Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio

LuK-tutkielma
Kim Palonen
Y52916990
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Kevät 2023

Sisällys

Johdanto

Tutkielmassa on käytetty pääasiassa teosta [2]. Osion 1 lähteenä käytin pääosin monistetta [3], jonka helpommin löydettävänä englanninkielisenä vaihtoehtona toimii teos [5].

Pyrin kirjoittamaan tutkielmasta mahdollisimman hyvin ymmärrettävän mittateoriaa tuntemattomille lukijoille. Tämän vuoksi ensimmäinen puolisko keskittyy pelkästään Lebesguen mitan ja integraalin selitykseen. Tutkielman pääaihe on kuitenkin Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio.

Aihe tunnetaan myös nimeltä Hardyn-Littlewoodin maksimaalioperaattori, koska kyseessä on tarkemmin ottaen operaattori. Alunperin maksimaalifunktio on mahdollisesti keksitty kriketin vuoksi. Hardy ja Littlewood selittivät konseptia kriketin avulla [1]. Säätämällä mittausajan laajutta voidaan saada keskivertotulos kuulostamaan mielyttävämmältä. Maksimaalifunktio yleistää idean yksinkertaisesta diskreetistä tapauksesta reaalifunktioille.

1 Mittateorian peruskäsitteitä

1.1 Merkintöjä

Otetaan käyttöön laajennetut reaaliluvut $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Laskutoimitukset ääreettömyyksien kanssa toimivat seuraavasti:

Olkoon $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$.

- $\infty + x = \infty$ ja $-\infty + x = -\infty$
- $\infty \cdot y = \infty$ ja $\infty \cdot -y = -\infty$.
- $-\infty \cdot y = -\infty$ ja $-\infty \cdot -y = \infty$.
- $\infty \cdot 0 = -\infty \cdot 0 = 0$.

Kaikki laskutoimitukset ovat kommutatiivisia. Jakolaskuja ei määritellä, kuten ei myöskään nollalla jakamista tai erotusta $\infty - \infty$.

1.2 Lebesguen ulkomitta

Määritellään ensin Lebesguen ulkomitan konstruointiin vaadittava apufunktio λ, joka kertoo joukon $\mathbb{R}^n$ (avoimen) suorakaiteen $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ n-ulotteisen tilavuuden, eli

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Äskeisessä määritelmässä oltaisiin voitu yhtä hyvin käyttää suljettuja tai puoliavoimia suorakaiteita. Sama pätee myös kaikissa muissa monisteen suorakaiteita käyttävissä määritelmissä, ellei toisin mainita.

Edellisen funktion avulla voidaan määritellä Lebesguen ulkomitta.

Määritelmä 1.1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Joukon A Lebesguen ulkomitta $\mathcal{L}_*(A)$ on

$$\mathcal{L}_*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \;\middle|\; I_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suorakaide, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}.$$

Selkeyden vuoksi voidaan tarvittasesssa käyttää merkintää $\mathcal{L}_*^n$.

Määritelmä yhtyy joukkojen pituuteen ($n = 1$), pinta-alaan ($n = 2$), tilavuuteen ($n = 3$), jne. Erityisesti $\lambda(I) = \mathcal{L}_*(I)$ kaikilla suorakaiteille $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Ulkomitalla voi kuitenkin mitata myös joukkoja, joihin ei luonnollisesti liitetä pituusmittaa, kuten rationaaliluvut reaalilukujen joukossa.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ rationaalilukujen numerointi. Valitsemalla suorakaiteet $I_k = \left]q_i - \varepsilon 2^{-k-1}, q_i + \varepsilon 2^{-k-1}\right[$ saadaan joukko suorakaiteita I_k, joilla pätee

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon.$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan $\mathcal{L}_*(\mathbb{Q}) = 0$.

1.3 Mitat

Määritelmä 1.3. Joukkoa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sanotaan $\mathcal{L}_*$-*mitalliseksi*, jos kaikilla $E \subseteq \mathbb{R}^n$ pätee

$$\mathcal{L}_*(E) = \mathcal{L}_*(E \setminus A) + \mathcal{L}_*(E \cap A).$$

Mitallisuuden määritelmää tarvitaan tässä monisteessa vain mittojen määrittelyyn. $\mathcal{L}_*$-epämitallisia joukkoja on olemassa, mutta ne ovat monimutkaisia, ja niiden konstruointi vaatii valinta-aksiooman. Mitallisten joukkojen kokoelmia merkitään usein kirjaimella Γ.

Määritelmä 1.4. Lebesguen mitta $\mathcal{L} : \Gamma \to \overline{\mathbb{R}}$ on Lebesguen ulkomitan $\mathcal{L}_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}$ rajoittuma mitallisten joukkojen joukkoon Γ.

Lebesguen mitan määrittelyjoukko on pienempi kuin Lebeguen ulkomitan, mutta monet sen ominaisuudet ovat hyödyllisempiä.

Lause 1.5. *Lebesguen mitalla on seuraavat ominaisuudet:*

1. $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$
2. $\mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(A_i)$ *kaikilla erillisillä* $A_i \in \Gamma$.

Ominaisuudesta 2 seuraa myös suoraan hyödyllinen, myös Lebesguen ulkomitalle pätevä tulos:

Lause 1.6. *Olkoon* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ *mitallisia. Tällöin* $\mathcal{L}(A) \leq \mathcal{L}(B)$.

Todistus. Olkoon $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Nyt $B = A \cup (B \setminus A)$, jossa $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, joten

$$\mathcal{L}(A) \leq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B \setminus A) = \mathcal{L}(B).$$

□

Sanotaan, että joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on $\mathcal{L}$-nollamittainen, jos $\mathcal{L}(A) = 0$. Mikäli jokin ominaisuus pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, jossa A on $\mathcal{L}$-nollamittainen, sanotaan ominaisuuden pätevän (Lebesgue)-melkein kaikkialla.

Yleisesti ottaen lauseen 1.5 ehdot 1 ja 2 täyttäviä funktioita $\mu : \Gamma_X \to [0, \infty]$, jossa Γ_X on joukon X jokin σ-algebra, sanotaan joukon X mitoiksi.

Lause 1.7. *Olkoon* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mitallinen,* $x \in \mathbb{R}^n$. *Tällöin joukolle* $A + x = \{a + x \in \mathbb{R}^n \mid a \in A\}$ *pätee*

$$\mathcal{L}(A + x) = \mathcal{L}(A).$$

Todistus. Joukon mitallisuus sivuutetaan. Olkoon $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ suorakaide. Tällöin $I+x =]a_1 + x_1, b_1 + x_1[\times\cdots\times]a_n + x_n, b_n + x_n[$, josta huomataaan, että

$$\lambda(I + x) = \prod_{i=1}^{n}((b_i + x_i) - (a_i + x_i)) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \lambda(I).$$

Lisäksi mikä tahansa joukon $\mathbb{R}^n$ suorakaide voidaan esittää tässä muodossa, koska jos J on suorakaide, niin myös $J - x$ on suorakaide, ja $J = (J - x) + x$.

Koska $y + x \in I + x$ aina, kun $y \in I$, niin myös $A + x \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k + x$ aina kun $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Tämän ja edellisen nojalla siis

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A + x) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k + x) \;\middle|\; I_k + x \subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suorakaide, } A + x \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k + x \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \;\middle|\; I_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suorakaide, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} = \mathcal{L}(A).\end{aligned}$$

□

Vastaavankaltainen tulos saadaan todistettua myös joukon vakiolla skaalaamiselle.

Lause 1.8. *Olkoon* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mitallinen,* $r \in [0, \infty[$. *Tällöin joukolle* $rA = \{ra \in \mathbb{R}^n \mid a \in A\}$ *pätee*

$$\mathcal{L}^n(rA) = r^n \mathcal{L}^n(A).$$

Todistus. Tilanne $r = 0$ on selkeä, koska $0A = 0 \in \mathbb{R}^n$ on yksiö kaikilla $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Yksiö voidaan peittää mielivaltaisen pienellä suorakaiteella, joten joukon mitta on 0.

Edellisen todistuksen tapaan etenemällä huomataan, että $\lambda(rI) = r^n\lambda(I)$ ja $rA \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} rI_k$, aina, kun $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Myös edellisen lauseen tapaan saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(rA) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(rI_k) \;\middle|\; rI_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suorakaide, } rA \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} rI_k\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} r^n\lambda(I_k) \;\middle|\; I_k \subseteq \mathbb{R}^n \text{ on suorakaide, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} = r^n\mathcal{L}^n(A).\end{aligned}$$

□

Edellisten lauseiden seurauksena saadaan tapa laskea n-ulotteisen pallon tilavuus.

Lause 1.9. *Olkoon* $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ *avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *a-keskeinen, r-säteinen pallo. Tällöin*

$$\mathcal{L}^n(B(a, r)) = r^n\mathcal{L}^n(B(0, 1)).$$

Todistus. Lauseen 1.7 nojalla riittää tarkastella tilannetta $a = 0 \in \mathbb{R}^n$. Puolestaan $rx \in B(0, r)$ täsmälleen kun $x \in B(0, 1)$, joten $B(0, r) = rB(0, 1)$. Lauseen 1.8 nojalla siis $\mathcal{L}^n(B(0, r)) = r^n\mathcal{L}^n(B(0, 1))$. □

Lauseen nojalla n-ulotteisen pallon tilavuuden laskemista varten täytyy siis tietää vain pallon säde ja n-ulotteisen yksikköpallon tilavuus.

1.4 Mittaintegraalit

Mittojen avulla voidaan määritellä integrointi Riemann-integraalista poikkeavalla tavalla. Monisteessa keskityn vain Lebesguen integraaliin, mutta myös muiden mittojen avulla voidaan määritellä integraali samalla tavalla. Selitän myös vain määritelmän perusteet, tarkka määritelmä vaatisi liikaa tilaa.

Määritelmän perusidea on sama kuin Riemann-integraalissa: Määritellään jonkin tietyn tyyppisten funktioiden integraalit, joiden avulla voidaan arvioida muiden funktioiden integraaleja. Mittaintegraalien tapauksessa nämä funktiot konstruoidaan käyttämällä joukkojen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ karakteristisia funktioita $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Määritelmä 1.10. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ on yksinkertainen, jos se on joukon $\mathbb{R}^n$ mitallisten joukkojen $A_i \in \Gamma$ karakterististen funktioiden χ_{A_i} lineaarikombinaatio

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}, \quad a_i \in \overline{\mathbb{R}}$$

Yksinkertaisten funktioiden joukkoa merkitään $\mathcal{Y}$. Mikäli halutaan rajoittua epänegatiivisiin tai epäpositiivisiin funktioihin, käytetään merkintöjä $\mathcal{Y}^+$ ja $\mathcal{Y}^-$.

Lebesguen mitan ja joukkojen tilavuuksien yhteyden vuoksi on luonnollista määritellä karakteristisen funktion integraali sen konstruointijoukon mitaksi. Yksinkertaisten funktioiden integraalit puolestaan saadaan näiden lineaarikombinaatioina.

Määritelmä 1.11. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Epänegatiivisen yksinkertaisen funktion $f : A \to [0, \infty]$, $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, $a_i \geq 0$, Lebesgue-integraali yli mitallisen joukon $E \in \Gamma$ on

$$\int_E f \, d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{L}(A_i \cap E).$$

Määritelmä yhtyy selkeästi Riemann-integraaliin porrasfunktioiden tapauksessa, jotka ovat myös yksinkertaisia funktioita. Rajoittamalla määritelmä epänegatiivisiin funktioihin vältetään tilanteen $\infty - \infty$ aiheuttama ongelma.

Olisi luonnollista määritellä integroituvien funktioiden integraalien tulevan yksinkertaisten funktioiden integraalien raja-arvoista. Tätä varten määritellään ensin funktiot, joita voidaan integroida.

Määritelmä 1.12. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on mitallinen, jos on olemassa jono yksinkertaisia funktioita $f_n \in \mathcal{Y}$, joilla

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \text{ kaikilla } x \in A$$

Samoin kuin epämitallisia joukkoja, funktion mitallisuutta käsitellään monisteessa vain määritelmän vaatimusten vuoksi. Myös epämitallisten funktioiden konstruointi on haastavaa. Epämitallisten joukkojen karakteristiset funktiot ovat kuitenkin epämitallisia.

Mitallisuus säilyy funktioiden yhteen- ja kertolaskussa, sekä vakiolla kertomisessa. Kahden mitallisen funktion yhdistetty funktio ei kuitenkaan aina ole mitallinen.

Nyt voidaan määritellä epänegatiivisen mitallisen funktion integraali.

Määritelmä 1.13. Olkoon $E \in \Gamma$, $E \subseteq A$. Epänegatiivisen mitallisen funktion $f : A \to [0, \infty]$ integraali yli joukon E on

$$\int_E f \, d\mathcal{L} = \sup \left\{ \int_E g \, d\mathcal{L} \;\middle|\; g \in \mathcal{Y}^+, \quad g(x) \le f(x) \text{ kaikilla } x \in E \right\}.$$

Määritelmä yhtyy jälleen, vaikkakin ei yhtä selkeästi, Riemann-integraaliin Riemann-integroituvien funktioiden tapauksissa. Yleensä nämä integraalit lasketaankin Riemann-integraalin avulla kun mahdollista. Lebesguen integraali kykenee kuitenkin myös integroimaan joitain ei-Riemann-integroituvia funktioita, kuten rationaalilukujen karakteristisen funktion.

Esimerkki 1.14. Tarkastellaa rationaalilukujen karakteristista funktiota $\chi_{\mathbb{Q}}$. Kyseessä on yksinkertainen funktio, koska $\mathbb{Q}$ on mitallinen. Suoraan määritelmästä saadaan

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} \, d\mathcal{L} = 1 \cdot \mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0.$$

Riemann-integraalia funktiolle ei tunnestusti voida määritellä.

Integraalin tarkan määritelmän jatkovaiheet sivuutetaan. Epäpositiivisten funktioiden integrointi voitaisiin määritellä samalla tavalla, tai funktion $-f$ integraalin vastaluvuksi. Muiden funktioiden integraalit saataisiin jakamalla ne epänegatiiivisiin ja epäpositiivisiin osiin, ja yhdistämällä saadut integraalit. Funktioita, joilla tämä laskutoimitus tuottaa yksikäsitteisen tuloksen (ei $\infty - \infty$), kutsutaan integroituviksi.

1.5 Integraalin ominaisuuksia

Seuraavana esitellään muutamia Lebesguen integraalin hyödyllisiä ominaisuuksia. Monet näistä ovat samankaltaisia kuin Riemann-integraalin ominaisuudet. Todistamatta jätettyjen tuloksien todistukset löytyvät lähteestä [3].

Lause 1.15. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituvia, $a \in \mathbb{R}$, ja $E_i \in \Gamma$ erillisiä kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt*

- $\int_A af \; d\mathcal{L} = a \int_A f \; d\mathcal{L}$,
- $\int_A f + g \; d\mathcal{L} = \int_A f \; d\mathcal{L} + \int_A g \; d\mathcal{L}$,
- $\int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i} f \; d\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} f \; d\mathcal{L}$.

Lause 1.16. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituvia siten, että $f \leq g$ melkein kaikkialla. Tällöin*

$$\int_A f \; d\mathcal{L} \leq \int_A g \; d\mathcal{L}.$$

Todistus. Todistetaan väite epänegatiivisilla funktioilla. Yleinen tilanne on samankaltainen.

Oletuksen nojalla $g \leq f$ joukossa $A \setminus N$, jossa N on nollamittainen. Olkoon $h = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{Y}^+$, $h \leq g$. Merkitään

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{kun } x \in A \setminus N, \\ 0, & \text{kun } x \in N. \end{cases}$$

Nyt $\hat{h}$ on epänegatiivinen yksinkertainen funktio, jolla $\int \hat{h} \; d\mathcal{L} = \int h \; d\mathcal{L}$ ja $\hat{h} \leq f$. Täten kaikilla $h \leq g$ täytyy päteä

$$\int h \; d\mathcal{L} \leq \sup \left\{ \int y \; d\mathcal{L} \;\middle|\; y \in \mathcal{Y}^+, y \leq f \right\} = \int f \; d\mathcal{L},$$

eli myös $\int g \; d\mathcal{L} \leq \int f \; d\mathcal{L}$. □

Lauseen seurauksena saadaan suoraan myös seuraava tulos:

Lause 1.17. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituvia siten, että $f = g$ melkein kaikkialla. Tällöin*

$$\int_A f \; d\mathcal{L} = \int_A g \; d\mathcal{L}.$$

Todistus. Oletuksen nojalla $g \leq f \leq g$ melkein kaikkialla, joten $\int g \; d\mathcal{L} \leq \int f \; d\mathcal{L} \leq \int g \; d\mathcal{L}$, eli $\int g \; \mathcal{L} = \int f \; \mathcal{L}$. □

Seuraavaa lausetta kutsutaan Fubinin lauseeksi.

Lause 1.18. *Olkoon $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ja $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ integroituva. Tällöin*

$$\int_X \int_Y f(x, y) \; d\mathcal{L}(y) d\mathcal{L}(x) = \int_Y \int_X f(x, y) \; d\mathcal{L}(x) d\mathcal{L}(y).$$

Lauseessa käytetty merkintä $d\mathcal{L}(x)$ painottaa käytettyä integrointimuuttujaa, ja tässä tapauksessa kertoo integrointijärjestyksen. Lause siis kertoo integraalin arvon olevan riippumaton integrointijärjestyksestä.

Fubinin lauseella on myös hyödyllinen Cavalierin periaatteena tunnettu seuraus:

Lause 1.19. *Olkoon $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $f : X \to [0, \infty]$ integroituva. Tällöin*

$$\int_X f \, d\mathcal{L} = \int_{[0,\infty[} \mathcal{L}(\{x \in X \mid f(x) > t\}) \, d\mathcal{L}(t).$$

Todistus. Käytetään funktiolle f esitystä

$$f(x) = \int_{[0,\infty[} \chi_{\{x \in X | f(x) > t\}}(x, t) \, d\mathcal{L}(t).$$

Esitys saattaa vaikuttaa hieman epäselvältä, mutta se on täysin pätevä. Karakteristista funktiota integroidaan muuttujan t suhteen kullakin muuttujan x arvolla positiivisen reaaliakselin yli. Integroitava karakteristinen funktio voitaisiin myös kirjoittaa muodossa

$$\chi_{\{x \in X | f(x) > t\}}(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t < f(x), \\ 0, & \text{kun } t \geq f(x), \end{cases}$$

josta nähdään selkeästi integraalin arvon olevan $f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Fubinin lausetta soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) \, d\mathcal{L}(x) &= \int_X \int_{[0,\infty[} \chi_{\{x \in X | f(x) > t\}}(x, t) \, d\mathcal{L}(t) d\mathcal{L}(x) \\
&= \int_{[0,\infty[} \int_X \chi_{\{x \in X | f(x) > t\}}(x, t) \, d\mathcal{L}(x) d\mathcal{L}(t) \\
&= \int_{[0,\infty[} \mathcal{L}(\{x \in X \mid f(x) > t\}) \, d\mathcal{L}(t).
\end{aligned}$$

□

1.6 Lp-avaruudet

Määritelmä 1.20. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen. Asetetaan

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \, d\mathcal{L} \right)^{1/p},$$

kun $1 \leq p < \infty$, ja

$$\|f\|_\infty = \sup \left\{ t \geq 0 \;\middle|\; |f| \leq t \text{ melkein kaikkialla} \right\}.$$

Määritelmät eivät ehkä näytä suoraan toisiinsa liittyviltä, mutta voidaan osoittaa [3], että kun $\mathcal{L}(A) < \infty$, $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

Havainnollistetaan määritelmää esimerkillä.

Esimerkki 1.21. Tarkastellaan funtktiota $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Hyödyntämällä Riemann-integraalia saadaan

$$\int_{]1,\infty[} f \, d\mathcal{L} = \int_1^\infty \frac{1}{x} = \infty,$$

eli $\|f\|_1 = \infty$. Myös Riemann-integroimalla saadaan

$$\left(\int_{]1,\infty[} f^p \, d\mathcal{L}\right)^{1/p} = \left(\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\right)^{1/p} = \left(\frac{-1}{1-p}\right)^{1/p},$$

eli $\|f\|_p = (\frac{1}{p-1})^{\frac{1}{p}}$, kun $1 < p < \infty$.

Koko määrittelyjoukossa $f \leq 1$. Lisäksi kaikilla $s < 1$ pätee $f(x) = \frac{1}{x} > s$ aina, kun $x \in \left]1, \frac{1}{s}\right[$, jonka mitta on positiivinen. Täten $\|f\|_\infty = 1$.

Määritelmä on samankaltainen kuin yleiset avaruuksien $\mathbb{R}^n$ pisteiden normit. Esimerkiksi tilanteessa $p = 2$ pisteen koordinaattien neliöiden summauksen sijaan integroidaan funktion neliötä. Kyseessä ei ole kuitenkaan normi, koska yksikäsitteistä nollavektoria ei ole olemassa, vaan $\|f\|_p = 0$ aina, kun $f(x) = 0$ melkein kaikkialla. Lisäksi $\|f\|_p = \infty$ monilla funktioilla. Vektoriavaruus voidaan kuitenkin luoda tarkastelemalla sopivia ekvivalenssiluokkia funktioiden sijaan.

Rajoitetaan ensin tarkasteltavien funktioiden joukkoa niin, että $\|f\|_p$ on äärellinen. Merkitään siis $\mathcal{L}^p = \{f \mid f \text{ on mitallinen}, \|f\|_p < \infty\}$. (Merkintä on hyvin väliaikainen, ei varsinaisesti liity Lebesguen mittaan.) Ekvivalenssiluokat voidaan puolestaan määritellä lauseen 1.17 avulla. Samaistamalla nollamittaisessa joukossa toisistaan poikkeavat funktiot voidaan luoda vektoriavaruus $(L^p, \|\cdot\|_p)$, jossa L^p on funktioiden ekvivalenssiluokkien $[f] = \{g \mid g \in \mathcal{L}^p,\ g = f \text{ melkein kaikkialla}\}$ kokoelma.

Tästä eteenpäin puhuttaessa Lp-avaruuden L^p funktioista, tarkoitetaan avaruuden ekvivalenssiluokkien jotain edustajaa. Lisäksi merkitään $f \in L^p$, kun tarkoitetaan $f \in [f] \in L^p$. Merkintä $L^p(A)$ tarkoittaa funktioiden $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ muodostamaa Lp-avaruutta, mutta funktioiden lähtöavaruus voidaan myös selkeissä tilanteissa jättää merkitsemättä.

Lause 1.22. *Olkoon $\mathcal{L}(A) < \infty$, $p \geq q \geq 1$, ja $f : A \to \mathbb{R}$ sellainen, että $f \in L^p$. Tällöin myös $f \in L^q$.*

Todistus. Koska $p \geq q \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_A |f|^q \, d\mathcal{L} &\leq \int_A \max\{1, |f|^q\} \, d\mathcal{L} \leq \int_A \max\{1, |f|^p\} \, d\mathcal{L} \\ &\leq \int_A 1 + |f|^p \, d\mathcal{L} = \mathcal{L}(A) + \int_A |f|^p \, d\mathcal{L}\end{aligned}$$

eli $\|f\|_q < \infty$ aina kun $\|f\|_p < \infty$. □

2 Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio

2.1 Määritelmä

Määritelmä 2.1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mitallinen. Tällöin funktion f Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio on funktio $Mf : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, jossa

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \, d\mathcal{L}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Määritelmä siis kertoo funktion maksimaalisen keskiarvon tietyn pisteen ympärillä. Integroituvan funktion Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio on aina mitallinen [4].

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan yksikkövälin karakteristista funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tilanne $x \in]0,1[$: Koska väli on avoin, kaikilla $x \in]0,1[$ on olemassa $r_x > 0$, jolla $B(x, r_x) \subseteq]0,1[$. Tällöin $f(y) = 1$ kaikilla $y \in B(x, r_x)$, joten

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r_x))} \int_{B(x,r_x)} f(x) \, d\mathcal{L} = \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r_x))} \mathcal{L}(B(x,r_x)) = 1.$$

Lisäksi $f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(x) \, d\mathcal{L} \leq \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} 1 \, d\mathcal{L} = 1.$$

Saadaan siis $Mf(x) = 1$, kun $x \in]0,1[$.

Tilanne $x = 0$: Laskemalla huomataan, että

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(0,1))}\int_{B(0,1)} f(x)\ d\mathcal{L} = \frac{1}{2}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}$ pallot ovat muotoa $]x-r, x+r[$. Kun $x = 0$ pallon vasemmalla puoliskolla $f(y) = 0$, koska $y < 0$. Puolestaan yleisesti $f(x) \leq 1$, joten

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(0,r))}\int_{B(0,r)} f(x)\ d\mathcal{L} \leq \frac{1}{\mathcal{L}(B(0,r))}\int_{]0,r[} 1\ d\mathcal{L} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

kaikilla $r > 0$. Saadaan tulos $Mf(0) = \frac{1}{2}$. Tilanne $x = 1$ on identtinen.

Suljetun yksikkövälin ulkopuolella funktio voidaan laskea derivoimalla keskiarvofunktiota muuttujan r suhteen. Yleisesti

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))}\int_{B(0,r)} f(x)\ d\mathcal{L} = \frac{1}{2r}\int_{]0,\min\{r+x,1\}[} 1\ d\mathcal{L},$$

kun $x < 0$. Kun $r < -x$, integraalin arvo on 0. Myös tilanne $r > -x+1$ voidaan jättää huomiotta, koska tällöin muuttujan r arvon kasvattaminen suurentaa pallon mittaa muuttamatta integraalin arvoa, koska $f(y) = 0$ kun $y > 1$.

Arvoilla $-x \leq r \leq -x-1$ saadaan funktio

$$h(r) = \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))}\int_{]0,r+x[} f(x)\ d\mathcal{L} = \frac{r+x}{2r}.$$

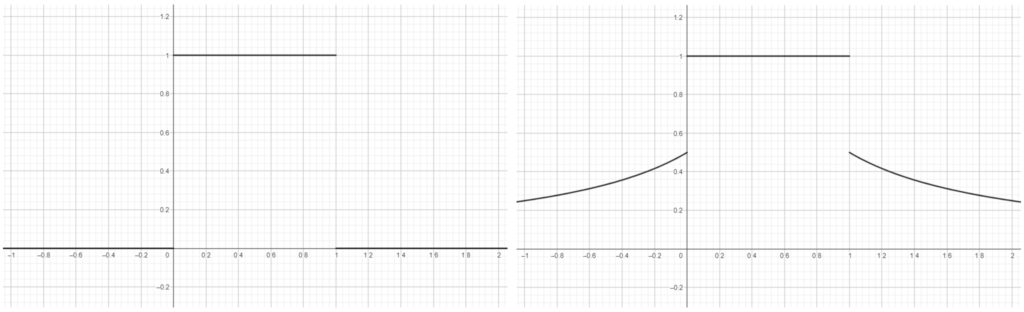
Derivoimalla saadaan $h'(r) = \frac{-x}{2r^2}$. Derivaatalla ei ole nollakohtia, ja sen arvo on positiivinen, eli funktio on kasvava. Suurin mahdollinen keskiarvo saavutetaan siis suurimmalla tarkastellulla säteellä, eli $r = -x+1$. Eli kun $x < 0$,

$$Mf(x) = \frac{1}{\mathcal{L}(B(x,-x+1))}\int_{]0,1[} f(x)\ d\mathcal{L} = \frac{1}{-2(x-1)}.$$

Samoin saadaan $Mf(x) = \frac{1}{2x}$ kun $x > 1$. Kokonaisuudessaan siis

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2(x-1)}, & \text{kun } x \leq 0, \\ 1, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2x}, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Funktio on tässä tapauksessa kaikkialla äärellinen. Kuitenkin yleisesti Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio on vain melkein kaikkialla äärellinen, aina kun alkuperäinen funktio on melkein kaikkialla äärellinen [4].

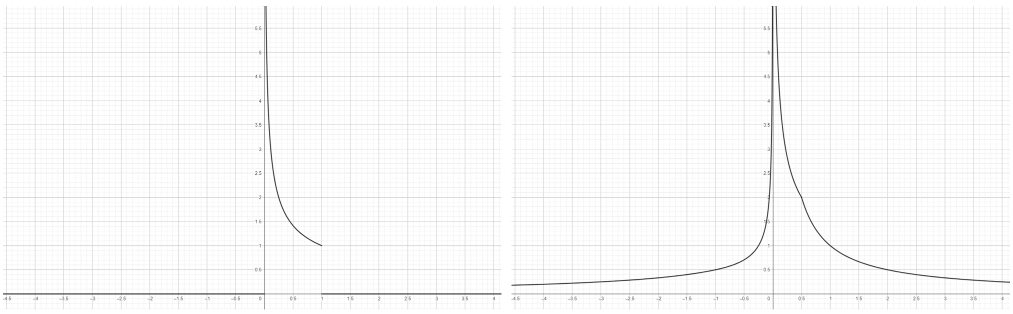


Esimerkin derivointitaktiikalla voidaan löytää myös monimutkaisempien funktioiden Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktioita. Esimerkiksi funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktio on

$$Mf(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{kun } x < -1, \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}}, & \text{kun } -1 \leq x < 0, \\ \infty, & \text{kun } x = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{x}}, & \text{kun } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x}, & \text{kun } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



2.2 Tuloksia

Tutkielman tavoitteena on todistaa seuraava lause:

Lause 2.3. *Olkoon* $1 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. *Tällöin jos* $f \in L^p(A)$, *niin myös* $Mf \in L^p(A)$.

Lause antaa tavan arvioida Hardyn-Littelwoodin maksimaalifunktiota: Jos funktion f Lp-normi on äärellinen, niin sitä on myös sen Hardyn-Littlewoodin maksimaalifunktion Lp-normi. Huomaa, että lause vaatii ehdon $p > 1$. Esimerkin 2.2 funktio toimii vastaesimerkkinä tilanteelle $p = 1$.

Esimerkki 2.4. Merkitään taas $f = \chi_{[0,1]}$. Selvästi $f \in L^1(\mathbb{R})$, koska $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mathcal{L} = 1 < \infty$. Kuitenkin

$$\int_{\mathbb{R}} Mf\, d\mathcal{L} \geq \int_1^\infty \frac{1}{2x}\, dx = \infty,$$

eli $Mf \notin L^1(\mathbb{R})$.

Käytetään jatkossa merkintää $tB = tB(a,r) = B(a,tr)$, jossa $t, r \in [0,\infty[$, $a \in \mathbb{R}^n$, ja $B = B(a,r)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ a-keskeinen, r-säteinen pallo. Merkitään lisäksi joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ halkaisijaa merkinnällä $d(A)$.

Tavoitelauseen todistaminen vaatii muutaman aputuloksen. Seuraava lause tunnetaan Vitalin peitelauseena tai 5r-peitelauseena.

Lause 2.5. *Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $\mathcal{B}$ sellainen joukko suljettuja palloja, että pallojen keskipisteet sijaitsevat joukossa X ja*

$$\sup\{d(B) \mid B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva joukko erillisiä palloja $B_i \in \mathcal{B}$, joilla pätee

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

Todistus. Oletetaan lisäksi, ettei palloilla ole samoja keskipisteitä. Monisteen tulokset vaativat vain tämän tuloksen, ja yleisemmän tuloksen voi todistaa miltei samalla, mutta hieman lisätyötä vaativalla tavalla [2]. Tällöin voidaan merkitä $\mathcal{B} = \{B(x, r(x)) \mid x \in X\}$.

Olkoon

$$M = \sup\{r(x) \mid x \in X\} \text{ ja } A_1 = \{x \in X \mid 3M/4 < r(x) \leq M\}.$$

Valitaan $x_1 \in A_1$, ja induktiivisesti

$$x_{k+1} \in A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, 3r(x_i))$$

niin pitkään kuin mahdollista. Valitut pallot $B(x_i, r(x_i))$ ovat erillisiä, koska $\|x_i - x_j\| > 3r(x_i) > 9M/4 > 2M \geq r(x_i) + r(x_j)$, kaikilla i, j. Koska joukko X on rajoitettu, ja pallojen säde aidosti positiivinen, palloja on lisäksi äärellinen määrä, merkitään k_1 kappaletta.

Koska $r(x) \leq 2r(x_i)$ kaikilla $x \in A_1$, $i = 1, \ldots, k_1$, niin kaikilla $x \in A_1$ pätee $B(x, r(x)) \subseteq B(x_i, 5r(x_i))$ jollain i. Täten saadaan tulos

$$\bigcup_{x \in A_1} B(x, r(x)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Olkoon

$$A_2 = \left\{ x \in X \;\middle|\; \left(\frac{3}{4}\right)^2 M < r(x) \leq \frac{3}{4} M \right\} \quad \text{ja}$$

$$A_2' = \left\{ x \in A_2 \;\middle|\; B(x, r(x)) \cap \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r(x_i)) = \emptyset \right\}.$$

Jos $x \in A_2 \setminus A_2'$, on olemassa $i \leq k_1$, jolla $B(x, r(x)) \cap B(x_i, r(x_i)) \neq \emptyset$, jolloin

$$\|x - x_i\| \leq r(x) + r(x_i) \leq 3r(x_i).$$

Täten

$$A_2 \setminus A_2' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i)). \tag{1}$$

Valitaan $x_1 \in A_1$, ja induktiivisesti

$$x_{k+1} \in A_2' \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Samoin kuin aiemmassa vaiheessa, saadaan valittua äärellinen määrä erillisiä palloja $B(x_i, r(x_i))$, $i = 1, \ldots, k_2$, joilla

$$A_2' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Tämän ja arvion 1 avulla saadaan

$$\bigcup_{x \in A_2} B(x, r(x)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Jatkamalla samalla tavalla löydetään haluttu pallojoukko. □

Vitalin peitelause viittaa useimmiten edellisen lauseen yleisempään versioon, joka ei vaadi tarkasteltavan joukon rajoitteneisuutta. Todistan mielestäni hieman helpomman version lauseesta, jota kutsun luovasti 7r-peitelauseeksi.

Lause 2.6. *Olkoon $\mathcal{B}$ sellainen joukko avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuja palloja, että*

$$\sup\{d(B) \mid B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva joukko erillisiä palloja $B_i \in \mathcal{B}$, joilla pätee

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 7B_i.$$

Todistus. Merkitään $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Jaetaan joukko X numeroituvaan määrään rajoitettuja osajoukkoja $X_i = X \cap B(0,i) \setminus B(0,i-1)$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Valitaan jokaiselle joukolle X_i lauseen 2.5 mukainen pallojoukko $\mathcal{B}_i$.

Merkitään $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1$. Muodostetaan induktiivisesti joukot $\mathcal{A}_i$ seuraavalla tavalla: Aluksi $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1}$. Lisätään joukkoon $\mathcal{A}_i$ kaikki joukon $\mathcal{B}_i$ pallot, jotka eivät leikkaa jo joukossa olevia palloja. Lisäksi jos $B_1 \in \mathcal{B}_i$ leikkaa jotain palloa $B_0 \in \mathcal{A}_i$ siten, että $d(B_1) > d(B_0)$, korvataan pallo B_0 pallolla B_1.

Pallot valitaan näin, koska jos pallot B_a ja B_b leikkaavat toisiaan, ja $d(B_a) \leq d(B_b)$, niin $5B_a \subseteq 7B_b$. Täten jokaisessa konstruktion vaiheessa pätee $X_k \subseteq \bigcup_{B_j \in \mathcal{B}_k} 5B_j \subseteq \bigcup_{B_j \in \mathcal{A}_i} 7B_j$ kaikilla $k \leq i$.

Merkitään $R = \sup\{r \mid B(x,r) \in \mathcal{B}\}$. Koska $R < \infty$, niin jollain $m \in \mathbb{Z}_+$ täytyy päteä $R < m$. Nyt jos $x_0 \in X_i$ ja $x_1 \in X_{2m+i+1}$, niin $\|x_0 - x_1\| \geq 2m > 2R \geq r(x_0) + r(x_1)$, joten $B(x_0, r(x_0)) \cap B(x_1, r(x_1)) = \emptyset$. Täten algoritmi ei tule vaikuttamaan joukon X_i peittäviin palloihin vaiheen $2m+i$ jälkeen, eli joukon $\bigcap_{k \geq 2m+i} \mathcal{A}_k$ pallot täyttävät halutut ehdot joukolle X_i.

Merkitään nyt $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \bigcap_{k \geq n} \mathcal{A}_k$. Nyt

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \bigcup_i X_i \subseteq \bigcup_i \bigcup_{B_j \in \mathcal{B}_i} 5B_j \subseteq \bigcup_{B_i \in \mathcal{A}} 7B_i,$$

joten $\mathcal{A}$ on haluttu joukko. □

Saatu arvio on heikompi kuin alkuperäinen, mutta tämä ei vaikuta tuleviin tuloksiin. Myöskään 5 ei ole optimaalinen kerroin, vaan lauseen voisi todistaa millä tahansa kolmea aidosti suuremmalla kertoimella säätämällä alkuperäisessä todistuksessa käytettyjä vakioita.

Ennen lauseen todistamista todistetaan vielä yksi aputulos.

Lemma 2.7. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin on olemassa vakio $C > 0$, jolla*

$$\mathcal{L}(\{x \in A \mid M(x) > t\}) \;\leq\; \frac{C}{t}\|f\|_1.$$

Todistus. Jos $\|f\|_1 = \infty$, väite pätee selkeästi, koska $\infty \geq s$ kaikilla $s \in \overline{\mathbb{R}}$. Tarkastellaan tilannetta $\|f\|_1 < \infty$.

Olkoon $t > 0$. Jos $Mf(x) > t$, määritelmän mukaan

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \, d\mathcal{L} > t$$

jollain $r > 0$. Valitaan kaikilla $x \in \{x \in A \mid Mf(x) > t\}$ tällainen säde $r(x)$. Koska $\|f\|_1 = \int_A |f| d\mathcal{L} = s < \infty$, voidaan arvioida

$$t\mathcal{L}(B(x, r(x))) < \int_{B(x,r(x))} |f| \, d\mathcal{L} \leq s < \infty$$

kaikilla x, joten myös $\sup r(x) < \infty$.

Merkitään $\hat{A} = \{x \in A \mid Mf(x) > t\}$. Lauseen 2.6 nojalla voidaan palloista $B(x,r)$ valita numeroituva joukko erillisiä palloja B_i siten, että $\bigcup_{x\in\hat{A}} B(x,r) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 7B_i$. Täten Lebesguen mitan ominaisuuksien, lauseen 1.9 ja yllä olevan arvion nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{x \in A \mid Mf(x) > t\}) \leq \mathcal{L}(\bigcup_{x\in\hat{A}} B(x,r(x))) \leq \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{\infty} 7B_i) = 7^n \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_i) \\ < \frac{7^n}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} |f| \, d\mathcal{L} \leq \frac{7^n}{t} \int_A |f| \, d\mathcal{L} = \frac{7^n}{t} \|f\|_1,\end{aligned}$$

mikä todistaa lauseen vakiolla $C = 7^n$. □

Lause 2.8. *Olkoon* $1 < p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. *Tällöin jos* $f \in L^p(A)$, *niin myös* $Mf \in L^p(A)$.

Todistus. Tilanne $p = \infty$ seuraa helposti suoraan määritelmästä. Koska $|f| \leq \|f\|_\infty$ mk.,

$$\frac{1}{\mathcal{L}(B)} \int_B |f| d\mathcal{L} \leq \frac{1}{\mathcal{L}(B)} \int_B \|f\|_\infty d\mathcal{L} = \|f\|_\infty$$

kaikilla palloilla B. Täten $Mf \leq \|f\|_\infty$ kaikkialla (eli myös melkein kaikkialla) eli $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Koska Lp-normissa integroidaan funktion itseisarvoa, arvion todistaminen tilanteessa $f \geq 0$ riittää.

Olkoon $t > 0$ ja määritellään $g : A \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq t/2, \\ 0, & \text{kun } f(x) < t/2. \end{cases}$$

Nyt $f \leq g + t/2$, joten $Mf \leq Mg + t/2$ (lauseen 1.16 nojalla), josta seuraa $\{x \mid Mf > t\} \subseteq \{x \mid Mg > t/2\}$.

Lebesguen mitan ominaisuuksien ja lauseen 2.7 nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{x \mid Mf > t\}) &\leq \mathcal{L}(\{x \mid Mg > t/2\}) \\ &\leq \frac{2C}{t} \int_A g \, d\mathcal{L} = \frac{2C}{t} \int_{\{x|f(x)\geq t/2\}} f \, d\mathcal{L}.\end{aligned}$$

Arvioimalla funktion Mf Lp-normia Cavalierin periaatteen, muuttujanvaihdon, edellisen tuloksen, ja Fubinin lauseen avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_A (Mf)^p \, d\mathcal{L} &= \int_0^\infty \mathcal{L}(\{x \mid Mf(x)^p > u\}) \, du \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \mathcal{L}(\{x \mid Mf(x) > t\}) \, dt \\
&\leq 2Cp \int_0^\infty t^{p-2} \int_{\{x \mid f(x) \geq t/2\}} f(x) \, d\mathcal{L}(x) \, dt \\
&= 2Cp \int_A f(x) \int_0^{2f(x)} t^{p-2} \, dt \, d\mathcal{L}(x) \\
&= \frac{2^p Cp}{p-1} \int_A f(x)^p \, d\mathcal{L}(x).
\end{aligned}$$

Eli jos $\|f\|_p < \infty$, niin myös $\|Mf\|_p < \infty$ mikä todistaa lauseen. $\square$

Lähdeluettelo

[1] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. *A maximal theorem with function-theoretic applications* Acta Math. 54, 81–116 (1930).

[2] Mattila, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press: Cambridge, 1995.

[3] Suomala, V. *Mitta ja Integraali*, luentomoniste.

[4] Stein, E.M., Shakarchi, R. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces* Princeton University Press, 2005.

[5] Terence, T. *An introduction to measure theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics* American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.