OULU BUSINESS SCHOOL
UNIVERSITY OF OULU

Joose Pekkarinen

ARBITRAASI

Kandidaatintutkielma

Rahoitus

Huhtikuu 2023

SISÄLLYS

TIIVISTELMÄ

Tämä kandidaatintutkielma on seikkailu arbitraasin ympärillä. Lähden etsimään mahdollisuuksia varmaa voittoa, kunnes nopeasti huomaan, että juuri arbitraasin mahdottomuus tekee siitä niin merkityksellisen. Aluksi tutustun arbitraasin käsitteeseen ja merkitykseen. Tutustun perusteellisesti hinnan muodostumiseen ja täydellisen markkinan perusteisiin. Arrow-Debreu-arvopaperien ja arbitraasin mahdottomuuden käsitteen kautta saan ensimmäisen kosketuksen aika-tila-avaruuteen. Arbitraasiin käytännössä tutustun option hinnoittelun mallin, yleisen tasapainotilan analyysin ja markkinoiden täydellisyyden avulla. Arbitraasin merkitys yritysten arvostamisessa, varallisuusesineiden hinnoittelussa ja rahoitusmarkkinoiden tutkimuksessa selviää.

1 JOHDANTO

Kandidaatintutkielmani keskittyy arbitraasiin. Arbitraasi on rahoituksen hyvin perustavanlaatuinen teoreema, koska lähtökohtaisesti jokainen sijoittaja tavoittelee ”varmaa voittoa”. Tutkielma on kirjallisuuskatsaus keskeisiin artikkeleihin. Kirjoitusprosessin aikana toivon oppivani arbitraasin käsitteen ja teorian lisäksi sen vaikutusta koko markkinaan ja hinnanmuodostukseen. Aiheena arbitraasi on ajankohtainen niin kauan kuin hyödykkeinen ja arvopaperien hinnan määrittelee markkinat. Yksikertainen esimerkki arbitraasista rahoitusmarkkinoilla on saman arvopaperin hintaero eri välittäjällä. Arvopaperin voi ostaa halvemmalla hinnalla ja myydä toisella markkinalla kalliimmalla. Puhtaita mahdollisuuksia arbitraasiin esiintyy harvoin ja sellaisenaan ne katoavat markkinoilta äkkiä pois.

Tarina taloustieteen professorista ja maanviljelijän pelistä avaa arbitraasin perusluonteen hienosti (Varian, 1987, s. 55). Maanviljelijä joutuu antamaan professorille 50 senttiä, mikäli ei osaa vastata professorin kysymykseen. Professori antaa maanviljelijälle dollarin, jos ei osaa vastata hänen kysymyksiinsä. Mikäli kumpikaan ei osaa vastata kysymykseen, jää maanviljelijä aina 50 senttiä voitolle. Arbitraasi on transaktion järjestämistä siten, että saadaan voittoa ilman käteissijoitusta. Tehokkaiden markkinoiden vallitessa tämäntapaisen arbitraasin mahdollisuus on hyvin harvinaista tai jopa mahdotonta (Varian, 1987, s. 56).

Arbitraasin mahdottomuus havaittiin jo varhain Modiglianin ja Millerin artikkeleissa. Yritys ei voi muuttaa arvostustaan markkinoilla puhtaasti taloudellisilla operaatioilla, kuten muuttamalla velkaantumisastettaan. (Miller & Modigliani, 1961). Markkinat ovat tarpeeksi tehokkaat estämään yksittäisten osakkeenomistajien arbitraasin, joten ne poistavat myös yrityksen mahdollisuuden arbitraasiin (Miller & Modigliani, 1961, s. 429).

Sijoitusmarkkinoilla sanaa arbitraasi käytetään usein väärin. Etenkin hedge-rahastojen ja sijoituspankkien keskuudessa kiinteätuottoinen arbitraasi on ollut suosittu strategia ja jossain tapauksissa osa oman toiminnan markkinointia. Voiton tekeminen markkinasuhdanteista riippumatta edellyttää yleensä merkittäviä riskejä. Rahastojen salkut sisältävät useita kiinteätuottoisia rahoitusinstrumentteja, kuten asuntolainatodistuksia, valtionlainoja, yrityslainoja tai jopa monimutkaisempia instrumentteja kuten luottoriskisopimuksia (Blackrock, 2023). Kun näiden instrumenttien hinnoittelussa ilmenee merkkejä väärinhinnoittelusta, rahastot vivuttavat omia sekä lyhyitä että pitkiä positioita käyttäen suojautuakseen hinnan muutokselta. Rahastot ovat voineet tehdä pitkiä aikoja pieniä voittoja, mutta kärsineet ajoittain suuria tappioita. Strategiat saattavat vaikuttaa arbitraasilta, mutta merkittävä markkinashokki kuten toimijoiden välinen luottamuspula saattaa aiheuttaa valtavia tappioita. Monessa mielessä finanssikriisi vuonna 2008 oli esimerkki kiinteätuottoisen strategian aikajanasta. Toimijat keräsivät voittaja komissiona ja sijoittamalla sub-prime-asuntolainoihin. Kaikki olivat tyytyväisiä, kunnes asuntojen hinnat lähtivät laskuun. Tässä tutkielmassa keskityn arbitraasiin sen perinteisessä merkityksessä.

Onko arbitraasi mahdollista? Mitä se tarkoittaa rahoitusmarkkinoilla? Lähestyn kysymyksiä hinnan muodostumisen ja arbitraasin mahdottomuuden kautta. Käytännön esimerkkejä haen CCA:n kirjallisuudesta. Esittelen option hinnoittelun teoriaa ja yleisen tasapainotilan analyysia. Pyrin esimerkein esittelemään asiaa myös oman oppimisen tukemiseksi.

2 ARBITRAASI

Luvussa käsittelen ensiksi arbitraasia käsitteenä ja sen jälkeen pureudun sen teoriaan tarkemmin. Arbitraasin käsitettä käyn läpi niin rahoitusmarkkinoita käsittelevän kirjallisuuden kuin laskukaavojen avulla. Teoriaa lähestyn Hal R. Varianin kirjallisuuden pohjalta.

2.1 Arbitraasin määritelmä

Arbitraasi on sanana laajalti käytössä rahoitusmarkkinoilla, mutta usein käsitettä käytetään väärin, kuten johdannossa on esitetty. Käsitettä käytetään laajasti kaupoista, jotka lupaavat suuria voittoja suhteessa riskeihin, mutta silti on mahdollisuus merkittäviin tappioihin (Tuckman & Serrat, 2012, s. 56). Puhtaan arbitraasin mahdottomuus ”*no arbitrage condition*” tai pikemminkin hankaluus on siirtänyt määrittelyä hakemaan apua juuri arbitraasin mahdottomuudesta. Arbitraasin mahdottomuus tarkoittaa tilannetta, jossa on mahdotonta sijoittaa tänään nolla ja saada huomenna ei-negatiivinen summa positiivisella todennäköisyydellä (Brigo & Mercurio, 2006, s. 23).

Arbitraasin mahdottomuutta tukee yhden hinnan laki. Identtisillä hyödykkeillä, jotka tuottavat saman kassavirran tulee olla vain yksi hinta (Tuckman & Serrat, 2012, s. 55). Samanlaisen instrumentin hintojen tulisi olla sama kaikkialla. Hintaero houkuttelee massoittain arbitraattoreita ostamaan hyödykettä, kunnes hinta on kaikkialla sama. Arbitraasi toisin sanoen ”ostetaan” markkinoilta nopeasti pois. Yhden hinnan laista poikkeaminen merkitsee, että arbitraasi on mahdollista. (Tuckman & Serrat, 2012, s. 56). Arbitraasin voi määritellä myös muodollisesti (Shreve, 1996, s. 136):

Arbitraasi on portfolio, joka alkaa kun $X_0 = 0$ ja loppuu X_n tyydyttäen

$$P(X_n \geq 0) = 1,\ P(X_n > 0) > 0$$

(P on tuotto)

Seuraavaksi sijoitetaan muodollinen määritelmä rahoitusmarkkinoiden yhteyteen. Arbitraasi on sijoitusstrategian, joka hyödyntää kahden tai useamman arvopaperin hinnoitteluvirheen suhteessa toisiinsa (Hull, 2021, s. 827). Arbitraasia olisi tällöin esimerkiksi kahden samanaikaisen oston tekeminen usealla markkinalla varmistaakseen varman voiton. Myös Hull (2021, s. 827) tunnistaa, että arbitraasimahdollisuudet ovat useimmilla rahoitusmarkkinoilla hyvin harvinaisia edellä esitettyjen asioiden takia.

2.2 Arbitraasin teoria

Hal R. Varian painottaa arbitraasin tai pikemminkin arbitraasin mahdottomuuden tärkeyttä (Varian, 1987, s. 56). Useat taloustieteen tärkeät tulokset ja ajatukset perustuvat puhtaasti arbitraasin mahdottomuuteen. Arbitraasin mahdottomuus on kenties keskeisin perusoletus rahoitusmarkkinoiden tutkimuksessa (Varian, 1987, s. 56). Seuraavaksi tarkastellaan hintojen muodostumisen yhteyttä arbitraasiin.

Määritelmä 1. Arrow-Debreu arvopaperi (Arrow, 1964, Debreu, 1959 Varian, 1987, s. 58)

Arrow-Debreu arvopaperi on yksinkertainen varallisuusesine, jonka tuotto on yhden dollarin vain yhdessä tietyssä luonnontilassa. Muissa tilanteissa tuotto on nolla. Arvopaperin tuottomalli on seuraava (0,…,1,…,0), jossa kohta 1 on tila s. Varallisuusesinettä voi ajatella hyvin yksinkertaisena niin laskennallisessa kuin taloustieteellisessä mielessä. Todistamme luvussa arvopaperin avulla, että kaikki tuottomallit voi esittää sitä käyttäen. Tämä tekee Arrow-Debreu arvopapereista erittäin hyödyllisiä tarkastellessa taloudellisten hyödykkeiden hintoja (Varian, 1987, s. 58).

2.2.1 Hinnan muodostumisen perusteet

Varian aloittaa arbitraasin mahdottomuuden pohjustamista selittämällä hyvin perusteellisesti, kuinka varallisuusesineiden hinnat muodostuvat. Tarkastellaan markkinaa, jossa hyödykkeet maksavat itsensä takaisin eri luonnontiloissa. Oletuksena on, että tilat ovat eri satunnaisten prosessien lopputuloksia ja yksilöt tavoittelevat tilaa, jossa heillä on enemmän varallisuutta. (Varian, 1987, s. 56).

Varallisuusesineen a tuotto tilassa s voidaan esittää R_{sa}. Varallisuusesineitä on A määrä ja eri tilojen määrä on S. Erään varallisuusesineen voitto voidaan esittää vektorin avulla jokaisessa eri tilassa. Ensimmäisen varallisuusesineen vektori on $(R_{11} \ldots R_{S1})$ ja i:n vektori $(R_{1i} \ldots R_{Si})$. Saadaan seuraava matriisi, joka kuvaa kaikkien varallisuusesineiden voittoja jokaisessa tilassa (Varian, 1987, s. 56)

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{S1} & \cdots & R_{SA} \end{pmatrix}$$

$S \times A$ matriisi, joka antaa jokaisen varallisuusesineen A tuoton jokaisessa tilassa S. (Varian, 1987, s. 56)

Matriisin jokainen sarake kuvaa yhtä varallisuusesinettä ja jokainen rivi kuvaa tietyn tilan tuottamaa voittoa kyseiselle esineelle. Voidaan olettaa, että yksilöt omistavat enemmän kuin yhtä varallisuusesinettä, joten hintojen muodostamiseksi pitää käyttää portfolioita. Varallisuusesineen a määrää yksilöllä voidaan kuvata x_a, joten hyödykeportfolio voidaan esittää vektorilla $x = (x_1, \ldots, x_A)$. Portfolion komponentit voivat olla niin positiivisia kuin negatiivisia. Positiivinen komponentti x_a tarkoittaa, että yksilöllä on oikeus voittoon, jos tila s tapahtuu. Negatiivinen komponentti taas tarkoittaa, että yksilön pitää maksaa häviö, jos tämä tila s toteutuu. Yksilölle varallisuusesineistä jäävä varallisuus w tilassa s on komponenttien x summa. Tämä voidaan ilmaista seuraavasti $w_s = \sum_{a=1}^{A} x_a R_{sa}$. Yksilön varallisuus voidaan yhdistää edelliseen matriisiin (Varian, 1987, s. 57)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{S1} & \cdots & R_{SA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_A \end{pmatrix}$$

tai suppeammin

$$w = Rx$$

Matriisi kuvaa lopputuloksen ja tähän tulokseen käytettyjen keinojen suhdetta. Kuluttajaa kiinnostaa lopullinen varallisuus, mutta sen saavuttamiseksi tarvitaan sen hetkisiä varallisuusesineitä. Muuttamalla varallisuusesineiden portfoliota saavutetaan tiloja, joissa lopun varallisuudessa on eroja. Saavutettavat varallisuustasot taas ovat riippuvaisia varallisuusesineiden määrästä ja ominaisuuksista. Varallisuusesineet ovat siis sidonnaisia toistensa hintoihin (Varian, 1987, s. 57).

Varallisuuden laskeminen riippuu hyödykkeiden ja eri tilojen suhteesta. Jos varallisuusesineitä a ja eri tiloja s on yhtä monta, kaikki varallisuusmahdollisuudet ovat saavutettavissa jollain portfoliolla. Saavuttaakseen tietyn varallisuustason $w = (w_1, \dots, w_s)$ täytyy ratkaista yhtälö portfoliolle $x = (x_1, \dots, x_A)$, joka saavuttaa tämän varallisuustason. Toisin sanoen yhtälöitä on yhtä monta kuin muuttujia, joten portfolion allokaatio jokaiselle varallisuustasolle on laskettavissa (Varian, 1987, s. 57). On kuitenkin todennäköistä, ettei tällainen tasapaino toteudu ja joko varallisuusesineitä tai eri tiloja on toisiaan enemmän. Seuraavaksi hyvin yksinkertaistetut matriisit havainnollistamaan varallisuusesineiden ja tilojen epätasapainoa:

$$R_a = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{pmatrix}, \ R_s = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{pmatrix}$$

R_a kuvaa tilannetta, jossa varallisuusesineitä on kolme ja luonnontiloja vain kaksi. R_s taas kuvaa tilannetta, jossa varallisuusesineitä on kaksi ja luonnontiloja kolme. Johdetaan varallisuuden jakautumiseen:

$$\begin{pmatrix} w_{1a} \\ w_{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Varallisuustaso 1: $$w_{1a} = (R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + R_{13}x_3)$$

Jos varallisuusesineitä on enemmän kuin tiloja, muuttujia on enemmän kuin yhtälöitä. Useamman portfolion on tuotettava tulos, jossa varallisuus jakautuu samalla tavalla (Varian, 1987, s. 57). Kahden erillisen portfolion on tuotettava sama varallisuustaso.

$$\begin{pmatrix} w_{1s} \\ w_{2s} \\ w_{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Varallisuustaso 2: $w_{1s} = (R_{11}x_1 + R_{12}x_2)$

Kaikkien yhtälöiden ratkaiseminen ei ole mahdollista. Tasojen pitäisi erota, mutta varallisuusesineitä ei ole tarpeeksi sen saavuttamiseksi. Kun tiloja on enemmän, kaikkia varallisuuden tasoja ei voi saavuttaa nykyisillä varallisuusesineillä (Varian, 1987, s. 57). Todennäköisesti ihmiset välittävät enemmän lopputuloksesta kuin mahdollisten varallisuusesineiden määrästä, jolloin luonnontiloja on enemmän kuin esineitä. Olisi oletettavaa, että markkinat tarjoaisivat yksilöille varallisuusesineitä, joilla haluttu varallisuus olisi saavutettavissa. Varian (1987, s. 58) toteaa, että varallisuusesineiden ja tilojen suhteesta huolimatta tutkimukset ovat osoittaneet mahdolliseksi rakentaa portfolioita, joiden tuottoja voidaan pitää sattumanvaraisina. Varallisuusesineen hinnan muodostuminen perustuu yksilön päätöksiin saavuttaa haluamansa varallisuustaso. Rajoitteena on varallisuusesineiden määrä ja niiden kustannukset sekä hinnat.

2.2.2 Budjettirajoite ja varallisuusesineiden hinta

Yksilöiden valitessa varallisuusesineitä portfolioihin he jakavat varallisuutta eri luonnontiloihin. Sijoituspäätökset perustuvat sen hetkisen varallisuuden määrään, mutta myös varallisuusesineiden hintaan (Varian, 1987, s. 58). Hyvä esimerkki budjettirajoitteesta on Berkshire Hathawayn osake. Yhden A-osakkeen hinta oli maaliskuun 7. päivän suljettua 471,500.00 dollaria (Yahoo Finance, 2023).

Budjettirajoitteen voi yhdistää hinnan muodostumiseen. Varallisuusesineen a hinta voidaan esittää p_a, jolloin esineiden hinnoista muodostetun vektorin voi esittää $p = (p_1, \dots, p_A)$. Yhdistetään hinta portfolion vektoriin $x = (x_1, \dots, x_A)$, jolloin voidaan laskea portfolion arvo $px = \sum_{a=1}^{A} p_a x_a$ (Varian, 1987, p. 58). Yhtälö on hyvin saman tapainen kulutuksen teorian kanssa: hyödykkeiden arvo on näiden hyödykkeiden kustannusten summa. Suuri ero löytyy hyödykkeiden ja varallisuusesineiden tarkoituksesta. Hyödykkeet ovat usein lopputuotteita, kun taas varallisuusesineet ovat keinoja varallisuuden kasvattamiseen. Kahden samanlaisen varallisuuden tuottaman portfolion täytyy siis olla saman arvoisia, koska niiden lopputuotteena – jota kaikki tavoittelevat – on yhtä paljon varallisuutta (Varian, 1987, s. 58).

Portfolioiden hinnoittelua voi hahmottaa käsitellessä yksinkertaisia Arrow-Debreu arvopapereita. Näiden arvopapereiden arvo on helposti määriteltävissä jokaisessa luonnontilassa. Portfolion tai minkä tahansa varallisuusesineen voi muodostaa Arrow-Debreu arvopapereista, mikäli niiden arvo tunnetaan. Kaikki tuottomahdollisuudet voi kuvata jollain Arrow-Debreu arvopapereilla muodostetulla portfoliolla. Täten jokaisen varallisuusesineen hinnan tulee olla sama kuin Arrow-Debreu arvopapereilla muodostetun portfolion, jotka tuottavat samanlaisen varallisuuden jakauman kyseisessä luonnontilassa (Varian, 1987, s. 58).

π kuvaa Arrow-Debreu arvopaperin hintaa, kun tuotto on yhden dollarin tilassa s. (R_{sa}) on varallisuusesineen a tuottojakauma. Muodollisesti esitettynä varallisuusesineen a tasapainohinta (Varian, 1987, s. 58):

$$p_a = \sum_{i=1}^{S} \pi_s R_{sa}$$

Voidaan ajatella, että π_s mittaa dollarin hintaa tilassa s ja arvopaperin tuotto tilassa s on R_{sa}, jolloin summaamalla kaikki tilat saadaan varallisuusesineen a arvo (Varian, 1987, s. 59).

Toisaalta saman varallisuuden tuottamaa jakaumaa voi perustella arbitraasin avulla. Jos kaikki Arrow-Debreu arvopaperit ovat ostettavissa ja varallisuusesineen hinta, joka tuottaa saman varallisuuden kuin Arrow-Debreu portfolio, eroaa markkinoilla hinnaltaan kyseisestä portfoliosta, syntyy mahdollisuus tehdä varmaa voittoa. Yksilö voisi ostaa hinnaltaan halvempaa arvopaperia ja myydä kalliimpaa, vaikka ne tuottaisivat loppu tilanteessa saman varallisuuden. Mikäli arbitraasi olisi mahdotonta ja kaikki Arrow-Debreu arvopaperit olisivat ostettavissa, mikä tahansa varallisuusesine on hinnoiteltavissa Arrow-Debreu arvopapereiden yhdistelmällä (Varian, 1987, s. 59).

Edellinen perustelu nojaa siihen, että kaikki tiloja on yhtä paljon kuin eri varallisuusesineitä (Varian, 1987, s. 59). Seuraavaksi tarkastellaan portfolioiden kannalta todennäköisempää tilannetta, jossa varallisuusesineitä on vähemmän kuin eri luonnontiloja.

2.2.3 Arbitraasin mahdottomuuden määrittely

Arbitraasin mahdottomuus tarkoittaa tilannetta, jossa kuuluisat ”ilmaiset lounaat” eivät ole mahdollisia. Tämä estää hintojen asetelman, jossa yksilö saa jotain ilmaiseksi. Varian (1987, s. 59) kirjoittaa, että mikä tahansa portfolio, jonka tuotto on ei-negatiivinen kaikissa luonnontiloissa, on arvokas yksilölle. Jos ilmaisia lounaita ei ole olemassa, ei-negatiivista voittoa tuottavan portfolion täytyy sisältää ei-negatiivisia kustannuksia. Voittoa tuottavien portfolioiden täytyy siis sisältää myös kustannuksia. Johdetaan arbitraasin mahdottomuuden muodollinen määritelmä, kun Rx on portfolion tuottojakauma ja px on portfolion kustannukset (Varian, 1987, s. 59):

Määritelmä 2. Arbitraasin mahdottomuus (Varian, 1987, s. 59)

$$Jos\ Rx\ \geq 0\ silloin\ on\ pakko\ px \geq 0$$

Varianin määritelmä on vastakohta aiemmin esitellylle Shreven määritelmälle arbitraattisesta portfoliosta. Varianin määritelmä asettaa varallisuusesineen tasapainohinnalle rajoitteita. Tuottomatriisissa R vain osa hinnoista p ovat johdonmukaisia arbitraasin mahdottomuuden kanssa. Varian esittää kysymyksen, että mikä yhdistää näitä hintoja, ja mitä rajoitteita sääntö asettaa varallisuusesineiden hinnoille (Varian, 1987, s. 59).

2.2.4 Arbitraasin mahdottomuuden todistaminen

Todistetaan, että arbitraasin mahdottomuudesta seuraa ei-negatiivisten tilahintojen π – ”state prices” – olemassaolo. Varian lähestyy todistamista lineaarisen optimoinnin avulla (Varian, 1987, s. 71):

$$\min \quad px$$

$$s.t. \quad Rx \geq 0$$

Jossa p on varallisuusesineen arvo, x on yksilön osuus varallisuusesineestä ja R tuotto. Funktio antaa halvimman portfolion, joka tuottaa ei-negatiivista tuottoa. x voi olla negatiivinen tai positiivinen. Yksilöllä voi siis olla myös negatiivisia positioita varallisuusesineissä eli varallisuusesinettä on ostettu lyhyeksi. $x = 0$ tarkoittaa, ettei yksilöllä ole sijoituksia kyseisessä varallisuusesineessä, mikä tarkoittaa, että koko probleeman ratkaisu on rajallinen (Varian, 1987, s. 71). Ohjelman kaksoiskappale on (Varian, 1987, s. 71):

$$\max \quad \pi 0$$

$$s.t. \quad \pi R = p$$

Perusfunktion rajoitukset pätevät myös kaksoisfunktioon. Funktiossa π on S-ulotteinen ei-negatiivinen vektori kaksoismuuttujille – varallisuusesineiden hinta. Funktioista seuraa, että arbitraasin mahdottomuus edellyttää ei-negatiivisen S-ulotteisen vektorin π olemassaoloa, joka toteuttaa (Varian, 1987, s. 72):

$$p = \pi R$$

Edellisen probleeman tavoitteena oli todistaa, että ei-negatiivisten tilahintojen (π_s) – ”state prices” – olemassaolo tarkoittaa arbitraasin mahdottomuutta. Tämä voidaan todistaa edelleen portfoliolla x, jossa (Varian, 1987, s. 72):

$$Rx \geq 0$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet π muistaen todistettu yhtälö $p = \pi R$ (Varian, 1987, s. 72):

$$\pi Rx \geq 0 \Rightarrow px \geq 0$$

2.2.5 Arbitraasin mahdottomuuden merkitys

Arbitraasin mahdottomuus tarkoittaa, että ei-negatiivisille tilahinnoille täytyy olla vektori $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_S)$, jossa jokaisen varallisuusesineen hinta on annettu yhtälössä (Varian, 1987, s. 59):

$$p_a = \sum_{i=1}^{S} \pi_s R_{sa}$$

Havainnollistetaan rajoitteita aiemmin määritetyillä Arrow-Debreu arvopapereilla. Arvopaperin hinta π_s mittaa dollarin arvoa tilassa s. Yhden varallisuusesineen hinnan määrittämiseksi täytyy tarkastella, kuinka paljon se tuottaa tietyssä tilassa ja kertoa tuotto dollarin arvolla kyseisessä tilassa. Kaikki tilat summaamalla yhteen saadaan varallisuusesineen hinta (Varian, 1987, s. 60).

Ei-negatiivisten tilahintojen π olemassaolo todistaa arbitraasin mahdottomuuden. Jos arbitraasi on mahdotonta, täytyy olla ei-negatiivisia tilahintoja, jolloin ei voi olla mahdollisuuksia arbitraasiin (Varian, 1987, s. 60). Ei-negatiiviset tilahinnat ja arbitraasin mahdottomuus siis sitovat toisiaan, jolloin yhden vallitessa myös toinen vallitsee.

Markkinoiden toimiessa tehokkaasti eliminoiden arbitraasin mahdollisuuden täytyy olla ei-negatiivisia tilahintoja, joiden avulla kaikki muut varallisuusesineet voidaan hinnoitella (Varian, 1987, s. 60).

2.3 Arvonlisäys

Arbitraasin mahdottomuus on hyvin perustavanlaatuisesti taustalla monissa rahoitusmarkkinoiden teorioissa. Seuraavaksi tarkastelemme Varianin artikkelin pohjalta arvonlisäyksen teoreemaa.

2.3.1 Arvonlisäyksen teoreema

Tarkastellaan kahta arvopaperia a ja b, joiden voitto voidaan ilmaista (R_{sa}) ja (R_{sb}) (Varian, 1987, s. 60). Arvopapereiden hinnat ovat tiedossa ja ne voi esittää p_a ja p_b. Lisäksi on arvopaperi c, jonka satunnainen voitto voidaan esittää jollain edellisten arvopaperien lineaarisella yhdistelmällä. Muodollisesti ilmaistuna (Varian, 1987, s. 60):

$$R_{sc} = AR_{sa} + BR_{sb}$$

, jossa A ja B ovat arbitraasivakioita. Arbitraasin mahdottomuus edellyttää, että tuottovektori R_{sc} voidaan saada funktiosta $p_c = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sc}$. Hyödynnetään edellistä yhtälöä $R_{sc} = AR_{sa} + BR_{sb}$ ja saadaan (Varian, 1987, p. 60):

$$p_c = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sc}$$

$$p_c = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \left(AR_{sa} + BR_{sb}\right)$$

$$p_c = \sum_{s=1}^{S} A\pi_s R_{sa} + B\pi_s R_{sb}$$

$$p_c = Ap_a + Bp_b$$

Edellinen todistaa arvonlisäyksen teoreeman. Sovitaan, että arbitraasin mahdottomuus vallitsee. Arvopaperin, jonka tuotto muodostuu muiden varallisuusesineiden tuottojen lineaarisesta yhdistelmästä, hinnan täytyy muodostua samasta yhdistelmästä kyseisten varallisuusesineiden hinnoista (Varian, 1987, s. 61).

Arbitraasin ollessa mahdotonta, arvopaperin c hinta voidaan johtaa kahden muun arvopaperin hinnan avulla. Voidaan ajatella, että kokonaisuus on arvoltaan sen osiensa summan, mutta asia ei ole niin yksinkertainen (Varian, 1987, s. 61).

2.3.2 Arvonlisäyksen merkitys

Varallisuusesineiden tuotto on satunnaista ja arvopaperien a ja b tuotto voi korreloida niin negatiivisesti kuin positiivisesti. Portfolion riski pienenee, kun se sisältää kaksi negatiivisesti korreloivaa varallisuusesinettä (Varian, 1987, s. 61). Olisi johdonmukaista, että kahden negatiivisesti korreloivan varallisuusesineen portfolio olisi arvokkaampi kuin pelkästään kahden yksittäisen arvopaperien summattu arvo. Arvonlisäyksen teoreema kuitenkin esittää, että portfolion hinta muodostuu vain kahden yksittäisen arvopaperin hintojen summasta.

Hintojen tasapainon vallitessa yksittäisten arvopaperien summan täytyy olla sama kuin niistä muodostetun portfolion. Muuten arbitraattorit voisivat ostaa halvempaa kombinaatiota ja myydä kalliimpi markkinoilla. Varallisuusesineiden tasapainohintojen täytyy huomioida erilainen lineaarinen portfolioiden manipulointi, jotta arbitraasi on mahdotonta (Varian, 1987, p. 61).

Palataan aiemmin esiteltyyn Modiglianin ja Millerin kirjoituksiin. Modiglianin ja Millerin teoria sanoo, että yrityksen arvo on riippumaton yrityksen taloudellisesta rakenteesta (Varian, 1987, p. 61). Jos yritykset voisivat muuttaa arvostustaan vaihtamalla osakkeiden ja velkakirjojensa suhdetta, silloin yksittäiset arbitraattorit voisivat uudelleenpakata olemassa olevia osakkeita ja velkakirjoja saavuttaakseen arbitraattisia voittoja. Yrityksen arvon pitäisi siis perustua ainoastaan yrityksen osakkeiden ja velkakirjojen arvojen summaan (Miller & Modigliani, 1961, s. 430) & (Varian, 1987, s. 61).

Modiglianin ja Millerin teoria asettaa myös rajoitteita. On hyvä huomata, että arbitraasin mahdottomuuden ja arvonlisäyksen teoreemat toimivat vain olemassa olevien varallisuusesineiden yhdistelmissä. Yrityksen antaessa uusia velkakirjoja eri tuotolla kuin vanhemmat velkakirjat, teoriat eivät välttämättä pidä. Taloudelliset operaatiot, jotka tuottavat uusia tuottomahdollisuuksia ja joita ei voi rakentaa olemassa olevilla varallisuusesineillä, arbitraasin mahdottomuuden ja arvonlisäyksen teoreeman ei tarvitse toteutua (Varian, 1987, s. 62).

Näiden ajatusten pohjalta varallisuusesineiden hinnoittelua on helpompi ymmärtää. arbitraasin mahdottomuus pätee suoraan vain lineaarisiin operaatioihin. Varallisuusesineen, jonka tuotto on kahden eri varallisuusesineen tuottojen summa, hinnan täytyy olla näiden kahden varallisuusesineiden hintojen summa (Varian, 1987, s. 62).

Ensimmäisessä luvussa esittelimme arbitraasin merkityksen ja ennen kaikkea arbitraasin mahdottomuuden käsitteen. Tarkastelimme asiaa yleisemmin useasta näkökulmasta ja huomataan että puhdas arbitraasi on hyvin haastavaa. Arbitraasin mahdottomuus perusteltiin hyvin syvällisesti Hal Varianin artikkelin avulla. Luvun tärkein ajatus on, että kahden samanlaisen varallisuusesineen hinnan tulee olla sama. Seuraavaksi tehdään katsaus arbitraasin käytännön kohteisiin ja varallisuusesineiden hinnoitteluun.

3 ARBITRAASI KÄYTÄNNÖSSÄ

Ajatus arbitraasin mahdottomuudesta on selkeä. Varallisuusesineillä on markkinoilla yksi hinta, joka perustuu varallisuusesineen rakenteeseen. Arbitraasiin ei pitäisi olla mahdollisuutta, kun markkinat toimivat tehokkaasti. Ilmaista voittoa ei voi esimerkiksi tehdä hajauttamalla, koska hintojen pitäisi sisältää jo markkinariski. Käytännössä arbitraasia ja sen mahdottomuutta on lähdetty analysoimaan pilkkomalla yrityksen pääomaa pienempiin eriin ja hinnoittelemalla näitä hieman monimutkaisemmin rakennettuja arvopapereita.

Johdannaiset ja etenkin sopimukset, joiden lopputulema riippuu yhden tai useamman satunnaisen muuttujan kehityksestä (Babbs & Selby, 1993, s. 1). Näitä johdannaisia kutsutaan nimellä ”*Contingent claims*” ja niiden tutkimusta ”*Contingent Claims Analysis*” (CCA). CCA on ollut tärkeä kehitys markkinoiden tasapainon tutkimukselle epävarmoissa olosuhteissa. Näiden johdannaisten ”*epävarmojen saatavien*” tuotto perustuu jonkun epävarman tulevaisuuden tapahtuman toteutumiseen. Rahoitusmarkkinoilla yleinen esimerkki ovat optiot, mutta myös tässä työssä esitellyt Arrow-Debreu arvopaperit ovat epävarmoja saatavia. Niiden tuotto realisoituu vain tietyssä tapauksessa (tilassa s).

CCA:n merkitys perustuu mahdollisuuteen pilkkoa yrityksen omaisuus pienemmiksi eriksi. Kaikki yrityksen velat voidaan esittää yrityksen varallisuudesta rakennetuilla optioilla (Black & Scholes, 1973, s. 637). Tämän perusteella portfolio strategian lopputulosta voidaan käsitellä ”*Contingent Claimina”*. Nämä epävarmat johdannaiset ovat hyvin läheisessä suhteessa portfolion rakentamisen ongelmiin tasapainotilan vallitessa. Aloitetaan kuitenkin arbitraasin mahdottomuuden käytännön esittely yksinkertaisten osto-optioiden läpikäynnillä.

3.1 Option hinnoittelun teoria

Ensiksi määritellään optio, ja esitellään yksinkertaisen option ominaisuuksia. Palataan option hinnoittelun teoriaan ja sen historiaan tämän jälkeen.

Määritelmä 2. Optio (Varian, 1987, s. 62)

Osto-optio on arvopaperi, joka antaa oikeuden ostaa varallisuusesinettä a jollain sovitulla hinnalla K tietyllä ajanjaksolla T. ”Amerikkalainen” optio antaa oikeuden ostaa varallisuusesinettä milloin tahansa tällä ajanjaksolla. ”Eurooppalainen” optio taas antaa oikeuden ostaa ainoastaan ajanjakson lopussa eli eräpäivänä (Varian, 1987, s. 62). Myyntioptio antaa taas oikeuden myydä varallisuusesinettä tiettyyn hintaan.

3.1.1 Option ominaisuudet

Osto-optiot antavat oikeuden ostaa arvopaperi sovitulla toteutushinnalla. Oikeuden käyttäminen ei ole pakollista, joten optioissa ei synny velvollisuutta kuin optio-oikeuden myyjälle. Usein optioita käytetään suojaamaan sijoituksia vähentämällä riskiä.

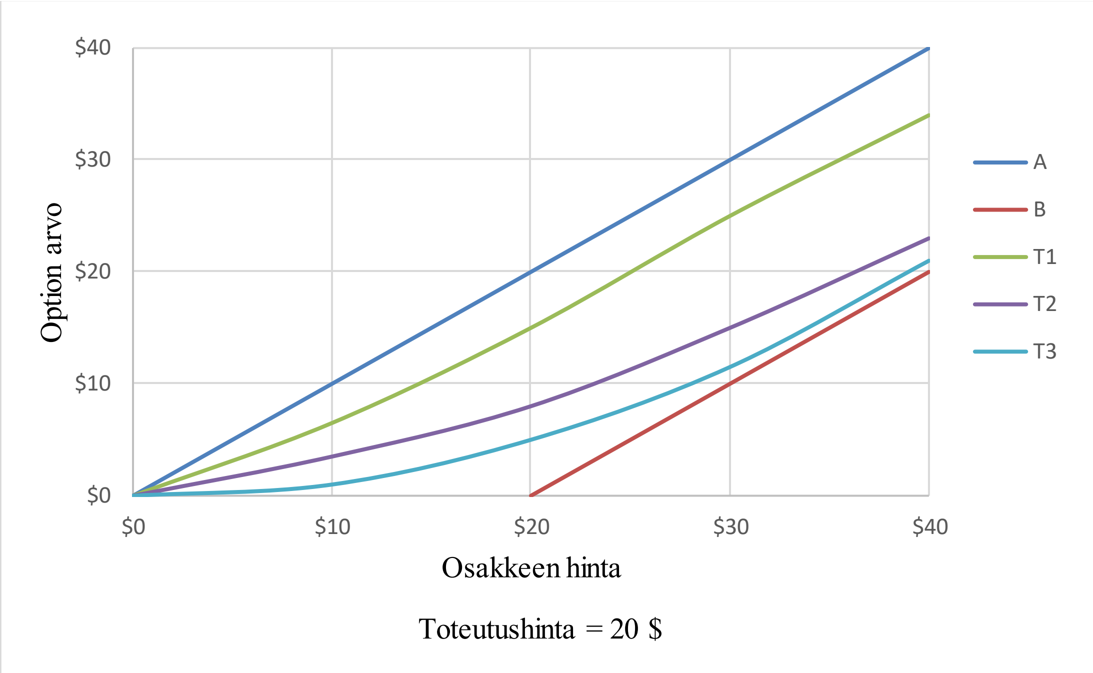
Seuraavaksi esitellään yksinkertaisen osto-option ominaisuuksia. Mitä korkeampi osakkeen hinta on, sitä suurempi on option toteutushinta K. Osakkeen hinnan ollessa paljon korkeampi kuin option toteutushinta, optio-oikeus käytetään lähes varmasti. Sen hetkinen option arvo on siten suunnilleen yhtä suuri kuin osakkeen hinta vähennettynä samana päivänä erääntyvän diskontatun joukkovelkakirjan hinnalla, joka on nimellisarvoltaan option toteutushinta (Black & Scholes, 1973, s. 638).

Toisaalta, jos osakkeen hinta on paljon alempi kuin option toteutushinta, optio-oikeus jää melko varmasti käyttämättä. Option arvo on siis lähellä nollaa. Jos taas option eräpäivä on kaukana tulevaisuudessa, optio-oikeuden antavan joukkovelkakirjan hinta on hyvin alhainen, ja option arvo on suunnilleen yhtä suuri kuin osakkeen hinta (Black & Scholes, 1973, s. 638).

Jos eräpäivä on hyvin lähellä, option arvo on suunnilleen yhtä suuri kuin osakkeen hinta vähennettynä option toteutushinnalla. Option arvo voi olla myös nolla, jos osakkeen hinta on alle option toteutushinnan. Normaalisti option arvo laskee eräpäivän lähestyessä, mikäli osakkeen arvo ei muutu (Black & Scholes, 1973, s. 638).

Näitä yleisiä option arvon ja osakkeen hinnan välisiä suhteita kuvataan usein kaaviolla, kuten kuviossa 1. Viiva A kuvaa optio-oikeuden maksimiarvoa, koska sen arvo ei voi olla suurempi kuin itse osake. Viiva B kuvaa option minimiarvoa, koska sen arvo ei voi olla negatiivinen eikä pienempi kuin osakkeen hinta vähennettynä toteutushinnalla. Viivat T_1, T_2 ja T_3 kuvaavat option arvoa peräkkäin yhä lyhyemmillä maturiteeteilla (Black & Scholes, 1973, s. 638).

Kuvaaja 1. (Black & Scholes, 1973, s. 638)



Koska option arvo on aina pienempi kuin osakkeen, on option hinta herkempi markkinoiden hinnanmuutoksille. Suhteessa muutos option hinnassa on suurempi kuin osakkeen hinnassa eli option hinta on volatiilimpi eräpäivän pysyessä samana (Black & Scholes, 1973, s. 639).

3.1.2 Black-Scholes-Merton-malli

Mallin merkitystä optioiden hinnoittelussa tai ylipäänsä rahoitusmarkkinoiden toiminnassa ei voi yliarvioida. Optioita ostettiin jo antiikin Kreikassa suojaamaan viljelijöiden satoja. Optioiden hinnoittelulle luotiin matemaattisia malleja läpi 1900-luvun alkaen Louis Bachelorin tohtorintutkinnosta (1900). Näissä malleissa käytettiin tuntemattomia muuttujia ja niiden soveltaminen käytännössä oli haastavaa. Black ja Scholes yhdessä Mertonin lisäysten kanssa loivat mallin, jolla monimutkaistenkin optioiden hinnoittelulle voidaan johtaa kaavat (Merton, 1973, s. 141). Tässä työssä ei pureuduta mallin matematiikkaan yhtä syvälle kuin arbitraasi perusteisiin, mutta esitellään mallin perustelujen lopputuloksia ja merkitystä.

Seuraavaksi Black-Scholes-Merton-mallin tärkeimmät yhtälöt ja niiden merkitys. Perusyhtälö toimii seuraavien olosuhteiden vallitessa (Black & Scholes, 1973, s. 640):

a) Lyhyiden korkojen taso tiedetään ja se on vakio
b) Osakekurssi seuraa satunnaista kulkua jatkuvassa ajassa, jossa varianssin suuruus on suoraan verrannollinen osakkeen hinnan neliöön. Tämän vuoksi mahdollisten osakekurssien jakauma minkä tahansa rajallisen aikavälin jälkeen seuraa log-normaalijakaumaa. Osakkeen tuoton varianssin vaihtelu on vakio.
c) Osakkeesta ei makseta osinkoja tai anneta muita etuuksia
d) Optio on ”eurooppalainen” eli se voidaan toteuttaa vain eräpäivänä
e) Option tai osakkeen oston yhteydessä ei ole mitään transaktiokustannuksia
f) On mahdollista lainata mikä tahansa osuus arvopaperin hinnasta sen ostamiseksi tai omistamiseksi lyhytaikaisella korolla (valtion obligaatio).
g) Lyhyeksi myynnistä ei seuraa mitään rangaistuksia. Myyjä, jolla ei ole omistuksessaan arvopaperia, hyväksyy yksinkertaisesti ostajan määrittelemän arvopaperin hinnan ja sopii maksavansa hänelle tulevaisuudessa summan, joka vastaa arvopaperin hintaa tuona päivänä (Black & Scholes, 1973, s. 640).

Mallissa käytetään siis hyvin yksinkertaista optiota, mutta Merton (1973, s. 178) ja myöhemmin Ross johtivat mallista yhtälöitä myös hyvin edistyneille sopimuksille. Edellisten olosuhteiden vallitessa option arvo on riippuvainen vain osakkeen hinnasta, ajasta ja muuttujista, jotka tunnetaan vakioina. (Black & Scholes, 1973, s. 641). Täten on mahdollista rakentaa suojattu positio, joka koostuu ostetusta osakkeesta ja lyhyeksi myydyistä optioista. Position arvo ei perustu osakkeen arvoon vaan ainoastaan aikaan ja tunnettujen vakioiden arvoon (Black & Scholes, 1973, p. 641). Tarvittujen optioiden määrä yhtä osaketta kohtaan saadaan yhtälöstä, jossa $w(x,t)$ on option arvo, x osakkeen hinta ja t aika (Black & Scholes, 1973, s. 641):

$$\frac{1}{w_1(x,t)}$$

Suhde option arvossa ja osakkeen hinnassa, muutoksen ollessa pieni, on $w_1(x,t)$. Osakkeen arvon muuttuessa omistettujen osakkeiden suhdetta lyhyeksi myytyihin optioihin pitää korjata jatkuvasti. Osakkeen hinnan muutos kompensoituu optioiden arvon muutoksella, joten osakkeen hinta ei vaikuta suojatun position arvoon (Black & Scholes, 1973, s. 641).

Tilannetta voi havainnollistaa kuvaajalla 1. Käsitellään viivaa T_2 ja osakkeen hinta on 15 dollaria, jolloin option arvo on 5 dollaria. Huomioidaan, että option toteutushinta 20 dollaria. Viivan T_2 kulmakertoimen voidaan olettaa noin $\frac{1}{2}$. Luodakseen suojatun position yhtä osaketta kohtaan pitää myydä kaksi optiota lyhyenä. Osake kustantaa 15 dollaria ja optioiden myyminen tuo 10 dollaria, joten position pääoma on 5 dollaria (Black & Scholes, 1973, s. 641).

Kuvaajan mukaan osakkeen hinnan muuttuessa esimerkiksi 15 dollarista 20 dollariin kahden option arvo nousee 15,75 dollariin eli position pääoma laskee 4,25 dollariin. Osakkeen hinnan laskiessa 15 dollarista 10 dollariin optioiden arvo laskee 5,75 dollariin eli position pääoma laskee samaan 4,25 dollariin muuttui osakkeen hinta kumpaan suuntaan tahansa (Black & Scholes, 1973, s. 641). Tässä on hyvä huomata, että kuvaajan luvut ovat havainnollistavia, eivätkä heijastele todellisia markkinoilta löytyviä osakkeita ja niiden optioita. Periaate kuitenkin säilyy. Jos osakkeiden ja optioiden suhdetta muutetaan jatkuvasti, position pääoma säilyy samana eli osakkeen hinnan muutoksella ei ole vaikutusta suojatun position arvoon. Osakkeen ja markkinaportfolion arvon seuratessa yhteistä jatkuvaa satunnaista kulkua tasaisella kovarianssitasolla oman pääoman tuoton ja markkinan tuoton kovarianssi on nolla. Suojatun position riski on siis nolla (Black & Scholes, 1973, p. 642).

3.1.3 Option hinnoittelun kaava

Black, Scholes ja Merton johtivat kaavan matemaattisen perustelun täydentäen toistensa tutkimusta, ja koko prosessin läpikäyminen ei ole välttämätöntä ymmärtääkseen vaikutuksen arbitraasin mahdottomuuteen tai arbitraasin merkityksen kaavan syntymiseen. Matemaattiset perustelut option hinnoittelun kaavaan hyödyntävät paljolti aiempaa tutkimusta niin optioiden hinnoittelusta kuin fysiikastakin. Kaavan matemaattisista perusteluista voi lukea lisää seuraavista papereista Fama ja Miller (1972), Sharpe (1964, s. 441) sekä McKean (1969, s. 52). Differentiaaliyhtälönä käytettiin Churchillin (1963) fysiikan lämmönsiirron kaavaa.

Option hinnoittelun kaavassa x on osakkeen hinta, c option toteutushinta, t^* on eräpäivä, t nykyinen päivä, r on korkotaso ja v^2 on osakkeen tuoton varianssitaso. $N(d)$ on kertymäfunktio. Kaavan perusversio, kun edellisen alaluvun ehdot pitävät paikkansa (Black & Scholes, 1973, s. 644):

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln x/c + (r + \frac{1}{2}v^2)(t - t^*)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln x/c + (r - \frac{1}{2}v^2)(t - t^*)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

Yhtälöstä voi huomata, ettei osakkeen odotettua tuottoa ole yhtälössä. Option arvo on siis riippumaton osakkeen odotetusta tuotosta. Myös maturiteetin vaikutus yhtälön arvoon on verrannollinen korko- ja varianssitason kasvuun (Black & Scholes, 1973, s. 644). Merton (1973) osoitti, että option arvo kasvaa jatkuvasti, kun minkä tahansa t^*, r tai v^2 arvo kasvaa. Jokaisessa tapauksessa option arvo lähestyy maksimiarvoaan eli osakkeen hintaa.

Osittainen derivaatta w_1 määrittää osakkeiden ja optioiden suhteen suojatussa positiossa, joten hinnoittelun yhtälöstä voidaan johtaa (Black & Scholes, 1973, s. 645):

$$w_1(x,t) = N(d_1)$$

Yhtälöistä nähdään, että xw_1/w on aina suurempi kuin yksi, joten optio on aina volatiilimpi kuin itse osake (Black & Scholes, 1973, s. 645).

3.1.4 Mallin merkitys

Aikaisemmin optioiden arvon ja osakkeen hinnan välille ei ollut luotu yhteyttä. Tehokkailla markkinoilla ja arbitraasin ollessa mahdotonta arvopaperin arvon täytyy olla hinnoiteltavissa sen perustana olevan varallisuusesineen avulla. Black, Scholes (1973, s. 645) ja Merton (1973, s. 160) onnistuivat luomaan yhtälön, joka sitoo yrityksen osakkeen arvon option hintaan. Option hinnoittelun teorian kehittäminen on askel kohti yleistä teoriaa hinnoitella yrityksen velat, korkojen pituus ja riskit sekä spekulatiivisen markkinan tutkimiselle (Merton, 1973, s. 142).

Mallissa on kuitenkin myös omat puutteensa. Merkittävä heikkous on, että malli on käytännössä osittaisen tasapainotilan analyysi. Se johtaa hinnoittelun ja matemaattisen päättelyn monien rajoitteiden ja ulkoisten muuttujien avulla (Babbs & Selby, 1993, s. 438). Se ei välttämättä vastaa todellista markkinaa ja pidä paikkaansa yleisessä tasapainotilassa. Malli ei ota huomioon esimerkiksi osinkojen maksua ja transaktiokustannuksia (Merton, 1973, s. 143). Myös riskitön korkotaso ja osakkeen volatiliteetti oletetaan jatkuvasti tasaiseksi.

Black ja Scholes (1973, s. 653) testasivat malliaan suurella määrällä osto-optio dataa ja huomasivat, että ostetuiden ja myytyjen optioiden hinnat poikkeavat systemaattisesti mallin ennustamista hinnoista. Optioiden ostajat maksavat johdonmukaisesti suurempia hintoja kuin malli ennustaa. Optioiden myöntäjät taas ottavat vastaan hintoja, jotka ovat mallin ennustamalla tasolla. Optiomarkkinoilla on suuret transaktiokustannukset, jotka tosi asiassa maksaa optioiden ostajat (Black & Scholes, 1973, s. 653).

Myös osakkeen riskisyyden nähtiin vaikuttavat optioiden hintoihin. Riskisten osakkeiden optiot ovat hinnoiltaan lähempänä mallin ennustetta kuin pienemmän riskin osakkeiden optiot. Markkina siis näyttää aliarvioivan eroavaisuuden varianssitasossa. Tämä ei kuitenkaan johda arbitraasin mahdollisuuteen optiomarkkinoilla, koska transaktiokustannusten vaikutus on niin suuri (Black & Scholes, 1973, s. 653).

3.1.5 Monimutkaisemmat johdannaiset

Black, Scholes ja Merton huomasivat jo vuonna 1973, että option hinnoittelun kaavaa voi soveltaa myös yksinkertaisen osto-option lisäksi monimutkaisempiin johdannaisiin. "Eurooppalaisen" myyntioptiolle malli säilyy muuttumattomana. Ostamalla samanaikaisesti "eurooppalaisen" osto- ja myyntioption tuotto havaittiin samaksi kuin ostaa osake lainatulla rahalla (Black & Scholes, 1973, s. 647).

Merton (1973, s. 144) laajensi mallin myös "amerikkalaisiin" osto-optioihin, hyödyntäen kaavaa $(x - c)$ eli osakkeen hinta on aina suurempi kuin option arvo, jolloin järkevä sijoittaja ei toteuta osto-optiota ennen eräpäivää. "Amerikkalainen" ja "eurooppalainen" osto-optio ovat siis saman arvoisia.

Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että "amerikkalainen" ja "eurooppalainen" myyntioptio olisivat saman arvoisia. Myyntioptio, jonka voi toteuttaa milloin tahansa, sisältää ei-negatiivista arvoa, koska joskus voi olla suotuisaa toteuttaa optio ennen eräpäivää. Esimerkiksi tapauksessa, jossa osakkeen hinta on lähestymässä nolla, kannattaa myyntioptio toteuttaa ennen kuin osakkeella ei ole arvoa (Merton, 1973, s. 158).

Malli toimii sovellettuna myös merkintäoikeuksien "*warrant*" hinnoitteluun. Merkintäoikeus antaa ostajalle oikeuden ostaa yrityksen osakkeen tai muita varallisuusesineitä sovituin ehdoin tulevaisuudessa. Suurin ero optioihin on se, että ne tehdään yrityksen kanssa ja merkintäoikeuden toteutuessa osake ei osteta markkinoilta vaan yritykseltä eli markkinoille tulee uusia osakkeita, mikä vaikuttaa yrityksen rahoitusrakenteeseen.

Myöhemmin Merton (1977) laajensi mallia myös muihin johdannaisiin, joilla on hyvin erilaisia tuottorakenteita. Perustana kuitenkin toimii alkuperäinen option hinnoittelun malli. Black-Scholes-Merton-mallia laajennettiin vielä esimerkiksi futuurien hinnoitteluun (Cox et al., 1981).

3.2 Yleinen tasapainotila ja hinnoittelu arbitraasin avulla

Option hinnoittelun teorian suurin puute oli siinä, ettei se välttämättä kuvannut yleistä tasapainotilannetta. Ajatus yleisestä tasapainotilasta pohjautuu ranskalaisen ekonomisti Léon Walrasin kirjoituksiin 1800-luvun lopulla. Yleinen markkinatasapaino toteutuu vain, jos kahden hyödykkeen hinnat suhteessa toisiinsa ovat yhtä suuret kuin kummankin hinnan suhde kolmannen hyödykkeen hintaan (Walras et al., 2014, s. 124). Yleisen tasapainotilan analyysin ajatellaan kuvaavan mallia, jossa kaikki talouden eri markkinat ovat samanaikaisesti tasapainossa, eli kysyntä ja tarjonta kohtaavat kaikilla markkinoilla. Tämä edellyttää, että kaikkien hyödykkeiden hinnat ovat sellaiset, että jokainen markkina on tasapainossa samanaikaisesti (Walras et al., 2014, s. 42, 52).

3.2.1 Mallien yhdistäminen

Cox, Ingersoll ja Ross (Cox et al., 1985a) yhdistivät yleisen tasapainotilan analyysin ja CCA:n. He määrittelivät rationaaliset odotukset ja odotettu hyödyn maksimoinnin markkinatasapainossa, jossa oli mukana sekä reaalisektori että arvopaperimarkkinat ehdollisten saatavien ”*Contingent Claims*” avulla (Babbs & Selby, 1993, s. 438). Tässä lähestymistavassa tärkeimmät olettamukset koskien menetelmiä ja preferenssejä tehdään sisäisten taloudellisten muuttujien avulla. Toisin kuin option hinnoittelun mallissa, jossa menetelmät ja muuttujat ovat pohjimmiltaan mielivaltaisia (Babbs & Selby, 1993, s. 438).

Ross (1978) havaitsi yhteyden teorioiden välille osoittamalla, että arbitraasin mahdottomuus edellyttää lineaarisen hinnoittelun operaattorin olemassaoloa kaupatuille epävarmoille saataville. Myöhemmin Harrison ja Kreps (1979) onnistuivat todistamaan tämän yhteyden. He osoittivat, että ne hinnat, joilla voi hankkia sopimuksia ”*state-contingent*”, joiden tuotto riippuu tulevaisuuden kulutuksesta, ovat mahdollisia vain, jos ne ovat yhdenmukaisia lineaarisen hinnoittelun operaattorin kanssa kaikille ehdollisille saataville (Babbs & Selby, 1993, s. 438).

Tasapainotilassa toimijan sijoitusstrategia on ratkaisu hänen portfolion suunnittelun ongelmiin. Saatavan sanotaan olevan hinnoiteltu arbitraasin avulla, jos kaikki johdonmukaiset hinnoitteluoperaattorit saavat saman arvon.

3.2.2 Arvopaperimarkkinat ja riskineutraalit mitat

Harrison ja Kreps (1979, s. 383, 390) osoittivat keskinäisen suhteen johdonmukaisten hinnoitteluoperaattoreiden ja riskineutraalien mittojen ”*equivalent martigale measures,* (EMM)” välille. EMM on todennäköisyysmitta, jossa jokaisen osakkeen hinta on täsmälleen yhtä suuri kuin tämän mitan mukaan diskontattu osakkeen hinnan odotusarvo. Mitta uudelleen järjestää todennäköisyyden tulevaisuuden epävarmalle tapahtumalle siten, että arvopaperin hinnan määräytymisestä, esitettynä jollain arvollisella arvopaperilla, tulee martingaali (Babbs & Selby, 1993, s. 438).

Martingaali todennäköisyysteoriassa ja matematiikassa tarkoittaa joukkoa perättäisiä satunnaismuuttujia, jonka seuraavan muuttujan odotusarvo on yhtä suuri kuin nykyinen arvo. Todennäköisyysteoriaan käsitteenä martingaali tuli Paul Lévyn toimesta vuonna 1934 (Brookes, 1955).

Harrison ja Kreps (Harrison & Kreps, 1979, s. 396) todistivat yksikäsitteisen EMM:n olemassaolon option hinnoittelun mallille, joten malli on toimiva ja epävarmojen saatavien hinnat määräytyvät arbitraasin mahdottomuuden perusteella. Epävarman saatavan arvon täytyy olla yhtä suuri kuin sen tuotto-odotus, kun arvo ilmaistaan jonkin arvollisen arvopaperin yksiköiden avulla (Babbs & Selby, 1993, s. 439).

3.2.3 Mallin rajoitteet

Harrison ja Kreps (1979, s. 382) käyttivät tuloksissaan rajoitetta, että toimija pystyy toteuttamaan vain yksinkertaista sijoitusstrategiaa, jossa portfoliota tarkistetaan vain satunnaisina ennalta määrättyinä kiinteinä päivämäärinä. Mallissa, jossa tiloja on ääretön määrä, yksinkertaisten sijoitusstrategioiden käyttäminen on välttämätöntä kyetäkseen hinnoittelemaan laajasti arbitraasin avulla (Babbs & Selby, 1993, s. 439). Merton (1976, s. 135) huomasi, että ei ole mahdollista luoda riskitöntä positiota hinnoittelemalla optiota, kun osakkeen hinta vaihtelee suuresti lyhyen ajan sisällä.

Mallista ei saatu toimivaa näin laajassa tapauksessa edes hyödyntämällä dynaamista virittymistä ”*dynamic spanning*” eli käyttämällä suurta joukkoa arvopapereita suojatakseen kaikkia epävarmuustekijöitä vastaan. Vektorit siis virittävät eri tila-avaruuksia. Edes runsaalla määrällä mahdollisuuksia käydä kauppaa laajempi hinnoittelu ei onnistunut arbitraasin avulla (Babbs & Selby, 1993, s. 439).

Näiden puutteiden myötä tutkimus kohdistui määrittämään lyhytaikaisten korkojen aikarakennetta arvostamalla velkakirjoja ehdollisina saatavina. Lyhytaikaisen korotason ollessa ainoa epävarmuustekijä on hyvä huomata, että korkotason odotettu muutos ei kerro hinnan riskiä toisin kuin osakkeissa option hinnoittelun mallissa (Cox et al., 1985b). Cox, Ingersoll ja Ross (1985b, s. 398) joutuivat määrittelemään korkotason riskin hinnan saadakseen mallinsa valmiiksi. Ilman rajoituksia heidän mallinsa takaisi mahdollisuuden arbitraasiin.

Heath, Jarrow ja Morton (1992) ratkaisivat tämän ongelman mallintamalla velkakirjojen aikarakenteen dynamiikkaa jatkuvasti aloittaen kyseisellä hetkellä havaitulla rakenteella. Velkakirjojen hintaprosessi sisältyy rakennettuun dynamiikkaan, jolloin velkakirjojen odotettu tuotto kertoo riskien hinnan. Kaikki ehdolliset saatavat siis hinnoitellaan arbitraasin avulla (Heath et al., 1992, s. 99).

3.3 Markkinoiden täydellisyys

Markkinatasapainon saavuttamisen tutkimuksessa Harrison ja Kreps (1979) keskittyivät mallin toteuttamiskelpoisuuteen ja ehdollisten saatavien hinnoitteluun. Täydellisen markkinan tavoittelussa Harrison ja Pliska (1981, s. 258, 1983, s. 315) jättivät toteuttamiskelpoisuuden vähemmälle huomiolle ja laajensivat mahdollisten sijoitusstrategioiden määrää dramaattisesti määrittääkseen milloin markkinat ovat täydelliset.

3.3.1 Täydellinen markkina

Täydellinen markkina ”*complete market*” tai toisin sanoen Arrow-Debreu-markkina tarkoittaa markkinaa, jossa ei ole kaupankäyntikustannuksia, vallitsee täydellinen informaatio ja jokaisella varallisuusesineellä on hinta jokaisessa tilassa *s* (Arrow & Debreu, 1954, s. 287). Markkinoiden täydellisyys riippuu taloudellisen epävarmuuden asteittaisen ratkaisemisen herkästä rakenteesta, ja tarpeeksi runsaasta määrästä kaupankäyntimahdollisuuksia, jotta dynaaminen virittyminen on mahdollista. Täydellisyys riippuu kriittisesti tavasta, jolla epävarmuus selvenee hiljalleen itsestään ajan myötä (Harrison & Pliska, 1981, s. 231).

3.3.2 Hyvinvoinnin ongelma

Aikaisemmin esitellyt mallit laiminlyövät hyvinvoinnin ongelmat ja merkityksen yksilön päätöksenteossa. Kilpailullisen tasapainotilan ja Pareto-tehokkuuden suhde Arrow-Debreu-mallissa ei vaikuttanut lupaavalta (Babbs & Selby, 1993, s. 439). Alkuperäinen malli toimii epäjatkuvassa aika ja tila viitekehyksessä, jossa tulokset riippuivat siitä, että jokaiselle yksittäiselle tilalle on mahdollista tehdä Arrow-Debreu-arvopaperi. Toisin kuin CCA-malleissa, jossa viitekehyksenä on jatkuva aika perustuen diffuusioprosesseihin. Aika- ja tila-avaruus on silloin ylinumeroituva, joten täydellisiin markkinoihin tarvittaisiin ääretön määrä Arrow-Debreu-arvopapereita (Babbs & Selby, 1993, s. 439). Duffie ja Huang (1985, s. 1352) pystyivät osoittamaan, että täydellinen Arrow-Debreu-tasapaino, Radnerin (1972, s. 289) esittämässä dynaamisessa mielessä, voidaan toteuttaa dynaamisen virittymisen kautta. Heidän mallissansa kauppaa tehdään rajallisella määrällä pitkäikäisiä arvopapereita.

Duffien ja Huangin tutkimus siis osoitti, että dynaaminen virittyminen on ratkaisu täydellisiin markkinoihin. Osakkeiden ja riskittömän velan epävarmuus, joka ohjaa dynaamista virittymistä ajaa Black-Scholes-Merton-mallia (Babbs & Selby, 1993, s. 440). Arbitraasia hyvin lähellä oleva Arrow-Debreu-arvopaperi saatiin viimein yhdistettyä täydellisille markkinoille.

3.4 Transaktiokustannukset

Hinnoittelumalleissa tuli jo aiemmin esille, että optiomarkkinoiden suuret transaktiokustannukset vääristävät todellisen markkinan hintoja mallien ennustamista arvoista. Yleisen tasapainotilan analyyseissä näitä kustannuksia ei ole huomioitu niin suurella tarkkuudella, koska keskittyminen on ollut hinnan muodostumisen prosesseissa. CCA, jossa transaktiokustannuksia tutkitaan tarkemmin, on säilyttänyt osittaisen tasapainotilan analyyseissaan (Babbs & Selby, 1993, s. 440).

Monet sijoitusstrategiat, jotka hyödyntävät ehdollisia saatavia, käyttävät äärettömiä kaupankäynnin volyymeja, jolloin myös kaupankäynnin kustannuksia syntyy loputtomasti. Se tarkoittaisi, että ehdollisten saatavien oston ja myynnin ei tarvitsisi enää tapahtua samalla hetkellä estääkseen arbitraasimahdollisuuksia, jolloin EMM-yleisen tasapainotilan kautta lähestyminen rikkoutuisi (Babbs & Selby, 1993, s. 440).

Toinen mielenkiintoinen huomio transaktiokustannuksista on rahoitusmarkkinoiden välittäjien rooli. Esimerkiksi markkinatakaajat toimivat rahoitusmarkkinoilla olemattomilla kaupankäyntikustannuksilla. He pystyvät tarjoamaan erilaisia instrumentteja, joilla on ehdollisia voittoja, samalla kun suojaavat omia riskejään strategioilla, jotka ovat samankaltaisia kuin kitkattomien markkinoiden mallien ehdottamat strategiat (Babbs & Selby, 1993, s. 440).

Tähän päättyy uusien teorioiden esittely arbitraasin osalta. Aiempien lukujen matematiikka ja teoria on jätetty vähän pienemmälle huomiolle osittain niiden vaativuuden, mutta myös tämän työn tarkoituksen takia. Tutkimuksen tarkoituksena on esitellä arbitraasin käytännön sovelluksia. Mielestäni se on onnistunut, koska esitellyt teoriat ja niiden sovellukset ovat hyvin laajasti käytössä yhä tänä päivänä erilaisissa sijoitusstrategioissa. Aiemmin esitellyt kaavat perustuvat arbitraasiin ja ennen kaikkea arbitraasin mahdottomuuteen. Mallit ja kaavat rakentuvat arbitraasin pohjalle, ja ilman sitä varallisuusesineiden hinnoittelu olisi vähintään haastavaa. Seuraavaksi esitän vielä yksinkertaisen esimerkin H. Varian artikkelin pohjalta.

3.5 H. Varianin esimerkki option hinnoittelusta

Palataan taaksepäin ja palautetaan mieleen Varianin ajatus arbitraasin mahdottomuudesta. Varian hyödyntää option hinnoittelun teoriaa esitelläkseen yksinkertaisen esimerkin hinnoittelusta arbitraasin avulla. Arbitraasin mahdottomuus edellyttää, että on olemassa tilahintoja π, joiden avulla satunnaisen tuoton R_{sa} varallisuusesineen hinta saadaan yhtälöstä $p_a = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sa}$ (Varian, 1987, s. 59, 71).

Tilahintojen ja arbitraasin mahdottomuuden avulla voi hinnoitella optioita, mutta myös tässä pätee vastavuoroisuus. Optioiden hintoja voi käyttää arvostamaan tilahintoja. Kokonainen joukko optioita kaikilla toteutushinnoilla K vastaa täysin täydellistä "Arrow-Debreu" markkinaa (Varian, 1987, s. 65).

Taulukko 1. (Varian, 1987, s. 65)

S	*C1*	*C2*	*C3*	*C12* *C1-C2*	*C23* *C2-C3*	*C12-C23*
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	1
3	2	1	0	1	1	0
4	3	2	1	1	1	0

Taulukko näyttää osto-option tuoton kolmella eri toteutushinnalla ja muutaman optioportfolion. Osakkeen hinta on $S = 1, \ldots, 4$. Option $C1$ toteutushinta on 1 dollarin, option $C2$ kaksi dollaria ja option $C3$ toteutushinta on kolme dollaria. Taulukossa näkyy option tuotto kyseisellä osakkeen hinnalla eli esimerkiksi osakkeen hinnan ollessa kaksi dollaria, optio tuottaa yhden dollarin. Tavoitteena on muodostaa portfolio, joka tuottaa vain yhdessä tilassa. $C12$ kuvaa portfoliota, jossa on pitkä positio optiota yhden dollarin toteutushinnalla ja lyhyt positio kahden dollarin toteutushinnalla. Portfolio $C23$ noudattaa samaa logiikkaa. Portfolio $C12 - C23$ kuvaa tilannetta, jossa on pitkä positio portfoliota $C12$ ja lyhyt positio portfoliota $C23$.

Portfolion $C12 - C23$ tuotto on sama kuin perusarvopaperin, jonka tuotto yhden dollarin, jos ja vain jos osakkeen hinta on kaksi dollaria. Tämä osoittaa, että on olemassa optioportfolio, joka toteuttaa saman varallisuuden mallin kuin perus Arrow-Debreu-arvopaperi (Varian, 1987, p. 65).

On hyvä huomata, että edellinen esimerkki on hyvin yksinkertainen ja perustui hyvin rajattuun määrään varallisuusesineitä epäjatkuvassa tilanteessa. Ymmärtämisen vuoksi sehän oli tarkoituskin ja juuri näihin kysymyksiin yleisen tasapainotilan teorian ja täydellisen markkinan tutkimus pyrkivät vastaamaan.

4 YHTEENVETO

Lähdin etsimään arbitraasin merkitystä ja koko sanan tarkoitusta. Halusin tietää, mitä se tarkoittaa ja selvittääkseni onko arbitraasi mahdollista rahoitusmarkkinoilla. Nopeasti ymmärsin, että juuri arbitraasin mahdottomuus tekee käsitteestä niin tärkeän. Hinnoittelu arbitraasin on mahdollistanut johdannaisten matemaattisen hinnoittelun ja siten auttanut koko rahoitusmarkkinoiden toiminnan ymmärtämistä.

Aloitin tutkielman hinnan muodostumisesta ja yksilön varallisuuden jakautumisesta. Arbitraasin mahdottomuus rakentuu näiden päälle. Luvusta mieleen jäivät Arrow-Debreu arvopaperit ja niiden kautta koko aika-tila-avaruus, sekä tasapainon tilahinnat. Ajatus arbitraasista on selkeä. Varallisuusesineillä on yksi hinta ja tästä poikkeaminen tarkoittaa arbitraasin mahdollisuutta. Tehokkaassa ja tasapainoisessa markkinassa tämä ei ole mahdollista.

CCA:n merkitys on ollut suuri rahoitusmarkkinoiden teorian kehityksessä ja varallisuusesineiden hinnoittelussa. Option hinnoittelun teoria antoi avaimet yritysten velkojen arvostamiseen ja pohjan yleisen tasapainotilan analyysille. Tärkeimpiä käsitteitä ovat täydellinen markkina ja yleinen tasapainotila. Voi ajatella, että arbitraasin merkitys koko talousteorian kehitykseen on ollut suuri (Babbs & Selby, 1993, s. 440). Tutkielman voisi lopettaa seuraaviin ajatuksiin. Mahdollisuus arbitraasiin arvopaperimarkkinoilla tarkoittaa, että taloudellista tasapainotilaa ei ole (Harrison & Pliska, 1981, s. 226). Ajatus arbitraasista on varallisuusesineiden hinnoittelun takana.

LÄHTEET

Arrow, K. J. (1964). The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing. *The Review of Economic Studies*, *31*(2), 91–96. https://doi.org/10.2307/2296188

Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, *22*(3), 265–290. https://doi.org/10.2307/1907353

Babbs, S., & Selby, M. (1993). Contingent Claims Analysis. *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, 437–440.

Bachelier, L. (1900). *The Theory of Speculation*. University of Paris.

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, *81*(3), 637–654. http://www.jstor.org/stable/1831029

Blackrock. (2023). *What is fixed income investing?*

Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models : theory and practice : with smile, inflation and credit* (2nd ed). Springer.

Brookes, B. C. (1955). Théorie de l'Addition de Variables Aléatoires. By Paul Lévy Pp. xx 385. Second edition 1954. 1200f. (Gauthier-Villars, Paris). *The Mathematical Gazette*, *39*(330), 344–344. https://doi.org/DOI: 10.2307/3608623

Churchill, R. V. (1963). *Fourier Series and Boundary Value Problems* (2nd ed.). McGraw-Hill Book Co.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1981). The relation between forward prices and futures prices. *Journal of Financial Economics*, *9*(4), 321–346. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-405X(81)90002-7

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, *53*(2), 363–384. https://doi.org/10.2307/1911241

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, *53*(2), 385–407. https://doi.org/10.2307/1911242

Debreu, G. (1959). Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium. *Yale University Press*, *17*.

Duffie, D., & Huang, C.-F. (1985). Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities. *Econometrica*, *53*(6), 1337–1356. https://doi.org/10.2307/1913211

Fama, E. F., & Miller, M. (1972). *The theory of finance*.

Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, *20*(3), 381–408. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-7

Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, *11*(3), 215–260. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90026-0

Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1983). A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and Their Applications*, *15*(3), 313–316. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0304-4149(83)90038-8

Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, *60*(1), 77–105. https://doi.org/10.2307/2951677

Hull, J. (2021). *Options, Futures, and Other Derivatives* (11th ed.). Pearson International Content.

McKean, H. P. (1969). 3 - STOCHASTIC INTEGRAL EQUATIONS (d = 1). In H. P. McKean (Ed.), *Stochastic Integrals* (pp. 50–81). Academic Press. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-3054-2.50009-1

Merton, R. (1976). Option Prices When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, *3*, 125–144. https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2

Merton, R. (1977). On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem. *Journal of Financial Economics*, *5*(2), 241–249. https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:jfinec:v:5:y:1977:i:2:p:241-249

Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, *4*(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

Miller, M. H., & Modigliani, F. (1961). Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares. *The Journal of Business*, *34*(4), 411–433. http://www.jstor.org.pc124152.oulu.fi:8080/stable/2351143

Radner, R. (1972). Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets. *Econometrica*, *40*(2), 289–303. https://doi.org/10.2307/1909407

Ross, S. A. (1978). A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams. *The Journal of Business*, *51*(3), 453–475. http://www.jstor.org/stable/2352277

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425–442. https://doi.org/10.2307/2977928

Shreve, S. (1996). Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance. *Lecture Notes, October*, 1–343.

Tuckman, B., & Serrat, A. (2012). *Fixed Income Securities : Tools for Today's Markets: Vol. 3rd ed*. Wiley. http://pc124152.oulu.fi:8080/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=400997&site=ehost-live&scope=site

Varian, H. R. (1987). The Arbitrage Principle in Financial Economics. *Journal of Economic Perspectives*, *1*(2), 55–72. http://pc124152.oulu.fi:8080/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bsu&AN=4432127&site=ehost-live&scope=site

Walras, L., Walker, D. A., & Daal, J. van. (2014). *Léon Walras: Elements of Theoretical Economics : Or, The Theory of Social Wealth*. Cambridge University Press. https://pc124152.oulu.fi:9443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=e000xww&AN=838776&site=ehost-live&scope=site

Yahoo Finance. (2023, March 7). *Yahoo Finance*.