anterior, para caracterizar un medio [33] y las expresiones explícitas para recuperar los campos vectoriales (en  $\mathbb{R}^3$ ), medidos por un observador estático en el marco de referencia del laboratorio (3.121) - (3.124), calculamos los campos electromagnéticos inducidos en medios homogéneos e isotrópicos cuando éstos se encuentran en diferentes tipos de movimiento. Dichos movimientos, están caracterizados en términos de la transformación de coordenadas actuando únicamente sobre la métrica del medio. Los campos inducidos dados por  $G$  fueron calculados aplicando la relación constitutiva de Hodge asociada a la métrica transformada, a la 2-forma “externa”  $F$  sin transformar (3.118). El resultado, se contrae con la velocidad del marco de referencia y usando el isomorfismo musical de la métrica del laboratorio obtenemos los campos deseados. Una versión “similar” de un *mezcla* de métricas en aproximaciones vectoriales se puede encontrar en las secciones 9-5 de [54].

Pudiera parecer que algunos esfuerzos anteriores han resultado exitosos para describir el electromagnetismo en medios en movimiento, tales como los hechos por [55, 56]. Sin embargo, nosotros abordamos un problema diferente. En esta parte, mostramos de manera explícita las componentes de los campos electromagnéticos inducidos que *mediría* un observador que se encuentra en el marco de referencia estático cuando el medio se mueve de una forma arbitraria. Hemos presentamos un método algebraico generalizado para obtener las matrices constitutivas de medios arbitrarios en movimiento, medidas por un observador arbitrario. En particular, esta herramienta nos sirve para poder calcular de manera completamente covariante, los campos vectoriales inducidos en dichos medios. Este lenguaje se vuelve una herramienta poderosa para materiales más complicados, como aquellos descritos por geometrías curvas, que se muevan de forma arbitraria.

## 5. Geometría de Contacto y Principio de Huygens

La óptica geométrica y el diseño de materiales, son temas de la física clásica que no pasan de moda. La inserción de la geometría diferencial como herramienta para poder modelar y controlar la trayectoria de la luz en un medio óptico ha generado nuevos fundamentos en la ciencia de materiales. Empezando en el contexto de las lentes gravitacionales, el estudio geométrico de los principios de Fermat y Huygens ha tomado nuevamente una relevancia en diferentes ramas de la física teórica.

Desde los principios de la Relatividad General, se ha observado que los campos gravitacionales *desvían* la trayectoria que sigue la luz. Esto fue confirmado por Eddington después de notar que la posición aparente de las estrellas no coincidía con su posición esperada al ser observadas en un eclipse solar. Este fenómeno de *desfasamiento*, resulta ser análogo al que sufre la luz cuando viaja en un medio con un índice de refracción que cambia en el espacio. En este sentido, se ha mostrado que una clase de equivalencia de medios ópticos pueden ser modelados en términos de un tensor métrico que codifica todas sus propiedades electromagnéticas [8, 9, 20]. Más aún, esta analogía ha evolucionado en el muy activo campo de la *óptica de transformaciones*, donde las técnicas y las herramientas de la geometría previamente usadas en el contexto gravitacional, han resultado útiles en el campo aplicado de la ciencias de los materiales [26, 57–59]. Aunado a esto, dicho concepto se ha utilizado para modelar medios análogos gravitacionales, tales como agujeros negros y soluciones cosmológicas [29, 48, 60, 61], al igual que medios curvos, que con anterioridad se habían intentado aproximar por medio de *simplejos*  $N$ -dimensionales [62].

En el ámbito de la óptica geométrica, el principio de Fermat es un problema bien conocido para el cálculo de variaciones. En un contexto no relativista, donde el tiempo es absoluto y universal, se plantea que la luz viaja de un punto a otro siguiendo la trayectoria que minimiza el funcional del tiempo. Esta perspectiva del principio de Fermat, no tiene sentido en el contexto relativista. En general se asume que la trayectoria de la luz al viajar de un punto a otro es una geodésica nula del espacio-tiempo. En el mismo ámbito del cálculo de variaciones, la postulación precisa del principio de Fermat con las consideraciones relativistas es mucho más complejo que la suposición de una geodésica nula (ver Teorema 7.3.1 en [17]).

Similarmente con el principio de Huygens (cf. Teorema 7.1.2 in [17]), la interpretación se ha centrado en la ‘instantaneidad’ de la transmisión de la luz para diferentes observadores [63]. La emisión de luz se describe en términos de un frente de onda perfectamente bien localizado en el espacio-tiempo mientras éste viaja en el espacio 3-dimensional. Nuevamente, en el contexto relativista un evento electromagnético preciso en el espacio-tiempo debe depender únicamente de las condiciones iniciales generadas en su propio cono nulo del pasado [64]. Esto lleva a poder explorar fenómenos ondulatorios que no cumplen totalmente con el principio de Huygens. La gran mayoría de estos fenómenos que no cumplen cabalmente el principio de Huygens se debe a procesos de disipación en donde las distribuciones de la onda no tienen *colas* convergentes. Como consecuencia, los frentes de ondas no se encuentran bien localizados en el espacio-tiempo. Con la conjetura de Hadamard, este fenómeno de ‘deslocalización’ ha sido relacionado con las dimensiones y la curvatura del espacio-tiempo [65], [66].

En años recientes, la geometría de contacto se ha convertido en un marco matemático unificador de diferentes teorías físicas. Como ejemplo, podemos observar la solidez matemática con la que se han dotado la termodinámica, la mecánica clásica no conservativa y el electromagnetismo; entre otras [10–16]. En particular, las herramientas geométricas han sido utilizadas en el contexto de la óptica para mostrar de manera explícita la equivalencia entre el principio de Fermat y de Huygens [67].

En este capítulo nos centraremos particularmente en la construcción y demostración del principio de Huygens mediante geometría de contacto. Empezaremos dando un breve recorrido por los principales conceptos matemáticos, desde los preámbulos de ecuaciones diferenciales y su relación con la geometría, pasando por algunos aspectos básicos de la geometría de contacto y algunas aplicaciones elementales. Finalmente, revisaremos de manera detallada la construcción del principio de Huygens con esta herramienta.

## 5.1. Ecuaciones diferenciales y geometría

Sabemos, a partir de la Relatividad General, que la luz al propagarse por medios no dispersivos, sigue como trayectorias curvas específicas llamadas *geodésicas nulas* [20], [68]. Estas curvas dependen de las coordenadas del espacio, la conexión y la métrica con las que se dote la variedad geométrica ( $M$ ). Estas geodésicas están dadas por [69]

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0. \quad (5.1)$$

Cabe notar que tanto la conexión como la métrica no son estructuras intrínsecas de la variedad  $M$ . Éstas son impuestas con la finalidad de dar estructura geométrica más robusta y poder así definir conceptos como *paralelismo* y *distancia*, conceptos básicos para la definición de curvas *geodésicas*. De estas dos estructuras, la conexión es la más fundamental y de ella se desprende el concepto de *transporte paralelo*. Dicho concepto permite generalizar aún más las curvas geodésicas a partir de curvas *autoparalelas*. Una curva geodésica se puede encontrar únicamente conociendo las coordenadas del espacio y los coeficientes de la conexión (i.e.  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ ) como muestra la ecuación (5.1). Por otra parte, la métrica se relaciona con los coeficientes de la conexión mediante [69]

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}). \quad (5.2)$$

A partir de conocer las propiedades del medio *i.e.* la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$  (para materiales dieléctricos) [29], es posible encontrar las curvas (trayectorias) que seguirá la luz, compatible con la teoría electromagnética. Esto nos lleva a intentar plantear el problema inverso, tanto en electromagnetismo como en geometría: Conociendo una congruencia de curvas (trayectorias por donde se mueve, o quisiéramos que se moviera, la luz), encontrar la geometría para la cual esta congruencia es una congruencia geodésica. Planteado el problema de esta manera, no sólo se vuelve un problema de carácter intrínsecamente geométrico, sino que además, dada la naturaleza de las ecuaciones (5.1), abarca también el campo de las ecuaciones diferenciales. En esta primera sección del capítulo, nos centraremos en algunos aspectos de esta relación entre la geometría y las ecuaciones diferenciales.

Supongamos que tenemos un sistema de coordenadas generalizadas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y una función  $y = u(x_i)$ . Las derivadas de las coordenadas las nombramos  $p$ , de tal forma que

$p = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ . Una ecuación diferencial parcial de 1º orden, se puede escribir de forma general como una función  $F$

$$F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (5.3)$$

Como ejemplo podemos pensar en la ecuación diferencial dada por

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad (5.4)$$

la ecuación de Euler para un sistema dinámico

$$u_t + u u_x = 0, \quad (5.5)$$

o de particular interés, la ecuación de la “eikonal” que describe la óptica geométrica

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1. \quad (5.6)$$

Consideremos una partícula en movimiento libre. El sistema se puede describir a partir de un *campo de velocidades*  $u(t, x)$  a lo largo de una línea recta donde la partícula satisface

$$x = \varphi(t) = x_0 + vt \quad (5.7)$$

para  $v$  la velocidad de la partícula. En consecuencia, la función  $\varphi$  debe satisfacer

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad (5.8)$$

que es exactamente la segunda ley de Newton. Por definición, podemos reescribir el campo de velocidades como

$$\frac{d\varphi}{dt} = u(t, \varphi(t)) \quad (5.9)$$

y observamos que

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_t + u u_x = 0 \quad (5.10)$$

es la ecuación de Euler. Podemos concluir que existe una equivalencia entre describir un fenómeno de movimiento a partir de una ecuación para una partícula – 2º ley de Newton – y una de campo (ecuación de Euler) [70].

Para resolver el problema general de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, es necesario estudiar dos estructuras geométricas que aparecen en la teoría, útiles para interpretar el problema. Dichas estructuras geométricas se conocen como estructuras de *contacto* y *simpléctica*, respectivamente.

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable con  $T\mathcal{M}$  su haz tangente. Definimos un sub-haz  $\xi \subset T\mathcal{M}$ ,  $C^\infty$  con  $CoDim(\xi) = 1$  (i.e.  $Dim(\mathcal{M}) - 1$ ), como un campo de hiperplanos en  $T\mathcal{M}$ . Definimos de manera global, una 1-forma diferencial  $\alpha$  dada por

$$\alpha = dy - p dx. \quad (5.11)$$

La 1-forma  $\alpha$  nos genera la estructura de contacto y es conocida como la **forma de contacto**. Además, esta 1-forma define el sub-haz  $\xi$  a partir de la ecuación  $\ker \alpha = \xi$ . Esto implica que

cada punto en  $\mathcal{M}|_{\alpha=0}$  tiene asociado un plano de la distribución  $\xi$ , conocido como *plano de contacto*. Estos planos están dados por la ecuación

$$dy = pdx. \quad (5.12)$$

A partir de la 1-forma de contacto, podemos definir una 2-forma  $\omega$  como

$$\omega = d\alpha, \quad (5.13)$$

que en coordenadas del espacio se puede escribir como

$$d\alpha = -dp_i \wedge dx_i. \quad (5.14)$$

Para cada plano de contacto en  $\mathcal{M}$  dado por  $\alpha = 0$ , la 2-forma  $\omega$  define un producto interno antisimétrico entre vectores del plano. Esto es, dados  $\eta, \chi$  vectores en  $\mathcal{M}|_{\alpha=0}$ ,

$$\omega[\eta, \chi] = -\omega[\chi, \eta]. \quad (5.15)$$

Este producto interno es no degenerado, lo que implica que para toda  $\eta \neq 0$ , tenemos que  $\omega[\eta, \chi] \neq 0$ . La 2-forma  $\omega$  es conocida como **forma simpléctica**. De manera geométrica, podemos observar que la 2-forma simpléctica aplicada a un par de vectores sobre el plano de contacto representa le área del paralelogramo definido por estos vectores.

Para trabajar con ecuaciones diferenciales, es necesario definir un espacio adecuado para ellas. Definimos el espacio llamado *k-Jet*, como el espacio de los polinomios de Taylor de grado  $k$  de las variables  $(x_1, \dots, x_n)$ . Este espacio se denota  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$ , que simplemente abreviaremos como  $J^k$ . Observamos que para la ecuación diferencial (5.3), el argumento se encuentra en  $J^1$  dado que es una ecuación de primer orden.

En el espacio Euclidiano de  $n$  dimensiones, definimos el  $k$ -complemento ortogonal del espacio, como el subespacio de dimensión  $n - k$  tal que cada vector en ese subespacio es perpendicular a cualquier otro vector en el subespacio  $k$ -dimensional (*i.e* el producto interno entre el vector del espacio ortogonal es cero con cualquier otro vector del subespacio  $k$ -dimensional). Esto es generalizable para cualquier variedad  $\mathcal{M}$ , en particular para nuestras superficies simplécticas. Sin embargo, debido a que la estructura simpléctica está definida por un producto interno antisimétrico dado por la 2-forma simpléctica  $\omega$ , cualquier vector es auto-ortogonal [71], esto es:

$$\omega[\eta, \eta] = -\omega[\eta, \eta] = 0. \quad (5.16)$$

En este sentido, el complemento ortogonal de un plano  $2n - 1$  dimensional en un espacio  $2n$  dimensional, es una curva 1-dimensional. Para el caso de un espacio simpléctico, supongamos que la curva del complemento ortogonal puede ser generada por el vector  $\xi$ . Así, el hiperplano del complemento ortogonal estará dado por  $\{\eta : \omega[\eta, \xi] = 0\}$ , en particular por  $\omega[\xi, \xi] = 0$ . En el caso simpléctico, a diferencia del Euclidiano, el complemento ortogonal se encuentra en el mismo plano.

Sea  $z$  en  $\mathcal{M}|_{\alpha=0}$ , tenemos dos posibilidades al intersectar el plano de contacto con el plano tangente a la superficie. La primera, es que ambos planos se intersecten en una curva de dimensión 1. La segunda es que se intersecten en todos los puntos (y por tanto serían el mismo plano). Llamaremos *z regular* cuando pase lo primero e *irregular* cuando pase lo segundo.

Para cada punto  $z$  regular, definimos una **dirección característica** en un plano de contacto, como el complemento ortogonal antisimétrico a la intersección del plano de contacto con

el plano tangente a la superficie  $\Gamma$ . A la curva integral de las direcciones características le llamamos curva *característica*.

A continuación, podemos realizar algunos ejemplos sencillos, pero ilustradores. Consideremos  $(x, y, p)$  las coordenadas en  $T_z J^1$ . El vector característico debe ser tangente al espacio  $V^{2n}$

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_p \dot{p} = 0. \quad (5.17)$$

Sabemos que el vector característico debe ser parte del plano de contacto dado por

$$\dot{y} = p \dot{x}. \quad (5.18)$$

Entonces, para la intersección entre el plano de contacto y el plano tangente  $T_z J^1 \cap K_z^{2n}$  se debe cumplir que [70]

$$(F_x + F_y p) \dot{x} + F_p \dot{p} = 0, \quad (5.19)$$

La pareja  $(x, p)$  puede ser considerada las coordenadas del plano de contacto. Para el caso  $n = 1$ , consideremos dos vectores tangentes  $\eta = (\dot{x}, \dot{y})$  y  $\xi = (\tilde{x}, \tilde{y})$ . El producto interno entre estos dos vectores será

$$dx \wedge dp(\eta, \xi) = \dot{x} \tilde{p} - \tilde{x} \dot{p}. \quad (5.20)$$

De (5.19) obtenemos

$$(F_x + F_y p) \dot{x} + F_p \dot{p} = 0. \quad (5.21)$$

Podemos observar que el vector tangente será

$$\tilde{p} = F_x + F_y p \quad (5.22)$$

$$\tilde{x} = F_p, \quad (5.23)$$

complemento ortogonal antisimétrico del espacio  $K^{2n-1}$ . El campo de direcciones del campo vectorial dado por

$$\tilde{p} = -(F_x + F_y p) \quad (5.24)$$

$$\tilde{x} = F_p \quad (5.25)$$

$$\tilde{y} = p F_p \quad (5.26)$$

será entonces una **característica**. El campo está determinado por la misma función  $F$ . Ahora, supongamos que  $F$  es independiente de  $y$ , esto es

$$F = F(x, p) = F\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (5.27)$$

El campo característico adquiere la forma

$$x' = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{y} \quad y' = p \frac{\partial F}{\partial p} = 0. \quad (5.28)$$

A este tipo de funciones  $F$  se les denomina **Hamiltonianas** y se expresan como  $H(x, p)$ . Consideremos un ejemplo particular de estos casos. Tomemos

$$H = \frac{p^2 - 1}{2}. \quad (5.29)$$

En este caso tenemos que

$$x' = p, \quad p' = 0. \quad (5.30)$$

Para las funciones Hamiltonianas, en general se cumple que  $H(x, p) = 0$ , entonces

$$p^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 1. \quad (5.31)$$

Las ecuaciones (5.30) describen el movimiento de partículas en línea recta a velocidad constante. Ecuación (5.31) es la ecuación **eikonal** (ver (5.6)) que describe el movimiento de los rayos de luz de la óptica geométrica. [70]

## 5.2. Conceptos básicos de geometría de contacto

Expuesta la relación entre la geometría diferencial y las ecuaciones diferenciales de manera natural aparecen las ecuaciones que describen las trayectorias de los rayos de luz en la óptica geométrica. En esta sección empezaremos a revisar y trabajar conceptos básicos de geometría diferencial, particularmente la geometría de contacto, que se utilizarán a lo largo del trabajo.

Consideremos  $\mathcal{M}$  una variedad diferencial “suave” de dimensión  $2n + 1$ . Sea  $\alpha$  una 1-forma definida de manera global en  $\mathcal{M}$ <sup>1</sup>. La 1-forma  $\alpha$ , llamada forma de contacto, define un campo de hiperplanos de codimensión 1 dado por  $\xi = \ker(\alpha)$ , la cual será maximalmente no integrable (*i.e.* no existe una variedad diferencial tal que esta distribución de planos sea tangente a dicha variedad en cada uno de sus puntos.) En términos de la forma de contacto, esta propiedad se puede expresar como

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0, \quad (5.32)$$

lo que significa que la forma de volumen no se anula en ningún punto de la variedad [72].

Es importante mencionar que la estructura de contacto es generada por una clase de equivalencia de 1-formas  $\{\alpha \in \Omega^1 | \alpha \sim f\alpha\}$  para  $f$  una función continua no nula sobre  $\mathcal{M}$ . La propiedad de no integrabilidad no depende de la elección particular de la 1-forma de contacto. A la pareja  $(\mathcal{M}, \xi)$  se le conoce como una *variedad de contacto*. Dada una variedad de contacto, podemos definir un campo vectorial llamado campo de *Reeb* asociado a la 1-forma de contacto  $\alpha$ <sup>2</sup> que denotaremos  $R_\alpha$ . Este campo vectorial se define a partir de la 2-forma  $d\alpha$ , la cual es antisimétrica y de rango maximal  $2n$ , lo que implica que  $d\alpha|_{T_p\mathcal{M}}$  tenga un kernel 1-dimensional para toda  $p \in \mathcal{M}$ . Por tanto, el campo de Reeb se define como

$$d\alpha(R_\alpha, \cdot) \equiv 0. \quad (5.33)$$

La condición de no integrabilidad de la distribución de contacto (5.32) implica que el campo vectorial de Reeb se encuentra bien definido en todo el espacio. Podemos renormalizar el campo de forma que  $\alpha(R_\alpha) \equiv 1$ . El campo vectorial de Reeb es perpendicular a la distribución  $\xi$  y por ello, también se le conoce como la dirección perpendicular de la distribución.

### 5.2.1. Mecánica clásica con conceptos de geometría de contacto

Con las bases y fundamentos de la geometría de contacto, podemos comenzar a trabajar conceptos e ideas importantes de la geometría de contacto, en conjunto con la simpléctica, abordados desde la perspectiva de la mecánica clásica. Dichos conceptos se irán generalizando

<sup>1</sup>No es necesario que  $\alpha$  esté definida de manera global. Sin embargo esta propiedad será fundamental más adelante en la co-orientabilidad del campo de planos definidos por su kernel.

<sup>2</sup>El campo vectorial de Reeb sí depende de la elección específica de la 1-forma de contacto.

para aplicarlos en el contexto del electromagnetismo.

Partiremos del formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica, el cual se desarrolla en una variedad diferencial conocida como la *variedad de configuraciones* del sistema y denotaremos esta variedad como  $\mathcal{B}$ . El espacio cotangente  $T^*\mathcal{B}$  se conoce como *espacio fase* del sistema. Podemos definir una 1-forma diferencial  $\lambda$  en  $T^*\mathcal{B}$  dada por

$$\lambda_u = u \circ T\pi \quad (5.34)$$

para  $u \in T^*\mathcal{B}$  y  $T\pi : TT^*\mathcal{B} \rightarrow T^*\mathcal{B}$  la proyección canónica. A la 1-forma  $\lambda$  se le conoce como **forma de Liouville**. Podemos dotar a  $\mathcal{B}$  con coordenadas locales  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$  y a la fibra en  $T^*\mathcal{B}$  con coordenadas  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ . Así, la forma de Liouville se escribe en coordenadas como

$$\lambda = \sum_{j=1}^n p_j dq_j. \quad (5.35)$$

Una de las propiedades más interesantes de la forma de Liouville, es que cualquier otra 1-forma  $\tau$  en  $\mathcal{B}$  se puede escribir como  $\tau = \tau^*\lambda$ . Observemos que  $T^*\mathcal{B}$  tiene una estructura simpléctica natural, dada por la 2-forma simpléctica  $\omega = d\lambda$ .

Consideremos ahora una variedad simpléctica  $(\mathcal{M}, \omega)$  y una función diferencial  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Existe entonces un único campo vectorial  $X_H$  llamada campo vectorial *Hamiltoniano* que cumple

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH. \quad (5.36)$$

Además, se cumple que  $dH(X_H) = 0$  lo que indica que el flujo del campo Hamiltoniano “preserva” las superficies de nivel de  $H$ . El flujo del campo Hamiltoniano induce las ecuaciones de Hamilton que describen la mecánica de un sistema físico.

Sea  $(\mathcal{M}, \omega)$  una variedad simpléctica, podemos definir un campo vectorial  $Y$  dado por  $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$  llamado campo de **Liouville**. Con este campo, podemos definir una 1-forma

$$\alpha = i_Y\omega = \omega(Y, \cdot) \quad (5.37)$$

que resulta ser de contacto para una hipersuperficie  $\Gamma$  transversal al campo vectorial  $Y$  (*i.e.* el campo  $Y$  nunca es tangente a la hipersuperficie  $\Gamma$ .) A la hipersuperficie  $\Gamma$  se le conoce como una hipersuperficie *de contacto*. En coordenadas locales podemos escribir

$$Y = \sum_{i=1}^n p_i \partial_{p_i}. \quad (5.38)$$

Como se puede observar, el campo de Liouville es radial a la dirección de la fibra.

Consideremos ahora una subvariedad  $\mathcal{M} \subset T^*\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{M}$  cumple con

1. Ser hipersuperficie de tipo de contacto, esto es que admite una 1-forma de contacto  $\alpha = i_Y\omega$  para un campo vectorial  $Y$  de Liouville; y
2. Es una superficie de nivel de una función Hamiltoniana  $H : T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$

entonces el flujo del vector de *Reeb*  $R_\alpha$  (definido como el campo vectorial tal que  $\alpha(R_\alpha) = 1$  y  $d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0$ ) es una reparametrización del flujo Hamiltoniano. En este sentido,  $d\alpha = \omega$  tiene un kernel de 1 dimensión, por lo que  $i_{R_\alpha}d\alpha|_{T\mathcal{M}} = 0$ , y también  $i_{X_H}\omega|_{T\mathcal{M}} = -dH|_{T\mathcal{M}} = 0$ .

### 5.2.2. Flujos geodésicos

En conexión con la geometría de contacto y los conceptos mecánicos establecidos, podemos desarrollar teoría elemental relacionada con los flujos geodésicos. Dichos flujos están íntimamente relacionados con el principio de Huygens y serán de vital importancia a lo largo del trabajo.

Sea  $\mathcal{B}$  una variedad Riemanniana con métrica  $g$ . Existe un campo vectorial  $G$  único en  $T\mathcal{B}$  tal que sus trayectorias (curvas integrales) están dadas por

$$t \rightarrow \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{B} \subset T\mathcal{B} \quad (5.39)$$

para  $\gamma(t)$  una geodésica en  $\mathcal{B}$ . Se puede definir un isomorfismo  $\psi$  entre haces tangente y cotangente dado por

$$\psi_b : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B} \quad (5.40)$$

$$x \mapsto g_b(X, \cdot). \quad (5.41)$$

Este isomorfismo induce también una métrica  $g^*$  en el haz cotangente  $T^*\mathcal{B}$

$$g_b^*(u_1, u_2) = g_b(\psi^{-1}(u_1), \psi^{-1}(u_2)), \quad (5.42)$$

para  $u_1$  y  $u_2 \in T^*\mathcal{B}$ . Dado este isomorfismo entre haces, definimos el haz tangente unitario  $ST\mathcal{B}$  dado por la fibra

$$ST_b\mathcal{B} = \{X \in T_b\mathcal{B} / g(X, X) = 1\}. \quad (5.43)$$

Del mismo modo, definimos el haz cotangente unitario  $ST^*\mathcal{B}$

$$ST_b^*\mathcal{B} = \{X \in T_b^*\mathcal{B} / g^*(X, X) = 1\}. \quad (5.44)$$

Para una geodésica  $\gamma$  en  $\mathcal{B}$ , podemos observar que si  $|\dot{\gamma}| = cte$ , se tiene que

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0. \quad (5.45)$$

Esto muestra que el flujo del campo vectorial geodésico  $G$  preserva la estructura en  $ST\mathcal{B}$  y por tanto, es tangente a  $ST\mathcal{B}$ . Para una variedad Riemanniana  $(\mathcal{B}, g)$ , podemos notar que para este tipo de flujos:

1. La 1-forma  $\lambda$  de Liouville en  $T^*\mathcal{B}$ , induce una forma de contacto en el haz unitario  $ST^*\mathcal{B}$ . El flujo del campo vectorial de Reeb  $R_\lambda$  es dual al flujo geodésico del campo vectorial  $G$ , en el sentido

$$T\psi(G) = R_\lambda. \quad (5.46)$$

2. Si  $H$  una función Hamiltoniana  $H : T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $H(u) = \frac{1}{2}g^*(u, u)$  y consideramos que  $ST^*\mathcal{B}$  es una hipersuperficie de nivel de la función Hamiltoniana (i.e  $ST^*\mathcal{B} = H^{-1}(2)$ ) entonces, el flujo del campo de Reeb  $R_\lambda$  es equivalente (salvo escalamientos) al flujo hamiltoniano dado por  $H$  a lo largo de  $ST^*\mathcal{B}$ .

### 5.2.3. Elementos de contacto y transformaciones de contacto

Uno de los conceptos centrales de las estructuras de contacto, son los *elementos de contacto*. Antes de definirlos, expondremos un ejemplo sencillo, con la idea de generalizarlo y encontrar de manera natural, la definición de estos elementos de contacto.

Supongamos  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ . Todo punto en  $\mathbb{R}^2$  está caracterizado por un par de coordenadas, en el caso de las coordenadas cartesianas, estas serán  $(x, y)$ . Por cada punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pasan una infinidad de rectas. Una recta en particular, que pasa por un punto estará definida por la ecuación diferencial

$$dy - p dx = 0 \quad (5.47)$$

en donde consideramos a  $p$  como la dirección de la recta tal que  $p \in \mathbb{R}^3$ . Cada pareja generada por un punto y una recta que pasa por dicho punto en  $\mathbb{R}^2$ , le llamaremos **elemento de contacto** de  $\mathbb{R}^2$ . Podemos observar que este elemento lo podemos caracterizar por tres datos únicamente  $((x, y), p)$ . Dada  $p$ , la recta que pasa por el punto queda fija y es única. Observemos que estos elementos de contacto en  $\mathbb{R}^2$  los podríamos asociar a puntos en  $\mathbb{R}^3$ , dados por las coordenadas  $(x, y, p)$ . Así, cada elemento de  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  representa en  $\mathbb{R}^2$  un elemento de contacto. Definimos la 1-forma  $\alpha$  como

$$\alpha = dy - p dx. \quad (5.48)$$

Así, la (5.47) queda definida como el kernel de  $\alpha$ . Esta idea es generalizable para  $n$  dimensiones. Sea  $\mathcal{B}^{n+1}$  una variedad diferencial suave y sea  $b \in \mathcal{B}$  un punto con coordenadas  $b = (x_1, \dots, x_n, y)$ , definimos un hiperplano de  $\mathcal{B}$  de codimensión 1

$$dy - \sum_{i=1}^n p_i dx^i = 0. \quad (5.49)$$

Definimos entonces un **elemento de contacto** en  $\mathcal{B}$  como la pareja del punto  $b \in \mathcal{M}$  y al hiperplano  $V \subset T_b \mathcal{B}$  dado por (5.49). Definimos la 1-forma de contacto  $\alpha_V : T_b \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\alpha_V = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx^i, \quad (5.50)$$

y por tanto  $V = \ker(\alpha_V)$ . La familia de elementos de contacto que tienen como punto “base”  $b$  forman el espacio proyectivo cotangente de  $\mathcal{B}$  en  $b$ ,  $\mathbb{P}T_b^* \mathcal{B}$ . El espacio de todos los elementos de contacto en  $\mathcal{B}$ , forman la variedad del haz de contacto  $\mathbb{P}T^* \mathcal{B}$  de dimensión  $(2n - 1)$ , que se puede ver como  $\mathcal{B}^{n+1} \times \mathbb{R}P^{n-1}$  [67].

De manera natural, podemos definir sobre  $\mathcal{B}$  un **espacio de elementos de contacto coorientados**  $\mathcal{M}$ , el cuál cumple con un rol fundamental para dotar de estructura a nuestra variedad de contacto. Dado un elemento de contacto  $(b, V)$ , la elección  $V \in T_b \mathcal{B}$  puede ser arbitraria. Sin embargo, podemos elegir una serie de elementos de contacto particulares, eligiendo planos “coorientados”. Esto significa poder distinguir un vector normal “positivo”. Para elegir estos planos coorientados, usaremos en concepto de flujo geodésico. Si  $\gamma$  una curva geodésica en  $\mathcal{B}$ , podemos escoger para cada punto  $b \in \mathcal{B}$  el plano que sea normal al vector  $\dot{\gamma}(t_0)$  y que  $\gamma(t_0) = b$ . Así, estos planos se encuentran coorientados por la velocidad de la curva geodésica que pasa por el punto  $b$ .

---

<sup>3</sup>En realidad  $p \in \mathbb{R}P^1$  debido a que la recta podría ser vertical y eso implicaría que la pendiente  $p$  fuera infinita. Para poder considerar ese caso, es necesario recurrir al plano proyectivo.

Por tanto, podemos identificar  $\mathcal{M}$  con la variedad generada por el haz tangente unitario  $ST\mathcal{B}$  asociando, en vez del plano de contacto, el vector normal positivo a éste <sup>4</sup>. De esta forma tenemos la identificación

$$(b, V) \rightarrow (b, \vec{X}) \tag{5.51}$$

donde  $\vec{X}$  es el vector normal positivo al plano  $V$ . En el caso particular de los flujos geodésicos, construiremos la identificación con  $\dot{\gamma}$  para  $\gamma$  geodésica en  $\mathcal{B}$ . Con esta identificación,  $\lambda$  define una estructura de contacto natural en  $\mathcal{M}$  y por tanto en  $ST\mathcal{B}$  (Figura 5.1)

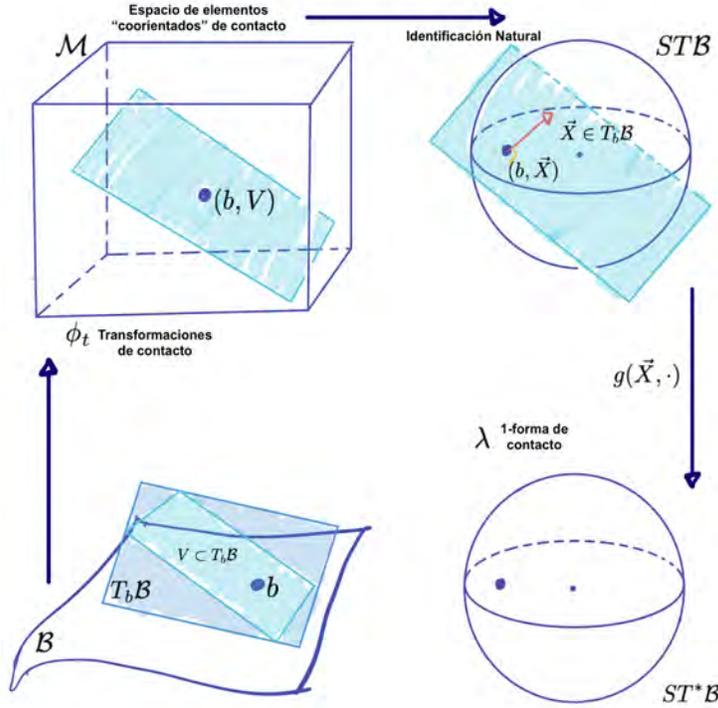


Figura 5.1: Identificación natural entre el espacio de elementos de contacto coorientados  $\mathcal{M}$  y el haz tangente unitario  $ST\mathcal{B}$  y cotangente  $ST^*\mathcal{B}$ .

Una vez definidos la estructura y los elementos de contacto, podemos definir difeomorfismos de la variedad en ella misma. En particular, es de interés encontrar el conjunto de difeomorfismos que mantengan la estructura de contacto invariante. Estas transformaciones toman relevancia dado que conservan la estructura geométrica de la variedad. Estas transformaciones son conocidas como *transformaciones de contacto*.

Definimos una **transformación de contacto** como aquella transformación  $\phi : \mathbb{P}T^*B \rightarrow \mathbb{P}T^*B$ , tal que la estructura de contacto no cambia. Esto es

$$\phi : (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, y) \mapsto (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, \tilde{y}) \tag{5.52}$$

donde

$$dy - \sum_{i=1}^n p_i dx^i = \rho \left( d\tilde{y} - \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{x}^i \right), \tag{5.53}$$

<sup>4</sup>De la misma manera podríamos hacerlo con  $ST^*\mathcal{B}$ , usando el isomorfismo entre espacios generado por la métrica.

para  $\rho : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar distinta de cero. El caso particular en que  $\rho = 1$  se conoce como transformación *estrictamente* de contacto.

Para toda variedad diferencial  $\mathcal{B}^n$ , podemos construir una estructura de contacto llamada estructura *tautológica*. Esta estructura siempre existe (sin importar la dimensión de la variedad original) y es única. Para esto, debemos considerar la variedad auxiliar  $\mathcal{M} = \mathbb{P}T^*\mathcal{B}$  con dimensión  $2n - 1$ . Como la variedad  $\mathcal{M}$  es de dimensión impar, podemos establecer una estructura de contacto de la manera usual. Definimos una 1-forma de contacto  $\alpha$  y la distribución de hiperplanos  $\xi$  dados por  $\xi = \ker(\alpha) \in T\mathcal{M} = T(\mathbb{P}T^*\mathcal{B})$ . Tomemos la proyección canónica  $\pi$  del haz a la variedad  $\pi : \mathbb{P}T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  y consideremos un punto  $u \in \mathbb{P}T^*\mathcal{B}$  tal que  $\pi(u) = b$  para  $b \in \mathcal{B}$ . Encontramos el elemento de contacto en  $b$  dado por la proyección del hiperplano  $\xi_u = \ker(\alpha|_u)$ . Así, el elemento de contacto será el hiperplano  $\pi_*\xi_u \in T_{\pi(u)}\mathcal{B} = T_b\mathcal{B}$  definido por  $u$  (figura 5.2). Usando este método, tenemos una forma canónica para encontrar elementos de contacto en una variedad sin importar su dimensión.

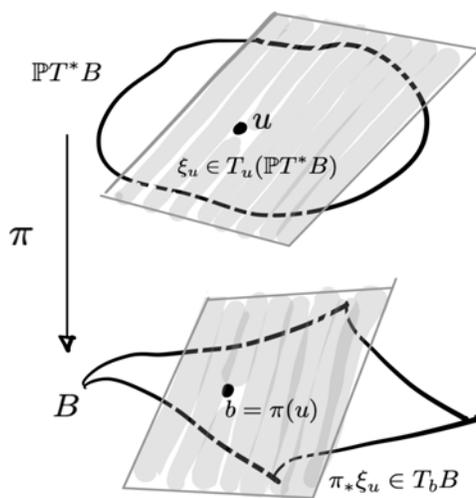


Figura 5.2: Construcción de la distribución tautológica de contacto.

Supongamos ahora, que tenemos una variedad Riemanniana  $(\mathcal{B}, g)$ . Definimos un mapeo temporal de un flujo geodésico  $\phi_t$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  como difeomorfismo de  $ST\mathcal{B}$  en  $ST\mathcal{B}$ . Para ello usaremos el espacio de elementos de contacto. Sea  $\mathcal{M}$  el espacio de elementos de contacto (coorientados) de  $\mathcal{B}$ , entonces el mapeo  $\phi_t$  del flujo geodésico se puede escribir como

$$\phi_t(b_0, V_0) = (\gamma(t), V(t)) \quad (5.54)$$

donde  $\gamma$  es una geodésica en  $\mathcal{B}$ ,  $b_0 = \gamma(0)$  el punto que consideraremos inicial en la geodésica  $V_0 =$  es el plano dado por el vector normal (positivo)  $\dot{\gamma}(0)$ .  $\gamma(t)$  es el punto en la geodésica al tiempo  $t$  y  $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{B}$  es el plano definido por el vector normal  $\dot{\gamma}(t)$ . En este sentido  $\phi_t$  es una transformación de contacto que define el flujo geodésico. Así, podemos observar que se cumple

$$\phi_t(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \quad (5.55)$$

### 5.3. El principio de Huygens y la propagación de frentes de ondas

El principio de Huygens es uno de los conceptos más importantes que se puede abordar desde la teoría de propagación de ondas. Este principio, llamado así en honor a Christiaan Huygens, explica el fenómeno de la difracción de una onda cuando pasa por una rendija. La idea fundamental radica en pensar que la onda se propaga a través de una superficie geométrica denominada *frente de onda*. Cada uno de los puntos de este frente de onda son a su vez, fuentes de nuevos frentes de ondas, llamados frentes u ondas secundarias. Los frentes secundarios pueden generar interferencia entre ellos, produciendo los patrones de difracción. En este proceso, el frente de onda original evoluciona en el tiempo como la curva envolvente de todos las ondas secundarias individuales. En esta sección, usaremos la herramienta geométrica desarrollada para modelar la propagación de una onda en un medio y daremos los elementos básicos de la geometría de contacto, que nos permitirán construir y demostrar el principio de Huygens de manera formal [73].

Consideremos el espacio-tiempo como una variedad  $\mathcal{M}^{n+1} = \mathcal{B}^n \times \mathbb{R}$  donde la variedad  $\mathcal{B}^n$  representa el espacio físico y la fibra  $\mathbb{R}$  jugará el papel de tiempo. Para cada punto de la variedad  $\mathcal{B}$  (Riemanniana) tenemos una colección de todas las posibles soluciones de movimiento para un objeto que se mueva con velocidad  $\vec{v}$  unitaria. Cada una de estas soluciones representa una “curva” sobre  $\mathcal{B}$ . A la colección de todas estas curvas (soluciones a ecuaciones diferenciales de movimiento) le llamaremos *la gráfica de posibles movimientos*. La gráfica se puede representar como una función  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$  para  $|\vec{v}| = 1$ . En cada punto de  $\mathcal{B}$  se genera un “cono” de posibles velocidades (direcciones), cada una de ellas tangente a las curvas que forman la “gráfica” de posibles movimientos. Dicho cono está descrito por la ecuación  $\|dq\| = |dt|$ , donde  $\|dq\|$  representa la norma del vector espacial de coordenadas. Si suponemos  $n = 2$  en coordenadas cartesianas, entonces tenemos

$$dx^2 + dy^2 = dt^2. \quad (5.56)$$

Este cono, define una métrica Lorentziana y podemos decir que  $\mathcal{M}$  tiene un campo de conos Lorentzianos. De manera genérica, el campo de “conos de posibles velocidades” genera una hipersuperficie en la variedad de los elementos de contacto ( $\mathbb{P}T^*\mathcal{B}$ ) llamada **superficie de Fresnel** [70]. La estructura tautológica de contacto dada por  $\mathbb{P}T^*\mathcal{B}$  genera una condición sobre la velocidad llamada *condición de patinaje (skate condition)*. Esta condición implica, que el movimiento en un elemento de contacto que se encuentra en el plano de la trayectoria, tiene la libertad de rotar sobre su propio eje o moverse en la dirección definida por él mismo (elemento de contacto), pero se resiste a cualquier movimiento en dirección perpendicular. Consideremos ahora un medio óptico, dado por una variedad Riemanniana  $(\mathcal{B}, g)$ . Esta variedad describe el medio óptico en el sentido que las geodésicas en  $\mathcal{B}$  con respecto a la métrica  $g$  corresponden a “rayos” de luz en un símil mecánico. Tomamos el espacio de elementos de contacto coorientados y lo reescalamos para que tengan norma unitaria. A esto se le conoce como  $ST^*\mathcal{B}$  haz cotangente unitario o esferificación del espacio cotangente. En este espacio existe un flujo geodésico dual, bajo la métrica  $g$ , al flujo en  $ST\mathcal{B}$ . Este flujo geodésico se puede definir como una transformación dada por

$$\Phi_{(b_0, V_0)}(t) = (\gamma(t), V(t)), \quad (5.57)$$

donde  $\gamma(t)$  es una curva geodésica en  $\mathcal{B}$  y  $V(t) \in T\mathcal{B}$ . La curva geodésica comienza en  $b_0 = \gamma(0)$  y  $V_0 \in T_{b_0}\mathcal{B}$  coorientado, de tal forma que la pareja  $(b_0, V_0)$  es un elemento coorientado de

contacto, y  $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{B}$ . Debido a que  $V(t)$  es coorientado, podemos definir una dirección perpendicular *positiva*. Dicha dirección es tangente a la geodésica  $\gamma(t)$ . Así, los hiperplanos se encuentran coorientados por  $\gamma'(t)$ . El principio de Huygens es equivalente a decir que el flujo geodésico previamente mencionado consiste en transformaciones de contacto. A continuación escribimos una pequeña prueba de este hecho.

Tomemos  $(\mathcal{B}, g)$  una variedad Riemanniana. Existe un único campo vectorial en el haz tangente  $T\mathcal{B}$ , tal que sus trayectorias están dadas por

$$t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t)) \quad (5.58)$$

para  $\gamma$  curva geodésica en  $\mathcal{B}$ . Este campo vectorial es conocido como *campo geodésico* y su flujo se denomina *flujo geodésico*. Definimos la 1-forma  $\lambda \in T^*\mathcal{B}$ . Si suponemos coordenadas generalizadas  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  entonces  $\lambda$  adquiere la forma local escrita como (5.35). Se puede observar que  $\lambda$  induce una estructura de contacto natural en la variedad del haz de contacto  $ST^*\mathcal{B}$ . Definimos un campo vectorial  $Y$  en  $T^*\mathcal{B}$  dado por  $i_Y\omega = \lambda$ , para  $\omega = d\lambda$  2-forma cerrada. Calculamos la derivada de Lie de la 2-forma  $\omega$  a lo largo del campo vectorial  $Y$ , esto es  $\mathcal{L}_Y\omega$ , que por la identidad de Cartan podemos escribir como

$$\mathcal{L}_Y\omega = (d \circ i_Y)(\omega) + (i_Y \circ d)(\omega) = \omega. \quad (5.59)$$

Dado que en coordenadas locales  $\lambda$  se escribe como (5.35), podemos observar explícitamente que el campo vectorial  $Y$  se escribe como (5.38). Este campo resulta ser radial en la dirección de la fibra  $(\mathbb{P}T\mathcal{B})$  y transversal al haz tangente unitario  $ST^*\mathcal{B}$ . Por tanto,  $\lambda$  es una forma de contacto en  $ST^*\mathcal{B}$ .

Mostraremos que el flujo del campo de Reeb asociado a la 1-forma de contacto  $\lambda$ , coincide (salvo un factor de proporcionalidad) con el flujo geodésico en el haz tangente unitario, bajo la identificación canónica entre  $ST^*\mathcal{B}$  y  $ST\mathcal{B}$  dada por la métrica  $g$ .

Sabemos que el flujo geodésico es el generado por el campo  $x_H$  para  $H(u) = \frac{1}{2}g^*(u, u)$ . Además  $ST^*\mathcal{B}$  es una superficie de nivel de  $H$  y el campo vectorial de Liouville se puede escribir localmente como (5.38) (cf. sección 5.2.2) entonces  $ST^*\mathcal{B}$  es una variedad de contacto con la 1-forma de contacto dada por

$$\alpha = \iota_Y\omega|_{ST^*\mathcal{B}} = \lambda. \quad (5.60)$$

De manera clara se cumple que

$$\iota_{x_H}d\lambda = \iota_{x_H}\omega = -dH(x_H) = 0 \quad (5.61)$$

por tanto

$$x_H|_{ST^*\mathcal{B}} = \Omega R_\lambda \quad (5.62)$$

para  $\Omega$  un factor de proporcionalidad.

Podemos concluir que el flujo de Reeb  $R_\lambda$  coincide con el flujo geodésico (módulo rescalamientos). Observemos ahora que el flujo de Reeb para cualquier 1-forma de contacto  $\alpha$  está dado por

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = 0 \quad (5.63)$$

por lo que podemos deducir que la forma de contacto  $\alpha$  se mantiene invariante bajo el flujo del Reeb. Esto implica que bajo una transformación, la forma de contacto permanece invariante.

Así, el flujo del Reeb está dado por una transformación estricta de contacto. Dado que hemos demostrado que el flujo del Reeb y el flujo geodésico coinciden y que el flujo de Reeb está dado por una transformación estricta de contacto, podemos concluir que el flujo geodésico es equivalente a una transformación de contacto. Esto muestra el enunciado del principio de Huygens.

### 5.3.1. Frentes de onda y subvariedades isotrópicas

De manera tradicional, podemos estructurar el principio de Huygens como sigue. Supongamos un medio material en donde se genera y se propaga una onda radial en el punto  $b_0$ . Llamamos *frente de onda* al espacio geométrico dado por todos los puntos sobre en el medio que puede alcanzar la onda en un tiempo determinado  $t_1$ . Al frente de onda centrado en  $b_0$  al tiempo  $t_1$  lo denominamos  $F_{b_0}(t_1)$ . Cada punto  $b_1 \in F_{b_0}(t_1)$ , será una nueva fuente de ondas radiales secundarias que generarán su propio frente de onda para un tiempo  $t$ , denotado por  $F_{b_1}(t)$ . El concepto medular del principio de Huygens establece que el frente de onda al tiempo  $t_1 + t$  denotado como  $F_{b_0}(t_1 + t)$ , será la **envolvente** de los frentes de onda secundarios  $F_{b_1}(t)$ . Figura 5.3.

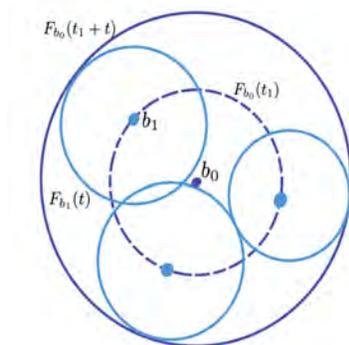


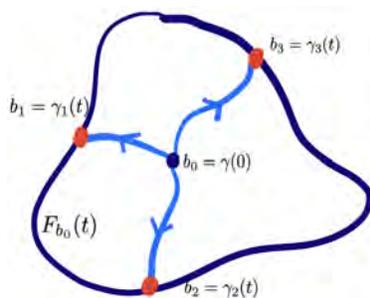
Figura 5.3: Representación gráfica del principio de Huygens. La onda evolucionada  $F_{b_0}(t_1 + t)$  es la envolvente de todas las ondas secundarias generadas en el frente de onda original en un tiempo anterior  $t$

De manera más formal, definimos un **frente de onda** denotado por  $F_{b_0}(t)$  como el lugar geométrico de los puntos  $b$  tales que existe, de manera local, una geodésica de velocidad unitaria constante  $\gamma \in \mathcal{B}$  en donde  $\gamma(0) = b_0$  y  $\gamma(t) = b$  para  $t \ll 1$ . A esa hipersuperficie en  $\mathcal{B}$  la llamamos el frente de onda al tiempo  $t$  centrada en el punto  $b_0$  como se muestra en el diagrama de la figura 5.4. En general, dependiendo de la geometría del espacio, esta hipersuperficie será difeomorfa a una esfera. Si la geometría (el medio) es homogénea e isotrópica, entonces el frente de onda será realmente una esfera  $S^n$ .

Sea  $(\mathcal{M}, \xi)$  una variedad de contacto (*i.e.*  $\xi$  es una distribución planos dados por kernel de 1-forma de contacto). Sea  $L$  una subvariedad de  $\mathcal{M}$ , decimos que  $L$  es isotrópica si

$$T_p L \subset \xi_p, \quad \forall p \in L. \quad (5.64)$$

Esto quiere decir que para cada punto en la subvariedad  $L$ , el espacio tangente se encuentra contenido en la distribución de contacto  $\xi$  en ese punto. Podemos observar que si la dimensión de la variedad  $\mathcal{M}$  es  $2n + 1$  la dimensión máxima que puede tener  $L$  es  $n$ , debido a que el espacio tangente  $T_p L$  en cada punto el punto  $p \in L$  tendría dimensión  $2n$ , misma dimensión

Figura 5.4: Esquema de un frente de onda  $F_{b_0}(t)$  para  $t \ll 1$ 

de los hiperplanos de la distribución de contacto  $\xi$ . A las subvariedades isotrópicas tales que  $\dim(L) = n$  se les conoce como *subvariedades de Legendre*. Cabe destacar que dichas subvariedades de Legendre son las subvariedades integrales de mayor dimensión que admite la variedad.

Consideremos una vez más el espacio de elementos de contacto  $ST\mathcal{B}$  identificado con la estructura de contacto natural dada por la 1-forma de Liouville. Podemos definir en este espacio una *proyección del haz* en la variedad base  $\mathcal{B}$

$$\pi : ST\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \quad (5.65)$$

$$(b, \vec{X}) \mapsto (b), \quad (5.66)$$

tal que, proyecta subvariedades de Legendre en  $ST\mathcal{B}$  a frentes de onda en  $\mathcal{B}$ . A esta proyección les llamaremos la *proyección del frente de onda*. Cada fibra de esta proyección  $\pi^{-1}(b)$  es una subvariedad de Legendre en  $ST\mathcal{B}$ .

Si  $\phi_t$  es la transformación de contacto tal que genera un flujo geodésico en  $ST\mathcal{B}$ , el frente de onda se puede ver como

$$F_b(t) = \pi(\phi_t(\pi^{-1}(b))) \quad (5.67)$$

dado que  $\phi_t(\pi^{-1}(b))$  es una subvariedad de Legendre de  $ST\mathcal{B}$ . Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si  $L_0$  y  $L_1$  son subvariedades de Legendre de  $ST\mathcal{B}$  tales que se intersectan en un punto  $\vec{X} \in ST_b\mathcal{B}$ , entonces sus proyecciones de frente de onda dadas por  $\pi(L_0)$  y  $\pi(L_1)$  respectivamente, se intersectan en un punto  $b \in \pi(L_0) \cap \pi(L_1)$  de forma **tangente** (Figura 5.5)
2. La fibra generada por  $\pi^{-1}(b)$  en el haz tangente unitario de  $T_b\mathcal{B}$  se puede pensar como el conjunto de todas las posibles direcciones de geodésicas con velocidades unitarias que parten desde el punto  $b$ . Esto es conocido también como el *geodesic spray*.

Para un punto  $b_1 \in F_b(t)$  existe una única geodésica con velocidad unitaria  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = b$  y  $\gamma(t) = b_1$  donde

$$\vec{v}_1 = \dot{\gamma}(t) = \phi_{t*}(\dot{\gamma}(0)) \quad (5.68)$$

para  $\phi_t$  una transformación de contacto. Dado que  $\phi_t(\pi^{-1}(b)) \subset ST\mathcal{B}$  es una subvariedad de Legendre, entonces  $\vec{v}_1 \in ST_{b_1}\mathcal{B} \subset \xi_{\vec{v}_1}$ . Esto muestra que el plano tangente al frente de onda  $F_b(t)$  en el punto  $b_1$  es el plano en  $T_{b_1}\mathcal{B}$  definido por el vector ortogonal a él  $\vec{v}_1$ .

Supongamos que  $\gamma$  es una geodésica en  $\mathcal{B}$  con velocidad constante. Supongamos además que  $t, t_1 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $b_0 = \gamma(0)$  y  $b_1 = \gamma(t_1)$ . Sea  $\phi_t$  una transformación de contacto que

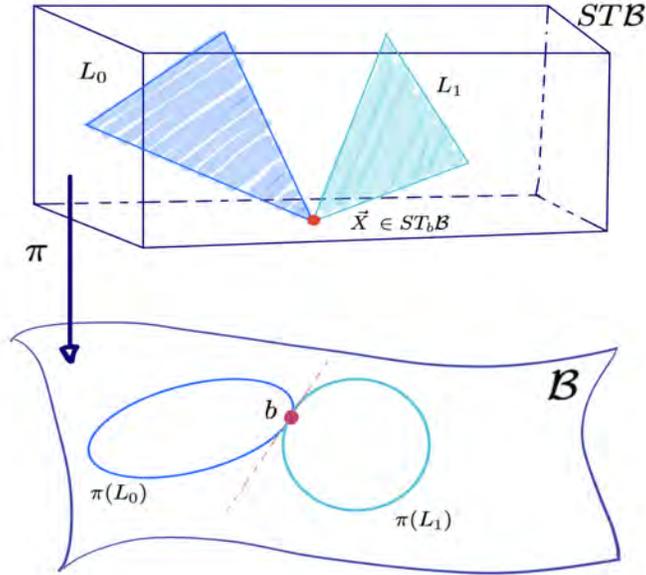


Figura 5.5: Subvariedades de Legendre que se intersectan en un punto, al hacer la proyección del frente de onda, éstos se intersectan de forma tangente en la variedad base.

representa un flujo geodésico  $ST\mathcal{B}$ . Con esta información podemos construir las subvariedades de Legendre asociadas a estos puntos en  $ST\mathcal{B}$

$$L_0 = \phi_t(\pi^{-1}(b_0)), \quad L_1 = \pi^{-1}(b_1). \quad (5.69)$$

Podemos observar que  $L_0$  y  $L_1$  se intersectan en el punto  $\dot{\gamma}(t_1) \in ST_{b_1}\mathcal{B}$ . Ambas subvariedades de Legendre las podemos evolucionar un tiempo  $t$  bajo la transformación  $\phi_t$ , obteniendo nuevas subvariedades de Legendre [72]

$$L'_0 = \phi_t(L_0) = \phi_{t_1+t}(\pi^{-1}(b_0)), \quad L'_1 = \phi_t(L_1), \quad (5.70)$$

donde ambas subvariedades se intersectan en el punto  $\dot{\gamma}(t_1 + t) \in ST_b\mathcal{B}$ . Estas nuevas subvariedades de Legendre las podemos proyectar a su respectivo frente de onda dado por

$$F_{b_0}(t_1 + t) = \pi(L'_0), \quad F_{b_1}(t) = \pi(L'_1). \quad (5.71)$$

Ambos frentes de onda se intersectan en el punto  $b$  y retomando la observación ilustrada en la figura 5.5 la intersección entre  $F_{b_0}(t_1 + t)$  y  $F_{b_1}(t)$  es **tangente**. Como los puntos sobre los frentes de ondas son arbitrarios, esto se cumple para cualquiera. Así,  $F_{b_0}(t_1 + t)$  siempre será tangente a cada uno de los frentes de ondas secundarios y por ende la envolvente de ello (ver figura 5.6). Esto demuestra de manera geométrica el principio de Huygens.

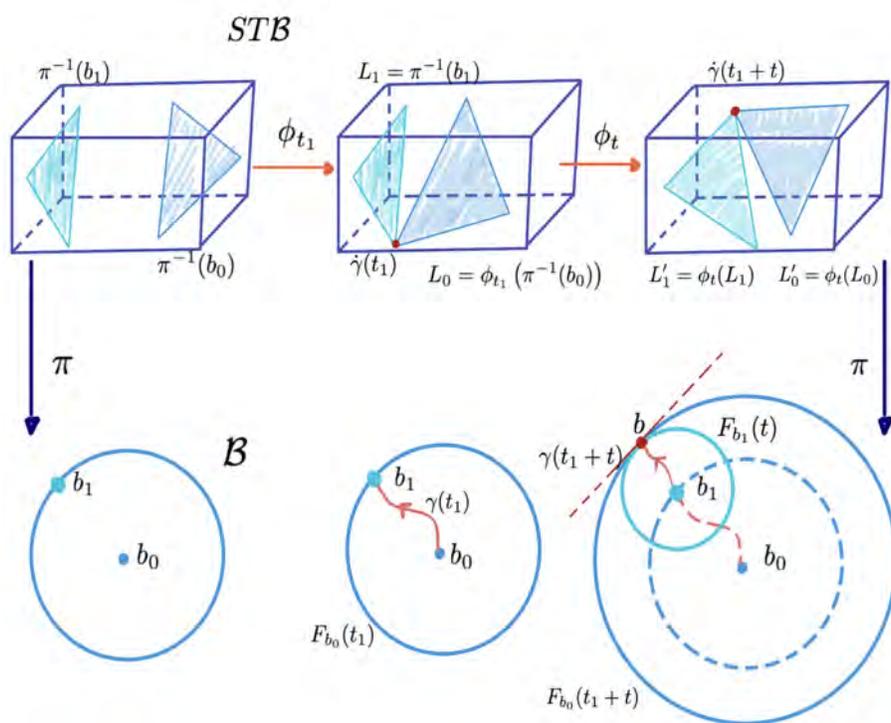


Figura 5.6: Esquema de la demostración del principio de Huygens mediante geometría de contacto.

## 6. Propagación de la luz en medios ópticos

A lo largo del trabajo, hemos visto que un medio óptico se puede representar por una variedad Riemanniana. En este capítulo, desarrollaremos conceptos y estructuras de geometría métrica de contacto, que nos permitan mostrar una visión más completa de este hecho, así como algunas aplicaciones importantes. Partiremos de una variedad Riemanniana inmersa en un espacio-tiempo bi-métrico Lorentziano, donde la métrica óptica se puede descomponer en términos de la velocidad del observador y una métrica asociada a las propiedades del medio óptico en cuestión. Este desarrollo, nos permitirá mostrar que la ortogonalidad de los haces de luz y los frentes de onda, se expresa a partir de dotar al medio óptico con una estructura métrica de contacto adecuada. Todo esto, suponiendo que el medio es un espacio simple sin fronteras. Las interfaces entre medios se pueden modelar como fronteras del espacio. En estos casos, mostraremos que la ortogonalidad entre los haces y los frentes de onda no se conserva, dando pie a las conocidas aberraciones ópticas y en algunos casos a la reflexión total interna. A lo largo del capítulo, trabajaremos de manera explícita con las transformaciones de contacto encontradas y desarrolladas en el capítulo anterior, que nos permiten reconstruir de manera sencilla, tanto los rayos de luz como la evolución de los frentes de onda, sin la necesidad de resolver la ecuación geodésica para los rayos, ni la ecuación de onda para los frentes. Finalmente, el capítulo lo cerraremos con ejemplos explícitos de estos hechos para medios con diferentes geometría y dimensiones.

### 6.1. La variedad del medio

En esta sección, detallaremos la construcción de la variedad del medio. Usaremos un espacio bi-métrico con el medio ambiente y la métrica del medio, para así mostrar que la métrica óptica se puede descomponer en términos de la velocidad del observador y la métrica del medio. Esto hace que la variedad del medio se pueda ver como una variedad cociente, dada por las órbitas de un observador en *reposo*.

Para poder describir un medio óptico, usaremos una variedad Riemanniana  $(\mathcal{B}, g)$  inmersa en un espacio-tiempo bi-métrico  $(M, g_0, \tilde{g})$ , donde  $g_0$  representa la métrica del vacío como el espacio-tiempo “de fondo”; mientras que  $\tilde{g}$  representa la métrica que codifica las propiedades ópticas del medio. Dada esta configuración, la velocidad de un observador en reposo  $u \in TM$  [59] que definirá el marco de referencia del laboratorio, deberá satisfacer

$$g_0(u, u) = -1 \quad \text{y} \quad \tilde{g}(u, u) = -\frac{1}{n^2}, \quad (6.1)$$

donde  $n > 1$  representa el índice de refracción del medio. Podemos observar que la velocidad de la luz en el medio es menor que en el vacío de fondo. En este caso, estamos usando  $g_0$ , la métrica del espacio-tiempo de fondo para subir y bajar índices en términos de los isomorfismos musicales:

$$g_0^\flat : TM \longrightarrow T^*M \quad \text{y} \quad g_0^\sharp : T^*M \longrightarrow TM. \quad (6.2)$$

Cada vector en  $(M, g_0, \tilde{g})$  que no sea del tipo “espacial” se puede descomponer en términos

de la métrica óptica  $\tilde{g}$  como

$$w = \text{Hor}(w) + \text{Ver}(w) \quad (6.3)$$

donde  $\text{Hor}(w)$  y  $\text{Ver}(w)$  son las componentes transversales y paralelas de  $w$  con respecto a la velocidad del observador  $u$ . En este sentido, impondremos que la descomposición vertical y horizontal de un campo vectorial sean perpendiculares bajo la métrica óptica  $\tilde{g}$ . Esto es

$$\tilde{g}(\text{Hor}(w), \text{Ver}(w)) = 0. \quad (6.4)$$

Pedimos ahora, que para todo campo vectorial nulo  $v$  (*i.e.*  $g(v, v) = 0$ ), se cumpla que

$$\text{Ver}(v) = \Omega u \quad (6.5)$$

para alguna función  $\Omega$  no nula  $M$ . Así, el campo nulo satisface

$$\begin{aligned} \tilde{g}(v, v) &= \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) + \tilde{g}(\text{Ver}(v), \text{Ver}(v)) \\ &= \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) + \tilde{g}(\Omega u, \Omega u) \\ &= \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) - \frac{\Omega^2}{n^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

y por tanto

$$\tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) = \frac{\Omega^2}{n^2}. \quad (6.7)$$

Con base en estas restricciones, podemos definir  $\mathcal{B}$  como la variedad cociente

$$\mathcal{B} = M/G_u, \quad (6.8)$$

donde  $G_u$  representa al grupo de traslación asociado al flujo de campo vectorial  $u$  (observador estático o de laboratorio). Dicha variedad la podemos dotar de una métrica Riemanniana  $g$  tal que satisfaga para todo campo vectorial nulo  $v$

$$g(\Pi_* v, \Pi_* v) = \frac{\Omega^2}{n^2}, \quad (6.9)$$

donde  $\Pi : M \rightarrow \mathcal{B}$  es la proyección local trivial. A la variedad  $(\mathcal{B}, g)$  se le conoce como la *variedad del medio*<sup>1</sup> Fig. 6.1. La métrica óptica se puede descomponer por tanto, en términos de la métrica Riemanniana de la variedad del medio y la velocidad del observador

$$\tilde{g} = g \circ (\Pi_* \otimes \Pi_*) - \frac{1}{n^2} u^b \otimes u^b, \quad (6.10)$$

donde  $u^b \equiv g_0^b(u)$  (cf. ecuación (6.2)). Para futuras referencias a lo largo del trabajo, consideraremos  $\Omega = 1$ . Podemos observar que (6.10) corresponde la expresión conocida de la métrica óptica de Gordon [48].

## 6.2. Rayos, frentes de onda y el flujo de Reeb

En esta sección, mostraremos la naturaleza dual de los rayos de luz y los frentes de onda que aparecerá de manera explícita bajo la perspectiva de la geometría métrica de contacto. Empezaremos a construir las estructuras geométricas de contacto sobre la variedad del medio, con la finalidad de mostrar que la perpendicularidad de los haces de luz y sus frentes de onda

<sup>1</sup>cf. esta variedad es equivalente a la conocida como *variedad del cuerpo u objeto* desarrollada en [74] y [75].

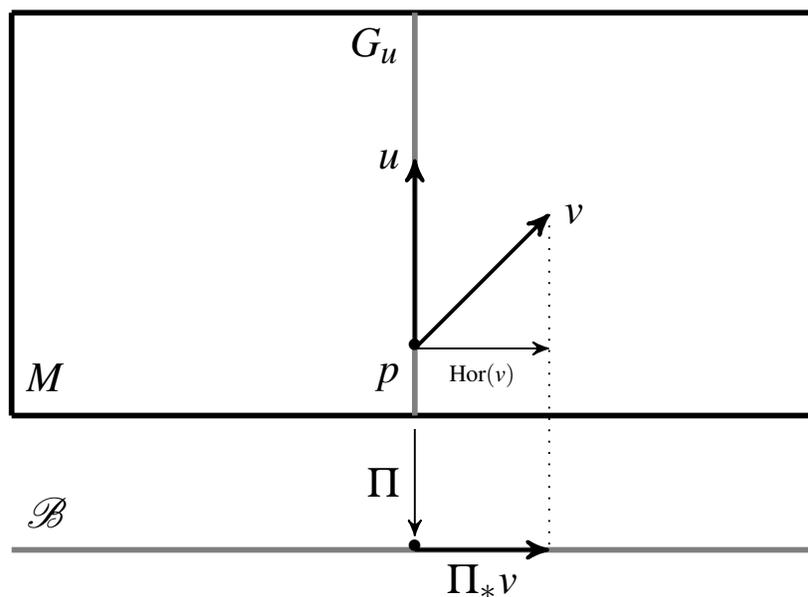


Figura 6.1: Variedad del medio

depende de la existencia de una *estructura de cuasi-contacto* en dicha variedad. Demostraremos que la evolución temporal del flujo geodésico se puede escribir en términos de una familia uni-paramétrica de transformaciones de contacto en el haz tangente unitario de la variedad. Para ello, consideraremos el haz tangente  $ST\mathcal{B}$  junto con el haz co-tangente sin la sección cero  $0_{\mathcal{B}}$ , denotado por  $PT^*\mathcal{B}$  [76]. Estos espacios nos permiten representar la dualidad de la luz, entre los rayos de luz y la propagación ondulatoria en un medio óptico  $(\mathcal{B}, g)$  [20, 70, 76]. El primer espacio representa el formalismo de los rayos de luz como proyecciones del flujo de las geodésicas nulas de la métrica  $\tilde{g}$ . Los elementos de  $PT^*\mathcal{B}$  representan, por otro lado, a los planos tangentes a los frentes de onda [73]. Sin embargo, existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de ambos espacios, relacionando el flujo geodésico en el haz tangente unitario con una familia uni-paramétrica de transformaciones de contacto en la variedad de elementos de contacto [67]. Finalmente, dado que las transformaciones de contacto son simetrías de la distribución de contacto, los elementos de contacto asociados son invariantes bajo la proyección canónica a la variedad base  $\mathcal{B}$ .

Consideremos el haz tangente  $T\mathcal{B}$  de la variedad del medio de  $n$  dimensiones  $(\mathcal{B}, g)$ . Definimos el haz tangente unitario como

$$ST\mathcal{B} = \{v \in T\mathcal{B} | \mathbf{g}(v, v) = 1\}, \quad (6.11)$$

para  $\mathbf{g}$  es la métrica del haz dada por  $g$  [77]. De la restricción de que el haz sea unitario, podemos observar que

$$\dim(ST\mathcal{B}) = 2n - 1. \quad (6.12)$$

Notemos que la propiedad dada por (6.11), justamente corresponde al conjunto de nivel cero

en  $T\mathcal{B}$ , es decir  $\mathbf{g}(v, v) - 1 = 0$ . De forma análoga, el haz co-tangente unitario se define como

$$ST^*\mathcal{B} = \{p \in T^*\mathcal{B} | \mathbf{g}^{-1}(p, p) = 1\}. \quad (6.13)$$

Observemos que la restricción de  $ST^*\mathcal{B}$  con  $PT^*\mathcal{B}$  corresponde a una estructura conocida como *estructura de rayos-ópticos* definida por Perlick (ver definición 5.1.1 y la proposición 5.1.1 de [17]). Esto es

$$\mathcal{N} = \{p \in PT^*\mathcal{B} | \mathbf{g}^{-1}(p, p) = 1\}. \quad (6.14)$$

De manera natural, el haz cotangente  $T^*\mathcal{B}$  cuenta con una estructura simpléctica asociada. Es decir, cuenta con una 2-forma cerrada, no degenerada  $\omega \in \Lambda^2(T^*\mathcal{B})$ . Definimos un campo de *Liouville*, como un campo vectorial  $L \in T(T^*\mathcal{B})$ , tal que

$$\mathcal{L}_L\omega = \omega. \quad (6.15)$$

Usando la identidad de Cartan, tenemos que

$$\mathcal{L}_L\omega = i_L d\omega + di_L\omega = -di_L\omega = -d\lambda = \omega. \quad (6.16)$$

Por tanto, podemos definir una 1-forma  $\lambda \in \Lambda^1(T^*\mathcal{B})$  que genere la estructura simpléctica en términos del campo vectorial de Liouville dada por

$$\lambda \equiv i_L\omega. \quad (6.17)$$

Esto nos permite definir una 1-forma de contacto en  $ST^*\mathcal{B}$  dada por la restricción de la 1-forma de Liouville a la estructura de rayos ópticos  $\mathcal{N}$

$$\eta = \lambda|_{\mathcal{N}}. \quad (6.18)$$

Observemos que la dimensión de  $\mathcal{N}$  es  $2n-1$ . La 1-forma de contacto nos induce la distribución de contacto dada por  $\mathcal{D} = \ker(\eta)$ . Así, el conjunto  $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$  será una variedad de contacto conocida como *el espacio de elementos de contacto* o el *haz de contacto* de  $\mathcal{B}$ . Definimos la proyección canónica de la restricción del haz como

$$\pi|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \subset T^*\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}, \quad (6.19)$$

que manda los hiperplanos de la estructura de contacto  $\mathcal{D}$  a los elementos de contacto en  $\mathcal{B}$ . Podemos observar que los campos vectoriales tangentes a las curvas geodésicas afines en  $(\mathcal{B}, g)$  son secciones de  $ST\mathcal{B}$ . Por tanto, establecemos una relación entre  $ST\mathcal{B}$  y  $\mathcal{N}$ , pidiendo que

$$(\pi_* \circ i_*)(R_\eta) = n(\Pi_*(v)) \quad (6.20)$$

donde  $i : \mathcal{N} \rightarrow T^*\mathcal{B}$  es el mapeo inclusión,  $v$  es un campo vectorial nulo en  $T\mathcal{M}$ ,  $n$  es el índice de refracción del medio y  $R_\eta$  es el campo vectorial de *Reeb* asociado a la 1-forma de contacto  $\eta$  (5.33) que cumple con

$$i_R\eta = 1 \quad \text{y} \quad i_R d\eta = 0. \quad (6.21)$$

La condición (6.20), expresa que las geodésicas de  $(\mathcal{B}, g)$  son transversales a  $\mathcal{N}$  y que  $R$  es la parte espacial de un campo vectorial nulo en  $TM$ . [cf. ecuación (6.9)]. De hecho

$$\mathbf{g}(R, R) = g(R|_x, R|_x) = \frac{1}{n^2} \quad \text{for each } x \in \mathcal{B}. \quad (6.22)$$

Sin embargo, esto no implica que los rayos de luz sean ortogonales (en el sentido métrico) a  $\mathcal{N}$ . La condición de ortogonalidad implica la existencia de una estructura *de cuasi-contacto*

$$\phi : T\mathcal{N} \longrightarrow T\mathcal{N}, \quad (6.23)$$

donde

$$\phi^2 = -\mathbb{1} + \eta \otimes R \quad \text{y} \quad \eta \circ \phi = 0, \quad (6.24)$$

tal que  $(\mathcal{N}, \eta, \mathbf{g}|_{\mathcal{N}})$  es una variedad métrica de contacto. Esto es, la métrica en el haz restringido  $\mathbf{g}|_{\mathcal{N}} = i^*(\mathbf{g})$  puede ser escrita como

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}} = \eta \otimes \eta + d\eta \circ (\phi \otimes \mathbb{1}). \quad (6.25)$$

Por tanto

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, R) = \eta(\mathcal{D})\eta(R) + d\eta(\phi\mathcal{D}, R) = 0. \quad (6.26)$$

La última igualdad se adquiere de la condición de transversalidad (6.21) y la definición de  $\phi$  (6.24), donde  $\phi\mathcal{D} = \mathcal{D}$ . Más adelante, mostraremos que la presencia de fronteras (interfaces entre diferentes medios) rompe esta condición de ortogonalidad.

Siguiendo con la definición de un frente de onda (cf. sección 5.3.1), sea  $b \in \mathcal{B}$  la hipersuperficie dada por

$$F_b(t) = \{b_i \in \mathcal{B} \mid \gamma(0) = b, \gamma(t) = b_i\} \quad (6.27)$$

para  $\gamma$  una geodésica en  $(\mathcal{B}, g)$ . Podemos observar que para  $b_i \in F_b(t)$  el elemento de contacto  $\pi(\mathcal{D}_{b_i})$  es tangente a  $F_b(t)$ . El proyector canónico del haz  $\pi$  proyecta subvariedades de Legendre de  $\mathcal{N}$  a frentes de onda en  $\mathcal{B}$  (ver detalle en sección 5.3.1) [67].

Consideremos el flujo de un campo vectorial geodésico en  $ST\mathcal{B}$  dado por  $\gamma(t) \in \mathcal{B}$  y  $\dot{\gamma}(t) \in ST_{\gamma(t)}\mathcal{B}$ . Existe un único elemento de contacto, tal que

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_{b_i}, R|_{b_i}) = 0 \quad (6.28)$$

para cada  $t$ . El flujo del campo de Reeb induce una transformación estricta de contacto

$$\mathcal{L}_{R_\eta}\eta = 0. \quad (6.29)$$

Dada la dualidad del flujo de Reeb con el flujo geodésico, existe una familia de transformaciones de contacto de 1 parámetro  $\phi_t : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ , tales que para cada  $p \in \mathcal{N}$  con  $p = g^b(\dot{\gamma}(0))$  se cumple que

$$\phi_t(p) = g^b(\dot{\gamma}(t)). \quad (6.30)$$

Por tanto, el flujo geodésico puede ser evolucionado en términos únicamente de la familia de transformaciones de contacto  $\phi_t$  de  $\mathcal{N}$  (Fig 6.2) [78]. En las siguientes secciones, explotaremos este hecho y haremos algunos ejemplos de manera explícita.

Con toda esta herramienta, podemos hacer ejemplos para medios ópticos descritos por diferentes geometrías y en diferentes dimensiones. En todos ellos, daremos la familia de transformaciones de contacto explícita que evoluciona el flujo geodésico y que permite reconstruir tanto los rayos de luz como la evolución de los frentes de onda a partir de los elementos de contacto. En los ejemplos incluiremos interfaces entre medios, modelados por fronteras en la variedad y veremos de forma explícita como se rompe la condición de ortogonalidad dada por la estructura de cuasi-contacto.

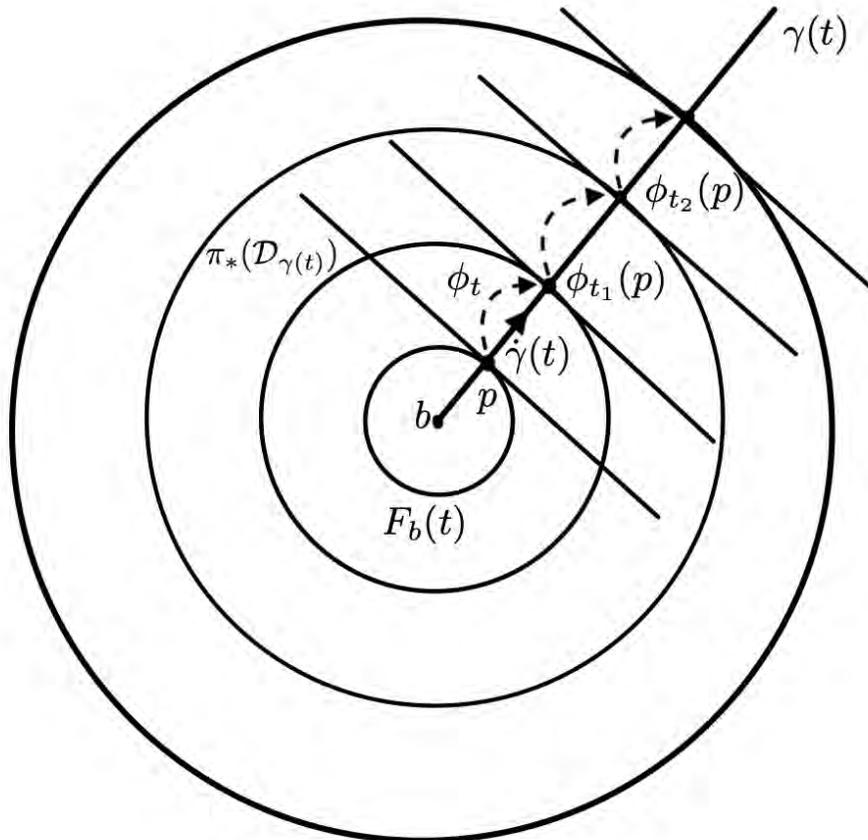


Figura 6.2: Representación gráfica de la transformación de contacto traslapada con los frentes de onda y sus respectivos elementos de contacto. Si el medio es conexo simple (no tiene interfaces entre medios) entonces, los frentes de onda son transversales a los rayos de luz, satisfaciendo completamente (6.28). Para  $p \in \gamma$ , siempre se satisface que  $\phi_t(p) \in \gamma$ .

### 6.3. Medio óptico en una geometría Euclidiana de 2 dimensiones

Consideremos un medio óptico con permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$ . A este medio lo dotaremos con una geometría Euclidiana, dada por una métrica espacio-temporal en  $\mathbb{R}^3$

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i - \frac{1}{n^2} dt \otimes dt, \quad (6.31)$$

donde  $n^2 = \varepsilon\mu$  es el índice de refracción del medio. Para nuestro medio óptico, es necesario utilizar únicamente la parte espacial de la métrica del medio, por lo que trabajaremos con una proyección conforme dada por

$$g = n^2 \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i. \quad (6.32)$$

El haz tangente unitario  $ST\mathbb{R}^2$  lo podemos dotar de coordenadas locales  $\{x, y, p_x, p_y\}$ , donde la forma simpléctica canónica se escribe como

$$\omega = dx_i \wedge dp^i. \quad (6.33)$$

La condición de unitariedad (6.11) nos lleva a

$$p_y = \sqrt{n^2 - p_x^2}. \quad (6.34)$$

La forma de Liouville se escribe en estas coordenadas de como

$$\lambda = p_x dx + \sqrt{n^2 - p_x^2} dy. \quad (6.35)$$

El campo vectorial de Reeb, asociado a la 1-forma de contacto queda como

$$R_\lambda = \frac{1}{n^2} \left( p_x \partial_x + \sqrt{n^2 - p_x^2} \partial_y \right). \quad (6.36)$$

Dado que el espacio  $ST\mathbb{R}^2$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^2 \times S$ , podemos asociarle las coordenadas cartesianas originales mas una coordenada angular  $\theta \in S$ . Cambiamos a estas coordenadas  $\{x, y, \theta\}$  haciendo la transformación

$$\phi_{stb} : T\mathbb{R}^2 \rightarrow ST\mathbb{R}^2 \quad (6.37)$$

$$[x = x, y = y, p_x = -\sin \theta, p_y = \cos \theta] \quad (6.38)$$

En estas nuevas coordenadas, la 1-forma de Liouville queda como

$$\lambda_{stb} = -\sin \theta dx + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} dy, \quad (6.39)$$

el campo vectorial de Reeb asociado a  $\lambda$  queda como

$$R_{stb} = \frac{1}{n^2} \left( -\sin \theta \partial_x + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \partial_y \right). \quad (6.40)$$

La distribución de contacto se transforma a

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{1}{n^2} \left( \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \partial_x - \sin \theta \partial_y \right), \partial_\theta \right\}. \quad (6.41)$$

El flujo del campo de Reeb es

$$\Phi(t) = \left( x_0 - \frac{t \sin \theta_0}{n^2}, y_0 + \frac{t \cos \theta_0}{n^2}, \theta_0 \right), \quad (6.42)$$

mientras que a familia de transformaciones de contacto de 1-parámetro inducida por el flujo del campo de Reeb está dada por

$$\phi_t = \left[ x = x - \frac{t \sin \theta}{n^2}, y = y + \frac{t \cos \theta}{n^2}, \theta = \theta \right]. \quad (6.43)$$

Observamos que realmente esta transformación es estricta de contacto, dado que  $\phi_t^*(\lambda) = \lambda$ , mientras que la distribución de contacto permanece invariante (6.41). La proyección del haz de la distribución de contacto  $\pi(\chi)$  son los elementos de contacto de  $\mathbb{R}^2$ . En este caso, corresponden al primer vector de (6.41). Para un punto  $q \in \mathbb{R}^2$  y un ángulo  $\theta_0$  fijo, existe una única geodésica que pasa por  $q$  y que la dirección de su vector tangente es precisamente  $\theta_0$ . Por tanto, el elemento de contacto es la recta normal positiva generada por el vector  $\pi(\chi)$ .

El flujo geodésico ha sido escrito en términos de la familia de transformaciones estrictas de contacto de 1-parámetro (6.43). Podemos observar que para el caso del vacío ( $\varepsilon_0\mu_0 = 1$ ), la transformación de contacto inducirá un flujo dado por la familia de rectas con pendiente  $m = -(\tan \theta_0)^{-1}$ , recordando que  $\theta_0$  es el ángulo del elemento de contacto positivamente ortogonal a la geodésica. Dado que la curva geodésica es la trayectoria de un rayo de luz, cuando éste pasa a un medio diferente ( $\varepsilon\mu \neq 1$ ), la luz se refracta con  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  como es esperado, dada la ley de Snell. Podemos reconstruir los frentes de onda a partir de los elementos de contacto, sin la necesidad de resolver la ecuación de onda directamente. En la figura 6.3 se puede observar como los frentes de onda se deforman y se “alentan” cuando pasan de un medio a otro. En la figura 6.4 la fuente de luz se encuentra en el medio con índice de refracción más grande. En ella podemos observar que cuando la luz pasa por la interfaz de los diferentes medios se presenta el fenómeno de la *reflexión total interna*.

## 6.4. Medio óptico en una geometría Euclidiana de 3 dimensiones

De la misma forma que en 2 dimensiones, comenzamos dotando aun medio óptico con permitividad y permeabilidad  $\varepsilon$  y  $\mu$  respectivamente con una métrica Euclidiana. Usando únicamente la proyección espacial conforme tenemos

$$g = n^2 \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i. \quad (6.44)$$

Al igual que en el ejemplo 2-dimensional, encontramos la condición de normalización de los vectores para poder restringirnos al espacio tangente unitario  $ST\mathbb{R}^3$

$$p_z = \sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (6.45)$$

y encontramos la 1-forma de Liouville

$$\lambda = p_x dx + p_y dy + \sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2} dz. \quad (6.46)$$

Así, el campo vectorial de Reeb asociado queda como

$$R_\lambda = \frac{1}{n^2} \left( p_x \partial_x + p_y \partial_y + \sqrt{n^2 - p_x^2 - p_y^2} \partial_z \right). \quad (6.47)$$

Hacemos la transformación a coordenadas angulares, dado que  $ST\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^3 \times S^2$  por lo que ahora, podemos asociar dos coordenadas angulares  $\theta$  y  $\varphi$ . Tomamos la transformación

$$\phi_{stb} : T\mathbb{R}^3 \rightarrow ST\mathbb{R}^3 \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} [x = x, y = y, z = z, p_x = \sin \theta \cos \varphi, \\ p_y = \sin \theta \sin \varphi, p_z = \cos \theta] \end{aligned} \quad (6.49)$$

para pasar a coordenadas  $\{x, y, z, \theta, \varphi\}$ . De esta forma obtenemos la transformación de la 1-forma de Liouville

$$\lambda_{stb} = \cos \varphi \sin \theta dx + \sin \varphi \sin \theta dy + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} dz, \quad (6.50)$$

y el campo vectorial de Reeb queda como

$$R_{stb} = \frac{1}{n^2} \left( \cos \varphi \sin \theta \partial_x + \sin \varphi \sin \theta \partial_y + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \partial_z \right). \quad (6.51)$$

La distribución de contacto se transforma como

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \text{span} \{ & -\sin \theta \sin \varphi \partial_x + \cos \varphi \sin \theta \partial_y, \\ & -\sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \partial_z + \cos \varphi \sin \theta \partial_z, \partial_\theta, \partial_\varphi \}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Calculamos ahora el flujo del campo vectorial de Reeb  $R_{stb}$ , el cuál queda como

$$\Phi(t) = \left( x_0 - \frac{t \cos \varphi_0 \sin \theta_0}{n^2}, y_0 + \frac{t \sin \varphi_0 \sin \theta_0}{n^2}, z_0 + \frac{t \sqrt{\cos^2 \theta_0 + n^2 - 1}}{n^2}, \theta_0, \varphi_0 \right) \quad (6.53)$$

generando una familia 1-paramétrica de transformaciones estrictas de contacto

$$\phi_t = \left[ x = x - \frac{t \cos \varphi \sin \theta}{n^2}, y = y + \frac{t \sin \varphi \sin \theta}{n^2}, \right. \quad (6.54)$$

$$\left. z = z + \frac{t \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1}}{n^2}, \theta = \theta, \varphi = \varphi \right]. \quad (6.55)$$

Como era de esperarse, la proyección de la distribución de contacto a  $\mathbb{R}^3$  son planos 2-dimensionales, los cuales son los elementos de contacto de  $\mathbb{R}^3$ . Cada plano es tangente al frente de onda dado por la superficie de una esfera.

## 6.5. Medio óptico en una geometría hiperbólica de 2 dimensiones

Tomemos ahora un medio óptico 2-dimensional con sus respectivas permitividad eléctrica y permeabilidad magnética  $\varepsilon$  y  $\mu$ . Supongamos ahora, que el medio tiene una geometría hiperbólica dada por la métrica de Lobachevsky

$$\tilde{g} = \frac{1}{(x^2)^2} \left( \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i - \frac{1}{n^2} dt \otimes dt \right) \quad (6.56)$$

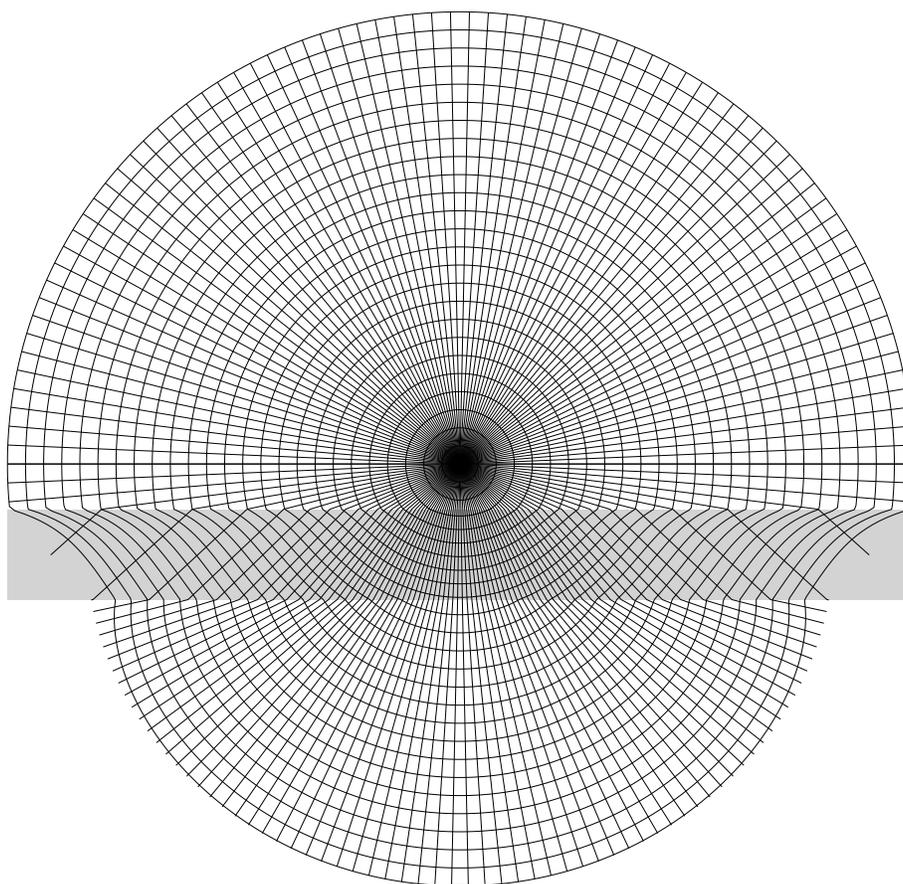


Figura 6.3: Rayos de luz y frentes de ondas emitidas por una fuente de luz en el aire ( $n = 1$ ) que pasan a un medio diferente, dado por agua (zona gris con  $n = 1.33$ ). Este nuevo medio está representado en gris. Los rayos de luz se refractan siguiendo la ley de Snell. Los frentes de onda se deforman al ser frenados por el cambio de medio. Después de volver al medio original (aire), los frentes de onda no regresan a su forma original.

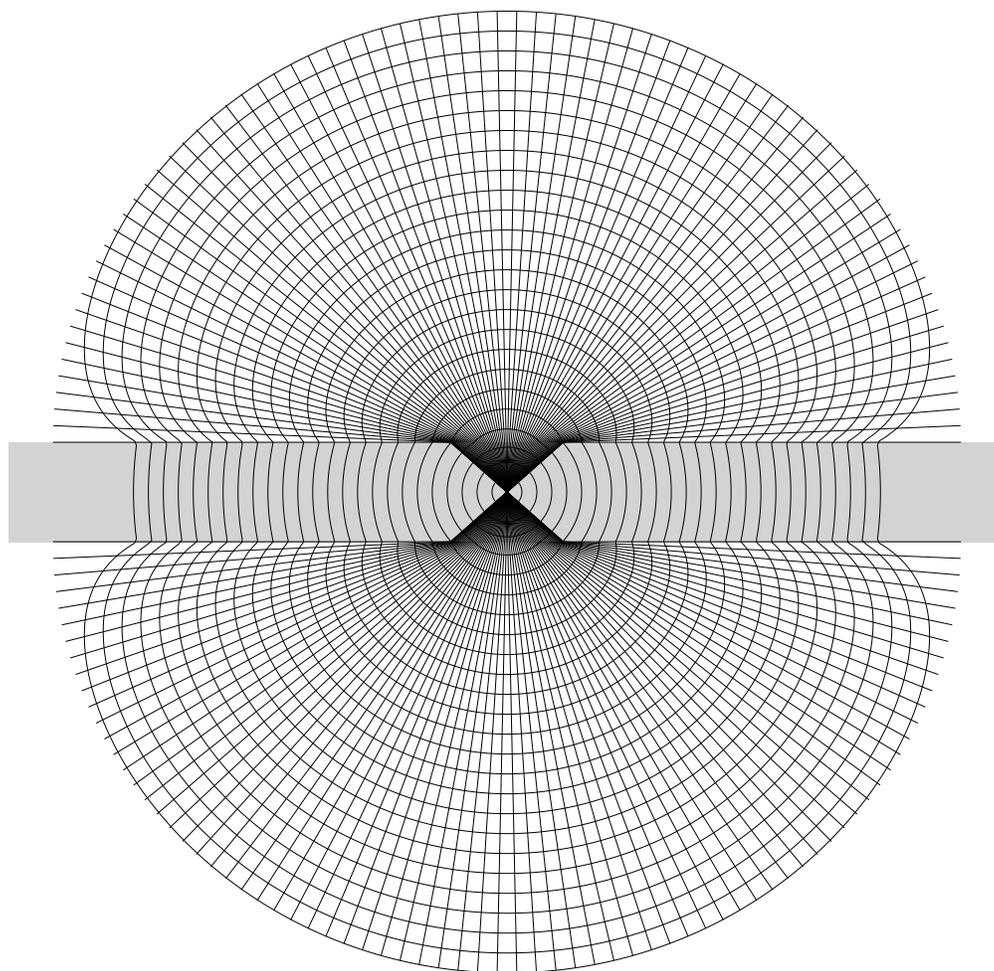


Figura 6.4: Rayos de luz y frentes de onda emitidos por una fuente de luz situada en agua (zona gris con  $n = 1.33$ ), representada por la capa gris. Cuando los rayos de luz se refractan al pasar a un medio diferente (aire con  $n = 1$ ), se puede observar un ángulo crítico  $\theta_c$ , después del cual, los rayos de luz ya no salen a la superficie de aire. En la figura sólo se muestran los rayos de luz que salen al aire. Los frentes de onda son deformados al pasar por la interfaz. Después de salir del medio, se puede observar que los frentes no conservan su forma esférica. Algunas aberraciones se pueden observar en los rayos de luz refractados casi paralelos a la superficie, pues éstos ya no intersectan de forma perpendicular a los frentes de onda.

para  $y > 0$ . Este modelo hiperbólico es conocido como  $\mathbb{H}^2$ . Al igual que los ejemplos anteriores, trabajaremos con una proyección conforme de la parte espacial

$$g = \frac{n^2}{y^2} \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i = \frac{n^2}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy). \quad (6.57)$$

Para esta métrica, la condición de normalización para restringirnos a  $ST\mathbb{H}^2$  queda como

$$P_y = \sqrt{y(n^2 - P_x^2)}. \quad (6.58)$$

Es importante observar que el espacio tangente unitario del semi-plano hiperbólico no es igual al unitario de los reales, de hecho  $ST\mathbb{H}^2 \approx PSL(2, \mathbb{R})$  que es el espacio proyectivo del grupo especial de transformaciones lineales  $SL(2, \mathbb{R})$  dado por la relación

$$g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\tilde{z}, \xi), \quad (6.59)$$

para  $g \in PSL(2, \mathbb{R})$  y  $(\tilde{z}, \xi) \in ST\mathbb{H}^2$ . Observamos que  $\tilde{z} = g(i) \in \mathbb{H}^2$  y  $\xi \in T_z\mathbb{H}^2$  es un vector unitario. Esto nos permite poder encontrar nuevamente coordenadas cartesianas más una coordenada angular dadas por  $\tilde{z} = (x, y) \in \mathbb{H}^2$  y  $\varphi = \arg(\xi) \in S^1$  [79]. De esta manera, la 1-forma Liouville se escribe como

$$\lambda_{stb} = \frac{n}{y} (-\cos \varphi dx + \sin \varphi dy). \quad (6.60)$$

y el campo vectorial de Reeb asociado queda como

$$R_{stb} = \frac{1}{n} (y \cos \varphi \partial_x + y \sin \varphi \partial_y - \cos \varphi \partial_\varphi). \quad (6.61)$$

La distribución de contacto queda como

$$\mathcal{D} = \text{span} \left\{ \frac{y}{n} (\sin \varphi \partial_x + \cos \varphi \partial_y), \partial_\varphi \right\}. \quad (6.62)$$

Una vez más, encontramos la familia de transformaciones estrictas de contacto de 1-parámetro en  $PT^*\mathcal{B}$  inducida por el flujo del campo de Reeb con la identificación natural con  $ST\mathbb{H}^2$

$$\begin{aligned} \phi_t = \left[ \begin{aligned} x &= \frac{(x \sin \varphi + y \cos \varphi - x)e^{\frac{2t}{n}} - x \sin \varphi - y \cos \varphi - x}{(\sin \varphi - 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}, \\ y &= -\frac{2ye^{\frac{t}{n}}}{(\sin \varphi - 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}, \\ \varphi &= \arctan \left( -\frac{(-\sin \varphi + 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}{2e^{\frac{t}{n}} \cos \varphi} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

Podemos observar que la transformación (6.63) es justamente una transformación estricta de contacto dado que  $\phi_t^*(\lambda) = \lambda$ . Como era esperado, la proyección del flujo del campo de Reeb que induce la transformación (6.63) son semi-círculos de radio

$$r = \frac{y_0}{\cos \varphi_0} \quad (6.64)$$

Figura 6.5: Rayos de luz y frentes de ondas emitidas por una fuente de luz en el aire ( $n = 1$ ) que se refracta a través de una interfaz horizontal de agua (zona gris con  $n = 1.33$ ). En la imagen, el semi plano superior se proyecta al disco de Poincaré.

Figura 6.6: Rayos de luz y frentes de onda emitidos por una fuente de luz en el aire ( $n = 1$ ) que se refractan al pasar por una interfaz de agua (zona gris con  $n = 1.33$ ) colocada verticalmente. En la imagen, el semi plano superior se proyecta al disco de Poincaré.

centrado en

$$\left( \frac{x_0 \cos \varphi_0 - y_0 \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}, 0 \right), \quad (6.65)$$

que corresponden a las curvas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ . Para las interfaces entre los medios con diferentes índices de refracción, resolvimos (6.61) de manera numérica. Las soluciones se observan en las figuras 6.5 y 6.6, que representan la refracción de los rayos de luz en el disco de Poincaré. Figura 6.5 representa una interfaz horizontal, mientras que 6.6 representa una interfaz vertical, ambas de agua.

Finalmente, usamos los mismos métodos numéricos para obtener los frentes de onda de una fuente de luz en un medio con un índice de refracción mayor a 1. El resultado se muestra en la figura 6.7, de donde podemos observar que no hay reflexión total en contraste con el caso Euclidiano.

En un contexto gravitacional, el modelo de anti-deSitter (AdS) se asemeja al modelo geométrico hiperbólico. Es conocido que AdS admite curvas tipo tiempo cerradas y superficies acrónicas. En la figura 6.7 podemos observar algunas de estas características geométricas en rayos de luz que se acercan al disco frontera del infinito, donde intersectan más de una vez el mismo frente de onda.

En este capítulo podemos concluir que los espacios  $ST\mathcal{B}$  y  $\mathcal{N}$  son las estructuras matemáticas necesarias para expresar la propagación de la luz en términos de los dos principios elementales de la óptica: El principio de Fermat y el de Huygens. Por un lado,  $ST\mathcal{B}$  es la proyección espacial del cono nulo, en donde los rayos de luz corresponden a curvas nulas en el espacio  $(M, g_0, \tilde{g})$ . Esto permite la formulación espacio-temporal del principio de Fermat. Por el otro lado,  $\mathcal{N}$  nos permite definir los frentes de onda tangentes a los elementos de contacto en  $\mathcal{B}$ . La evolución de la luz en  $ST\mathcal{B}$  está dado por el flujo del campo de Reeb, mientras que en  $\mathcal{N}$  está dado por la familia de transformaciones de contacto inducidas por el mismo flujo. Es en este sentido, que toda la naturaleza de la propagación de la luz en medios no dispersivos se encuentra codificada en el haz de contacto de  $(\mathcal{B}, g)$  junto con sus simetrías.

El hecho de que los flujos geodésico se puedan escribir en términos de la familia de transformaciones de contacto, nos permite reconstruir, tanto las trayectorias de los rayos de luz, así como los frentes de onda de la luz propagándose en un medio óptico. Todo esto, a partir únicamente del campo de Reeb. Con esta técnica, pudimos resolver ejemplos explícitos en 2 y 3 dimensiones para una geometría Euclidiana y una hiperbólica. En el caso de 2 dimensiones Euclidiano, pudimos recuperar la ley de Snell asociada a la refracción de la luz, junto con el fenómeno de la reflexión total interna. Para el caso hiperbólico, pudimos recrear los patrones de refracción para interfaces verticales y horizontales proyectados al disco de Poincaré. En este ejemplo pudimos observar que no hay reflexión total interna. Sin embargo, se puede observar que los rayos de luz refractados pueden intersectar más de una vez el mismo frente de onda. Esto se puede pensar como una especie de *refracción temporal*, fenómeno que se podría investigar a futuro.

El formalismo es suficientemente robusto, para poder lidiar con interfaces sin ninguna adaptación necesaria. Esto puede servir como herramienta para resolver problemas de diseño de metamateriales, en donde se encuentren las propiedades electromagnéticas de un medio necesarias para recrear una curva deseada en la luz.

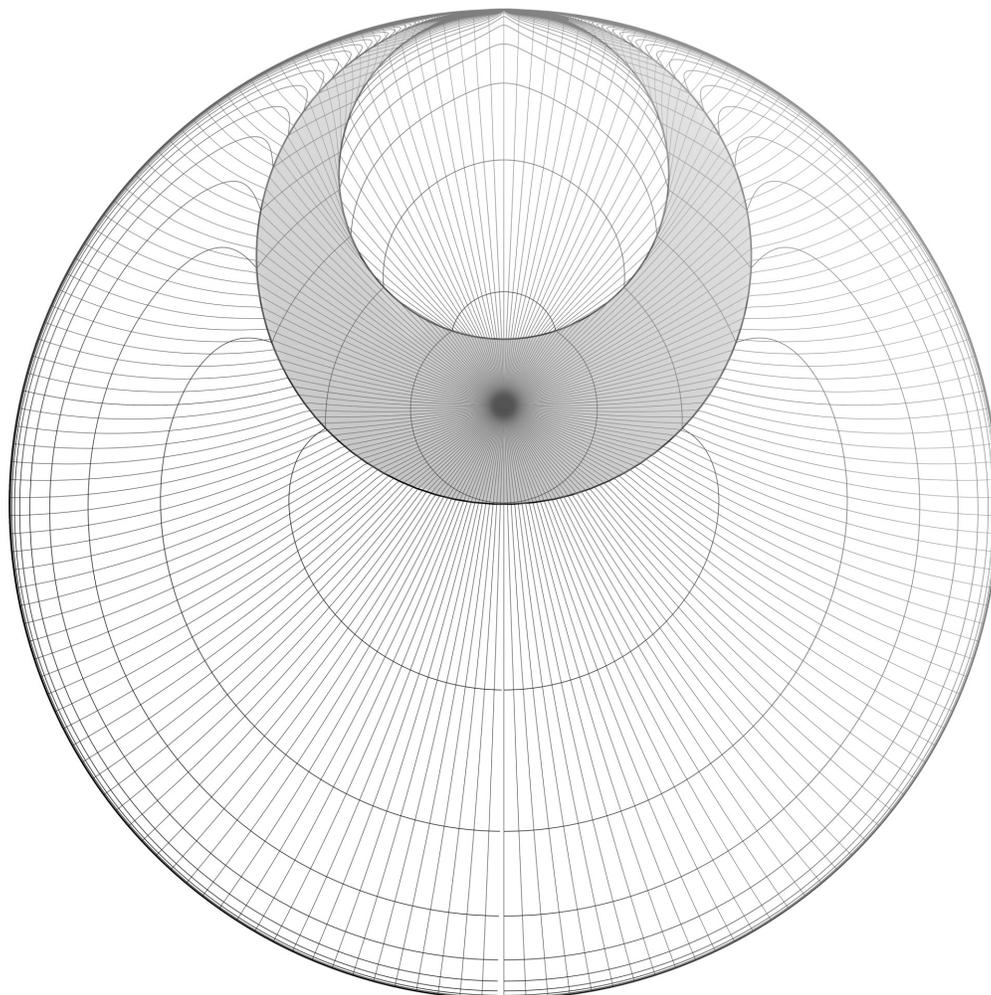


Figura 6.7: Rayos de luz y frentes de onda emitidos por una fuente de luz en agua ( $n = 1.33$ ) que se refractan a través de una interfaz horizontal dada por una capa de aire ( $n = 1$ ) en el semi-plano superior, proyectado al disco de Poincaré. Podemos observar que no se presenta el fenómeno de *la reflexión total interna* a diferencia del caso Euclidiano. Mientras los rayos de luz se acercan al disco frontera, intersectan más de una vez al mismo frente de onda. Esto significa que los rayos de luz, en diferentes tiempos intersecta la misma superficie de tiempo constante. Este tipo de aberraciones son generadas por la geometría y pueden ser interpretadas como superficies acróicas.

## 7. Superconductividad e invariantes topológicos

En el contexto de la hidrodinámica, los campos de Beltrami son de gran relevancia, dado que son soluciones estables a las ecuaciones de flujo de Euler para fluidos incompresibles perfectos [80], además de modelar configuraciones de vórtices en otro tipo de flujos. En el contexto del electromagnetismo, estos campos han sido estudiados en la rama de la astrofísica para modelar explosiones solares, galaxias espirales o vórtices de plasma, entre otras varias cosas [19]. En años más recientes, se ha podido mostrar que dichos campos de Beltrami, conocidos en el electromagnetismo como campos *libres de fuerza electromagnética*, pueden modelar algunos aspectos de la superconductividad [16, 19, 80].

Los campos de Beltrami, se caracterizan por ser paralelos a su propio rotacional, generando flujos libres de fuerzas. Dicha propiedad, se puede modelar de manera geométrica a partir de una 1-forma particular llamada *forma de Beltrami*, que puede generar una estructura de contacto en la variedad. Se ha mostrado, que dichas estructuras generan que el campo de Beltrami sea un re-escalamiento del campo vectorial de Reeb para la geometría de contacto [80]. De este modo, es posible tratar de definir la superconductividad en superficies a través de este tipo de flujos [16] y por tanto, el formalismo geométrico que hemos desarrollado a lo largo de este trabajo toma relevancia.

En este capítulo expondremos algunos conceptos básicos de los campos de Beltrami en forma diferenciales y veremos algunas de las construcciones hechas para definir propiedades superconductoras en términos de geometría de contacto. Construiremos también de manera geométrica algunos invariantes topológicos que resultan ser importantes en la propagación de ondas electromagnéticas.

### 7.1. Helicidad y Campos de Beltrami

Como hemos mostrado en el capítulo 3, el electromagnetismo en medios es comúnmente descrito a partir de las ecuaciones locales de Maxwell (3.5)- (3.5).

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad (7.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}}, \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}_{\text{ext}}. \quad (7.2)$$

Las ecuaciones que vinculan la respuestas del medio ante la presencia de campos electromagnéticos externos son conocidas como relaciones constitutivas. Las más simples escritas como

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} \quad (7.3)$$

donde  $\varepsilon$  es la permitividad eléctrica y  $\mu$  la permeabilidad magnética. Estas ecuaciones constitutivas definen el comportamiento de las ondas electromagnéticas en dichos medios. Dada una onda transversal cualquiera en 3 dimensiones  $(x, y, z)$  que se propaga en una dirección  $z$ , está dada por [43]

$$f(z, t) = A e^{i(kz - \omega t)} \hat{n} \quad (7.4)$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda,  $k$  es el vector de onda y  $\omega$  la frecuencia. El vector unitario  $\hat{n}$  describe un vector que es parte del plano perpendicular a la dirección de propagación de la

onda y que describe “la dirección de perturbación del medio”. De manera general, para una onda que se propaga en la dirección  $\hat{z}$ , este vector está dado por  $\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ . Por tanto, la onda se puede descomponer en los ejes como

$$f(z, t) = A \cos \theta e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + A \sin \theta e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}. \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) describe una descomposición de una onda en sus polarizaciones lineales *vertical* (eje  $\hat{x}$ ) y *horizontal* (eje  $\hat{y}$ ). Cuando las polarizaciones vertical y horizontal se encuentran desfasadas por un ángulo de  $\pi/2$ , decimos que la polarización de la onda es *circular*. Se puede observar en este tipo de polarización, que para un punto fijo en el eje de propagación ( $\hat{z}$ ) el “medio” se perturba de forma circular, girando ya sea en sentido de las manecillas del reloj o al revés. Es aquí donde podemos distinguir dos tipos de polarización circular dependiendo del sentido *derecha* o *izquierda* [43].

Existen algunos medios electromagnéticos, un poco más complicados que los descritos por las ecuaciones (7.3), en donde las ondas con una polarización circular particular (izquierda o derecha) se propagan con una velocidad de fase diferente a las ondas polarizadas en la otra dirección. A este tipo de medios se les conoce como medios **quirales**. Las relaciones constitutivas de este tipo de medios se pueden escribir como

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \zeta \vec{H} \quad (7.6)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \xi \vec{E} \quad (7.7)$$

para  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$  y  $\xi$  escalares complejos [81]. Para este tipo de medios, es importante definir algunos conceptos relacionados con la quiralidad de un medio y los campos electromagnéticos que se generan en ellos.

Para un campo vectorial  $\vec{F}$  definido sobre el espacio  $\Omega$ , podemos definir la **helicidad** del campo como una medida escalar de la *cantidad que se tuerce* el campo vectorial. Por tanto, la helicidad estará dada por

$$\mathcal{H}(\vec{F}) = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{F} \, d\mathbf{x}. \quad (7.8)$$

Podemos observar que  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ . El término  $\vec{F} \cdot \nabla \times \vec{F}$  se conoce como *densidad de helicidad* [82]. En términos de esta densidad, podemos definir el tipo de polarización circular que tiene una onda. Consideremos

$$F(z, t) = \text{Re} \left[ \mathbf{A} e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (7.9)$$

para  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}$ , término en donde se encuentra la información de la fase que define la polarización. Si

- $F \cdot \nabla \times F < 0$ , decimos que tiene una polarización circular orientada a la derecha.
- $F \cdot \nabla \times F > 0$ , decimos que tiene una polarización circular orientada a la izquierda.

Dados dos campos vectoriales  $\vec{F}$  y  $\vec{G}$  definidos en el espacio  $\Omega$ , podemos definir la **helicidad cruzada** entre ambos campos como [82]

$$\mathcal{H}(\vec{F}, \vec{G}) = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G} \, d\mathbf{x}. \quad (7.10)$$

También podemos definir los **campos de Beltrami** como aquellos campos vectoriales  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfacen

$$\nabla \times \vec{F} = f\vec{F} \quad (7.11)$$

para  $f$  una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Estos campos son conocidos también como *campos libres de fuerzas* y una característica es que “se tuercen” de manera constante. Es por eso, que los campos de Beltrami están fuertemente relacionados con la helicidad

- Si  $f > 0$  entonces el campo tiene una helicidad positiva
- Si  $f < 0$  entonces el campo tiene una helicidad negativa
- Si  $f = cte$  entonces el campo se denomina tipo *Trkalian*

Toda esta información, se puede re-escribir en términos de formas diferenciales. Recordemos que dada una variedad  $\mathcal{M}$  las ecuaciones de Maxwell en medios se expresan como (3.35)

$$dB = 0, \quad dE + \frac{\partial}{\partial t} B = 0 \quad (7.12)$$

$$dD = \rho, \quad dH - \frac{\partial}{\partial t} D = \mathcal{J}. \quad (7.13)$$

Pudiéndolas compactar en un par de ecuaciones descritas por principios conservacionales de los campos electromagnéticos y las fuentes

$$dF = 0, \quad dG - j_{\text{ext}} = 0. \quad (7.14)$$

donde en términos de las formas asociadas a los campos electromagnéticos, las 2-formas de de fuerza y desplazamiento se escriben como

$$F = B + E \wedge dt, \quad G = D + H \wedge dt. \quad (7.15)$$

(Ver desarrollo de (3.42) y (3.43) en capítulo (3)). De la misma manera, las relaciones constitutivas se pueden escribir en este mismo tenor, a partir del operador dual de Hodge, el cual depende de la métrica del espacio. Si consideramos  $g$  la métrica de nuestra variedad  $\mathcal{M}$ , las relaciones constitutivas se escriben como

$$G = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \star F. \quad (7.16)$$

A partir de recordar algunos conceptos elementales desarrollados a detalle en el capítulo 3, podemos comenzar a definir los conceptos geométricos de helicidad y campos de Beltrami con este lenguaje geométrico.

Consideremos ahora, una 1-forma  $\alpha$ . Definimos la *helicidad* de  $\alpha$  en la variedad  $\mathcal{M}$  como

$$\mathcal{H}(\alpha) = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge d\alpha \quad (7.17)$$

donde  $\alpha \wedge d\alpha$  es una 3-forma llamada *densidad de helicidad* o *torsión topológica*.

Consideremos ahora, una 1-forma  $\alpha$  en  $\mathcal{M}$ , decimos que  $\alpha$  es una 1-forma de *Beltrami* si

$$\star d\alpha = f\alpha \quad (7.18)$$

para  $f : \mathcal{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f \neq 0$  para cualquier punto  $p \in \mathcal{M}$  decimos que  $\alpha$  es una 1-forma **rotacional** de Beltrami. Podemos observar que si  $\alpha$  además de ser una forma rotacional de Beltrami y  $\alpha \neq 0$  para cualquier punto  $p \in \mathcal{M}$  entonces  $\alpha$  es además una 1-forma de **contacto** en  $\mathcal{M}$ .

Una vez más, podemos relacionar las formas de Beltrami con la helicidad. Observemos que si  $\alpha$  es de Beltrami, entonces (7.17) se puede reescribir

$$\mathcal{H}(\alpha) = \int_{\mathcal{M}} f(\alpha \wedge \star \alpha). \quad (7.19)$$

Si  $\alpha$  es una forma rotacional de Beltrami, la dirección de la helicidad queda definida por el signo de  $f$ . Para el caso electromagnético, tenemos las ecuaciones de Maxwell dadas por (7.14). Por lo que de manera local, existe una 1-forma  $A$  que desempeña el papel de *potencial* electromagnético, tal que

$$F = dA. \quad (7.20)$$

De esta manera tenemos que la helicidad electromagnética se puede escribir como

$$\mathcal{H}(A) = \int_{\mathcal{M}} A \wedge dA = \int_{\mathcal{M}} A \wedge F, \quad (7.21)$$

donde  $\Sigma$  es todo el espacio (3 dimensional). Para el caso electromagnético, la densidad de helicidad  $A \wedge F$  juega un papel importante para la descripción de procesos disipativos e irreversibles.

## 7.2. Campos de Beltrami y superconductividad

Los campos de Beltrami han sido estudiados desde hace tiempo desde el contexto de la hidrodinámica, en donde los flujos de dichos campos, son paralelos a su vorticidad (definida en términos del rotacional). En el contexto electromagnético, estos campos reciben el nombre de *campos magnéticos libres de fuerzas*. Esto se traduce en campos magnéticos, tales que las corrientes inducidas en un conductor no experimentan fuerza de Lorentz. Esta característica está dada por las propiedades del medio en sí, descritas por las relaciones constitutivas de London. Estas relaciones, pueden ser expresadas en términos de una clase de equivalencia de variedades de contacto con métricas 3-dimensionales, donde dichas estructuras geométricas permiten la propagación de estos campos libres de fuerzas. En esta sección revisaremos algunos conceptos fundamentales para este fin.

Consideremos una variedad 3-dimensional con una estructura métrica de contacto  $\varepsilon$ . Esto es, una variedad de contacto, donde la 1-forma de contacto  $\alpha$  y la métrica  $g$  satisfacen las siguientes relaciones [15]

$$\alpha = \star l d\alpha, \quad \tilde{g}^{-1}(\alpha, \alpha) = \varepsilon l^{-2} \quad (7.22)$$

donde estamos suponiendo que el operador  $\star$  de Hodge está asociado a la métrica  $\tilde{g}$ , la cual pertenece a la clase de equivalencia de métricas  $\tilde{g} = l^2 g$  para  $l \neq 0$ . En general, todo el desarrollo es independiente del valor  $\varepsilon$  que se escoja, por motivos de simplicidad, podemos suponer  $\varepsilon = 1$ .

Como sabemos de la geometría de contacto, para cada 1-forma de contacto existe un vector característico llamado vector de Reeb. Este vector se define como

$$\alpha(R) = 1, \quad i_R d\alpha = 0. \quad (7.23)$$

Si la métrica  $g$  satisface la condición  $g(R) = \alpha$  decimos que el campo de Reeb es un *campo de Beltrami*. por tanto el Reeb se puede escribir como  $R = l\text{curl}(R)$ . De manera directa, podemos mostrar que

$$(\delta d + 1/l^2)\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \delta\alpha = 0. \quad (7.24)$$

Podemos observar que la segunda ecuación, es la norma de Lorenz. A partir de estas ecuaciones, podemos observar el concepto de *auto-dualidad* para campos de norma en dimensiones impares, explorados en [83]. Para 3 dimensiones, la auto-dualidad es definida como

$$\star F = \frac{1}{l}A, \quad (7.25)$$

la cuál, es simplemente la ecuación (7.22), bajo la interpretación de teoría de norma. De la misma manera, la ecuación (7.24) nos permite escribir

$$(\Delta + 1/l^2) \star F = 0 \quad (7.26)$$

para  $\Delta = d\delta + \delta d$ . Ecuación (7.26) es justamente la ecuación que describe campos libres de fuerzas y en general se asocia con medios **superconductores** [10], [84]. La asignatura de la métrica determina el tipo de operador que  $\Delta$  es: hiperbólico o elíptico. Para las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell, junto con (7.22), encontramos la relación

$$d \star F = j = \frac{1}{l}F \quad (7.27)$$

donde  $j$  representa la 2-forma de la corriente inducida en el medio. En este sentido, la ecuación (7.22) no es más que la relación constitutiva que relaciona la corriente inducida en el medio a partir de una respuesta a un campo electromagnético externo. Aún más, la relación (7.22) es una relación métrica entre la estructura de contacto y sus derivadas exteriores, para una clase de variedades métricas de contacto del tipo para-Sasaki. Finalmente, (7.22) se puede reescribir como

$$d \star j = \frac{1}{l^2}F \quad (7.28)$$

que no es más que la relación constitutiva de London, en su forma habitual para superconductores [84]. Con este resultado, podemos observar que hasta el momento, no se ha utilizado nada de la información de la métrica. Lo único que se ha ocupado para estos resultados, es el hecho de que la variedad tenga una estructura de  $\varepsilon$ -contacto en 3-dimensiones. Aquí la dimensión es de vital importancia, ya que la definición de auto-dualidad (7.25) es exclusiva para 3 dimensiones. Finalmente, de estos resultados podemos decir que una variedad 3-dimensional con una estructura  $\varepsilon$ -contacto describe a un medio superconductor y que el parámetro  $l$  está asociado a la profundidad de penetración del campo. [15]

### 7.3. Invariantes topológicos

Finalmente, como parte de la completez del trabajo y parte de las investigaciones a futuro, dejamos una construcción geométrica de algunos invariantes topológicos asociados a la helicidad y al espín topológicos, los cuales tienen relevancia en las definiciones de ondas topológicamente transversales (eléctrica o magnéticamente).

Un invariante topológico es una cantidad que depende de las características globales (topológicas) del espacio matemático. Para las formas electromagnéticas, podemos definir 3-formas

invariantes topológicos

$$h = A \wedge dA = A \wedge F \quad (7.29)$$

$$s = A \wedge \star F = A \wedge G \quad (7.30)$$

donde  $h$  se conoce como la densidad de helicidad o torsión topológica y  $s$  se conoce como el espín topológico [81]. Supongamos que  $(\mathcal{M}, g)$  es una variedad diferencial de dimensión 4. Podemos observar que si  $\Sigma = \partial\Omega$  donde  $\Omega$  es el volumen 4-dimensional, entonces para la helicidad (7.21) tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} A \wedge F = \int_{\Omega} d(A \wedge F) \quad (7.31)$$

donde  $d(A \wedge F) = F \wedge F$  es una 4-forma de volumen. A este tipo de formas se le conocen como *invariantes de deformación de Poincaré*. De la misma manera para el espín topológico tenemos que

$$d(A \wedge G) = F \wedge G - A \wedge j \quad (7.32)$$

es otro invariante de Poincaré. Ambos invariantes topológicos (la helicidad y el espín) tienen un vector asociado que se puede encontrar de manera geométrica como

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} g^\# [\star(A \wedge F)], \quad \vec{S} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} g^\# [\star(A \wedge G)], \quad (7.33)$$

de tal forma que

$$A \wedge F = i_{\vec{T}} \Omega, \quad A \wedge G = i_{\vec{S}} \Omega \quad (7.34)$$

para  $\Omega$  la forma de volumen en 4 dimensiones. De la misma manera, podemos observar que para la 1-forma del potencial se cumple que

$$i_{\vec{T}} A = i_{\vec{S}} A = 0. \quad (7.35)$$

Estos vectores geométricos (7.33) tienen también una representación vectorial en términos de los campos vectoriales electromagnéticos. Podemos encontrar que

$$\vec{T} = (\vec{E} \times \vec{A} + \phi \vec{B}, \vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (7.36)$$

$$\vec{S} = (\vec{A} \times \vec{H} + \phi \vec{D}, \vec{A} \cdot \vec{D}) \quad (7.37)$$

$$(7.38)$$

donde la primera parte es un vector 3-dimensional y la segunda parte es un término escalar que juntos forman un vector 4-dimensional [18]. De la misma forma, podemos observar que los invariantes de Poincaré también se pueden reescribir en términos de los campos vectoriales electromagnéticos

$$d(A \wedge F) = (-2\vec{E} \cdot \vec{B}) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \quad (7.39)$$

$$d(A \wedge G) = (\vec{B} \cdot \vec{H} - \vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{A} \cdot \vec{J} + \rho\phi) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \quad (7.40)$$

Para la helicidad en su formulación vectorial, podemos considerar algunos campos particulares

$$E_{\pm}(z, t) = \text{Re} \left[ (\vec{u}_x \pm i\vec{u}_y) e^{i(kz - \omega t)} \right] \quad (7.41)$$

que cumplen con la propiedad de ser justamente campos de Beltrami en el sentido que son paralelos a su propio rotacional

$$\nabla \times E_{\pm} = \pm k E_{\pm}, \quad (7.42)$$

así, su densidad de helicidad  $E_{\pm} \cdot \nabla \times E_{\pm} = \pm k$  tiene un signo definido. Para la ecuación de Helmholtz

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (7.43)$$

para  $k \in \mathbb{R}^+$ , permite que se haga una descomposición en dos campos

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \vec{E} \pm \frac{1}{k} \nabla \times \vec{E} \right) \quad (7.44)$$

que son soluciones de la ecuación Helmholtz (7.43). Los campos (7.44) son conocidos como la descomposición de *Bohren*. De esta forma, los campos se pueden descomponerse a partir de la helicidad como un refinamiento de la descomposición de Bohren, así

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_+ + \vec{F}_- \quad (7.45)$$

donde  $\vec{F}_{\pm}$  son las descomposiciones en campos con helicidad positiva y negativa, mientras que  $\vec{F}_0$  es la parte de helicidad nula. Así, se puede observar que

$$\nabla \cdot \vec{F}_{\pm} = 0 \quad \nabla \times \vec{F}_0 = 0. \quad (7.46)$$

Así, los campos de Beltrami se pueden descomponer en un campo con helicidad positiva más un campo de helicidad negativa más un campo de helicidad nula [82].

Podemos observar la relación entre el electromagnetismo y la descomposición de helicidad de los campos. Supongamos  $\mathcal{M}$  una variedad diferencial de 3 dimensiones equipada con una métrica  $g$ . Para las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, tenemos que existe una 1-forma  $\alpha$  que genera una solución de estas ecuaciones. Por tanto, tenemos el siguiente teorema:

Supongamos que la 1-forma  $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$  es una 1-forma de contacto y que  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Entonces, existe otra 1-forma  $\beta$  tal que

$$E(x, t) = \operatorname{Re} \{ \alpha e^{i\omega t} \} \quad H(x, t) = \operatorname{Im} \{ \beta e^{i\omega t} \} \quad (7.47)$$

para  $x \in \mathcal{M}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Donde  $E$  y  $H$  son los campos electromagnéticos solución de las ecuaciones de Maxwell libres de fuentes [82].

Sea  $(\mathcal{M}, \xi)$  una variedad de contacto, donde  $\xi = \ker(\alpha)$  es la distribución de contacto para  $\alpha$  la 1-forma de contacto. Podemos definir una *métrica adaptada de contacto*  $g$

$$d\alpha = 2 \star \alpha, \quad \text{para } g(\alpha^{\sharp}, \alpha^{\sharp}) = 1 \quad (7.48)$$

donde  $\alpha^{\sharp}$  es el vector dual a la 1-forma  $\alpha$ , dado por

$$\alpha^{\sharp} = g(\alpha, \cdot) = g^{ij}(\alpha_j) \frac{\partial}{\partial x_i} = V^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (7.49)$$

que en términos de vectores se puede ver como

$$\nabla \times \vec{X} = 2\vec{X}, \quad \text{con } g(\vec{X}, \vec{X}) = 1 \quad (7.50)$$

para  $\vec{X} = \alpha^{\sharp}$ . Recordando la definición de campo de Beltrami (7.18) podemos mostrar las proposiciones de Etnyre y Ghrist

- Si  $\alpha$  es una forma *rotacional de Beltrami*, entonces  $\alpha$  es una forma de contacto.
- Si  $\alpha$  es una forma de contacto y  $f > 0$  para  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ , entonces existe una métrica Riemanianna  $g$  tal que

$$d\alpha = f \star g \quad (7.51)$$

llamada **métrica adaptada** [81].

Podemos observar que para los campos electromagnéticos definidos en (7.47), si  $\alpha$  es una forma de contacto y  $g$  es la métrica Riemanianna adaptada, entonces

$$d\alpha = |\omega| \star \alpha, \quad (7.52)$$

entonces existe  $\beta \in \Omega^1(\mathcal{M})$  dada por  $d\alpha = -\omega \star \beta$ .

Ahora podemos observar que para las soluciones de las ecuaciones de Maxwell (7.47) que si

$$A \wedge F = 0 \quad (7.53)$$

entonces se dice que las ondas son *topológicamente* transversales magnéticas (TTM), ya que podemos observar que  $\vec{A} \cdot B = 0$ , mientras que si

$$A \wedge G = 0 \quad (7.54)$$

se dice que las ondas son *topológicamente* transversales eléctricas (TTE) ya que  $\vec{A} \cdot D = 0$ . Si para dichas ondas, se anulan ambos invariantes topológicos, entonces decimos que las ondas son *topológicamente* transversales electromagnéticas (TTEM) y resulta que este tipo de ondas no radía en ningún lugar del espacio.

De la misma forma, podemos observar que para el invariante de Poincaré dado por (7.39), el término  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  tiene que ver con los procesos disipativos en el medio. Si

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.55)$$

decimos que el medio no disipa y por tanto, el proceso podría ser reversible. De lo contrario, si

$$\vec{E} \cdot \vec{B} > 0 \quad (7.56)$$

el medio disipa energía y el proceso se vuelve irreversible. Así, para soluciones en el vacío y sin fuentes, tenemos que

$$\vec{B} \cdot \vec{H} = \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.57)$$

como era de esperarse.

## 8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se escribe el electromagnetismo en una formulación moderna en términos de formas diferenciales. Este formalismo, permite trabajar con las herramientas geométricas que se han desarrollado desde principios del siglo XIX junto con la Relatividad General. Esta herramienta permite trabajar con el símil entre las interacciones de la materia con los campos gravitacionales y los efectos electromagnéticos en medios. Toda esto sienta los fundamentos geométricos de la propagación de la luz en medios ópticos. Esta perspectiva geométrica del electromagnetismo, proporciona herramientas teóricas para el diseño y la realización de metamateriales menos “artesanales” y más estructurados. Este trabajo aporta en el área de la ciencia de materiales de manera teórica y matemática.

Escribir las ecuaciones de Maxwell en términos de geometría diferencial resulta más simple y compacto que la versión vectorial. En este sentido, el formalismo geométrico ayuda a interpretar la física que de ellas se desprende. Las relaciones constitutivas resultan una condición fundamental que relaciona la 2-forma de fuerzas  $F$  con la 2-forma de desplazamiento  $G$ . Estas relaciones codifican la información geométrica del medio que a su vez queda determinada por las propiedades electromagnéticas del mismo. Esto último resulta fundamental para poder unir los conceptos geométricos con las propiedades dieléctricas del medio (permitividad eléctrica y permeabilidad magnética). Estas relaciones constitutivas se plantean, generalmente, en términos del operador estrella de Hodge, el cual está dado por una métrica impuesta a priori en el espacio-tiempo del medio. Algunos trabajos realizados en electromagnetismo pre-métrico [46], [47], [24], [85], plantean la idea de que la métrica se puede encontrar a partir de un tensor constitutivo  $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$  dado por el principio de acción para el campo electromagnético. Este mismo tensor codifica las relaciones constitutivas del medio y permite deducir de él la métrica que subyace en el medio.

En el trabajo, desarrollamos de manera clara y explícita toda la construcción del electromagnetismo en formas diferenciales. Esto nos permitió encontrar de una manera geométrica expresiones independientes de las coordenadas y del marco de referencia, que nos proporcionan las componentes de los campos vectoriales electromagnéticos, para cualquier observador que pretenda medirlos. Estas expresiones, son tan generales, que permite encontrar dichos campos, medidos por un observador estático para medios en movimiento, tanto inercial como no inercial. Medios electromagnéticos homogéneos e isotrópicos, son medidos como medios no triviales por un observador estático cuando éstos se encuentran en movimiento. Incluso, bajo las mediciones del observador estático, estos medios llegan a ser inhomogéneos, anisotrópicos y en la mayoría de los casos con efectos magnetoeléctricos. Esto nos lleva a encontrar medios estáticos equivalentes, con propiedades más complejas.

Así como las relaciones constitutivas relacionan los campos externos con las fuentes, para el caso de los conductores, la ley de Ohm juega el papel de relación constitutiva uniendo la información de las corrientes inducidas y el campo eléctrico. Al igual que para las relaciones constitutivas, en este trabajo pudimos dar una versión geométrica de la ley de Ohm (3.127). Además, pudimos dar la forma geométrica para poder recuperar la información de manera vectorial para cualquier observador, notando que esta ley es dependiente del observador que mide. Aunado a esto, definimos la 3-forma  $\mathcal{E}_u$  de *densidad de flujo de energía-momento*

(3.131), de la que pudimos encontrar su expresión en términos de las formas electromagnéticas. A partir de encontrar la 1-forma dual de esta 3-forma, pudimos recuperar, en términos de los campos vectoriales electromagnéticos, la cantidad de energía accesible a un observador y el vector de Poynting, confirmando lo que se conoce en la literatura.

Uno de los conceptos más importante para diseño y aplicación de metamateriales ópticos es el índice de refracción  $n$ , en donde se encuentra codificada la información de la trayectoria que seguirá la luz una vez que entra en un medio material. Para medios homogéneos e isotrópicos, el índice de refracción se calcula como

$$n^2 = \epsilon\mu, \quad (8.1)$$

para  $\epsilon$  y  $\mu$  la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética respectivamente. Un problema importante surge cuando los medios son anisotrópicos o inhomogéneos, en donde la permitividad y la permeabilidad ya no son cantidades escalares, sino matrices (o tensores) que no se pueden reducir a un valor numérico. En estos casos, la definición de índice de refracción dada por (8.1) ya no tiene sentido (por lo menos matemáticamente). Es aquí, donde el conocimiento generado por la geometría diferencial y la relatividad general cobra relevancia. Se sabe que la luz se mueve por unas curvas particulares llamadas *geodésicas* que dependen de la geometría del espacio-tiempo. Cuando un haz de luz entra a un medio material, la “geometría del espacio-tiempo” cambia y las trayectorias de la luz se modifican. Es por esto que podemos asociarle a un medio material una geometría y trabajar con las geodésicas de ésta. La métrica asociada a la geometría define las geodésicas nulas que serán las curvas por las cuales se moverá la luz. Una transformación conforme de coordenadas genera un cambio en la estructura de la métrica y por tanto en la geometría del espacio-tiempo. Sin embargo, en estas transformaciones las geodésicas nulas conservan su trayectoria y por tanto la luz se moverá en las mismas curvas que en la geometría original. Este concepto resulta ser fundamental para hacer algunas transformaciones de coordenadas de donde se pueda extraer información acerca de la velocidad de la luz en la geometría particular y por ende el índice de refracción. A esto se le conoce como la *métrica óptica*.

Aún cuando la métrica óptica nos proporciona el índice de refracción para geometrías en las que la definición (8.1) no funciona, el método solo funciona en modelos simples y con geometrías accesibles, tales como el de Robertson-Walker y Schwarzschild. Sin embargo, existen muchos modelos de geometrías más complicadas, que no permiten una transformación conforme a coordenadas isotrópicas cartesianas y por tanto, no es posible encontrar una óptica métrica para esa geometría (o medio).

El poder escribir el electromagnetismo en términos del tensor constitutivo  $\chi$ , nos permite encontrar directamente de la métrica del espacio-tiempo (4.20) las propiedades electromagnéticas del medio dadas por (4.22), (4.23) y (4.24). Estas propiedades, que en medios isotrópicos y homogéneos definen el índice de refracción, dependen del observador. Es por eso, que debe existir una forma de calcular  $n$  a partir de estas propiedades electromagnéticas. En nuestro trabajo proponemos una forma directa de calcular el índice de refracción en geometrías (medios) diferentes a la de Minkowski a partir de  $\epsilon$  y  $\mu$  para un observador inercial que se mueve a velocidad  $u$  dada por (4.54). Dicha propuesta se aplicó al caso de la geometría de Schwarzschild y coincide con los resultados publicados por *de Felice* en [20] y por los encontrados por *Schuster* y *Visser* en [48] para dicha geometría.

La dualidad de la luz como onda y partícula, nos lleva también a una dualidad en la descripción de su propagación a través de un medio. Éste, se puede describir a partir de un símil mecánico

(aproximación eikonal) donde un rayo de luz sigue trayectorias definidas o a partir del carácter ondulatorio, a través de la propagación de una onda en términos de frentes de onda. Para estas descripciones, los espacios  $ST\mathcal{B}$  y  $\mathcal{N}$  son las estructuras matemáticas requeridas para expresar la propagación de la luz en ambos casos. Por una parte,  $ST\mathcal{B}$  es la proyección espacial del cono nulo, donde los rayos de luz corresponden a curvas nulas en  $(M, g_0, \tilde{g})$ , que nos permite la formulación espacio-temporal del principio de Fermat. Por otro lado,  $\mathcal{N}$  nos sirve para definir los frentes de onda tangentes a los elementos de contacto en  $\mathcal{B}$ . La evolución de los rayos de luz en  $ST\mathcal{B}$  está dada por el flujo del campo de Reeb, mientras que en  $\mathcal{N}$  está dada por la transformación de contacto asociada a este flujo. En este sentido, la naturaleza de la propagación de la luz en medios no dispersivos se encuentra codificada en el haz de contacto de  $(\mathcal{B}, g)$ , junto con sus simetrías.

El hecho que los flujos geodésicos puedan ser escritos en términos de una familia de transformaciones de contacto de 1- parámetro, nos permite reconstruir las trayectorias de la luz al igual que los frentes de onda, cuando ésta se propaga a través de un medio óptico, simplemente a través del flujo de Reeb. Con esta técnica, pudimos explorar ejemplos de medios con geometrías Euclidianas en 2 y 3 dimensiones además de un medio en 2 dimensiones con geometría hiperbólica. En el caso del medio 2-dimensional Euclidiano, nos fue posible recrear la ley de Snell de la refracción aunado al fenómeno de la reflexión total interna. Para el medio hiperbólico, encontramos los patrones de refracción para interfaces verticales y horizontales proyectadas al círculo de Poincaré. Encontramos que en el medio hiperbólico no se presenta la reflexión total interna cuando la fuente de luz se encuentra en el medio de mayor índice de refracción. Sin embargo, es posible notar que algunos rayos de luz intersectan más de una vez el mismo frente de onda. Esto puede ser interpretado como una *refracción temporal* en el medio. Dejamos este fenómeno para un futuro acercamiento más profundo.

El formalismo es suficientemente robusto para poder trabajar con interfaces entre medios con diferentes índices de refracción sin ninguna adaptación. Este formalismo, podría ser una opción para resolver el problema de diseño de metamateriales, en donde se requiera encontrar las propiedades electromagnéticas de un medio que propague la luz por una trayectoria deseada, problema fundamental planteado en este trabajo.

Por otra parte, otra de las propiedades que pueden ser descritas en términos de geometría y que pudiera ser de vital importancia para realizar medios con características muy particulares, es la quiralidad. Los medios quirales son aquellos medios en donde la velocidad de fase de las ondas circularmente polarizadas cambia dependiendo de la dirección de la polarización de éstas. Este tipo de medios, más complejos que los medios lineales, se pueden modelar a partir de relaciones constitutivas que mezclan los campos eléctricos con los magnéticos (7.7). Estas relaciones constitutivas son mucho más complejas de modelar en términos de geometría diferencial y no se conoce modelo geométrico para describir la quiralidad de un medio.

Los conceptos de campos de Beltrami, que son ampliamente utilizados en dinámica de fluidos, pero que se utilizan poco dentro del electromagnetismo. Estos campos, también conocidos como campos “libres de fuerzas” son particularmente útiles para flujos que se *tuercen* sobre si mismos. Los campos de Beltrami se pueden definir de manera vectorial y diferencial para espacios o variedades 3-dimensionales. Los campos de Beltrami son en general paralelos a su propio rotacional (7.11).

La estructura matemática que permite la propagación de los campos libres de fuerzas es una variedad de contacto, en donde la 1-forma de contacto resulta ser también de Beltrami. Si la métrica además satisface (7.22), entonces de manera natural se encuentran las ecuaciones de London, que son las relaciones que rigen parte de la superconductividad. Para geometría

espacio-temporales de 3 dimensiones (2 espaciales y 1 temporal) estas estructuras aparecen de manera natural y por tanto podemos decir que son geometrías superconductoras.

A partir de los campos de Beltrami, podemos introducir el concepto de *helicidad* dado de manera vectorial por (7.10) y de manera diferencial por (7.17). La densidad de helicidad se encuentra estrechamente ligada a la polarización de las ondas que se propagan por un medio electromagnético. De manera geométrica, la densidad de helicidad (también conocida como torsión topológica) resulta ser un invariante topológico.

En este sentido, estudiamos dos invariantes topológicos para sistemas electromagnéticos: la torsión topológica y el espín topológico. Para ambos invariantes, pudimos encontrar una forma geométrica de recuperar la información vectorial dado por las ecuaciones (7.33) que dependen de la métrica del medio. Una vez hecha la parte geométrica, se pudo recuperar las expresiones en términos de los campos electromagnéticos conocidos y pudimos corroborar que los resultados fueron los esperados por la literatura.

Al trabajar en variedades 4-dimensionales (debido a la dimensión temporal), los invariantes topológicos se pueden generalizar a partir del Teorema de Stokes y encontramos las 4-formas de volumen conocidas como *invariantes de deformación de Poincaré*. Para estos invariantes también pudimos recuperar sus expresiones vectoriales en términos de los campos electromagnéticos (7.39) y (7.40). De ahí pudimos observar que el invariante de Poincaré asociado con la densidad de helicidad (torsión topológica) nos muestra información de la disipación de energía en las ondas electromagnéticas al propagarse sobre un medio.

Finalmente, nuestro modelo geométrico nos permite hacer una pequeña extensión de su aplicabilidad. No sólo podemos modelar con él la propagación de la luz en medios, sino que intentamos extenderlo a las trayectorias que realizarían partículas cargadas en presencia de campos magnéticos externos, confinadas a moverse en geometrías particulares. A estas curvas se les conoce como *curvas magnéticas en variedades Riemannianas*. Parte de la extensión de este trabajo, radica en poder encontrar la curva magnética sobre una geometría superconductoras (como se modela en el capítulo 7). En este sentido, se ha avanzado escribiendo los elementos fundamentales para realizar el cálculo.

Escribimos la 2<sup>o</sup> ley de Newton en términos de conceptos geométricos, dada por la ecuación de auto-paralelismo dependiente de los coeficientes de la conexión. La fuerza de Maxwell, es interpretada como una ecuación de compatibilidad entre la 2-forma  $F$  de Faraday y la métrica de la geometría. Dadas las ecuaciones de Maxwell (7.14) y las relaciones constitutivas (7.16), determinadas por la métrica  $g$  de la variedad, el movimiento de una partícula cargada bajo la acción de un campo electromagnético  $F$ , debe satisfacer

$$m\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = q\Phi(\dot{\gamma}), \quad (8.2)$$

de donde la parte izquierda representa la masa por la aceleración (2<sup>o</sup> ley de Newton), mientras que la parte derecha expresa la fuerza de Lorentz definida a través de la ecuación de compatibilidad

$$g(\Phi(u), w) = F(u, w). \quad (8.3)$$

La curva magnética será cualquier curva  $\gamma$  que satisfaga (8.2) con las condiciones de compatibilidad para la 2-forma de Lorentz  $F$ . Con esto, hemos logramos recrear algunas trayectorias sobre geometrías conocidas. El siguiente paso, es aplicarlo para una geometría superconductoras expuesta en (7.22). Este trabajo se encuentra en proceso de realización y es una de las extensiones inmediatas al trabajo doctoral aquí expuesto.

## 9. Referencias

- [1] N. I. Zheludev, “The road ahead for metamaterials,” *Science*, vol. 328, no. 5978, pp. 582–583, 2010.
- [2] A. Nicolet, F. Zolla, and C. Geuzine, “Transformation optics, generalized cloaking and superlenses,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, August 2010.
- [3] H. Chen, C. T. Chan, and P. Sheng, “Transformation optics and metamaterials.,” *Nature materials*, vol. 9 5, pp. 387–96, 2010.
- [4] F. L. Tixeira, “Differential form approach to the analysis of electromagnetic cloaking and masking,” *Microwave And Optical Technology Letters.*, vol. 49, no. 8, pp. 2051–2053, 2007.
- [5] F. Z. A. Nicolet and S. Guenneau, “Electromagnetic analysis of cylindrical cloaks of an arbitrary cross section,” *Optics Letters*, vol. 33, no. 14, pp. 1584–1586, 2008.
- [6] A. N. F. Zolla, S. Guenneau and J. B. Pendry, “Electromagnetic analysis of cylindrical invisibility cloaks and the mirage effect,” *Optics Letters*, vol. 32, no. 9, 2007.
- [7] F. L. Tixeira, “Closed-form metamaterial blueprints for electromagnetic masking of arbitrarily shaped convex pec objects,” *IEEE Antennas And Wireless Propagation Letters*, vol. 6, pp. 163–164, 2007.
- [8] W. Gordon, “Zur lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 377, no. 22, pp. 421–456, 1923.
- [9] J. Ehlers, F. A. Pirani, and A. Schild, “Republication of: The geometry of free fall and light propagation,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 44, no. 6, pp. 1587–1609, 2012.
- [10] A. L. Kholodenko, *Applications of contact geometry and topology in physics*. World Scientific, 2013.
- [11] D. García-Peláez and C. Lopez-Monsalvo, “Infinitesimal legendre symmetry in the geometrothermodynamics programme,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 55, no. 8, p. 083515, 2014.
- [12] A. Bravetti, C. Lopez-Monsalvo, and F. Nettel, “Contact symmetries and hamiltonian thermodynamics,” *Annals of Physics*, vol. 361, pp. 377–400, 2015.
- [13] A. Bravetti, H. Cruz, and D. Tapias, “Contact hamiltonian mechanics,” *Annals of Physics*, vol. 376, pp. 17–39, 2017.
- [14] C. Lopez-Monsalvo, F. Nettel, V. Pineda-Reyes, and L. Escamilla-Herrera, “Contact polarizations and associated metrics in geometric thermodynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 54, no. 10, p. 105202, 2021.

- 
- [15] D. Flores-Alfonso, C. S. Lopez-Monsalvo, and M. Maceda, “Contact geometry in superconductors and new massive gravity,” *Physics Letters B*, vol. 815, p. 136143, 2021.
- [16] D. Flores-Alfonso, C. S. Lopez-Monsalvo, and M. Maceda, “Thurston geometries in three-dimensional new massive gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, p. 061102, Aug 2021.
- [17] V. Perlick, *Ray optics, Fermat’s principle, and applications to general relativity*, vol. 61. Springer Science & Business Media, 2000.
- [18] D. Scofield and P. Huq, “Evolution of helicity in fluid flows,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 51, no. 3, p. 033520, 2010.
- [19] D. Reed, “Foundational electrodynamics and beltrami vector fields,” in *Advanced Electromagnetism: Foundations, Theory and Applications*, pp. 217–249, World Scientific, 1995.
- [20] F. de Felice, “On the gravitational field acting as an optical medium,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 2, no. 4, pp. 347–357, 1971.
- [21] V. De Lorenci and R. Klippert, “Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media,” *Physical Review D*, vol. 65, no. 6, p. 064027, 2002.
- [22] M. Novello, S. P. Bergliaffa, J. Salim, V. De Lorenci, and R. Klippert, “Analogue black holes in flowing dielectrics,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, no. 5, p. 859, 2003.
- [23] F. Belgiorno, S. Cacciatori, G. Ortenzi, L. Rizzi, V. Gorini, and D. Faccio, “Dielectric black holes induced by a refractive index perturbation and the hawking effect,” *Physical Review D*, vol. 83, no. 2, p. 024015, 2011.
- [24] F. W. Hehl and Y. Obukhon, *Foundations of Classical electrodynamic: Charge, Flux and Metric*. Cambridge Monographs on mathematical Physics, 2003.
- [25] F. A. Asenjo, C. Erices, A. Gomberoff, S. A. Hojman, and A. Montecinos, “Differential geometry approach to asymmetric transmission of light,” *Optics express*, vol. 25, no. 22, pp. 26405–26416, 2017.
- [26] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “General relativity in electrical engineering,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 10, p. 247, 2006.
- [27] S. Schuster and M. Visser, “Effective metrics and a fully covariant description of constitutive tensors in electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 96, no. 12, p. 124019, 2017.
- [28] R. T. Thompson, “Covariant electrodynamics in linear media: Optical metric,” *Physical Review D*, vol. 97, no. 6, p. 065001, 2018.
- [29] S. Schuster and M. Visser, “Electromagnetic analogue space-times, analytically and algebraically,” *Classical and Quantum Gravity*, 2019.
- [30] D. R. S. J. B. Pendry, D. Schurig, “Controlling electromagnetic fields,” *Science*, vol. 312, pp. 1780–1782, june 2006.
- [31] C. W. Misner and J. A. Wheeler, “Classical physics as geometry,” *Annals of physics*, vol. 2, no. 6, pp. 525–603, 1957.
- [32] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *et al.*, *Gravitation*. Macmillan, 1973.
-

- 
- [33] D. Baldomir and P. Hammond, *Geometry of electromagnetic systems*. No. 39 in 1, Oxford University Press, 1996.
- [34] A. Bossavit and É. ÅÅ De France, “Computational electromagnetism and geometry,” *Citeseer*, 1999.
- [35] U. Leonhardt and T. Philbin, *Geometry and light: the science of invisibility*. Courier Corporation, 2010.
- [36] A. Stenvall, T. Tarhasaari, F. Grilli, P. Raunonen, M. Vojenčiak, and M. Pellikka, “Manifolds in electromagnetism and superconductor modelling: Using their properties to model critical current of twisted conductors in self-field with 2-d model,” *Cryogenics*, vol. 53, pp. 135–141, 2013.
- [37] M. Fiebig, “Revival of the magnetoelectric effect,” *Journal of physics D: applied physics*, vol. 38, no. 8, p. R123, 2005.
- [38] K. F. Warnick and P. Russer, “Differential forms in electromagnetic field theory,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 148, pp. 83–112, 2014.
- [39] A. Bossavit, “Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism,” *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, vol. 135, no. 8, pp. 493–500, 1988.
- [40] P. W. Gross, P. W. Gross, P. R. Kotiuga, and R. P. Kotiuga, *Electromagnetic theory and computation: a topological approach*, vol. 48. Cambridge University Press, 2004.
- [41] M. Pellikka, S. Suuriniemi, L. Kettunen, and C. Geuzaine, “Homology and cohomology computation in finite element modeling,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 35, no. 5, pp. B1195–B1214, 2013.
- [42] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*. New York, London, 1963.
- [43] D. J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics,” 2005.
- [44] F. A. Asenjo, C. Erices, A. Gomberoff, S. A. Hojman, and A. Montecinos, “Differential geometry approach to asymmetric transmission of light,” *Optics express*, vol. 25 22, pp. 26405–26416, 2017.
- [45] R. T. Thompson, “Covariant electrodynamics in linear media: Optical metric,” *Physical Review D*, vol. 97, 2018.
- [46] D. H. Delphenich, “Symmetries and pre-metric electromagnetism.,” *Physics Department, Bethany College*, 2005.
- [47] F. Hehl, “On the theory of skewon field: from electrodynamics to gravity,” *Physics Letters A*, vol. 347, pp. 14–24, June 2005.
- [48] S. Schuster and M. Visser, “Bespoke analogue space-times: Meta-material mimics,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 50, no. 6, pp. 1–21, 2018.
-

- 
- [49] W. C. Röntgen, “Ueber die durch bewegung eines im homogenen electrischen felde befindlichen dielectricums hervorgerufene electrodynamische kraft,” *Annalen der Physik*, vol. 271, no. 10, pp. 264–270, 1888.
- [50] N. A. Spaldin and R. Ramesh, “Advances in magnetoelectric multiferroics,” *Nature materials*, vol. 18, no. 3, p. 203, 2019.
- [51] D. G. Ashworth and P. A. Davis, “Transformations between inertial and rotating frames of reference,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 12, no. 9, 1979.
- [52] D. Faccio, F. Belgiorno, and et. al., eds., *Analogue Gravity Phenomenology*, vol. 870. Springer.
- [53] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*. Cambridge University Press, 2nd ed., 2003.
- [54] W. K. Panofsky and M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.
- [55] M. de Montigny and G. Rousseaux, “On the electrodynamics of moving bodies at low velocities,” *European Journal of Physics*, vol. 27, pp. 755–768, 2006.
- [56] G. Rousseaux, “On the electrodynamics of minkowski at low velocities,” *EPL*, vol. 84, 2008.
- [57] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields,” *science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1780–1782, 2006.
- [58] H. Chen, C. T. Chan, and P. Sheng, “Transformation optics and metamaterials,” *Nature materials*, vol. 9, no. 5, pp. 387–396, 2010.
- [59] C. Lopez-Monsalvo, D. Garcia-Pelaez, A. Rubio-Ponce, and R. Escarela-Perez, “The geometry of induced electromagnetic fields in moving media,” *Annals of Physics*, vol. 420, p. 168270, 2020.
- [60] H. Chen, S. Tao, J. Belin, J. Courtial, and R.-X. Miao, “Transformation cosmology,” *Phys. Rev. A*, vol. 102, p. 023528, 2020.
- [61] D. Faccio, F. Belgiorno, S. Cacciatori, V. Gorini, S. Liberati, and U. Moschella, *Analogue gravity phenomenology: analogue spacetimes and horizons, from theory to experiment*, vol. 870. Springer, 2013.
- [62] D. G. Garcia, G. J. Chaplain, J. Bělín, T. Tyc, C. Englert, and J. Courtial, “Optical triangulations of curved spaces,” *Optica*, vol. 7, pp. 142–147, Feb 2020.
- [63] Y. Y. Berest and A. P. Veselov, “Huygens’ principle and integrability,” *Russian Mathematical Surveys*, vol. 49, no. 6, pp. 5–77, 1994.
- [64] A. I. Harte, “Tails of plane wave spacetimes: Wave-wave scattering in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 8, p. 084059, 2013.
- [65] R. McLenaghan, “An explicit determination of the empty space-times on which the wave equation satisfies huygens’ principle,” in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 65, pp. 139–155, Cambridge University Press, 1969.
-

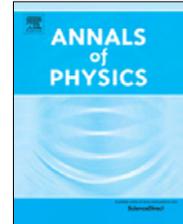
- 
- [66] T. W. Noonan, “Huygens’ principle in conformally flat spacetimes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 12, no. 4, p. 1087, 1995.
- [67] H. Geiges, “A brief history of contact geometry and topology,” *Expositiones Mathematicae*, vol. 19, pp. 25–53, 2001.
- [68] H. Stephani, *General Relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field*. Cambridge University Press, 1990.
- [69] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor and Francis, 2003.
- [70] V. I. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*. Springer, 2014.
- [71] J. Stewart, *Advanced General Relativity*. Cambridge University Press, 1993.
- [72] H. Geiges, *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [73] H. Geiges, “Christiaan Huygens and contact geometry,” *NAW*, vol. 5, no. 2, 2005.
- [74] B. Carter and H. Quintana, “Foundations of general relativistic high-pressure elasticity theory,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 331, no. 1584, pp. 57–83, 1972.
- [75] J. Ehlers, “Survey of general relativity theory,” in *Relativity, astrophysics and cosmology*, pp. 1–125, Springer, 1973.
- [76] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer, 1989.
- [77] J. Jost and J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, vol. 42005. Springer, 2008.
- [78] D. García-Peláez, C. López-Monsalvo, and A. Rubio Ponce, “Light propagation through optical media using metric contact geometry,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 63, no. 7, p. 073504, 2022.
- [79] A. V. Bolsinov, A. Veselov, and Y. Ye, “Chaos and integrability in  $sl(2,r)$ -geometry,” *arXiv: Geometric Topology*, 2019.
- [80] J. Etnyre and R. Ghrist, “Contact topology and hydrodynamics: I. beltrami fields and the seifert conjecture,” *Nonlinearity*, vol. 13, no. 2, p. 441, 2000.
- [81] R. M. Kiehn, “Topological torsion, pfaff dimension and coherent structures,” *Topological Fluid Mechanics (Cambridge University Press, Cambridge, 1990) p*, vol. 449, 1990.
- [82] M. Dahl, “Contact Geometry in Electromagnetism,” *Progress in Electromagnetics Research*, 2004.
- [83] P. Townsend, K. Pilch, and P. Van Nieuwenhuizen, “Self-duality in odd dimensions,” *Physics Letters B*, vol. 136, no. 1, pp. 38–42, 1984.
- [84] S. Sternberg, *Curvature in mathematics and physics*. Courier Corporation, 2013.
- [85] Y. Itin, “On light propagation in premetric electrodynamics: the covariant dispersion relation,” *J. Phys. A: Math. Theor*, vol. 42, 2009.
-



Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

## Annals of Physics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/aop](http://www.elsevier.com/locate/aop)



# The geometry of induced electromagnetic fields in moving media



C.S. Lopez-Monsalvo <sup>a,\*</sup>, D. Garcia-Pelaez <sup>b,c</sup>, A. Rubio-Ponce <sup>b</sup>,  
R. Escarela-Perez <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Conacyt-Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco Avenida San Pablo Xalpa 180, Azcapotzalco, Reynosa Tamaulipas, 02200 Ciudad de México, Mexico

<sup>b</sup> Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco Avenida San Pablo Xalpa 180, Azcapotzalco, Reynosa Tamaulipas, 02200 Ciudad de México, Mexico

<sup>c</sup> Universidad Panamericana, Tecoyotitla 366. Col. Ex Hacienda Guadalupe Chimalistac, C.P. 01050 Ciudad de Mexico, Mexico

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 17 June 2020

Accepted 16 July 2020

Available online 23 July 2020

#### Keywords:

Electromagnetism

Riemannian geometry

Magnetolectric effect

### ABSTRACT

In this manuscript we provide a fully geometric formulation for the induced electromagnetic fields and their corresponding constitutive relations in moving media. To this end, we present the reader with a brief geometric summary to show how vector calculus electromagnetic theory is embedded in the more general language of differential forms. Then, we consider the class of *metric* constitutive relations describing the medium in which electromagnetic fields propagate. We explicitly obtain the components of the induced fields in a moving medium, as seen in the lab *rest* frame. This allows us to read the expressions for the permittivity, permeability and magnetolectric matrices for the moving medium which, in turn, can be interpreted as a different physical material from the lab point of view.

© 2020 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

It has been since the early days of General Relativity that we have seen that the “influence of matter on electromagnetic phenomena is equivalent to the influence of a gravitational field” [1,2].

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [cslopezmo@conacyt.mx](mailto:cslopezmo@conacyt.mx) (C.S. Lopez-Monsalvo), [dgarciap@up.edu.mx](mailto:dgarciap@up.edu.mx) (D. Garcia-Pelaez), [arp@azc.uam.mx](mailto:arp@azc.uam.mx) (A. Rubio-Ponce), [rep@azc.uam.mx](mailto:rep@azc.uam.mx) (R. Escarela-Perez).

That is, in the same manner light rays obey Fermat's principle while propagating across media, in General Relativity light follows null geodesics on a curved spacetime. Thus, it has been argued that spacetime acts like a medium with a particular refractive index, where all the information is encoded in its metric tensor [3–6]. Thus, we can reverse the argument and note that optical media can be treated geometrically by means of differentiable manifolds where light follows the corresponding curvature [7,8]. Such intuition has been exploited in the recent development of material science and engineering [9,10,8,11–14].

The formulation of a field theory in the language of differential geometry has been thoroughly exploited during the last century. However, most of the work done so far has been developed to pursue goals in fundamental areas of theoretical physics [15,16]. It has only been in recent times that these tools have begun to be used in more applied areas [17–20]. For instance, in material science, all information regarding the macroscopic response of a medium to electromagnetic stimuli is encoded in its constitutive tensor, which has been related to a metric or a curvature of the geometric space represented by the medium. [8,1].

The constitutive relations are usually expressed in terms of the permittivity, permeability and magnetoelectric matrices. These, however, are usually written and interpreted in terms of a single set of coordinates within the vector calculus formulation of electromagnetism. Thus, one of our aims is to explicitly bridge such a formulation with the coordinate and frame independent differential form language. We do this constructively, exhibiting the fact that Maxwell's equations are conservation laws in spacetime while constitutive relations are maps linking the differential forms associated with these conservation laws.

It is of pedagogical value to see how vector calculus electromagnetic theory is embedded in the more general differential form language. Such details are, more often than not, omitted in the modern literature based on differential geometry. Therefore, in Section 2 we recall the traditional formulation of electromagnetic theory starting from the integral form of Maxwell's equations in domains of  $\mathbb{R}^3$  followed, in Section 3, of their generalization to a general differentiable manifold  $\mathcal{M}$ . Notoriously, in formulating Maxwell's equations, there is no need to equip the manifold  $\mathcal{M}$  with a metric tensor. However, it is clear that there is no link between the sources and the fields. Such a link could take various guises, yet it is specially convenient if it is through an intrinsic geometric structure associated with the manifold. In this way, one can guarantee that the formulation is independent of the choice of coordinates and observers. Moreover, it comes as an additional postulate that such a structure contains all the relevant macroscopic electromagnetic information of the material where the fields are propagating [7].

Here, we adhere to the view that different materials are described by different geometries. That is, we assume that constitutive relations are expressed in terms of the *Hodge* dual operator associated with each material metric tensor. Therefore, we consider a metric for the ambient space and a metric for the medium. It is worth noting that this is not the most general way to *geometrize* constitutive relations but it is the certainly one of the simplest. As a result, we obtain a general and coordinate free expression to explicitly compute the components of the induced electromagnetic vector fields as seen by an arbitrary observer. This is done in Section 4.

In Section 5 we consider the effect of external electromagnetic fields on a moving medium which is homogeneous and isotropic when it is at rest in the lab frame. The corresponding induced fields are described by a metric tensor adapted to the motion of the medium. Such motion, defines a coordinate transformation which maps the material metric into its moving version.

Here, we study various types of transformations. First, we consider a medium moving at constant velocity with respect to the static laboratory frame. Then, we analyze the case of non-inertial motion. In particular, when the medium is undergoing uniform acceleration and the case when it is rotating. In all cases we make both analysis, Galilean and relativistic.<sup>1</sup> Interestingly, the transformation describing rotating objects consistent with the principles of special relativity remain a timely subject [21–23]. We obtain the corresponding metric for the moving medium and explicitly obtain the permittivity, permeability and magnetoelectric matrices.

---

<sup>1</sup> Galilean and relativistic analysis are so called in terms of the coordinate transformations of the moving media. In the Galilean case, we do not intend to do a low velocity limit.

As noted originally by Röntgen [24], a medium immersed in a purely electric field, as measured by a static observer, appears to be magnetized when it moves with respect the static frame. Similarly, there is the corresponding apparent polarization when we replace the electric by a magnetic field. In all cases, the resulting constitutive relations for the moving medium couple the electric and magnetic fields. This is known as the magnetoelectric effect (see [25] and reference therein for a timely description) and it has become a very active research area in material science, e.g. due to the possibility of controlling the magnetization of a ferromagnet rotated by means of purely electric field [26]. In this work, we explicitly extract the magnetoelectric matrices of a simple medium for each type of *elementary* motion. Moreover, due to the generality of the geometric framework, the same analysis can be readily exported to more complicated materials, described by curved geometries, in arbitrary motion. This is done in Section 6, where we consider a non-trivial medium associated with a curved metric and a non-inertial transformation.

Finally, in Section 7 we provide some closing remarks and provide some further directions for exploration.

Throughout the manuscript, we decline the use of the Einstein sum convention and refrain of using a designated letter for the speed of light in vacuum as well as in the medium. This served as bookkeeping of all the geometric factors involved in the transformations. Thus, albeit our expressions are slightly longer, they provide a clearer notion of scales and units.

## 2. Vector calculus electromagnetism

The empirical character of electromagnetism lies on the fact that in nature there is a distinguished property of matter that certain objects possess and which can be perceived by means of its motion and interaction. Such property is *observed* to be conserved and it is called electric charge. Accordingly, we infer the existence of a field responsible for the inertial change of the charges and, in turn, as charges move around a new field configuration arises. The field itself obeys its own conservation law and this lead us to a dynamical theory of fields and charges. This is expressed as a series of observed relations between fields and sources, namely,

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds = 0, \quad (1)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds, \quad (2)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds = \int_{\Omega} \rho_{\text{ext}} dv \quad (3)$$

and

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} \, ds + \int_{\Sigma} \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \hat{n} \, ds. \quad (4)$$

Here, we refer to  $\vec{B}$  and  $\vec{E}$  as the *fundamental* magnetic and electric fields, respectively, while  $\vec{H}$  and  $\vec{D}$  represent the corresponding *induced* fields in a given medium. The terms  $\rho_{\text{ext}}$  and  $\vec{j}_{\text{ext}}$  are the *external* electric charge density and current density flux, respectively and represent the sources of the fields. Notice that the induced fields are the ones linked to the sources while the fundamental fields seem to be independent. The symbol  $\partial$  is known as the *boundary* operator, in this case acting on domains of  $\mathbb{R}^3$ . Thus  $\partial\Omega$  is the 2-dimensional boundary of a 3-dimensional open region  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , while  $\partial\Sigma$  is the 1-dimensional curve bounding an open surface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ .

The passing from the global representation to the local expressions of Maxwell's equations is a straightforward application of the vector calculus integral theorems. Thus it follows that Maxwell's equations, in their local form, can be separated into the homogeneous

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0, \quad (6)$$

and in-homogenous

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}} \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{ext}}, \quad (8)$$

pairs of equations.

An immediate consequence of this is a continuity equation for the sources. That is, applying the divergence operator and substituting (7) into (8) it follows that

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{ext}} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ext}} = 0. \quad (9)$$

Note that this conservation law only refers to the external charges and currents. In addition to the external sources, each medium is characterized by a response function to the externally applied fields, implying the appearance of induced charges and currents within the materials. Therefore, assuming the conservation of *total* charge entails that the induced charges and currents must be conserved independently and hence, there is no interchange between external and induced charges. Thus, postulating Maxwell's equations (5)–(8) together with the conservation of *total* charge

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (10)$$

implies the conservation law for the *induced* charge and current densities

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{ind}} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ind}} = 0. \quad (11)$$

Here,

$$\rho = \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{ind}} \quad \text{and} \quad \vec{j} = \vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}_{\text{ind}}. \quad (12)$$

The fundamental problem of any field theory consists in determining the fields from the known sources and some *a priori* information about the fields in a certain region of space and time. In the case of electromagnetism we have to determine the electric field  $\vec{E}$  and the magnetic flux  $\vec{B}$  from the known functions of space and time  $\rho_{\text{ext}}$  and  $\vec{j}_{\text{ext}}$  together with a set of prescribed boundary and initial conditions. Formulated in this manner, the problem is incomplete, since there is no link between the homogeneous equations (5) and (6) and the source equations (7) and (8). That is, an extra set of equations known as the *constitutive relations of the medium* has to be imposed.

The constitutive relations incorporate information about the medium response to the stimuli produced by external fields. In general, these are expressed in terms of a convolution averaging the field effect over the entire space occupied by the medium through the material's complete history. In the simplest scenario, these can be expressed as the linear transformations [27]

$$\begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \bar{\zeta} \\ \bar{\chi} & \bar{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where  $\bar{\epsilon}$  and  $\bar{\mu}^{-1}$  are the  $3 \times 3$  permittivity and (inverse) permeability matrices, respectively, and  $\bar{\zeta}$  and  $\bar{\chi}^2$  are the so called magnetoelectric matrices [25,11].

In the following sections we present electromagnetic theory in the language of differential forms and Riemannian geometry. There are numerous references on this subject. For the details concerning definitions and operational tools from a physical point of view the standard texts [28,29] are recommended. For more formal details on the mathematical side, we use the conventions of [30]. For the applications of differential geometry in the science and engineering of electromagnetic fields we urge the reader to consult [17,31,7].

<sup>2</sup> Regarding this work, all media will be supposed dielectric, for which  $\bar{\zeta}$  and  $\bar{\chi}$  are always real.

### 3. Electromagnetism in differential forms

Maxwell's equations are empirical postulates requiring the conservation of certain quantities. Conservation laws are best understood in their integral form. One usually considers a flux crossing the *boundary* of a certain region and imposes its conservation. Then, using Stokes' theorem and the arbitrariness of the region of interest one observes that demanding the conservation of the flux is equivalent to requiring its correspondence to a closed differential form. Schematically

$$0 \stackrel{\dagger}{=} \oint_{\partial\Omega} J = \int_{\Omega} dJ \quad \forall \Omega \subset \mathcal{M} \implies dJ = 0. \quad (14)$$

Here,  $J$  is  $p$ -form (with  $0 < p < \dim \mathcal{M}$ ) representing a  $p$ -flux,  $\Omega$  is a  $p + 1$  dimensional region of  $\mathcal{M}$  with a  $p$ -dimensional boundary  $\partial\Omega$ , e.g. a 2-dimensional surface bounded by a closed curve, a 3-dimensional volume bounded by a closed surface or, analogously, a 4-dimensional region bounded by a closed volume. Also, we use the symbol  $\dagger$  to express the empirical imposition of such equality. Therefore, Maxwell's equations are postulated as the conservation laws for a 2-form  $F$ , that is

$$\oint_{\partial\Omega^3} F \stackrel{\dagger}{=} 0 \quad \forall \Omega^3 \subset \mathcal{M} \implies dF \stackrel{\dagger}{=} 0, \quad (15)$$

and an  $n - 1$ -form  $j$ , i.e.

$$\oint_{\partial\Omega^n} j \stackrel{\dagger}{=} 0 \quad \forall \Omega^n \subset \mathcal{M} \implies dj \stackrel{\dagger}{=} 0. \quad (16)$$

These statements are empirical postulates and are completely general, i.e. they are coordinate free, observer independent and require no further structure other than differentiability of  $\mathcal{M}$ . The former, states the conservation of the total electromagnetic flux whilst, the latter, the conservation of the total charge. Therefore, Maxwell's equations (5)–(8) can be written in terms of differential forms on a 4-dimensional manifold  $\mathcal{M}$  as

$$dF = 0, \quad (17)$$

and

$$dG - j_{\text{ext}} = 0 \quad (18)$$

where, as before, we have the homogeneous and source equations. Here  $F$  and  $G$  are 2-forms representing the  $(\vec{E}, \vec{B})$  and  $(\vec{D}, \vec{H})$  fields, respectively, while  $j_{\text{ext}}$  is a 3-form representing the free sources  $(\rho_{\text{ext}}, \vec{j}_{\text{ext}})$  and corresponds to the part of the total current density three form which is not induced by the fields in the medium

$$j_{\text{ext}} = j - j_{\text{ind}}. \quad (19)$$

Similar to Eqs. (5)–(8), Eqs. (17) and (18) are coordinate independent, that is, they remain valid regardless of the choice of local coordinates for  $\mathcal{M}$ . Thus, to convince ourselves that, indeed, Eqs. (17) and (18) are equivalent to Eqs. (5)–(8), let us work in a cartesian coordinate system  $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$  for an open set of  $\mathcal{M}$ .

Let

$$F = B + E \wedge dt, \quad (20)$$

$$G = -D + H \wedge dt \quad (21)$$

and

$$j_{\text{ext}} = -\rho_{\text{ext}} + j_{\text{ext}}^{(3)} \wedge dt. \quad (22)$$

Here, the fields  $E$  and  $H$  are the 1-forms whose components are equal to their vectorial counterparts, i.e.

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (23)$$

and

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i dx^i = H_x dx + H_y dy + H_z dz \quad (24)$$

whilst the fluxes  $B$ ,  $D$  and  $j_{\text{ext}}^{(3)}$  are the 2-forms

$$B = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 B_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (25)$$

$$D = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 D_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (26)$$

and

$$j_{\text{ext}}^{(3)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 j_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (27)$$

where  $B_{ij}$  (resp.  $D_{ij}$  and  $j_{ij}$ ) represents the magnetic (resp. electric and external current density) flux crossing the infinitesimal oriented area element  $dx^i \wedge dx^j$  [32] i.e. the component of  $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$  (resp.  $\vec{D}$  and  $\vec{j}_{\text{ext}}$ ) orthogonal to the space generated by  $\hat{e}_{(i)}$  and  $\hat{e}_{(j)}$ , namely

$$B_{ij} = \vec{B} \cdot \hat{e}_{(k)} = B_k \quad \text{with} \quad \hat{e}_{(i)} \cdot \hat{e}_{(j)} = \hat{e}_{(i)} \cdot \hat{e}_{(k)} = \hat{e}_{(j)} \cdot \hat{e}_{(k)} = 0 \quad (28)$$

(resp.  $D_{ij} = \vec{D} \cdot \hat{k} = D_k$  and  $j_{ij} = \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \hat{k} = j_{\text{ext}k}$ ) and, finally,  $\rho_{\text{ext}}$  is the external charge density 3-form

$$\rho_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}} dx \wedge dy \wedge dz. \quad (29)$$

Here, we are using the Cartesian dot product merely to illustrate how the components of the vector fields in  $\mathbb{R}^3$  are related to those of their corresponding differential forms. It is not an additional structure over the manifold  $\mathcal{M}$ .

It is a straightforward algebraic exercise to compute the exterior derivative of (20) to obtain the 3-form

$$\begin{aligned} dF = & \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \\ & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt. \end{aligned} \quad (30)$$

It follows directly from the definition of  $B_{ij}$ , Eq. (28), and the definition of the curl operator that the components of  $dF$  can be written as

$$\begin{aligned} dF = & \left( \nabla \cdot \vec{B} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(z)} \right] dx \wedge dy \wedge dt - \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(y)} \right] dx \wedge dz \wedge dt + \\ & \left[ \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{e}_{(x)} \right] dy \wedge dz \wedge dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Thus we see that the vanishing of  $dF$  [Eq. (18)] is completely equivalent to the set of homogeneous Maxwell's equations. Similarly, the components of the 3-form  $dG$  corresponds to the left hand side (lhs) of the in-homogeneous Maxwell's equations (7) and (8). That is,

$$dG = - \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \frac{\partial H_j}{\partial x^i} - \frac{\partial H_i}{\partial x^j} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dt, \quad (32)$$

where the minus signs follow from the definition of  $G$ , Eq. (21). Thus, subtracting the 3-form  $j_{\text{ext}}$ , Eq. (22), from  $dG$  one obtains

$$dG - j_{\text{ext}} = - \left( \nabla \cdot \vec{D} - \rho_{\text{ext}} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(z)} \right] dx \wedge dy \wedge dt - \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(y)} \right] dx \wedge dz \wedge dt + \left[ \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - j_{\text{ext}} \right) \cdot \hat{e}_{(x)} \right] dy \wedge dz \wedge dt, \quad (33)$$

whose vanishing condition (18) yields the in-homogeneous Maxwell equations (7) and (8).

The exterior derivative operator is nilpotent, that is, successive applications of  $d$  are identically zero. Therefore, as before, the conservation law (9) is a consequence of the structure of Maxwell's equations, that is

$$0 = d^2G = dj_{\text{ext}} = \left( \frac{\partial \rho_{\text{ext}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_{\text{ext}} \right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt. \quad (34)$$

Thus, we see that the differential form language appears to be tailored for electromagnetism. Moreover, Eqs. (17) and (18) are not a mere abbreviation of their vectorial counterparts, as it may appear from our exercise, but a profound generalization that allows us to link the local nature of the differential equations with the global properties of their domains of definition. It is precisely this fact the one responsible for a new set of tools that has begun to be exploited in computational electromagnetism and, in particular, in the finite element method for solving electromagnetic problems in topologically complicated domains [33,31,34].

From a foundational point of view, one can reverse the argument on the conservation of total charge and take as empirical postulates the two local conservation laws

$$dF = 0 \quad \text{and} \quad dj = 0, \quad (35)$$

stating the local conservation of flux and charge, respectively. These are merely the predicates of the global postulates (15) and (16). These imply that, at least locally in  $\mathcal{M}$ , there exist a pair of potentials, a 1-form  $A$  and a 2-form  $H$  such that

$$F = dA \quad \text{and} \quad j = dH, \quad (36)$$

where  $H = G + G_{\text{ind}}$ , with

$$dG = j_{\text{ext}} \quad \text{and} \quad dG_{\text{ind}} = j_{\text{ind}}, \quad (37)$$

implying the independent conservation of external and induced charges. Thus, the fundamental problem in electromagnetic theory can again be stated as: given a known *closed* 3-form  $j_{\text{ext}}$ , determine the *closed* 2-form  $F$  or, equivalently, a potential 1-form  $A$ . As before, this problem requires additional information linking the current density flux  $j$  with the potential 1-form  $A$ , or the potential 2-form  $G$  with the field flux 2-form  $F$ , namely, a constitutive relation.

#### 4. Geometric constitutive relations

Thus far, the differential form approach to electromagnetic theory has revealed us its topological nature. We have not introduced any information regarding its geometry, i.e. those mathematical structures that are preserved when a certain class of transformations is executed. The conservation of charge and flux are topological statements that rely solely on the differentiability of the manifold  $\mathcal{M}$ , not assuming any further structure. However, as we have discussed at the end of the previous section, this does not allow us to obtain the field  $F$  from the given source  $j_{\text{ext}}$ . The additional piece of information, the constitutive relation, comes at the price of demanding further structure on  $\mathcal{M}$ . In this manuscript, we consider the case in which such structure is given by a metric tensor

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (38)$$

for  $\mathcal{M}$ , i.e. the pair  $(\mathcal{M}, g)$  be a (pseudo) Riemannian manifold.<sup>3</sup>

Same as with the dot product, a metric allows one to compute lengths of parametrized curves, angles between directions at a given point and distances from one point to another in  $\mathcal{M}$  independently of the chosen coordinates. That is, these notions are *invariant* under a general change of coordinates. It also serves to establish an algebraic equivalence between vectors and 1-forms by means of the *musical* isomorphisms,<sup>4</sup> namely

$$g^{\flat}(V) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V^i dx^j \quad \text{for any } V = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (39)$$

and

$$g^{\sharp}(\omega) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{for any } \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i. \quad (40)$$

In particular, for Riemannian manifolds, one is the inverse of the other, that is

$$\begin{aligned} g^{\sharp} [g^{\flat}(V)] &= \sum_{i,j,k=1}^n g^{ik} g_{kj} V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta^i_j V^j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= V, \end{aligned} \quad (41)$$

and, hence, the metric provides us with a canonical isomorphism between vector and forms.

A manifold can support an infinite number of metric tensors, each one prescribing a geometry. In particular, the paths of extremal length<sup>5</sup> connecting two different points in  $\mathcal{M}$  may drastically differ for each pair  $(\mathcal{M}, g)$ . In this sense, by means of *Fermat's principle*, each metric tensor for  $\mathcal{M}$  can be considered as a material medium for the propagation of electromagnetic waves.

<sup>3</sup> Pseudo Riemannian manifolds  $(\mathcal{M}, g)$  are those in which the metric tensor  $g$  admits null vectors, that is, non-zero vectors whose norm is identically zero. In such manifolds, the Laplacian operator is hyperbolic, instead of elliptic, providing us with a suitable geometric structure to describe wave propagation.

<sup>4</sup> The flat symbol  $\flat$  is used to denote 'lowering' the indices of the components of a vector, while the sharp symbol  $\sharp$  corresponds to 'raising' the indices of the components of a differential form.

<sup>5</sup> For a Riemannian manifold these are the shortest paths, whilst for pseudo-Riemannian manifolds these may be the longest.

Let us begin by recalling the geometrization of electromagnetic theory in vacuum. To this end, consider the free space *background* metric given by

$$\eta = \sum_{i,j=1}^3 g_{0ij} dx^i \otimes dx^j - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} dt \otimes dt, \quad (42)$$

Here  $\varepsilon_0$  and  $\mu_0$  are the vacuum electric permittivity and magnetic permeability, respectively. This background metric will be assumed to correspond to the *lab* space, so that the temporal basis vector

$$u_{\text{lab}} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (43)$$

defining the lab's rest frame, is normalized with respect to the lab metric, i.e.

$$\eta(u_{\text{lab}}, u_{\text{lab}}) = -1. \quad (44)$$

A simple, homogeneous and isotropic medium at rest with respect to the lab frame can be characterized by a *material* metric of the form

$$g = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i \otimes dx^j - \frac{1}{\varepsilon \mu} dt \otimes dt. \quad (45)$$

Here,  $\varepsilon$  and  $\mu$  are the medium's electric permittivity and magnetic permeability, respectively, assumed to be constants.

Notice that in the material metric, the temporal basis vector  $u_{\text{lab}}$  is not normalized, i.e.

$$g(u_{\text{lab}}, u_{\text{lab}}) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}. \quad (46)$$

Motivated by the structure of the constitutive relations (13), we look for a multilinear map  $\kappa$  such that

$$G = \kappa[F]. \quad (47)$$

In a Riemannian manifold, there is natural isomorphism between  $p$ -forms and  $(n - p)$ -forms associated to the metric, namely, the Hodge star operator. Thus, let us denote  $*$  the Hodge duality operator associated with the lab metric  $\eta$ , whilst  $\star$  for the one associated with the material metric  $g$ . Here, we only consider its action on 2-forms. As every linear map, Hodge duality is fully defined in terms of its action on the basis forms

$$*(dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} dx^k \wedge dt, \quad (48)$$

$$*(dx^k \wedge dt) = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} dx^i \wedge dx^j, \quad (49)$$

$$\star(dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} dx^k \wedge dt \quad (50)$$

and

$$\star(dx^k \wedge dt) = -\sqrt{\varepsilon \mu} dx^i \wedge dx^j. \quad (51)$$

From the definition of the Hodge star operator, it is straightforward to verify that

$$\begin{aligned} \star F &= \star B + \star(E \wedge dt) \\ &= \star \left( \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) + \star \left( \sum_{k=1}^3 E_k dx^k \wedge dt \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \star(dx^i \wedge dx^j) + \sum_{k=1}^3 E_k \star(dx^k \wedge dt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sum_{k=1}^3 B_k dx^k \wedge dt - \sqrt{\varepsilon \mu} E_k dx^i \wedge dx^j, \end{aligned} \quad (52)$$

Therefore, the simplest constitutive relation linking the 2-forms  $F$  and  $G$  can be expressed in terms of the Hodge dual operator  $\star$  as

$$G = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \star F. \quad (53)$$

Indeed, cf. expressions (28),

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^3 B_k dx^k \wedge dt - \varepsilon E_k dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{k=1}^3 H_k dx^k \wedge dt - \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= H \wedge dt - D, \end{aligned} \quad (54)$$

Thus, the geometric *Hodge constitutive relation* (53) associated with the material metric (45) is equivalent to an homogeneous and isotropic material whose constitutive relations are

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \vec{E}_{\text{lab}} \quad \text{and} \quad \vec{H}_{\text{lab}} = \frac{1}{\mu} \vec{B}_{\text{lab}}. \quad (55)$$

Here, the lab vector fields are obtained by contracting<sup>6</sup> the 2-forms  $F$  and  $G$  with the lab frame velocity vector field  $u_{\text{lab}}$ . Then, using the lab metric, the resulting 1-forms are mapped to their corresponding vector fields by means of its associated sharp isomorphism. That is,

$$\vec{E}_{\text{lab}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} F], \quad (56)$$

$$\vec{H}_{\text{lab}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} G] \quad (57)$$

and

$$\vec{B}_{\text{lab}} = -\eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} * F], \quad (58)$$

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \eta^\sharp [\iota_{u_{\text{lab}}} * G]. \quad (59)$$

Notice that, albeit (56)–(59) are vector fields over  $\mathcal{M}$ , at each tangent space these can be directly identified with the spatial vectors in  $\mathbb{R}^3$  of the vector calculus formulation of electromagnetism of Section 2. This conversion is usually missing in the literature of differential forms.

This exercise has provided us with a tool to extract the vectorial fluxes and fields from the Faraday 2-form  $F$  and a material metric  $g$  in any coordinate system. Moreover, the normalized temporal vector  $\frac{\partial}{\partial t}$  plays the role of an *observer* at rest in the lab frame. Indeed, it is the tangent vector to a curve in  $\mathcal{M}$  with no spatial components, i.e. it represents an observer spatially static moving only in the time direction at unit speed [cf. Eq. (44)]. Eqs. (56)–(59) are the fluxes and fields *seen* by a static observer in the lab frame.

Therefore, the required closure relations for Maxwell's equations – the constitutive relation of the medium, Eq. (53) – can be incorporated by introducing a metric tensor representing the material. The metric is the geometry on which the electromagnetic field propagates. This feature was recognized soon after the advent of the general theory of relativity, in which a gravitational

<sup>6</sup> The contraction of a  $p$ -form and the vector field  $v$  is defined as [30]

$$\iota_v \omega [u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}] = p \cdot \omega [v, u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}],$$

where  $\{u_{(i)}\}_{i=1}^{p-1}$  is a set of vector fields on  $\mathcal{M}$ . Thus, the contraction of a  $p$ -form with a vector field yields the  $p-1$ -form

$$\iota_v \omega = p \cdot \omega(v).$$

field appears as an optical medium from the point of view of light propagation. Expressing material properties in terms of *curved* Riemannian manifolds is an active and fertile research area. In the present work we limit ourselves to non-conducting, homogeneous and isotropic media. Moreover, we have seen that the observer plays a fundamental role in recovering the vectorial expressions for the fields. Indeed, the decomposition of the electromagnetic field into its electric and magnetic parts is frame dependent, i.e. different observers measure different electric and magnetic fields.

The advantage of adopting a geometric language in formulating the constitutive relations of electromagnetism lies in its generality. Eq. (53) is observer independent and coordinate free, that is, it can be used in any coordinate system for any reference frame, inertial or not. Eqs. (56)–(59) are expressions for the fields measured by a static observer in the lab frame. However, they can be extended to any reference frame by replacing the static spacetime velocity, represented by the temporal vector  $\frac{\partial}{\partial t}$ , by any other velocity  $u$  such that  $g(u, u) = -1/\varepsilon\mu$ .

## 5. The geometry of moving media

In this section, we will consider the effect of external electromagnetic fields on moving media. To this end, we will assume that the field  $F$  is produced in the lab frame and study the *induced* field  $G$  in a medium described by a metric tensor adapted to the motion of an observer embedded in the material. Such motion defines a coordinate transformation

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (60)$$

mapping the material lab metric  $g$  into its moving version

$$h = \phi^*(g) \quad (61)$$

which, by a fortuitous linguistic accident, is called the *induced* metric by the map  $\phi$ . Every geometric expression obtained in the differential form language preserves its form under such transformations.

Let us begin by considering two simple examples, corresponding to a Galilean and Lorentzian motions, respectively, and then we consider non-inertial motions of the medium, namely, Galilean and relativistic rotating frames. In all cases, we consider a general electromagnetic field 2-form  $F$  [cf. Eqs. (20), (25) and (28)], such that

$$\vec{B}_{\text{lab}} = B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)} \quad \text{and} \quad \vec{E}_{\text{lab}} = E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}. \quad (62)$$

### 5.1. Galilean inertially moving media

Consider a medium moving along the  $x$  direction with constant velocity  $v$ . The change of coordinates associated with such a motion is given, naively, by the Galilean transformation

$$\phi \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + vt \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (63)$$

From the lab's point of view, the medium is described by the material metric in the moving coordinates

$$h = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz + v(dx \otimes dt + dt \otimes dx) - \frac{1}{\varepsilon\mu} (1 - v^2 \varepsilon\mu) dt \otimes dt. \quad (64)$$

Note that in these coordinates, the material metric is well defined only when

$$v^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu}, \quad (65)$$

that is, when the velocity of the motion is less than the speed of light in the medium.

The components of the vectorial electromagnetic fields induced in the moving medium as seen by the static observer in the lab frame [cf. Eqs. (56)–(59)] are

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) + \varepsilon v (B_z \hat{e}_{(y)} - B_y \hat{e}_{(z)}) \quad (66)$$

and

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{B_x}{\mu} \hat{e}_{(x)} + \frac{1}{\mu} (1 - v^2 \varepsilon \mu) (B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}) + \varepsilon v (E_z \hat{e}_{(y)} - E_y \hat{e}_{(z)}) \quad (67)$$

From these expressions we can read the corresponding entries of the constitutive relations (13). That is,

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v^2 \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - v^2 \varepsilon \mu \end{pmatrix} \quad (68)$$

and

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = \varepsilon v \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Observe that, for the purely electric part the medium remains homogeneous and isotropic, whilst for the magnetic field it appears to be anisotropic in the directions orthogonal to the motion. It also appears a non-vanishing magnetoelectric matrix. Thus, from the lab point of view, when the external field is purely electric, the induced magnetic field is perpendicular and rotating around the direction of motion. Similarly, when the externally applied field is purely magnetic, the induced electric field has the same properties as its magnetic counterpart. Such effect depends on the velocity of displacement of the medium with respect to the lab frame, which must satisfy (65). These results are consistent with the classic results of electromagnetism in moving media, where the magnetoelectric effect is characterized by a term proportional to  $\vec{v} \times \vec{B}$  for the electric part and  $\vec{v} \times \vec{E}$  for the magnetic counterpart.

## 5.2. Lorentzian inertially moving media

Same as in the previous example, we consider a motion along the  $x$  direction, but this time by means of the transformation

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} (x + vt) \\ y \\ z \\ (1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} (t + vx \varepsilon_0 \mu_0) \end{pmatrix} \quad (70)$$

In this case, the material metric becomes

$$\begin{aligned} h &= \left( \frac{1 - v^2 \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \\ &+ v \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (dx \otimes dt + dt \otimes dx) \\ &- \frac{1}{\varepsilon \mu} \left( \frac{1 - v^2 \varepsilon \mu}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) dt \otimes dt. \end{aligned} \quad (71)$$

Again, these metric is well defined when (65) is satisfied. Notice that, albeit (45) is indeed a Minkowski metric, the speed of light of the medium is, in general, different from that in vacuum. Indeed

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \leq 1, \quad (72)$$

that is, the speed of light in the medium ought to be less than the speed of light in vacuum. Therefore, although Lorentz transformations leave the vacuum metric (42) invariant, they do change the material metric.

The static observer measures the vectorial electromagnetic fields

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} = & \varepsilon E_x \hat{e}_{(x)} + \varepsilon \left( \frac{1 - v^2 \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) \\ & + v \varepsilon \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (B_z \hat{e}_{(y)} - B_y \hat{e}_{(z)}) \end{aligned} \quad (73)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = & \frac{1}{\mu} B_x \hat{e}_{(x)} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1 - v^2 \varepsilon \mu}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}) \\ & + v \varepsilon \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}{1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (E_z \hat{e}_{(y)} - E_y \hat{e}_{(z)}) \end{aligned} \quad (74)$$

Therefore, in this case, the relative motion between the lab and the medium makes the material appear to the lab observer as

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-v^2 \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon \mu}}{1-v^2 \varepsilon_0 \mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v^2 \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0^2}{\varepsilon \mu}}{1-v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-v^2 \varepsilon \mu}{1-v^2 \varepsilon_0 \mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v^2 \varepsilon \mu}{1-v^2 \varepsilon_0 \mu_0} \end{pmatrix} \quad (75)$$

and

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = v \varepsilon \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \\ 1 - v^2 \varepsilon_0 \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

We see that the permittivity and permeability matrices are now anisotropic, while the magnetoelectric matrix preserves its former structure. Note that in the Newtonian limit, the constitutive relations for the Galilean transformation, Eqs. (68) and (69), are recovered. Notice as well that in the limit when the speed of light in the medium coincides with that of vacuum, the medium becomes isotropic again and the magnetoelectric term vanishes. This shows the invariance of the vacuum with respect to Lorentz transformations.

Hence, what it might have appeared at first glance as a simple exercise in special relativity, it has revealed us that media in relative inertial motion acquires non-trivial electromagnetic properties as seen from another inertial frames. This does not say that the physical reality depends on the coordinates, it merely states that the constitutive relations for a simple medium in the non-covariant vector calculus lab frame are different when the medium is in relative motion.

### 5.3. Uniformly accelerating medium

Now we consider the medium undergoing uniform acceleration. This is the simplest form of non-inertial motion. Let us consider that the motion occurs along the  $z$ -axis with an acceleration  $\alpha$ , as in free fall in a uniform Newtonian gravitational field. The transformation is written as

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ [(\alpha \varepsilon_0 \mu_0)^{-1} + z] \cosh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha t) - (\alpha \varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \\ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} [(\alpha \varepsilon_0 \mu_0)^{-1} + z] \sinh(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha t) - (\alpha \varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

This coordinates are adapted to a uniformly accelerated observer and only cover a subset of the entire  $\mathcal{M}$  referred as the Rindler wedge.

The material metric takes the more elaborate form

$$\begin{aligned}
h = & \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \alpha z - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right] \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \\
& \times (dz \otimes dt + dt \otimes dz) \\
& - \left[ \varepsilon_0\mu_0 \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \alpha^2 z^2 - 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} + \frac{1}{\varepsilon\mu} \right) \alpha z + \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right) \right] \right. \\
& \times \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \\
& - \left. \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} (1 - \alpha z \varepsilon_0\mu_0)^2 \right] dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + \\
& + \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right] dz \otimes dz, \tag{78}
\end{aligned}$$

where we have the more complicated restriction

$$\cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) < \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right)^{-1} \tag{79}$$

for the metric to be well defined.

The induced fields measured by the lab observer are

$$\begin{aligned}
\vec{D}_{\text{lab}} = & \varepsilon \left[ \left( \frac{1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0} \right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \left( \frac{1}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0} \right) \right] (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)}) \\
& + \varepsilon \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \right] (B_y \hat{e}_{(x)} - B_x \hat{e}_{(y)}) \\
& + \frac{\varepsilon E_z}{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0} \hat{e}_{(z)} \tag{80}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\text{lab}} = & \left( \frac{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}{\mu} \right) \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right) \cosh^2(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) + \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right] (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)}) \\
& + \varepsilon \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \sinh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \cosh(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \alpha t) \right] (E_y \hat{e}_{(x)} - E_x \hat{e}_{(y)}) \\
& + \left( \frac{1 + \alpha z \varepsilon_0\mu_0}{\mu} \right) B_z \hat{e}_{(z)}. \tag{81}
\end{aligned}$$

In this case, the constitutive relations are much more complicated. In particular, notice that the medium no longer appears to be homogeneous, there is a linear dependence on the height and, moreover, it also seems to be time dependent. This is not surprising, since now we are *measuring* the induced fields in a non-inertially moving medium from the point of view of an inertial frame. Indeed, when the acceleration  $\alpha$  is zero, we recover our original homogeneous and isotropic medium.

The transformation considered in this section is fully consistent with special relativity. To gain some Newtonian intuition, let us consider the small acceleration limit. In this case, the induced fields take the form

$$\begin{aligned}
\vec{D}_{\text{lab}} \Big|_{\alpha t \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0^2}}} = & \varepsilon (1 - \alpha z \varepsilon_0\mu_0) (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) \\
& + \varepsilon \alpha t \left( 1 - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) (B_y \hat{e}_{(x)} - B_x \hat{e}_{(y)}) \tag{82}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} \Big|_{\alpha t \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0^2}}} &= \frac{1}{\mu} (1 + \alpha Z \varepsilon_0 \mu_0) (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}) \\ &+ \varepsilon \alpha t \left( 1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) (E_y \hat{e}_{(x)} - E_x \hat{e}_{(y)}). \end{aligned} \quad (83)$$

In this limit, the medium becomes isotropic but remains inhomogeneous while the strength of the magnetoelectric effect is modulated by the ratio between the speed of light in the medium and that of the vacuum. The slower the speed of light in the medium, the greater the magnetoelectric effect. Interestingly, in the limit when  $\varepsilon \mu = \varepsilon_0 \mu_0$ , that is, when the moving medium is the vacuum, the medium is once again isotropic with a vanishing magnetoelectric matrix. However, it is still inhomogeneous, i.e.

$$\vec{D}_{\text{lab}} \Big|_{\text{vac}} = \varepsilon \left( \frac{1}{1 + \alpha Z \varepsilon_0 \mu_0} \right) (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) \quad (84)$$

and

$$\vec{H}_{\text{lab}} \Big|_{\text{vac}} = \frac{1}{\mu} (1 + \alpha Z \varepsilon_0 \mu_0) (B_x \hat{e}_{(x)} + B_y \hat{e}_{(y)} + B_z \hat{e}_{(z)}). \quad (85)$$

This result for the vacuum case can be read in its complementary sense, that in which the observer is the one accelerating. In such case, there is an inhomogeneous apparent polarization and magnetization of the vacuum.

#### 5.4. Galilean rotating media

We now study another class of non-inertially moving medium. We shall consider a frame rotating in a Galilean fashion, followed by a rotating frame consistent with the tenets of relativity. For simplicity, let us assume that the rotation is about the  $z$  axis. Therefore, in this section we work in with the metrics (42) and (45), transformed into cylindrical coordinates, that is

$$\eta = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} dt \otimes dt \quad (86)$$

and

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon \mu} dt \otimes dt, \quad (87)$$

respectively.

In this coordinates, the electromagnetic 2-form is written as

$$\begin{aligned} F &= E_r dr \wedge dt + r^2 E_\varphi d\varphi \wedge dt + E_z dz \wedge dt \\ &+ r (B_z dr \wedge d\varphi - E_\varphi dr \wedge dz + E_r d\varphi \wedge dz), \end{aligned} \quad (88)$$

where

$$E_r = E_y \sin(\varphi) + E_x \cos(\varphi) \quad (89)$$

$$E_\varphi = E_y \cos(\varphi) - E_x \sin(\varphi) \quad (90)$$

and

$$E_z = E_z, \quad (91)$$

while

$$B_r = B_x \cos(\varphi) + B_y \sin(\varphi), \quad (92)$$

$$B_\varphi = B_y \cos(\varphi) - B_x \sin(\varphi), \quad (93)$$

and

$$B_z = B_z. \quad (94)$$

Thus, it is straightforward to verify that

$$\vec{E}_{\text{lab}} = E_r \hat{e}_{(r)} + E_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + E_z \hat{e}_{(z)} \quad \text{and} \quad \vec{B}_{\text{lab}} = B_r \hat{e}_{(r)} + B_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + B_z \hat{e}_{(z)}. \quad (95)$$

The Galilean transformation corresponding to a uniformly rotating frame with angular velocity  $\omega$  is given by

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi + \omega t \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (96)$$

The metric for the moving medium becomes

$$h = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + r^2 \omega (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi) + dz \otimes dz - \left( \frac{1}{\varepsilon\mu} - r^2 \omega^2 \right) dt \otimes dt. \quad (97)$$

Now the coordinates covering  $\mathcal{M}$  must satisfy is the restriction

$$r^2 \omega^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu}. \quad (98)$$

This is a constraint implying that the tangential velocity cannot be larger than the speed of light in the medium.

Now, the induced fields are

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \left( E_r \hat{e}_{(r)} + E_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + E_z \hat{e}_{(z)} \right) + \varepsilon r \omega (B_r \hat{e}_{(z)} - B_z \hat{e}_{(r)}) \quad (99)$$

and

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{B_\varphi}{\mu} \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + \frac{1}{\mu} (1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu) (B_r \hat{e}_{(r)} + B_z \hat{e}_{(z)}) + r \varepsilon \omega [E_r \hat{e}_{(z)} - E_z \hat{e}_{(r)}]. \quad (100)$$

To obtain the constitutive matrices as in the previous case, we consider the inverse cylindrical coordinates transformation. Thus, in Cartesian coordinates we have

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon (E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}) - \varepsilon \omega [B_z x \hat{e}_{(x)} + B_z y \hat{e}_{(y)} - (B_x x + B_y y) \hat{e}_{(z)}] \quad (101)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = & \frac{1}{\mu} [(1 - x^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_x \hat{e}_{(x)} + (1 - y^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_y \hat{e}_{(y)} + (1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu) B_z \hat{e}_{(z)}] \\ & - \varepsilon \omega [E_z x \hat{e}_{(x)} + E_z y \hat{e}_{(y)} - (E_x x + E_y y) \hat{e}_{(z)}] \\ & - xy \omega^2 \varepsilon (B_y \hat{e}_{(x)} + B_x \hat{e}_{(y)}) \end{aligned} \quad (102)$$

Therefore, the constitutive relations are expressed as

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$\bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 1 - x^2 \omega^2 \varepsilon \mu & -xy \omega^2 \varepsilon \mu & 0 \\ -xy \omega^2 \varepsilon \mu & 1 - y^2 \omega^2 \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - r^2 \omega^2 \varepsilon \mu \end{pmatrix}, \quad (104)$$

while, the magnetoelectric matrix is given by

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = -\varepsilon\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

This constitutive matrices describe a trivial permittivity but a much more complex permeability which, in this case, is inhomogeneous and anisotropic. This, however, is only noticeable far from the axis of rotation, when the tangential velocity approaches the speed of light in the medium. However, note that the magnetoelectric matrix is non-negligible for any angular velocity.

### 5.5. Relativistic rotating media

Considering the material rotating as before, but now, we will transform the coordinates of the moving medium taking into account special relativity for the rotation [35]. In this case, for a given angular velocity  $\omega$ , there is a maximum distance  $R$  to the axis of rotation. This corresponds to the upper bound for the radial coordinate such that the norm of the tangential velocity is less than the speed of light in vacuum. Here,  $R$  is a metric parameter. Each value of  $R$  and  $\omega$  yield a different metric. These coordinates only cover a region of Minkowski spacetime and there is a horizon for each value of  $R$  and  $\omega$ . Thus, let us consider the transformation

$$\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}} \\ (\varphi - \omega t)(1 - R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} \\ z \\ t(1 - R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (106)$$

As many authors have noted, this is not the only possibility for describing a rotating reference frame. This is indeed a timely problem and there are numerous presentations of the paradoxes and issues associated with relativistic rotating frames.

The induced material metric takes the form

$$h = (1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0) dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + r^2\omega (d\varphi \otimes dr + dt \otimes d\varphi) + dz \otimes dz - \left[ \frac{1}{\varepsilon\mu} - R^2\omega^2 \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right) \right] dt \otimes dt. \quad (107)$$

Note that this metric has a richer structure than our previous example. For instance, the parameters  $R$  and  $\omega$  must satisfy the restriction that the tangential velocity never exceeds that of light in vacuum, that is

$$R^2\omega^2 < \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (108)$$

In addition, we can see that these coordinates only cover the region where

$$r^2\omega^2 < \frac{1}{\varepsilon\mu} - R^2\omega^2 \left( \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu} \right). \quad (109)$$

Such bound can be regarded as the maximum tangential speed the material can attain. Moreover, note that in the limit where the tangential velocity  $R\omega$  coincides with the speed of light in the vacuum, the region degenerates to a point. However, in the non-relativistic limit, namely, when  $R^2\omega^2 \ll 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , (107) reduces to the Galilean rotating metric (107). Finally, as expected, in the limit when  $\omega$  vanishes we return to the static metric (86).

The vectorial induced electromagnetic fields measured in the lab frame are

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} = \varepsilon \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) E_r \hat{e}_{(r)} + E_\varphi \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} + E_z \hat{e}_{(z)} \right] \\ + \varepsilon\omega r \left[ B_r \hat{e}_{(z)} - \left( \frac{1}{1 + R^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} \right) B_z \hat{e}_{(r)} \right] \end{aligned} \quad (110)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = & \frac{1}{\mu} \left[ 1 - R^2 \omega^2 \varepsilon \mu \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) \right] (B_r \hat{e}_{(r)} + B_z \hat{e}_{(z)}) + \frac{B_\varphi}{\mu} \frac{\hat{e}_{(\varphi)}}{r} \\ & + \varepsilon \omega r \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) E_r \hat{e}_{(z)} - E_z \hat{e}_{(r)} \right]. \end{aligned} \quad (111)$$

Again, it is not difficult to express these fields in Cartesian coordinates

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} \left( \frac{\varepsilon}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) & \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \omega^2 y^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) E_x \hat{e}_{(x)} + \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \omega^2 x^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) E_y \hat{e}_{(x)} \right] \\ & + \varepsilon E_z \hat{e}_{(z)} - \varepsilon \omega^2 xy \left( \frac{R^2 \varepsilon_0 \mu_0}{r^2 (1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0)} \right) (E_y \hat{e}_{(x)} + E_x \hat{e}_{(y)}) \\ & - \varepsilon \omega \left[ \left( \frac{1}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (xB_z \hat{e}_{(x)} + yB_z \hat{e}_{(y)}) - (xB_x + yB_y) \hat{e}_{(z)} \right] \end{aligned} \quad (112)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} = & \frac{1}{r^2 \mu} \left[ \omega^2 \varepsilon \mu (x^2 y^2 - x^4) + (1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0) x^2 \right] B_x \hat{e}_{(x)} \\ & + \frac{1}{r^2 \mu} \left[ \omega^2 \varepsilon \mu (x^2 y^2 - y^4) + (1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0) y^2 \right] B_y \hat{e}_{(y)} \\ & + \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) \left[ 1 - r^2 \varepsilon \mu \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) \right] B_z \hat{e}_{(z)} \\ & - \varepsilon \omega^2 xy \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right) (B_y \hat{e}_{(x)} + B_x \hat{e}_{(y)}) \\ & - \varepsilon \omega \left[ (xE_z \hat{e}_{(x)} + yE_z \hat{e}_{(y)}) - \left( \frac{1}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \right) (xE_x + yE_y) \hat{e}_{(z)} \right]. \end{aligned} \quad (113)$$

This frame yields a highly non-trivial material medium as seen from the lab frame. In particular, note that in all cases the behavior of the magnetic part is significantly different from the electric one. Furthermore, this example shows that the magnetoelectric matrices can differ. Indeed

$$\bar{\zeta} = -\varepsilon \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \\ 0 & 0 & \frac{y}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix} \quad (114)$$

whilst

$$\bar{\chi} = -\varepsilon \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ \frac{-x}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} & \frac{-y}{1 + R^2 \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Hence, the lesson this exercise exhibits is that, while the medium at rest can indeed be as simple as possible, its motion renders a more complicated material structure. That is, we can think of the moving material as an *equivalent medium* at rest in the lab frame but with a much more elaborate constitutive relation. Moreover, the calculations are simple contractions and canonical mappings between differential forms and vector fields, showing the power of the geometric formalism in obtaining the non-covariant components of the induced fields in  $\mathbb{R}^3$  along with their constitutive matrices.

## 6. A non-trivial medium

For completeness, we explore a non-trivial medium, i.e. one whose metric yields a non-zero curvature and which has been studied in the context of transformation optics and analogue

gravity [36]. Let us consider a fisheye lens, an optical medium whose geometry is equivalent to that of the Einstein universe

$$g_{\Lambda} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz - \frac{1}{\varepsilon\mu} \left[ \frac{k\Lambda}{16} \left( \frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2 \right)^2 \right] dt \otimes dt \quad (116)$$

where  $k$  is a constant representing the Gaussian curvature of the space and  $\Lambda$  is the cosmological constant [37]. Note that this geometry is not flat, as in the previous cases. In particular, its curvature is completely specified by its Ricci scalar

$$S = -\frac{12}{\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (117)$$

The metric (116) is written in isotropic cartesian coordinates, allowing us to read directly the effective velocity of light in the medium [cf. Eq. (45)]. In particular, the refractive index is

$$n^2 = \frac{9k\Lambda}{S^2} \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}. \quad (118)$$

In this case, the geometry corresponds to a non-homogeneous medium, as can be directly verified by the corresponding rest frame induced fields

$$\vec{D}_{\text{lab}} = \frac{4\varepsilon}{\left(\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2\right)\sqrt{k\Lambda}} \vec{E}_{\text{lab}} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon \vec{E}_{\text{lab}} \quad (119)$$

and

$$\vec{H}_{\text{lab}} = \frac{\left(\frac{4}{k} + x^2 + y^2 + z^2\right)\sqrt{k\Lambda}}{4\mu} \vec{B}_{\text{lab}} = -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \vec{B}_{\text{lab}}. \quad (120)$$

Thus, the lab frame permittivity and permeability matrices are

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{\mu}^{-1} = -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

The transformations studied throughout the manuscript render the algebraic expressions for the induced metric and fields rather cumbersome with little conceptual value. It is a mere exercise in differential geometry to obtain them. Moreover, since the expressions presented here are coordinate free, we are guaranteed that all the coordinate expressions are indeed self consistent within the formalism. Nonetheless, let us consider the Galilean transformation to a rotating frame presented in Section 5.4. In this frame, the induced fields as seen by the lab observer become

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\text{lab}} &= -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \varepsilon [E_x \hat{e}_{(x)} + E_y \hat{e}_{(y)} + E_z \hat{e}_{(z)}] \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon [-B_z (x \hat{e}_{(x)} + y \hat{e}_{(y)}) + (B_x x + B_y y) \hat{e}_{(z)}] \end{aligned} \quad (122)$$

and

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{lab}} &= -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ \left( 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 + \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \right) B_y - \left( \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy \right) B_x \right] \hat{e}_{(y)} \\ &\quad - \frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ \left( 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 \right) B_x - \left( \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy \right) B_y \right] \hat{e}_{(x)} \\ &\quad - \frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \left[ 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \right] B_z \hat{e}_{(z)} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon [-E_z (x \hat{e}_{(x)} + y \hat{e}_{(y)}) + (E_x x + E_y y) \hat{e}_{(z)}]. \end{aligned} \quad (123)$$

Again, we can simply read the corresponding constitutive matrices for the moving medium as seen in the lab frame. Thus, we see that the permittivity matrix remains the same as in (121), while the permeability matrix becomes

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}^{-1} \\ &= -\frac{3}{\mu} \frac{\sqrt{k\Lambda}}{S} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 & \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy & 0 \\ \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu xy & 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 \varepsilon \mu x^2 + \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{S^2}{9k\Lambda} \omega^2 (x^2 + y^2) \varepsilon \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (124)$$

Note that the non-trivial terms in this expression are quadratic in the angular velocity. Therefore, for small tangential velocities compared with the speed of light in the medium the permeability reduces to that in (121).

Finally, similar to Eq. (105) in 5.4, the magnetoelectric matrices are

$$\bar{\zeta} = \bar{\chi} = -\frac{1}{3} \frac{S}{\sqrt{k\Lambda}} \omega \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & -y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

In this last example, we obtained – as expected – similar results as those of 5.4. However, note that the curvature plays a central role in the constitutive relations. Therefore, this exercise allows us to see the effectiveness of the formalism in obtaining explicit coordinate expressions for the constitutive matrices of a medium moving in an arbitrary reference frame. Finally, note that for the slow velocity regime the refractive index remains unchanged, in spite the magnetoelectric matrices are not negligible.

## 7. Closing remarks

In this work, it was our aim to present to a broader readership the geometric techniques in electromagnetic theory. In particular, we addressed a subtle and timely subject, that is, the transformation of the constitutive relations for arbitrarily moving media. We considered the case of familiar motions in both, the more intuitive Galilean framework and the one consistent with the tenets of special relativity, whose symmetry is precisely that stemming from electromagnetism.

We began with a brief summary of college electromagnetism followed by its modern formulation in terms of differential forms. We noted that Maxwell's empirical postulates are of topological nature on a differentiable manifold. There is no need of an additional geometric structure. However, as a field theory problem, i.e. determining the fields from the known external sources, we need a link between the two postulates [cf. Eqs. (15) and (16)]. In the simplest case, such a link is linear. It has been argued that it may appear as a curvature-like tensor [7,8]. Such approach, is more general than the metric based considerations followed in this manuscript. Nevertheless, with no canonical way of mapping differential forms to vector fields, it is conceptually harder and there would be no natural way to recover the vectorial components of the electromagnetic fields. Thus, in this manuscript, we postulated the constitutive relations through the Hodge duality associated with the metric characterizing the medium [17]. We provided explicit formulae for the spatial vector fields (in  $\mathbb{R}^3$ ) measured by the lab observer. This connection with the old fashioned – yet widely used – vector calculus formulation of electromagnetism in media is, to the best of our knowledge, not widely known. Moreover, the calculation is coordinate independent and can be adapted to an arbitrary observer.

We used the expressions of the lab frame spatial vector fields, Eqs. (56)–(59), to compute the induced fields in a homogeneous and isotropic medium when it is set in distinct types of motion. Such motions are given in terms of changes of coordinates acting on the material metric, alone. The induced fields  $G$  are computed by applying the Hodge constitutive relation of the transformed

metric to the untransformed external 2-form  $F$ , Eq. (53), and then contracting the result with the lab frame velocity and using the lab metric sharp isomorphism to obtain the desired vectors. A similar 'mixed' approach for the vector calculus formulation can be found in Section 9-5 of [38].

As it may appear that other efforts have been successful in describing the electromagnetic fields when the medium is in motion [39,40], we tackled a different problem. In this work, we exhibited the explicit form of the induced electromagnetic fields *measured* by a static observer when the medium moves in an arbitrary fashion. Moreover, we recovered the coordinate expressions for the permittivity, permeability and magnetoelectric matrices for non-inertial motions even for non-trivial media.

In the case of the Galilean inertially moving media, for the purely electric part, the permittivity of the medium remains homogeneous and isotropic while there is also an induced magnetic field rotating around the direction of the motion and whose magnitude depends on the velocity of displacement of the medium. This is the magnetoelectric effect and is expressed as a non-vanishing magnetoelectric matrix [cf. Eq. (13)]. In contrast, the purely magnetic field generates an anisotropic permeability matrix and, similarly to the electric case, a rotating induced electric field is obtained. For the Lorentzian transformation of coordinates, both matrices, permittivity and permeability became anisotropic, while the magnetoelectric matrix is merely a rescaling from its Galilean counterpart. In the limit when the speed of light in the medium coincides with the one in vacuum, the medium returns to be isotropic and the magnetoelectric matrix vanishes, showing the invariance of the vacuum with respect to Lorentz transformations.

We also considered a medium undergoing uniform acceleration. This resulted in a material which is inhomogeneous, anisotropic and time-dependent. This showed us that, even in the simplest form of non-inertial motion, the medium becomes already very complex from the point of view of an inertial frame of reference.

In the case of a rotating medium, for the Galilean-like transformation, the permittivity matrix remained the same as in the static lab frame. However, as in the slow acceleration case, the permeability matrix is inhomogeneous and anisotropic. The magnetoelectric matrix is also inhomogeneous and its effects can be observed for any angular velocity  $\omega$ . If we also take into account special relativity in the definition of the transformation, the rotating medium yields a highly non-trivial equivalent material as seen from the lab's rest frame.

Hence, this work presents an algebraic method to obtain the constitutive matrices for moving media as measured by an inertial observer. In particular, this tool provides us, in a completely covariant manner, with a way to compute the induced vector fields on such media. Moreover, this same methodology can be applied to more complicated materials – those described by curved geometries – in arbitrary motion without further modification.

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Acknowledgment

DGP is funded by a CONACYT, Mexico Ph.D. Scholarship CVU 425313.

### References

- [1] W. Gordon, *Ann. Phys.* 377 (22) (1923) 421–456.
- [2] J. Ehlers, F. Pirani, A. Schild, *Gen. Relativity Gravitation* 44 (2012) 1587–1609.
- [3] F. de Felice, *Gen. Relativity Gravitation* 2 (4) (1971) 347–357.
- [4] V. De Lorenci, R. Klippert, *Phys. Rev. D* 65 (6) (2002) 064027.
- [5] M. Novello, S.P. Bergliaffa, J. Salim, V. De Lorenci, R. Klippert, *Classical Quantum Gravity* 20 (5) (2003) 859.
- [6] F. Belgiorno, S. Cacciatori, G. Ortenzi, L. Rizzi, V. Gorini, D. Faccio, *Phys. Rev. D* 83 (2) (2011) 024015.
- [7] F.W. Hehl, Y.N. Obukhov, *Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric*, Vol. 33, Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] F.A. Asenjo, C. Erices, A. Gomberoff, S.A. Hojman, A. Montecinos, *Opt. Express* 25 (22) (2017) 26405–26416.

- [9] U. Leonhardt, T.G. Philbin, *New J. Phys.* 8 (10) (2006) 247.
- [10] N.I. Zheludev, *Science* 328 (5978) (2010) 582–583.
- [11] S. Schuster, M. Visser, *Phys. Rev. D* 96 (12) (2017) 124019.
- [12] R.T. Thompson, *Phys. Rev. D* 97 (6) (2018) 065001.
- [13] S. Schuster, M. Visser, *Classical Quantum Gravity*.
- [14] D.R.S.J.B. Pendry, D. Schurig, *Science* 312 (2006) 1780–1782.
- [15] C.W. Misner, J.A. Wheeler, *Ann. Physics* 2 (6) (1957) 525–603.
- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, et al., *Gravitation*, Macmillan, 1973.
- [17] D. Baldomir, P. Hammond, *Geometry of Electromagnetic Systems*, no. 39, Oxford University Press, 1996.
- [18] A. Bossavit, É. De France, *Computational Electromagnetism and Geometry*.
- [19] U. Leonhardt, T. Philbin, *Geometry and Light: The Science of Invisibility*, Courier Corporation, 2010.
- [20] A. Stenvall, T. Tarhasaari, F. Grilli, P. Raunonen, M. Vojenčiak, M. Pellikka, *Cryogenics* 53 (2013) 135–141.
- [21] Ø. Grøn, *Relativity in Rotating Frames*, Springer, 2004, pp. 285–333.
- [22] G. Rizzi, M.L. Ruggiero, *Relativity in Rotating Frames: Relativistic Physics in Rotating Reference Frames*, Vol. 135, Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] É.ourgoulhon, *Special Relativity in General Frames*, Springer, 2016.
- [24] W.C. Röntgen, *Ann. Phys.* 271 (10) (1888) 264–270.
- [25] M. Fiebig, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 38 (8) (2005) R123.
- [26] N.A. Spaldin, R. Ramesh, *Nature Mater.* 18 (3) (2019) 203.
- [27] M. Dahl, *Prog. Electromagn. Res.* 46 (2004) 77–104.
- [28] C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Elsevier, 1988.
- [29] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, CRC Press, 2003.
- [30] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, New York, London, 1963.
- [31] P.W. Gross, P.W. Gross, P.R. Kotiuga, R.P. Kotiuga, *Electromagnetic Theory and Computation: A Topological Approach*, Vol. 48, Cambridge University Press, 2004.
- [32] K.F. Warnick, P. Russer, *Prog. Electromagn. Res.* 148 (2014) 83–112.
- [33] A. Bossavit, *IEE Proc. A* 135 (8) (1988) 493–500.
- [34] M. Pellikka, S. Suuriniemi, L. Kettunen, C. Geuzaine, *SIAM J. Sci. Comput.* 35 (5) (2013) B1195–B1214.
- [35] D.G. Ashworth, P.A. Davis, *J. Phys. A: Math. Gen.* 12 (9).
- [36] D. Faccio, F. Belgiorno, et al. (Eds.), *Analogue Gravity Phenomenology*, Vol. 870, Springer.
- [37] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, second ed., Cambridge University Press, 2003.
- [38] W.K. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Courier Corporation, 2005.
- [39] M. de Montigny, G. Rousseaux, *Eur. J. Phys.* 27 (2006) 755–768.
- [40] G. Rousseaux, *Europhys. Lett.* 84.

# Light propagation through optical media using metric contact geometry

Cite as: J. Math. Phys. **63**, 073504 (2022); doi: 10.1063/5.0087143

Submitted: 1 February 2022 • Accepted: 20 June 2022 •

Published Online: 18 July 2022



View Online



Export Citation



CrossMark

D. García-Peláez,<sup>1,2,a)</sup>  C. S. López-Monsalvo,<sup>1</sup>  and A. Rubio Ponce<sup>1,3</sup> 

## AFFILIATIONS

<sup>1</sup>Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, Avenida San Pablo Xalpa 180, Azcapotzalco, Reynosa Tamaulipas, 02200 Ciudad de México, Mexico

<sup>2</sup>Universidad Panamericana, Tecoyotitla 366, Col. Ex Hacienda Guadalupe Chimalistac, 01050 México D.F., Mexico

<sup>3</sup>Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, AP 14740, CP 07300 Ciudad de México, Mexico

<sup>a)</sup>Author to whom correspondence should be addressed: [dgarciap@up.edu.mx](mailto:dgarciap@up.edu.mx)

## ABSTRACT

In this work, we show that the orthogonality between rays and fronts of light propagation in a medium is expressed in terms of a suitable metric contact structure of the optical medium without boundaries. Moreover, we show that considering interfaces (modeled as boundaries), orthogonality is no longer fulfilled, leading to optical aberrations and, in some cases, total internal reflection. We present some illustrative examples of this latter point.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0087143>

## I. INTRODUCTION

Geometric optics has acquired a renewed interest in theoretical and applied physics. The inception of geometric techniques and methods to control the path of light inside a medium provided us with the foundation of new material science. Arising in the context of gravitational lensing, the geometric studies regarding the principles of Fermat and Huygens brought a new perspective in the understanding and modeling of wave phenomena in non-trivial media.

Soon after the advent of general relativity, it was observed that the gravitational field *bends* the path followed by a light ray. This was confirmed by Eddington after noting that the apparent position of the stars is shifted from their expected position in the sky when observed during a solar eclipse. This *bending* phenomenon is analogous to the deviation of light rays while traversing a medium whose refractive index changes from one place to the other. In this sense, it was shown that a class of optical media can be modeled by means of a metric tensor encoding its electromagnetic properties.<sup>1–3</sup> Furthermore, this analogy has evolved into the very active field of transformation optics, where the techniques and tools of differential geometry—which have been insightful in gravitational physics—have found its way into the more applied area of material science.<sup>4–7</sup> In addition, this has also been used in modeling analog gravitational spacetimes, such as black holes and cosmological solutions,<sup>8–11</sup> or in approximating curved spaces by  $N$ -dimensional *simplices* in order to describe light propagation on them.<sup>12</sup>

Fermat's principle poses a well-known problem in the calculus of variations. In the non-relativistic setting—where the notion of time is *absolute* and *universal*—it states that light travels between two given *spatial* locations following a path minimizing a time functional. Such a perspective is clearly untenable in the context of general relativity, where it is commonly replaced by the assumption that the path taken by light in traveling from one location to another corresponds to a null geodesic. However, albeit it remains a variational problem, its precise formulation is far more elaborate (see Theorem 7.3.1 in Ref. 13).

Similarly (cf. Theorem 7.1.2 in Ref. 13), Huygens' principle is centered in the idea of light emissions being simultaneous for different observers at each moment in time.<sup>14</sup> In this way, light emission is described by well-localized wavefronts as they travel through three-dimensional space. In the relativistic setting, the electromagnetic field at a precise event in spacetime depends on initial conditions originated from its past null cone.<sup>15</sup> This has led to explore different wave phenomena where Huygens' principle is not fulfilled, most of which are due to dissipation processes<sup>16,17</sup> where the wave distribution has no converging tails.

In recent years, contact geometry has become a unifying framework for various physical theories, e.g., it provides a solid foundation for thermodynamics, non-conservative classical mechanics, and electromagnetic fields, among other applications.<sup>18–24</sup> In particular, it has been used to exhibit an explicit correspondence between principles of Fermat and Huygens.<sup>25</sup> In this sense, the aim of this work is to explore the use of contact transformations in the description of light propagation in *optical media*.

Here, we assume that an optical medium can be represented by a Riemannian manifold  $(\mathcal{B}, g)$ , where  $\mathcal{B}$  is considered to be the space occupied by a material embedded in spacetime, while  $g$  is its corresponding optical metric. Moreover, the geodesic flow in its unitary tangent bundle can be represented by a contact transformation acting on its space of contact elements. This fact allows us to describe the wavefront evolution in an optical medium solely in terms of the contact transformation and to reconstruct the geodesic flow from the Reeb vector field. This provides us with a way of constructing wavefronts in optical media without directly solving the wave equation. This approach is particularly useful in exploring the relationship between rays and fronts as they move across interfaces. While this is simply expressed as Snell's law in homogeneous materials, we will show that this construction helps in visualizing phenomena such as aberration and total internal reflection in a broader class of geometries. Such techniques may prove to be useful from astrophysics, as light propagates through the intergalactic/galactic media, to the geometric optics of interfaces.

This article is structured as follows. In Sec. II, we recall the construction of a material manifold as the quotient space given by the orbits of the *static* lab observer. Then, in Sec. III, we establish the relation between the unitary tangent bundle and the space of contact elements. In Secs. IV–VI, we provide three specific examples for wavefront evolution in an optical medium by means of a contact transformation. The first two are optical media with the Euclidian geometry in two and three dimensions. The results agree with Fermat's principle and recreate Snell's law of refraction. The third example is a two-dimensional optical medium endowed with a hyperbolic geometry.

## II. THE MATERIAL MANIFOLD

To model an optical medium, we will use a Riemannian manifold  $(\mathcal{B}, g)$  submersed in a bi-metric Lorentzian spacetime  $(M, g_0, \tilde{g})$ , where  $g_0$  is the background vacuum spacetime metric, while  $\tilde{g}$  represents the metric encoding the material properties of an optical medium. In this setting, the four velocity of the static observer in the *lab frame*  $u \in TM$  satisfies<sup>7</sup>

$$g_0(u, u) = -1 \quad \text{and} \quad \tilde{g}(u, u) = -\frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

where  $n > 1$  is the refractive index of the medium. In this way, the speed of light in the medium is clearly less than that in the vacuum background spacetime. We use the vacuum metric  $g_0$  to raise lower indices by means of musical isomorphisms,

$$g_0^\flat : TM \longrightarrow T^*M \quad \text{and} \quad g_0^\sharp : T^*M \longrightarrow TM. \quad (2)$$

Every non-spacelike vector field  $w \in TM$  can be decomposed in terms of the *optical metric*  $\tilde{g}$  as

$$w = \text{Hor}(w) + \text{Ver}(w), \quad (3)$$

where  $\text{Hor}(w)$  and  $\text{Ver}(w)$  represent the transverse and parallel components of  $w$  with respect to the lab frame  $u$ , respectively. Thus, every null vector field  $v$  such that

$$\text{Ver}(v) = \Omega u \quad (4)$$

for some non-vanishing function  $\Omega$  on  $M$  satisfies

$$\tilde{g}(v, v) = \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) + \tilde{g}(\text{Ver}(v), \text{Ver}(v)) = \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) + \tilde{g}(\Omega u, \Omega u) = \tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) - \frac{\Omega^2}{n^2} = 0 \quad (5)$$

so that

$$\tilde{g}(\text{Hor}(v), \text{Hor}(v)) = \frac{\Omega^2}{n^2}. \quad (6)$$

Now, let us consider the quotient manifold defined by the orbits of the lab frame four-velocity, namely,

$$\mathcal{B} = M/G_u, \quad (7)$$

where  $G_u$  represents the translation group associated with the flow of the vector field  $u$ . One can equip this manifold with a Riemannian metric  $g$  such that for every null vector field  $v$  satisfying (4),

$$g(\Pi_* v, \Pi_* v) = \frac{\Omega^2}{n^2}, \quad (8)$$

where  $\Pi : M \longrightarrow \mathcal{B}$  is a local trivialization. The pair  $(\mathcal{B}, g)$  is called a *material manifold* (Fig. 1) (cf. the definition of a body manifold in Refs. 26 and 27).

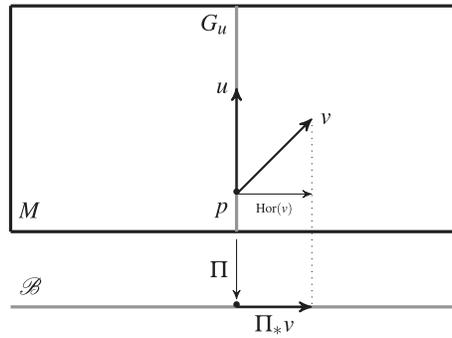


FIG. 1. Material manifold.

The optical metric can be decomposed in terms of the material manifold Riemannian metric and the observer’s four velocity as

$$\tilde{g} = g \circ (\Pi_* \otimes \Pi_*) - \frac{1}{n^2} u^b \otimes u^b, \tag{9}$$

where  $u^b \equiv g_0^b(u)$  [cf. Eq. (2)]. In the rest of this article, we will consider the normalization factor  $\Omega = 1$ . Thus, expression (9) corresponds to the well-known Gordon optical metric.<sup>11</sup>

In Sec. III, we will consider the unitary tangent bundle  $ST\mathcal{B}$  together with  $PT^*\mathcal{B}$ , representing the co-tangent bundle of  $\mathcal{B}$  with the zero-section  $0_{\mathcal{B}}$  removed.<sup>28</sup> This allows us to represent the dual notions of light rays and wavefronts on the optical medium  $(\mathcal{B}, g)$ .<sup>2,28,29</sup> The former one represents light rays as the projected null geodesic flow of  $\tilde{g}$ , while the elements of  $PT^*\mathcal{B}$  are the tangent planes to the wavefronts.<sup>30</sup> Moreover, there is a one-to-one correspondence between the elements of these two manifolds, relating a geodesic flow in the unitary tangent space to a contact transformation in the space of contact elements.<sup>25</sup> Finally, since contact transformations are symmetries of a contact distribution, its associated contact elements remain invariant when projected to the base manifold  $\mathcal{B}$  (Fig. 1).

### III. MATHEMATICAL STRUCTURES FOR RAYS AND FRONTS

In this section, we explicitly exhibit the dual nature of light rays and wavefronts from the contact geometric perspective. Let us consider the tangent bundle  $T\mathcal{B}$  of an  $m$ -dimensional material manifold  $(\mathcal{B}, g)$ . Its associated unitary tangent bundle is defined as

$$ST\mathcal{B} \equiv \{v \in T\mathcal{B} \mid \mathbf{g}(v, v) = 1\}, \tag{10}$$

where  $\mathbf{g}$  is the bundle metric of  $g$ <sup>31</sup> (see Exercise 2 of Chapter 3, Sec. 4 in Ref. 34). It follows from the unitary constraint that

$$\dim(ST\mathcal{B}) = 2m - 1, \tag{11}$$

with  $m$  being the dimension of  $\mathcal{B}$ . Indeed, the defining property in (10) corresponds to the zero level set of a function on  $T\mathcal{B}$ , namely,  $\mathbf{g}(v, v) - 1 = 0$ .

Similarly, the unitary co-tangent bundle  $ST^*\mathcal{B}$  is defined as

$$ST^*\mathcal{B} = \{p \in T^*\mathcal{B} \mid \mathbf{g}^{-1}(p, p) = 1\}. \tag{12}$$

Note that the restriction of  $ST^*\mathcal{B}$  to  $PT^*\mathcal{B}$  corresponds to a ray-optical structure—as defined by Perlick (see Definition 5.1.1 and Proposition 5.1.1 in Ref. 13)—that is,

$$\mathcal{N} = \{p \in PT^*\mathcal{B} \mid \mathbf{g}^{-1}(p, p) = 1\}. \tag{13}$$

The co-tangent bundle  $T^*\mathcal{B}$  carries a natural symplectic structure, that is, a non-degenerate, closed two-form  $\omega$ . Consider a vector field  $L \in T(T^*\mathcal{B})$  such that

$$\mathcal{L}_L \omega = \omega, \tag{14}$$

where  $\mathcal{L}$  denotes the Lie derivative and  $L$  is called a Liouville vector field. One can define a one-form  $\lambda \in T^*(T^*\mathcal{B})$  generating the symplectic structure in terms of the Liouville vector field as

$$\lambda \equiv i_L \omega. \tag{15}$$

It follows from Cartan’s identity and definition (15) that

$$\mathcal{L}_L \omega = i_L d\omega + di_L \omega = -di_L \omega = -d\lambda = \omega. \tag{16}$$

In this way, one can define a contact one-form for  $ST^* \mathcal{B}$ , namely,

$$\eta = i^*(\lambda). \tag{17}$$

Here,  $i^* : T^*(T^* \mathcal{B}) \rightarrow T\mathcal{N}$  is the pullback induced by the inclusion map  $i : \mathcal{N} \rightarrow T^* \mathcal{B}$ . Let  $\mathcal{D} = \ker(\eta)$  be the contact distribution generated by  $\eta$ . Then,  $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$  is a *contact manifold*, usually referred to as the *space of contact elements* or the *contact bundle* of  $\mathcal{B}$ . The restricted bundle projection

$$\pi|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \subset T^* \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \tag{18}$$

maps the hyperplanes of the contact structure  $\mathcal{D}$  to the contact elements of  $\mathcal{B}$ . Note that the vector fields tangent to affinely parameterized geodesics on  $(\mathcal{B}, g)$  are sections of  $ST\mathcal{B}$ . In this sense, we can establish a relation between  $ST\mathcal{B}$  and  $\mathcal{N}$  by demanding that

$$g^{-1}(\Pi_* \circ i_*)(\xi) = \frac{1}{n}(\pi_*(v)), \tag{19}$$

where  $v \in ST\mathcal{B}$ ,  $n$  is a non-vanishing real number, and  $\xi$  is the *Reeb* vector field defined by

$$i_\xi \eta = 1 \quad \text{and} \quad i_\xi d\eta = 0. \tag{20}$$

Thus, the required condition (19) expresses that the geodesics of  $(\mathcal{B}, g)$  are transverse to  $\mathcal{N}$  and that  $\xi$  is the spatial part of a null vector field in  $TM$  [cf. Eq. (8)]. Indeed,

$$\mathbf{g}(\xi, \xi) = g(\xi|_x, \xi|_x) = \frac{1}{n^2} \quad \text{for each } x \in \mathcal{B}. \tag{21}$$

This, however, does not imply that the light rays should be metric orthogonal to  $\mathcal{N}$ . The orthogonality condition implies the existence of an *almost contact structure*

$$\phi : T\mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}, \tag{22}$$

where

$$\phi^2 = -\mathbb{1} + \eta \otimes \xi \quad \text{and} \quad \eta \circ \phi = 0, \tag{23}$$

such that  $(\mathcal{N}, \eta, \mathbf{g}|_{\mathcal{N}})$  is a contact metric manifold. That is, the restricted bundle metric  $\mathbf{g}|_{\mathcal{N}} = i^*(\mathbf{g})$  can be written as

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}} = \eta \otimes \eta + d\eta \circ (\phi \otimes \mathbb{1}). \tag{24}$$

Indeed,

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}, \xi) = \eta(\mathcal{D})\eta(\xi) + d\eta(\phi\mathcal{D}, \xi) = 0, \tag{25}$$

where the last equality follows from the transversality condition (20) and the definition  $\phi$ , Eq. (23), where  $\phi\mathcal{D} = \mathcal{D}$ . In Sec. IV, we will see that the presence of boundaries (interfaces between different media) breaks the orthogonality condition.

Now, let us recall the definition of a *wavefront* centered at the point  $b \in \mathcal{B}$  as the surface

$$F_b(t) = \{b_i \in \mathcal{B} \mid \gamma(0) = b, \gamma(t) = b_i\}, \tag{26}$$

where  $\gamma$  is a geodesic on  $(\mathcal{B}, g)$  (see Ref. 25). Observe that for a point  $b_i \in F_b(t)$ , the contact element  $\pi(\mathcal{D}_{b_i})$  is tangent to  $F_b(t)$ . The bundle projector  $\pi$  projects Legendrian submanifolds of  $\mathcal{N}$  to wavefronts in  $\mathcal{B}$ .

Consider a geodesic vector flow on  $ST\mathcal{B}$  given by  $\gamma(t) \in \mathcal{B}$  and  $\dot{\gamma}(t) \in ST_{\gamma(t)}\mathcal{B}$ . There is a unique contact element such that

$$\mathbf{g}|_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}_{b_i}, \xi|_{b_i}) = 0. \tag{27}$$

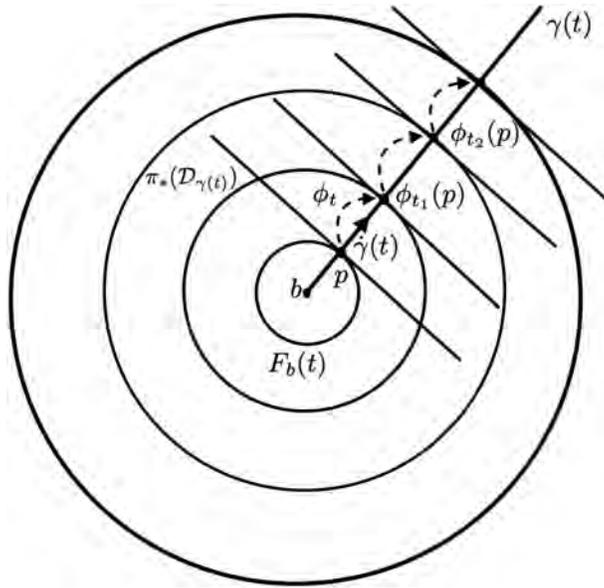
The Reeb flow induces a strict contact transformation

$$\mathcal{L}_{\xi} \lambda = 0. \tag{28}$$

Thus, by the duality of Reeb’s and the geodesic flow (see Theorem 1.5.2 in Ref. 32), there exists a one-parameter family of contact transformations  $\phi_t : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  such that for every  $p \in \mathcal{N}$  where  $p = g^b(\dot{\gamma}(0))$ ,

$$\phi_t(p) = g^b(\dot{\gamma}(t)) \tag{29}$$

is satisfied. Therefore, the geodesic flow can be evolved in terms of the one-parameter contact transformation  $\phi_t$  in  $\mathcal{N}$  (see Fig. 2) induced by the Reeb vector field. In Secs. IV, V, and VI, we will show some explicit examples for optical media represented by different geometries, such as Euclidean and hyperbolic ones. We will also explore some different dimensions and interfaces between media.



**FIG. 2.** Representation of the contact transformation overlapped with the wavefronts and the contact elements, for which  $b_i = \gamma(t_i)$ . If the medium is simply connected (there are no interfaces), then wavefronts are perpendicular to light rays fulfilling Eq. (27). Nevertheless, it always satisfies that for  $p \in \gamma$ ,  $\phi_t(p) \in \gamma$ .

#### IV. OPTICAL MEDIUM IN EUCLIDEAN $\mathbb{R}^2$

Let us consider an optical medium with electric permittivity  $\epsilon$  and magnetic permeability  $\mu$  so that its refractive index is given by  $n^2 = \epsilon\mu$ . The Euclidean optical metric is written as

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i - \frac{1}{n^2} dt \otimes dt. \tag{30}$$

Restricting our attention to the purely spatial part of the metric by means of a conformal projection into a two-dimensional manifold, the material manifold metric becomes

$$g = n^2 \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i. \tag{31}$$

The unitary tangent bundle  $ST\mathbb{R}^2$  is expressed in local coordinates  $\{x, y, p_x, p_y\}$  where the standard symplectic two-form is written as

$$\omega = \sum_{i=1}^2 dx_i \wedge dp^i. \tag{32}$$

The unitary condition (10) leads to

$$p_y = \sqrt{n^2 - p_x^2}. \tag{33}$$

Consider the transformation  $\phi_{stb} : T\mathbb{R}^2 \rightarrow ST\mathbb{R}^2$  defined by

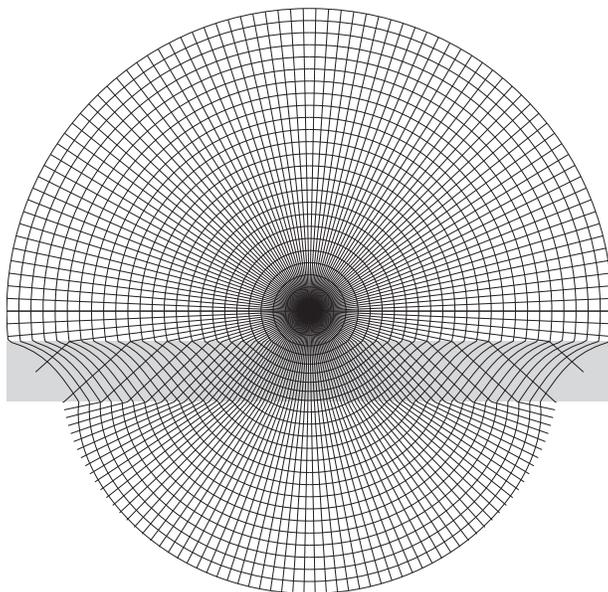
$$[x = x, y = y, p_x = -\sin \theta, p_y = \cos \theta] \tag{34}$$

to change into polar coordinates  $\{x, y, \theta\}$ . In this coordinate, the Liouville one-form (15) becomes

$$\lambda_{stb} = -\sin \theta dx + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} dy, \tag{35}$$

and the Reeb vector field associated with  $\lambda_{stb}$  is

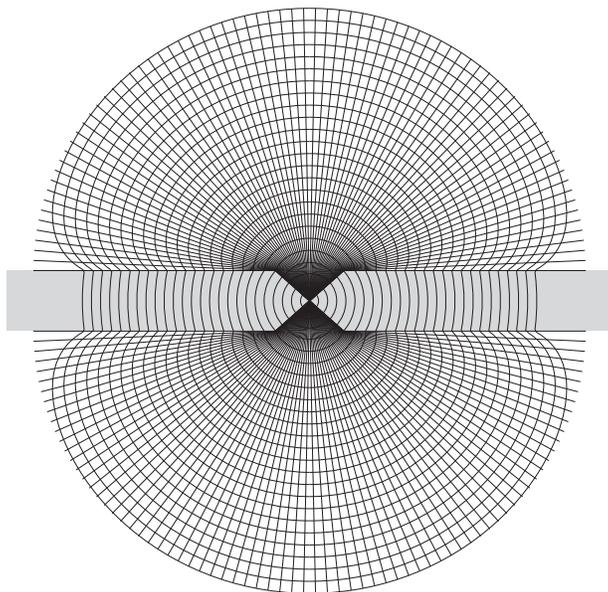
$$\xi_{stb} = \frac{1}{n^2} \left( -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \frac{\partial}{\partial y} \right). \tag{36}$$



**FIG. 3.** Light rays and wavefronts emitted by a source of light in air ( $n = 1$ ) passing through a layer of water ( $n = 1.33$ ) represented by the gray layer. The light rays refract as predicted by Snell's law. Wavefronts are deformed as they are slowed down by the interface. After returning to air, wavefronts do not return to its original shape.

A one-parameter family of strict contact transformations induced by Reeb's flow is given by

$$\phi_t = \left[ x = x - \frac{t \sin \theta}{n^2}, y = y + \frac{t \cos \theta}{n^2}, \theta = \theta \right]. \quad (37)$$



**FIG. 4.** Light rays and wavefronts emitted by a source of light in water ( $n = 1.33$ ) represented by the gray layer. When light rays refract after passing through the interface with air ( $n = 1$ ), there is a critical angle  $\theta_c$  for which light rays do not come out from the water. Here, only the refracted light rays are shown. Wavefronts deform as they pass through the interface. After leaving the first medium, wavefronts are not spherical anymore. Some aberrations can be observed as light rays refracted almost parallel to the surface of the interface do not cross perpendicular to the wavefronts.

The flow of the Reeb vector field, as proved by Geiges,<sup>32</sup> results dual to the geodesic flow. Observe that (37) is, indeed, a strict contact transformation as  $\phi_t^*(\lambda) = \lambda$ . In terms of (37), the contact distribution transforms into

$$\chi = \text{span} \left\{ \frac{1}{n^2} \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \frac{\partial}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}. \tag{38}$$

The bundle projection of the contact distribution  $\pi(\chi)$  represents the contact elements of  $\mathbb{R}^2$ . In this case, this corresponds to the first vector of (38). For a point  $q \in \mathbb{R}^2$  and a fixed  $\theta_0$ , there is a unique geodesic passing through  $q$  and the direction of its tangent vector is precisely  $\theta_0$ . Thus, the contact element is the positive normal line generated by the vector  $\pi(\chi)$ .

The geodesic flow is now written in terms of the one-parameter family of strict contact transformations (37). Observe that for vacuum ( $\epsilon_0 \mu_0 = 1$ ), the contact transformation will induce a flow given by a family of straight lines with slope  $m = -(\tan \theta_0)^{-1}$ , recalling that  $\theta_0$  is the angle of the contact element positively orthogonal to the geodesic. As the geodesic curve is the trajectory of a light beam, when it passes to a different medium ( $\epsilon \mu \neq 1$ ), the light will be refracted with  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  as expected by Snell's law. Furthermore, we can reconstruct the wavefronts from the contact elements without directly solving the wave equation. In Fig. 3, we can observe how the wavefronts are deformed and slowed down when passing through a different medium. In Fig. 4, the source of light is in a medium with a larger refractive index. Note that when the light passes through the interface, *total internal reflection* can be observed in light rays.

### V. OPTICAL MEDIUM IN EUCLIDEAN $\mathbb{R}^3$

In the same manner as before, let us consider an optical medium in  $\mathbb{R}^3$  with body metric

$$g = n^2 \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i. \tag{39}$$

Again, we propose the coordinate transformation to the unitary tangent bundle  $\phi_{stb} : T\mathbb{R}^3 \rightarrow ST\mathbb{R}^3$ ,

$$[x = x, y = y, z = z, p_x = \sin \theta \cos \varphi, p_y = \sin \theta \sin \varphi, p_z = \cos \theta], \tag{40}$$

to get spherical coordinates  $\{x, y, z, \theta, \varphi\}$ . The Liouville one-form transforms to

$$\lambda_{stb} = \cos \varphi \sin \theta dx + \sin \varphi \sin \theta dy + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} dz, \tag{41}$$

for which the Reeb vector field is

$$\xi_{stb} = \frac{1}{n^2} \left( \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \frac{\partial}{\partial z} \right), \tag{42}$$

while the contact distribution is expressed as

$$\chi = \text{span} \left\{ -\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, -\sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1} \frac{\partial}{\partial z} + \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \tag{43}$$

We find the one-parameter family of contact transformations induced by the Reeb vector field (42),

$$\phi_t = \left[ x = x - \frac{t \cos \varphi \sin \theta}{n^2}, y = y + \frac{t \sin \varphi \sin \theta}{n^2}, z = z + \frac{t \sqrt{\cos^2 \theta + n^2 - 1}}{n^2}, \theta = \theta, \varphi = \varphi \right]. \tag{44}$$

As expected, the projection of the contact distribution to  $\mathbb{R}^3$  is a set of two-dimensional planes, which are the contact elements of  $\mathbb{R}^3$ . Each plane is tangent to a wavefront surface sphere.

### VI. OPTICAL MEDIUM WITH HYPERBOLIC GEOMETRY ON $\mathbb{R}^2$ HALF PLANE

We consider now a two-dimensional optical medium endowed with a hyperbolic geometry represented by the upper half plane model  $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy, y > 0\}$  with the usual metric

$$\tilde{g} = \frac{1}{y^2} \left( \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i - \frac{1}{n^2} dt \otimes dt \right). \tag{45}$$

As before, we will work with the body metric given by

$$g = \left( \frac{n}{y} \right)^2 \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i. \tag{46}$$

The unitary tangent bundle of the hyperbolic space is naturally identified with  $PSL(2, \mathbb{R})$ , which is different from  $ST\mathbb{R}^n$  used in the previous examples. Nevertheless, our construction is sufficiently general to work in either space as  $PSL(2, \mathbb{R})$  can also be endowed with coordinates  $\{x, y, \varphi\}$ , with  $(x, y)$  being Cartesian coordinates and  $\varphi$  being an angular coordinate.<sup>33</sup> In terms of these coordinates, the Liouville one-form is given by

$$\lambda_{stb} = \frac{n}{y}(-\cos \varphi \, dx + \sin \varphi \, dy). \tag{47}$$

The associated Reeb vector field is given by

$$\xi_{stb} = \frac{1}{n} \left( -y \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + y \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \tag{48}$$

and the contact distribution is given by

$$\chi = \text{span} \left\{ \frac{y}{n} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}. \tag{49}$$

Once again, we find the one-parameter family of contact transformations in  $PT^*\mathcal{B}$  induced by Reeb’s flow with the natural identification with  $ST\mathbb{H}^2$ ,

$$\begin{aligned} \phi_t = \left[ x = \frac{(x \sin \varphi + y \cos \varphi - x)e^{\frac{2t}{n}} - x \sin \varphi - y \cos \varphi - x}{(\sin \varphi - 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}, y = -\frac{2ye^{\frac{t}{n}}}{(\sin \varphi - 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}, \right. \\ \left. \varphi = \arctan \left( -\frac{(-\sin \varphi + 1)e^{\frac{2t}{n}} - \sin \varphi - 1}{2e^{\frac{t}{n}} \cos \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \tag{50}$$

The mapping (50) is, indeed, a strict contact transformation as  $\phi_t^*(\lambda) = \lambda$ . As expected, the projections of Reeb’s flow that induced (50) are semicircles of radius

$$r = \frac{y_0}{\cos \varphi_0} \tag{51}$$

and center

$$\left( \frac{x_0 \cos \varphi_0 - y_0 \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}, 0 \right), \tag{52}$$

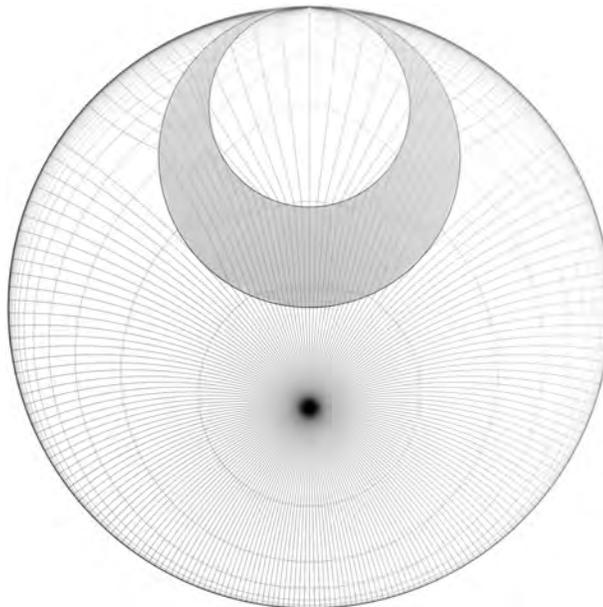
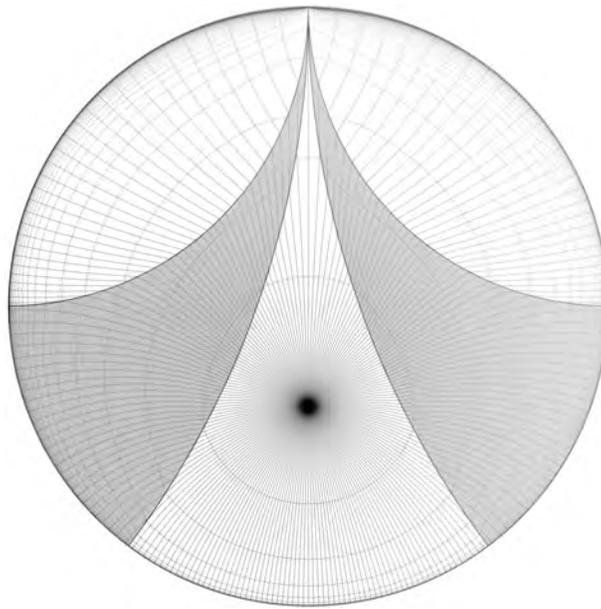


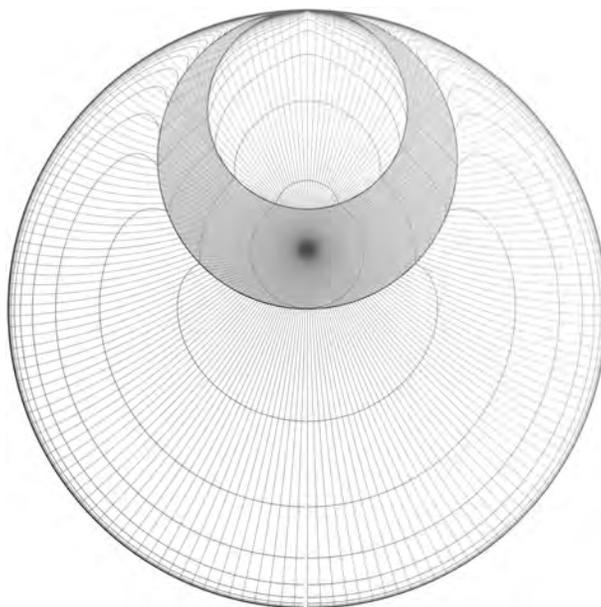
FIG. 5. Light rays and wavefronts emitted by a source of light in air ( $n = 1$ ) refracting through a horizontal layer of water ( $n = 1.33$ ) in the upper half plane mapped to the Poincaré disk.



**FIG. 6.** Light rays and wavefronts emitted by a source of light in air ( $n = 1$ ) refracting through a vertical layer of water ( $n = 1.33$ ) in the upper half plane mapped to the Poincaré disk.

which are precisely the geodesic curves in  $\mathbb{H}^2$ .

For interfaces between media with different refractive indices, we solve (48) using numerical methods. The solution observed in Figs. 5 and 6 represents the refraction of the light rays mapped to the Poincaré disk: the first one represents a horizontal layer of a different refractive index as the interface, while the second represents a vertical interface.



**FIG. 7.** Light rays and wavefronts emitted by a source of light, which is in water ( $n = 1.33$ ) refracting through a horizontal layer to air ( $n = 1$ ) in the upper half plane mapped to the Poincaré disk. Observe that no total internal reflection is observed. As the light rays are closer to the circular boundary of the disk, some of them intersect the same wavefront more than once, which means that light rays in different times intersect the same hypersurface of constant time. These types of aberrations are due to the geometry and can be interpreted as achronal surfaces.

Finally, we use the same numerical methods to obtain the waves and fronts of a light source in the medium with a larger refractive index. The result, shown in Fig. 7, represents no total internal reflection.

In the gravitational context, the anti-deSitter model has been closely related to the hyperbolic geometry. It is known that AdS admits closed timelike curves and achronal surfaces can be observed. In Fig. 7, we can observe some of these geometric properties in light rays, which are closer to the infinity circular boundary of the disk where one light ray can intersect the same wavefront more than once.

## VII. CLOSING REMARKS

In this work, we provide a direct application of metric contact geometry to model light propagation in materials whose refractive properties are modeled by using metric tensors. Albeit the duality between principles of Fermat and Huygens has been extensively explored, the present study is, to the best of our knowledge, the first to use the richer metric structure of contact geometry. Moreover, this allowed us to explore light propagation through interfaces for both rays and fronts. These numerical explorations showed that the “well-stitched” geometric structure, responsible for the orthogonality between rays and fronts, is broken when one considers interfaces or boundaries. The formal aspects of including boundaries in metric contact manifolds will be studied elsewhere.

The spaces  $ST\mathcal{B}$  and  $\mathcal{N}$  are the mathematical structures required to express the propagation of light through the two key principles of Fermat and Huygens. On the one hand,  $ST\mathcal{B}$  is the spatial projection of the null cone where light rays correspond to null curves on  $(M, g_0, \tilde{g})$ , allowing for a spacetime formulation of Fermat’s principle. On the other hand,  $\mathcal{N}$  serves us to define the wavefronts tangent to the contact elements on  $\mathcal{B}$ . The evolution of light rays in  $ST\mathcal{B}$  is given by the flow of the Reeb vector field, while in  $\mathcal{N}$ , it is given by its associated contact transformation. In this sense, the entire nature of light propagation in non-dispersive media is encoded in the contact bundle of  $(\mathcal{B}, g)$  together with its symmetries.

Decomposing the optical metric in terms of the observer’s velocity and the Riemannian metric of the material manifold, together with the contact structure associated with the ray-optical structure  $\mathcal{N}$ , allows one to relate it to the unitary tangent bundle of  $\mathcal{B}$ , demanding that the spatial projection of the Reeb vector field be proportional to the projection of a null vector field of the background spacetime. This relation implies that Reeb’s flow represents, indeed, the light trajectory on the optical medium  $\mathcal{B}$ .

The Reeb flow allows one to reconstruct the trajectories and wavefronts of light while propagating through an optical medium. Using this result, we explored two- and three-dimensional Euclidean optical media and a two-dimensional hyperbolic medium. In the case of a two-dimensional Euclidean medium, it was possible to recreate Snell’s law of refraction together with the total internal reflection phenomenon. In the case of the hyperbolic medium, we obtained the refraction patterns from vertical and horizontal interfaces mapped to the Poincaré disk. No total internal reflection was observed when the light source was placed in a medium with a larger refractive index. Nevertheless, we saw that light rays can intersect the same wavefront more than once. This is a surprising effect that deserves further exploration.

## ACKNOWLEDGMENTS

D.G.-P. thanks Dr. Alessandro Bravetti for enlightened discussions and observations. D.G.-P. was funded by a CONACYT Scholarship with CVU 425313.

## AUTHOR DECLARATIONS

### Conflict of Interest

The authors have no conflicts to disclose.

### Author Contributions

**D. García-Peláez:** Conceptualization (lead); Investigation (lead); Writing – original draft (equal); Writing – review & editing (equal). **C. S. López-Monsalvo:** Conceptualization (equal); Investigation (equal); Writing – original draft (equal); Writing – review & editing (equal). **A. Rubio Ponce:** Writing – original draft (equal); Writing – review & editing (equal).

## DATA AVAILABILITY

Data sharing is not applicable to this article as no new data were created or analyzed in this study.

## REFERENCES

- <sup>1</sup>W. Gordon, “Zur lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie,” *Ann. Phys.* **377**(22), 421–456 (1923).
- <sup>2</sup>F. de Felice, “On the gravitational field acting as an optical medium,” *Gen. Relativ. Gravitation* **2**(4), 347–357 (1971).
- <sup>3</sup>J. Ehlers, F. A. E. Pirani, and A. Schild, “Republication of: The geometry of free fall and light propagation,” *Gen. Relativ. Gravitation* **44**(6), 1587–1609 (2012).
- <sup>4</sup>J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields,” *Science* **312**(5781), 1780–1782 (2006).
- <sup>5</sup>U. Leonhardt and T. G. Philbin, “General relativity in electrical engineering,” *New J. Phys.* **8**(10), 247 (2006).
- <sup>6</sup>H. Chen, C. T. Chan, and P. Sheng, “Transformation optics and metamaterials,” *Nat. Mater.* **9**(5), 387–396 (2010).