Diseño de una Propuesta Didáctica para Promover el Concepto de la Derivada en la Educación Virtual y a Distancia

Carlos Alberto Contreras Delgado

Asesor

Dr. Freddy Yesid Villamizar Araque

Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD

Escuela Ciencias de la Educación ECEDU

Maestría en Educación

2023

Agradecimiento

A Dios todopoderoso primero por la enseñanza permanente, por los caminos que se abren en cada momento y por las virtudes que rigen mi vida: fe, amor y esperanza. A la santísima Virgen María por escucharme y bendecirme cada día.

A mis padres Ana y Alberto, mi hermana Gisela, a mi Pachita, y toda mi familia, por su apoyo, motivación y porque siempre han estado ahí en las buenas y en las no tan buenas. Mil gracias no tengo como pagarles.

A mi esposa Mónica y mi niña hermosa Salomé, que han estado junto a mí en esta etapa, gracias por la paciencia, solidaridad, empatía y comprensión con este proyecto, por el tiempo que me han concedido y he robado de nuestra familia.

Agradecer a mi asesor el doctor Freddy Yesid Villamizar Araque, mi amigo y coaching, quien ha escuchado mis ideas, me ha apoyado a materializarlas y motivado siempre a seguir amado cada día esta labor con humildad. Muy agradecido por los conocimientos, el tiempo dedicado, los aportes significativos y las lecciones de vida.

Gracias a la Universidad Nacional Abierta y a Distancia Unad, al programa de licenciatura en matemáticas y al líder el doctor Juan Carlos Benavides por apoyar esta investigación brindándome los espacios y la confianza para consolidarlo.

Gracias a todas aquellas personas que me han acompañado en este proceso de formación por sus oraciones, colaboración, apoyo y ánimo.

La enseñanza es el mejor puente hacia el conocimiento

Resumen

Debido a la dificultad generada en la interpretación de conceptos en el área del Cálculo, la presente investigación tiene como objetivo diseñar una propuesta didáctica para promover la comprensión conceptual de la derivada a partir de aplicaciones reales. Particularmente se diseñaron actividades didácticas dentro de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), sobre diversos fenómenos físicos relacionados con el movimiento uniformemente acelerado y armónico simple, que puedan ser experimentados y modelizados mediante el modelo Cuvima. Se aplicó un pretest, actividades y postest a estudiantes de nivel superior y posteriormente se realizó un análisis basado en un enfoque metodológico mixto. Los resultados evidencian que el desarrollo de actividades didácticas basadas en la modelización experimental promueve el sentido y significado de la apropiación de fundamentos aritméticos, geométricos y algebraicos, que contribuyen a mejorar el concepto de la derivada y su relación con la Física.

Palabras claves: modelización, modelo Cuvima, derivada, herramientas tecnológicas, experimentación

Abstract

Due to the difficulty generated in the interpretation of concepts in the Calculus area, this research aims to design a didactic proposal to promote the conceptual understanding of the derivative from real applications. In particular, didactic activities were designed within a Virtual Learning Object (OVL), on various physical phenomena related to uniformly accelerated and simple harmonic motion, which can be experienced and modeled using the Cuvima model. A pretest, activities and pos

Test were applied to higher level students and later an analysis based on a mixed methodological approach was carried out. The results show that the development of didactic activities based on experimental modeling promotes the sense and meaning of the appropriation of arithmetic, geometric and algebraic foundations, which contribute to improving the concept of the derivative and its relationship with Physics.

Keywords: modeling, Cuvima model, derivative, technology tools, experimentation.

Tabla de contenido

Lista de figuras

Listado de Apéndices

Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se centrado en una tradicionalidad donde predomina la memorización de reglas, procedimientos y fórmulas que se repiten sin que se tenga un significado para el estudiante, como consecuencia se genera no comprensión conceptual y conlleva a pensar en una desvinculación del contexto del alumno (Narro et al, 2011; Santos, 2014).

La matemática y en especial el cálculo diferencial son cursos obligatorios en la formación profesional que requieren cambios didácticos y propuestas de enseñanza que promuevan la comprensión de conceptos con una interpretación inductiva y deductiva, además que integren metodologías experimentales, herramientas tecnológicas y pedagógicas, como el modelo Cuvima (Cuevas et al, 2017). Al interior del presente trabajo de investigación va a encontrar la siguiente organización:

Planteamiento y justificación del problema: se presenta una descripción de la problemática en desde el análisis de la deserción del cálculo, dificultades en factores asociados al proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo, que obstaculizan el proceso de comprensión conceptual. Seguidamente se planteó la pregunta de investigación y la justificación que busca responder a los cuestionamientos anteriores integrando la matemática, la didáctica y las tecnologías digitales. Para terminar, surgen los objetivos para desarrollar esta investigación.

Marco referencial: Se realiza una descripción de antecedentes de investigación relacionados con la enseñanza del cálculo en el ámbito internacional y nacional. A su vez en el marco teórico se describe el modelo metodológico Cuvima que es el fundamento del desarrollo de esta investigación ya que guía el diseño de las actividades, así como de la secuencia didáctica planteada en el Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA). El marco conceptual define tres elementos importantes en el desarrollo de la investigación como lo son: la evolución del cálculo, los objetos virtuales de aprendizaje y las secuencias didácticas. Este capítulo cierra con una descripción del marco legal que son la leyes o artículos que fundamentan la educación superior en Colombia, así mismo la creación y reconocimiento de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD.

Diseño metodológico: Se propone un enfoque mixto donde la información cualitativa se valoró principalmente. Particularmente se diseñaron y aplicaron instrumentos de medición como pretest y postest para medir y analizar cualitativamente la comprensión conceptual de la derivada en estudiantes de nivel superior, al desarrollar una serie de actividades didácticas. Se propusieron cuatro fases para el desarrollo de la investigación las cuales son: fase de exploración, fase de diseño, fase de aplicación y fase de recolección de información.

Análisis de resultados: Se describen los resultados cuantitativos y cualitativos del pretest haciendo una reflexión comparativa con respecto al postest, que evidencian los cambios conceptuales en los razonamientos matemáticos. Se analizaron las experimentaciones realizadas por los estudiantes, la interacción con el OVA y sus conclusiones.

Discusión de resultados: Se discuten los resultados obtenidos y lo favorable que fue hacer uso de las secuencias didácticas para mejorar la comprensión del concepto de derivada desde la experimentación de fenómenos físicos y el uso de herramientas digitales. Se da respuesta a la pregunta de investigación que se plantea en el capítulo 1, se mencionan las limitaciones que se tuvieron, se da una vía para que la secuencia didáctica pueda ser adaptada a otros cursos.

Planteamiento y Justificación del Problema

A continuación, se describirá el planteamiento del problema partiendo de un análisis de deserción en el Cálculo, escudriñando las dificultades a nivel cognitivo y didáctico, con el fin de crear un cuestionamiento a dicha problemática y plantear una propuesta de investigación.

Contexto del Cálculo a Nivel Internacional y Local

Una de las ramas de las matemáticas que han llamado la atención por sus aplicaciones, influencia en el desarrollo científico y tecnológico actual es el Cálculo (Apóstol, 1984; Larson et al., 2006; Purcell et al., 2007; Spivak, 2012; Dorier, 2013; Steward, 2012; Granville, 2017), Esta área se ha convertido en curso obligatorio a nivel curricular en los programas de ingenierías y licenciatura en matemáticas de educación superior, donde se reportan altos índices de reprobación o deserción. Al respecto, a nivel internacional investigadores en México, reportaron que alrededor del 70% de los estudiantes reprueban dicho curso (Cuevas y Pluvinage, 2009; González, 2016), lo cual concuerda con los datos de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, ANUIES (2009). En el mismo sentido Aparicio et al. (2007) señalan en su estudio sobre factores institucionales, que el 30% de estudiantes (de su muestra estudio) que realizan un primer curso de cálculo universitario, reprueban, de dicho porcentaje, un poco menos del 10 % se logra recuperar, lo cual provoca un rezago del 20% en su primer año de estudios a nivel superior. Datos más recientes, evidencian en el Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, que de 591 estudiantes, el 35% reprueba Cálculo Diferencial, y el 46% Cálculo Integral (Granja et al., 2022),

En un contexto local, en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia-UNAD, informes entregados por el programa de licenciatura en matemáticas en los últimos cinco periodos antes de 2022, reporta que el 18% de los estudiantes de cálculo diferencial reprueban, el promedio de quienes aprueban está en 3.1 en una escala de 0 a 5, siendo 3.0 la calificación mínima de aprobación. De acuerdo con la escuela de ciencias básicas en los programas de ingeniería y tecnologías el 31% de quienes toman el curso de cálculo diferencial lo reprueba y quienes aprueban lo hacen con una nota de 3.0 en una escala de 0 a 5, dichas cifras son persistentes generando índices de deserción escolar.

Dificultades en la Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo: Una Posible Polarización

Los índices de deserción escolar analizados anteriormente pueden darse por diversos factores relacionados con la forma de enseñar o comprender el Cálculo. Cuando mencionamos dificultades en enseñanza y aprendizaje, referimos respectivamente a la forma como se trasmite los conocimientos del Cálculo (obstáculos didácticos o curriculares), y aquellos obstáculos cognitivos que tienen los estudiantes para comprender los diversos tópicos del Cálculo.

Existen diversas dificultades, y podríamos citar algunas argumentadas por diversos investigadores:

Díaz (2009) a través de un examen aplicado donde pudo constatar que los estudiantes con más bajo nivel en temas de álgebra son los que repetirán más de una vez el curso de Cálculo, concluyendo que la dificultad en los temas básicos en la asignatura de álgebra conlleva al fracaso en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo.

Sin ignorar lo anterior, no podemos concluir que la dificultad en el aprendizaje del Cálculo se debe reducir a problemas de otras ramas de la Matemática como el álgebra; más allá de opiniones o argumentaciones, como aquellas si el estudiante no sabe bien sumar, multiplicar o desarrollar ejercicios de álgebra como realmente lo conciben la mayoría de los cursos actuales *tradicionales* de Cálculo, podemos argumentar que una posible razón de su fracaso en la enseñanza aprendizaje, se deba a que se encuentra polarizada.

Al respecto, Alanis y Soto (2011), mencionan que en la enseñanza del Cálculo predominan dos enfoques: el formalista y el mecanicista, haciendo énfasis que la enseñanza formalista se enfatiza bajo el supuesto de la comprensión de los términos matemáticos con solo dar la definición y se enfoca en el desarrollo de demostraciones formales; la mecanicista se centra en la práctica algorítmica y algebraica, pero no logra la comprensión de forma satisfactoria de los conceptos y métodos propios del cálculo útiles para resolver problemas, en la enseñanza mecanicista los estudiantes tienden a aplicar fórmulas de manera memorística pero sin sentido.

El argumento anterior, también es sustentado por otros investigadores, quienes mencionan acerca de la posible polarización en la enseñanza del Cálculo:

1. La fuerte carga operativa, la cual causa un deterioro conceptual (Cuevas y Pluvinage, 2009).

2. La enseñanza del Cálculo ejercida con una fuerte herencia de la Matemática formal (Cuevas y Pluvinage, 2009; Ímaz y Moreno, 2010), la enseñanza del Cálculo ejercida con una fuerte herencia de la Matemática formal

La fuerte carga operativa, la cual causa un deterioro conceptual.

Ésta problemática se refiere a que en los cursos tradicionales de Cálculo más que enseñar, lo que hace es entrenar a los estudiantes a desarrollar habilidades siguiendo algoritmos basados en la enseñanza de técnicas de derivación e integración, lo cual no es algo incorrecto, pero deteriora la parte conceptual (Cuevas y Moreno, 2004), como por ejemplo, un estudiante puede calcular una derivada por medio de alguna técnica pero sin comprender que está hallando una expresión que representa la pendiente de una recta tangente a la curva, así como poder hallar la integral de una función, sin comprender que representa una familia de curvas o el área bajo la curva de dicha función. Es sencillo calcular mediante una técnica de derivación, la derivada de *2x,* sin embargo, no es igual de fácil, hallar la derivada del valor absoluto de *2x*, para lo cual, no hay una fórmula o técnica explícita, para este cálculo se debe recurrir al concepto.

Lo anterior, causa que los estudiantes mecanicen y aprendan de memoria un conjunto de fórmulas, técnicas, y definiciones de forma objetivizada, es decir, según Aebli (1995) de manera ya elaborada en la cual el estudiante no interioriza o comprende el significado y aplicación de los objetos matemáticos, llevando finalmente a la creencia de que hacer matemáticas es realizar operaciones puntuales, manipular signos y memorizar (Skemp 1976, Orton 1983) y a una carencia conceptual.

Respecto de los cursos tradicionales de Cálculo en el aula, Aparicio et al. (2007) dan una buena descripción sobre las prácticas docentes de éstas, observadas en su investigación, señalando que hay una ausencia del uso de la tecnología, y solo el único recurso didáctico utilizado fue el pizarrón, si bien, la tecnología y su acceso va evolucionando con el tiempo, se considera que la implementación de recursos digitales para la enseñanza del Cálculo debe ampliarse. Los investigadores mencionan que en estas prácticas, el docente era trasmisor de la información de los contenidos, y los estudiantes simplemente tomaban nota, de modo que los estudiantes toman una actitud pasiva o como simples receptores de la información, donde los objetos matemáticos están descontextualizados.

Cuevas y Moreno (2004) señalan que uno de los problemas de las matemáticas es ejercerla del modo descrito anteriormente, es decir en sus palabras: rutinaria y descontextualizada, lo cual nos lleva a verla como algo sin sentido, al respecto, en su investigación, proponen a estudiantes, maestros de matemáticas e ingenieros, un par de ejercicios no rutinarios sobre máximos y mínimos; manifestando en sus resultados una interpretación errónea de los conceptos de este tema por parte de los estudiantes. Señalan que lo anterior se debe a que las soluciones de dichos problemas no era aplicar una simple operación mecánica o algorítmica esquematizada en los cursos tradicionales, y que generalmente era a lo que recurrían sin acudir a los conceptos, y reflexionar en su respuesta.

En la misma idea, Cantoral y Mirón (2000), argumentan que existe una dislexia escolar en Cálculo, en la que su enseñanza logra que los estudiantes deriven y calculen límites elementales, pero no son capaces de dar un sentido más amplio a esas nociones que les haga reconocer, por ejemplo, cuándo un problema requiere de calcular una derivada; lo cual indica que la enseñanza del Cálculo está concentrada en el desarrollo operativo, sin reflexionar en su importancia aplicativa en problemas contextuales.

La enseñanza del Cálculo ejercida con una fuerte herencia de la Matemática formal.

Imaz y Moreno (2010), argumentan que como consecuencia del tratado del Cálculo por los matemáticos del siglo XIX, en la actualidad se preocupan más por la formalización, en vez del desarrollo de métodos genuinos y el desarrollo de problemas basados en las ideas centrales que son la acumulación y variación (Ímaz y Moreno, 2009, 2010), como los problemas desarrollados por Fermat, Cavalieri, Descartes, Wallis, entre otros… (Edwards, 1979), antes de que se reconociera el Cálculo como otra rama más de la Matemática.

Cuevas y Pluvinage (2009), señalan que la enseñanza del Cálculo diferencial apoyada en los conceptos ya elaborados formalmente, y teoremas apoyados en el conocimiento algebraico, demeritan la intuición geométrica, sus razonamientos y la comprensión conceptual. Por ejemplo: un problema de variación es la velocidad instantánea, la cual usualmente, es modelada como el límite de la velocidad promedio con respecto al tiempo. Este mismo proceso se puede reflejar en el registro de representación semiótica (RRS) geométrico como un proceso de límite de la pendiente de la recta secante que converge, en su derivada, a la pendiente de la recta tangente. Sin embargo. aunque se presenten estos dos procesos aparecen en forma inconexa. Este enfoque puede provocar una pérdida de significados; además, descuida el significado de los objetos matemáticos y se preocupa más por la sintaxis (Semadeni, 2003).

Analizando algunos de los libros de texto de Cálculo como Apóstol (1984), Larson et al. (2006), Purcell et al. (2007), Spivak (2012), Steward (2012), Granville (2017), se observa una temática curricular muy marcada, la cual es usada por los profesores en los cursos tradicionales, que incluso son recomendados como material bibliográfico en los programas curriculares, también se puede observar que presentan el Cálculo con una serie de temas aparentemente inconexos como son la construcción de los números reales, la definición formal de función, sucesiones y series, continuidad y límites, y la derivadas, de modo que se aíslan de las ideas centrales del origen del cálculo que son variación y acumulación, o éstas son dejadas para el final de un capítulo.

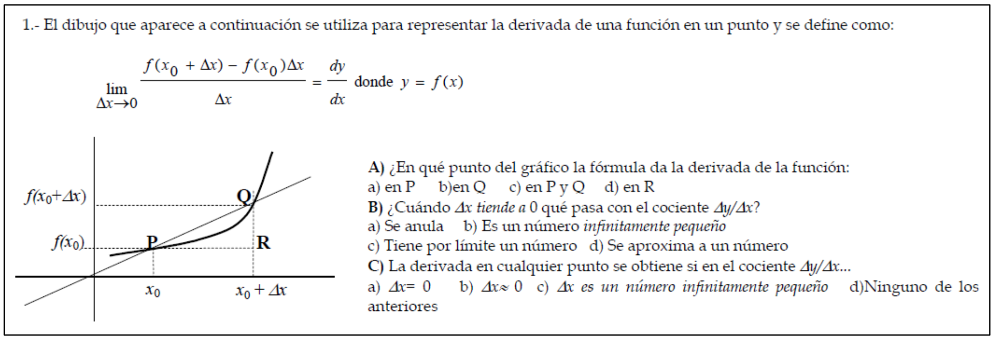
Muchos de estos libros, presentan un poco después de su portada un formulario o conjunto de demostraciones rigurosas para recortar (ofrecidas como material didáctico), el cual el estudiante debe llevar a todos lados y en especial en sus cátedras de Cálculo. Del análisis de los libros de texto se puede concluir que la presentación de los tópicos del Cálculo es contraria a la forma como éste se desarrolló, siendo que la formalización de los números reales se dio en un periodo final del desarrollo del Cálculo por Weierstrass, así como las ideas de función y límite fueron dadas por Cauchy.

Lo anterior, evidencia que la forma como se imparten los cursos de Cálculo es contraria a su desarrollo, haciendo énfasis sobre su formalización y rigurosidad. pero ¿acaso partir de lo formal para introducir los conceptos, ayuda a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos en los estudiantes? Como acabamos de mencionar, la lógica formal no coincide con el orden cognitivo de las cosas, pues bien, el aprendizaje no parte de la *formalidad*, ésto surge como último producto de una serie de desarrollos cognitivos anteriores. La formalidad es importante en la formación del Cálculo, y en especial el concepto de límite es necesario para la definición analítica de la derivada. Roh (2008) afirma que “el concepto de límite es una de las ideas fundamentales no sólo para desarrollar el Cálculo sino para desarrollar el pensamiento matemático más allá del Cálculo en la búsqueda del rigor matemático” (p. 218); sin embargo, menciona en su trabajo que, la mayoría de los estudiantes no adoptaron el punto de vista formal sobre límites.

En complemento de lo anterior, citamos el trabajo de Dolores (1998), quien realiza en su investigación un cuestionario el cual se clasificó en dos grupos para el análisis de las respuestas, el primero explora ideas precedentes a la derivada, y el segundo ideas relacionadas directamente al concepto de ésta. Los incisos de una de las preguntas se formulan como la que se muestra en la Figura 1, los cuales se realizaron con la intención de explorar las ideas de los estudiantes acerca de la derivada como un límite y la representación geométrica de ésta.

Figura 1

Exploración de la derivada a partir del concepto de límite



Nota: Representación de la derivada en una función. Fuente: Dolores (1998, p. 5)

El investigador menciona que la mayoría de los estudiantes no son conscientes del cambio de posición de la secante hacia su posición límite (tangente), para obtener la derivada en el punto $P(x0, f(x0))$, ya que los estudiantes difícilmente conceptualizan que una secante, en su posición límite, se convierta en tangente. La conclusión general a la cual se llega es que en los cursos tradicionales de Cálculo en los que se enfatiza sobre estructuras abstractas (enfoque formal), o en el uso de algoritmos (enfoque algebraico) o con cualquier enfoque que priorice la transferencia de contenidos; un gran número de estudiantes no logran comprender los conceptos básicos y en especial el concepto de derivada

Para el presente trabajo, nos enfocaremos en la enseñanza de la derivada (uno de los conceptos fundamentales del Cálculo), la cual, reposa en la alta carga formal de la noción de límite. A manera de ejemplo, la definición de límite en uno de los textos usuales en el nivel superior Purcell et al. (2007), es*:*

> *Decir que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *, significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *dada (no importa que tan pequeña) existe una correspondiente* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |x - c| < \delta$ *; esto es,*

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \text{ (p. 62)}$$

De lo anterior, ¿qué se puede imaginar un estudiante en un primer curso de Cálculo al leer tal definición? ¿cómo podrá el estudiante construir y comprender el concepto de derivada surgido de la noción de límite? si bien, se ha observado que partiendo de esta noción formal, se han presentado obstáculos en la compresión de la misma (Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1996; Andreu y Riestra, 2007; Roh, 2008, Cuevas y Pluvinage, 2009, Ímaz y Moreno, 2010).

Las matemáticas no son solo técnicas que permitan hallar un valor y que este sea la respuesta. El enseñar y aprender matemáticas requiere incursionar en problemas o cuestiones, diversidad de situaciones, pensar de diversas maneras, comprensión, representación, encontrar el significado, resolver el problema, interpretar la solución y comunicar los resultados (Santos, 2014).

Teniendo en cuenta lo anterior, sintetizamos que la problemática en la enseñanza del Cálculo y la derivada se debe a diversos factores: la descontextualización o aislamiento con las aplicaciones, la fuerte carga operativa sin énfasis en lo conceptual, el enfoque en registros algebraicos rigurosos sin tener en cuenta la intuición geométrica y la falta de secuencias didácticas que promuevan su comprensión. Todo lo anterior nos lleva a cuestionarnos sobre qué propuestas didácticas pueden ayudar a subsanar la problemática.

Pregunta de Investigación.

¿Cómo promover una comprensión del concepto de la derivada en cursos de Cálculo diferencial en la modalidad virtual de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia?

Justificación.

Para tratar de responder al cuestionamiento anterior, se establecerá una propuesta que integra las matemáticas, con la didáctica y las tecnologías digitales.

En primera instancia, consideramos que el Cálculo debe aplicarse, así como en sus orígenes se aplicó para resolver situaciones problema como en el caso del movimiento de los cuerpos (problemas de acumulación), siendo Isaac Newton que utilizó las derivadas (conocidas en ese entonces como fluxiones) para tratar de explicar cómo varía la distancia de un cuerpo respecto del tiempo, de modo que, la implementación de una didáctica en la enseñanza del cálculo, pretende encaminar al estudiante a procesos que permitan una mejor comprensión partiendo de la introducción de ideas del contexto como los movimientos de los cuerpos en el área de física, al ser la primera ciencia matematizada para llegar a deducir técnicas de derivación (Waldegg, 1982).

Además, la física es un contexto de aplicación que le da sentido a los objetos matemáticos (Villamizar, 2018; Ortiz et al., 2020; Villamizar et al., 2020; Villamizar et al., 2021), como en el caso de la derivada, la cual puede representar a la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento.

Didácticamente Duval (1998) así como Cuevas y Pluvinage (2003), mencionan que uso de los conceptos matemáticos se manifiestan a través de diversos Registros de Representación Semiótica (RRS), por lo que es necesario interpretar el concepto de derivada haciendo énfasis en aquellas representaciones como la tabular (numérica) y geométrica, la cual no es usual como la algebraica (analítica) en los cursos tradicionales de Cálculo.

Para integrar los elementos didácticos como problemas en contexto (movimiento de un cuerpo) y el uso de RRS acudimos al proceso de la modelización matemática, que consiste en llevar el fenómeno físico del movimiento a un modelo o registro de representación matemática ya sea algebraica, geométrica o tabular (Villamizar, 2018, Villamizar et al, 2020).

La modelización matemática permite relacionar el mundo real con los objetos matemáticos, dándoles sentidos a éstos. Existen diversos modelos para la modelización matemática como el modelo Cuvima (Cuevas et al, 2017), el cual integra de manera significativa el uso de las tecnologías digitales para mediar el proceso de modelización, mediante la toma de datos experimentales en diferentes registros de representación. Algunas propuestas como en Villamizar (2018) y Villamizar et al. (2020), utilizan software de análisis de video (Tracker Physics) para mediar la modelización matemática de un fenómeno físico, y un software de Geometría Dinámica para la manipulación de objetos matemáticos, de modo que los estudiantes exploran los conceptos de manera activa.

El uso de software de Geometría Dinámica permite rescatar la intuición geométrica en el concepto de derivada, siendo una clave para la comprensión conceptual, debido a que facilita la manipulación de los objetos geométricos (Dolores, 2000), así como la simulación de situaciones alusivas al cálculo diferencial (Villamizar et al., 2017).

Por lo tanto, el presente trabajo se basa en una propuesta didáctica que se pueda aplicar en la educación virtual y a distancia, que pretende promover la comprensión conceptual de la derivada, rescatando su parte geométrica a partir de la modelización de fenómenos físicos mediados con las tecnologías digitales (software de análisis de video y Geometría Dinámica).

Objetivos

Para el desarrollo de la propuesta descrita anteriormente, se plantean los siguientes logros.

Objetivo General

Diseñar una propuesta didáctica para la educación virtual y distancia, que promueva el concepto de la derivada.

Objetivos Específicos

Identificar contextos de la física relacionados con el concepto de la derivada.

Modelizar el fenómeno físico elegido y orientar su proceso mediante el modelo Cuvima y el uso de las tecnologías digitales.

Elaborar una secuencia didáctica para promover la comprensión de la derivada a partir de la modelización del fenómeno físico.

Marco Referencial

Este capítulo plasma del estado del arte donde se describen algunos antecedentes de propuestas de enseñanza del Cálculo que ayudan a fortalecer la propuesta; además, describe elementos teóricos y conceptos que fundamentan el proyecto de investigación aplicado, como son la modelización matemática, el modelo Cuvima, la didáctica Cuevas y Pluvinage (2003) y los conceptos relacionados con la derivada.

Antecedentes

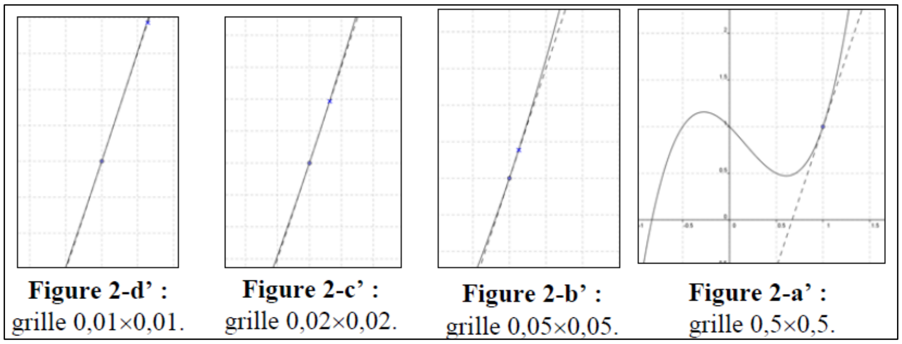
Como se ha expuesto, la problemática en la enseñanza del Cálculo a nivel educativo se refleja en la polarización de la fuerte carga operativa, y la impartición de estos cursos con la matemática formal, lo cual puede generar una pérdida de los significados matemáticos y como consecuencia ha generado altos índices de reprobación. La búsqueda de una solución ha surgido en la comunidad de Matemática Educativa con múltiples reflexiones tanto a nivel nacional como internacional, y como fruto de éstas, se han presentado diversas propuestas que convergen hacia un mismo camino en la enseñanza del Cálculo. Algunas de ellas son las siguientes:

Cuevas y Pluvinage (2009) proponen una reestructuración curricular, de un primer curso de cálculo, donde el orden de los temas que abordan esta área de conocimiento sea más acorde al desarrollo epistemológico, y además buscar introducir los diferentes conceptos, con ayuda de la tecnología, mediante el empleo de escenarios virtuales de aprendizaje, y la utilización de un entorno tutorial inteligente, como apoyo en un curso tradicional de cálculo a nivel universitario.

Vivier (2010, 2011), el cual, introduce la derivada usando de manera sistematizada tres aproximaciones: cinemática, gráfica con zooms y gráfica con límites de secantes, de modo que aprovecha el uso de software de geometría dinámica, para que por medio de zooms en un punto específico la recta tangente a la curva, mostrar que ésta se *confunde* con la misma curva (véase Figura 2)

Figura 2.

Tangente a una curva, vista a diferentes escalas.



Nota: Cinemática, gráfica con zooms y gráfica con límites de secantes. Vivier, 2010, p. 181.

Lo anterior muestra imágenes surgidas de manera dinámica, dando una impresión, como si se experimentara ver la curva con un microscopio potente a un nivel de escala muy pequeño (infinitamente pequeño), lo cual, hace visible uno de los principios básicos del Cálculo, que fue el éxito de Leibniz, posteriormente tomados por Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) como axiomas en su libro Análisis de los infinitésimos en 1691: "Toda curva puede considerarse como un polígono que tiene una infinidad de lados. Cada lado es un segmento infinitesimal." (Ímaz y Moreno, 2010. p. 23)

Ramírez (2012), identificó la presencia de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas de acuerdo con las preocupaciones de los docentes que podrían conllevar a juzgar a los estudiantes de forma errónea. La investigación buscó que a través de un análisis epistemológico, didáctico y semiótico de una tipología de errores cometidos por los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Una vez recolectada la información a se estableció una primera categoría denominada percepciones de los docentes sobre error y dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, lo anterior llevo a tener en cuenta aspectos muy importantes como lo son las dificultades conceptuales y la responsabilidad de los docentes en los errores y dificultades, entre ellos se destacan errores conceptuales asociados al cálculo, comprensión de función y relación, los asociados al algebra, representación de objetos, resolución de problemas, operaciones y ecuaciones.

Cuevas y Martínez (2013) diseñan un sistema tutorial inteligente que promueve la adquisición de conceptos de cálculo diferencial, dónde enfatizan que el concepto de función es fundamental para el estudio del Cálculo.

Cuevas y Madrid (2013), realizaron estudios referentes a la importancia que tienen las raíces reales en el desarrollo conceptual de un curso de cálculo diferencial e integral. El cálculo es un curso obligatorio y fundamental en la educación superior, además es una de las bases de la sociedad ya que en sus orígenes se encuentran problemas de variación y acumulación, pero reportes indican problemas en su enseñanza – aprendizaje, por el alto índice de reprobación.

Se realizó un análisis de las formas de enseñanza la pseudo - escolástica, concepción fundamental operativa y el enfoque formal donde se confunde el cálculo con el análisis matemático. Pero las anteriores visualizan en común un patrón de fórmulas y procedimientos algebraicos dejando a un lado los aspectos conceptuales. Se realiza un énfasis en la búsqueda y obtención de una función real, ha sido un problema complejo desde el siglo III, lo cual ha dado el origen de ramas de las matemáticas como el álgebra, calculo, análisis matemático, ecuaciones diferenciales entre otras. Menciona la importancia de encontrar las raíces de un polinomio y sus multiplicidades para imprimirle al estudio del cálculo un matiz más conceptual que operativo, resaltando que la elaboración de un software educativo no es una tarea sencilla, lo cual requiere un trabajo interdisciplinario.

Hitt y Dufour (2013) presentan una actividad surgida a partir de la Física, donde transforma un problema de lanzamiento de una pelota y cálculo de la velocidad instantánea en un instante dado, dentro de un contexto de modelación matemática y tecnológico. Este tipo de modelización será tomado en cuenta para el presente proyecto, como problemas surgidos a partir de la física, ya que conceptos como el de velocidad instantánea está muy ligado al concepto de derivada.

Cuevas et al. (2014), proponen una serie de actividades para introducir la derivada de una función real utilizando tecnologías digitales, para simular una situación problema como el isoperímetro y el barril de Kepler; partiendo de las situaciones en contexto, los estudiantes exploran de manera activa conceptos relacionados con la función, la derivada y sus aplicaciones en problemas de optimización.

Barajas et al. (2018), realizaron estudios en el reconocimiento de los elementos que inciden en la reprobación del curso de Cálculo en estudiantes que ingresan a educación de nivel superior. Identificaron dificultades y carencias en los conocimientos matemáticos evidenciando deficiencia en preconceptos de variación y cambio. Realizaron un diagnóstico alrededor del pensamiento variacional permitiendo caracterizar las dificultades de los estudiantes con el objetivo que el docente organice y diseñe estrategias didácticas que permitan superar las dificultades de los estudiantes.

Botello y Parada (2015), mencionan que los cursos de matemáticas son los que mayor dificultad genera al estudiante cuando ingresa a niveles de formación superior, para identificar las dificultades propusieron una prueba diagnóstica inicial del curso de precálculo y se clasificaron en tres categorías como lo son:

En primer lugar, procedimientos de tipo aritmético: notaciones de números reales, cálculos mentales, propiedades de los números, valor absoluto, resolución de problemas, representación numérica y las razones e identidades trigonométricas. En segundo lugar, procedimientos de tipo geométrico y métrico: relaciones entre distintas medidas, operaciones, propiedades y relaciones de magnitudes para representar y analizar infinitos. Y por último, los procedimientos de tipo analítico: cambio de la tendencia y aproximación, patrones y regularidades, descripciones cualitativas de variaciones, procesos algebraicos, conexiones entre relaciones y funciones, sucesiones y las aproximaciones graficas cartesianas.

Todo lo anterior resulta un abanico de oportunidades para la intervención y concretar acciones que coadyuve a la formación del pensamiento variacional. Como propuesta de mejoramiento implementaron un programa de acompañamiento a estudiantes de Cálculo I.

Castañeda (2016), describe los comportamientos de reprobación los cuales alcanzan un 30%, para lo cual propone una didáctica orientada a través del aprendizaje por competencias buscando mejorar el rendimiento académico y la calidad de los profesionales egresados. Se realizó un estudio con enfoque descriptivo donde los conocimientos previos son objeto de estudio y determinación, identificando las deficiencias conceptuales. Con base en lo anterior se planteó una estrategia didáctica a través de una serie de actividades, ejercicios y guías de estudio para la enseñanza del cálculo diferencial.

Posteriormente se diseñaron actividades de aplicación, generación y transferencia del conocimiento, se revisaron los contenidos básicos donde se encontraron deficiencias y vacíos conceptuales para lo anterior se establecieron actividades por competencias y se promueve el trabajo colaborativo apoyados en la orientación del docente. El estudiante pasa de un rol pasivo a convertirse en parte activa que cuestione sus capacidades de aprender. La investigación solo tuvo como objetivo formular la estrategia más no la aplicación de la misma.

González (2016) diseñó una secuencia didáctica que permitió introducir el concepto de la derivada de una función real, la misma realiza un estudio de una problemática académica que trasciende las fronteras nacionales que confluye a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencia e integral específicamente en la derivada. También, desarrolla el concepto histórico y curricular apoyado en tecnología digital como una herramienta que posibilita establecer un marco didáctico y además provee un escenario virtual, interactivo y dinámico que posibilita la manipulación junto con la comprensión. Se desarrollaron instrumentos que permiten medir la experiencia didáctica. Como resultados se verificó la importancia de introducir el concepto de la derivada de forma significativa, reconociendo el papel que juega la tecnología como factor determinante que apoyado en una secuencia didáctica experimental logra un aprendizaje significativo.

Villamizar et al. (2017) diseñan una serie de actividades didácticas mediadas con un software de Geometría Dinámica para simular situaciones en contexto del Cálculo. En la experiencia concluyen que los softwares de Geometría Dinámica permiten la manipulación de los objetos geométricos para la resolución de problemas de optimización alusivos a la derivada, lo cual promueve un aprendizaje conceptual desde el uso de las representaciones geométricas, es decir, explorar la derivada desde el punto de vista geométrico, en situaciones que lo analítico no permite la comprensión conceptual.

Villamizar et al. (2020) proponen el uso de software de análisis de video para la modelización de situaciones surgidas de la física, en los resultados los investigadores describen como a partir de los modelos o representaciones geométricas del fenómeno físico, los estudiantes interpretan la variación de la posición de un objeto respecto al tiempo, es decir, aplican la derivada para interpretar el comportamiento de la velocidad de un cuerpo, como la pendiente de una recta tangente a una curva en determinado punto. Cabe resaltar que los estudiantes recurren a la comprensión de la variación a través de una sensibilización del Cálculo o Cálculo a través de los sentidos, lo cual es una idea propuesta por Tall (2013). Aquí el dinamismo de la tecnología digital en integración con la idea de Tall, permite a los estudiantes comprender la variación aplicada a un fenómeno físico.

De lo anterior, es notable que en muchas propuestas que se han trabajado en la Educación Matemática, prima el uso de la tecnología como una herramienta de apoyo y ente motivador para el estudiante, que además, permita facilitar en una didáctica trabajar en los distintos registros de representación semiótica (RRS), al visualizar los objetos geométricos, realizar simulaciones, cálculos alfanuméricos, de modo que el uso de la tecnología facilite la comprensión de los conceptos, y ayude al estudiante en la parte operativa para que no se deteriore la conceptual, es decir, trasformar la herramienta digital como una herramienta cognitiva para evitar obstáculos algebraicos, aritméticos, de modo que el estudiante se pueda concentrar en el concepto, y éste no sea deteriorado por equivocaciones de conocimientos preliminares.

Es incuestionable que el uso de la tecnología como parte de la enseñanza de las matemáticas y de sus procesos de aprendizajes, ya que ésta ha producido cambios en los métodos de la enseñanza de las mismas, así como en el contenido (Artigue, 2002; Guin y Trouche, 2005); sin embargo no se debe caer en la falsa idea de usarla de forma anárquica, pensado que esta va a resolver todos los problemas, y mucho menos en sustituir al profesor, por eso, la investigación de Arcavi y Hadas (2000), señala que las herramientas tecnológicas en sí mismas son de poco valor si no son utilizadas en actividades que permitan a los alumnos, relacionar su manejo con los conceptos matemáticos, y aún más el uso de dichas herramientas no generan por sí mismo conocimientos, por lo que es necesario utilizarlas como medio de apoyo para actividades dentro de un marco didáctico, que dirijan al estudiante a la construcción de los conceptos matemáticos.

Desde el punto de vista didáctico, la didáctica Cuevas y Pluvinage (2003) menciona la importancia de introducir los conceptos matemáticos a partir de problemas en contexto, es decir, situaciones reales o aplicativas, en este sentido podemos analizar que, en muchas de las propuestas mencionadas anteriormente, el contexto es parte de las actividades puesto que da sentido a los objetos matemáticos. Si se recurre un poco a la historia, Newton experimentaba situaciones ya recreadas por Galileo sobre el movimiento de los cuerpos, y lo trataba de modelar haciendo uso de la derivada (Waldegg, 1982).

Los autores mencionados anteriormente convergen en la idea de presentar problemas en contexto, señalando que en lo posible, se debe partir de éstos para introducir los conceptos matemáticos más relevantes, e incluir operaciones que le permitan al estudiante construirlos. La presente investigación tomará las experiencias mencionadas por los autores citados y propone diseñar actividades virtuales interactivas bajo un marco didáctico, mediado con el uso de la tecnología, así mismo la presentación de la modelización como un proceso en qué los estudiantes obtengan el modelo matemático bajo diversas representaciones (geométrica, algebraica, tabular), para la exploración e interpretación del concepto de la derivada.

Marco Teórico

A continuación, se exponen las teorías que sustentan la propuesta. Como análisis de los antecedentes la tecnología no es un único factor que promueva por si sola la comprensión de los conceptos, por ello, se recurre a enmarcar una propuesta teniendo en cuenta algunos elementos de la didácticas Cuevas y Pluvinage (2003) para la enseñanza de las Matemáticas, así como al proceso de modelización matemática para integrar los contextos de la Física, la Matemática y las tecnologías digitales mediante el modelo Cuvima, para llegar a la elaboración de actividades que promuevan el aprendizaje de la derivada de manera activa y experimental.

Marco didáctico: la didáctica Cuevas y Pluvinage (2003)

Como se analizó anteriormente, el uso de la tecnología sirve como herramienta de apoyo tanto al profesor como al estudiante de poder simular situaciones, modelizar, lo cual hace óptimo el aprendizaje al estudiante debido a que promueven una mejor comprensión de los conceptos matemáticos gracias a la visualización, manipulación de símbolos, lo cual evita también los obstáculos ya sean de tipo aritmético o algebraico que desvíen en sí los conceptos. Sin embargo, el uso de la tecnología no genera por sí mismo el conocimiento, y es aquí donde el uso de la didáctica se propondrá en el presente trabajo como aquella que dirija al estudiante a construir algunos conceptos matemáticos (derivada) a través de una serie de elementos didácticos para la enseñanza de las matemáticas.

¿Cómo aprende el ser humano? ¿Qué procesos cognitivos están involucrados en el aprendizaje? ¿Cómo se pueden utilizar para elaborar propuestas didácticas? Estas preguntas entre otras constituyen algunas de las grandes interrogantes en educación que, durante muchos años, profesores, pedagogos e investigadores han intentado y continúan intentando resolver y para la cual se han desarrollado diversas teorías del aprendizaje. A continuación, se describe brevemente el marco didáctico sobre el cual se fundamentará la propuesta de investigación.

La didáctica desarrollada por Cuevas y Pluvinage (2003) toma parte de sus principios en la escuela activa, que fue una corriente pedagógica surgida a finales del siglo XIX y principios del siglo XX como una propuesta que critica el autoritarismo del profesor, la falta de interactividad, el formalismo y la memorización que inhibe la construcción de significados, sus precursores fueron pedagogos y teóricos como Ovide Decroly, John Dewey, Edgar Claparède, Jean Piaget, Hans Aebli, entre otros. Su principal característica consiste en que las personas deben aprender haciendo; es decir, aprender implica una actitud activa del estudiante.

La didáctica Cuevas y Pluvinage (2003) plantea una serie de elementos, los cuales se tendrán en cuenta para el desarrollo de actividades, que a su vez están apoyadas en el uso de la tecnología. Algunos de dichos elementos son:

La acción por parte de los estudiantes, quien es el que debe siempre tener una actitud activa en el aula ya sea virtual o presencial, esto se logrará a través de la propuesta de modelización de un fenómeno físico y preguntas orientadoras que guíen al estudiante en el desarrollo de la actividad.

Partir de problemas en contexto, como por ejemplo, la modelización del movimiento de un cuerpo. Al respecto, McDermott (1991) menciona que para un aprendizaje efectivo la experimentación es uno de los factores más importantes para la enseñanza, así como un aprendizaje significativo puede llevarse a cabo aplicando el conocimiento matemático para resolver o interpretar situaciones conectadas con la realidad.

Construir los diferentes conceptos mediante la resolución de problemas dosificados, lo cual se logrará a través del diseño de una secuencia didáctica que guíe paso a paso al estudiante a construir y comprender el concepto de derivada.

El uso de registros de representación semiótica; en la didáctica se menciona la importancia del uso de representaciones para la aprehensión de los conceptos matemáticos. Al respecto, Pozo (2007) describe la influencia de las representaciones en la construcción del conocimiento científico, así como Moreno (2014) menciona que, las representaciones tienen influencia en los conceptos matemáticos, pues los entes matemáticos son de naturaleza semiótica. Por ejemplo: el fenómeno de caída libre puede ser representado e interpretado mediante la gráfica de una función cuadrática.

Para Duval (1998), es fundamental el proceso cognitivo del pensamiento humano, el poder visualizar un determinado concepto matemático en los diversos registros de representación que le sean propios, y así mismo afirma que:

> La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así, como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos. Es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones (p. 176).

Pensamiento matemático elemental y pensamiento matemático aplicado

Garbin (2015), el pensamiento matemático es de interés para la comunidad y educadores, porque se desea interpretar el cómo entienden las personas el contenido y como es el proceso de comprensión y apropiación matemática. Los procesos cognoscitivos como la representación, traslación y abstracción coadyudan a la resolución de cuestiones.

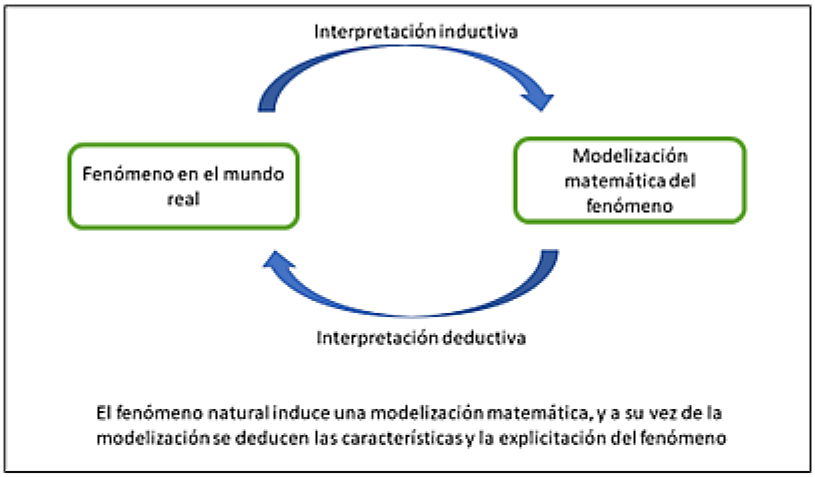
Existen diversas controversias acerca de la determinación real de pensamiento matemático elemental (PME) y el pensamiento matemático avanzado (PMA). Penagos et al. (2017), menciona que los temas avanzados están en cursos como Cálculo o ecuaciones diferenciales y se requiere de una comprensión solida de temas como funciones y razón de cambio. Dreyfus (2002), “no hay una clara distinción entre muchos de los procesos de enseñanza elemental y matemática avanzada, aunque las matemáticas avanzadas se centran más en las abstracciones de la definición y la deducción” (p.26).

La modelización

Confrey y Maloney (2007) definen la modelización como “el proceso de enfrentar una situación indeterminada, problematizarla, produciendo investigación, razonamiento, y estructuras matemáticas para transformar dicha situación" (p. 60). Villamizar (2018) lo define como "el proceso de llevar una situación del mundo real a un modelo matemático que la represente, teniendo en cuenta que este modelo representativo permita predecir e interpretar la situación ideal del mundo real" (p. 43) (Figura 3).

Figura 3

Modelización matemática de las ciencias (tomado de Villamizar, 2018, p.35)



Nota: Presentación explicita de la interpretación inductiva y deductiva (tomado de Villamizar, 2018, p.35)

La Figura 3, muestra de forma explícita como desde un fenómeno físico se puede llegar al modelo matemático que representa el fenómeno por medio de una interpretación inductiva, y luego como el modelo matemático es utilizado para describir el mundo real a través de una interpretación deductiva.

La modelización surge de una realidad hasta llegar a un modelo matemático (Touma, 2009) que puede ser físico, social, entre otros... En la modelización de fenómenos físicos se utiliza la matemática para dar una explicación más certera al modelo diseñado.

Uno de los argumentos más importantes a favor de la modelización matemática, como elemento central en la enseñanza general de la matemática, es que tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática, lo cual provee un apoyo cognitivo directo a las conceptualizaciones de los alumnos, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria; algunas de las ventajas de la modelización matemática son:

Los estudiantes generalmente encuentran motivador y relevante trabajar con problemas reales, significando esto problemas relevantes para alguien fuera del aula. También darles sentido a los objetos matemáticos de estudio.

En el proceso de modelización, Touma (2009) hace uso conceptual de los registros de representación semiótica de Duval, y procesos cognitivos como formación de representaciones, conversión, tratamiento y coordinación de registros, y señala que en la modelización algebraica de fenómenos físicos es importante lo anterior, pero que requiere, además, de una interpretación inductiva y deductiva.

Modelo Metodológico Cuvima

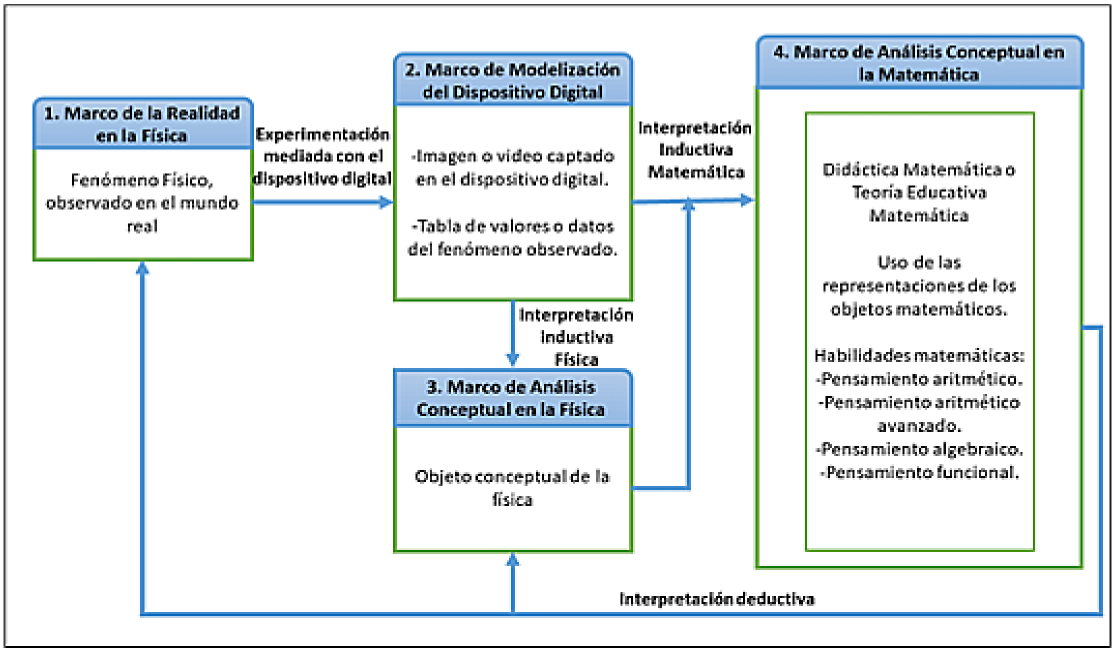
El modelo Cuvima es un modelo metodológico que guía los pasos para la modelización matemática de un fenómeno científico (Cuevas et al, 2017; Villamizar, 2018). A diferencia del modelo de la Figura 3 descrito anteriormente, el modelo Cuvima consta de cuatro marcos, en el cual incluyen de manera significativa el uso de las tecnologías digitales como mediadores en la obtención del modelo matemático y la toma de datos experimentales de un fenómeno científico.

En el presente trabajo se utiliza el modelo Cuvima para guiar el proceso de modelización de fenómenos, que promuevan la comprensión conceptual de la derivada, partiendo de tres fenómenos físicos propuestos como son: caída libre, movimiento rectilíneo uniforme y movimiento pendular.

Los cuatro marcos que componen el modelo Cuvima mostrados en la Figura 4 son: Marco de la Realidad de la Física (MRF), Marco de la Modelización del Dispositivo Digital (MMDD), Marco de Análisis Conceptual en la Física (MACF), (Villamizar, 2018).

Figura 4

Modelo metodológico de modelización matemática Cuvima



Nota: Modelo metodológico de modelización matemática Cuvima, y los cuatro marcos que lo componen. Tomado de Villamizar, 2018, p. 59

A continuación, se describen los cuatro marcos del modelo Cuvima en forma explícita de acuerdo con Cuevas et al. (2017) y Villamizar (2018):

Marco de la Realidad de la Física (MRF).

En este marco los autores del modelo proponen partir de un fenómeno que pueda experimentado en la realidad o simulado. Partiendo desde el contexto de la física se proponen actividades o experimentos a los estudiantes que pueden realizar desde su contexto (lo cual obedece a un elemento didáctico como lo menciona Cuevas y Pluvinage, 2003).

El docente cumple un rol de guiar al estudiante para que realice el experimento o se realizan, a través de secuencias didácticas que contiene las pautas precisas. Díaz, (2013), la define como:

> El resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va a acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa (p.19)

Marco de la Modelización del Dispositivo Digital (MMDD).

En este marco el docente le indica al estudiante la herramienta tecnológica a utilizar en forma demostrativa o guía, se capturan los datos de la experimentación, se interpretan y representan ya sea por gráficos o a través de tabla de valores que pueden interpretarse desde la perspectiva de la física o la matemática (Cuevas et al, 2017). La teoría de la actividad de Vygostky ubica a los dispositivos tecnológicos dentro de la categoría de herramientas que sirven para realizar las actividades de aprendizaje al conocer los alumnos el contexto donde se desenvuelven (Carcaño, 2021).

Marco de análisis conceptual en la Física (MACF)

El objetivo de este marco se basa en "promover una interpretación relacionada con los conceptos físicos asociados al fenómeno físico natural, cuya representación es obtenida en el marco anterior" (Villamizar, 2018, p. 61). En este marco se busca dar un sentido inductivo a los conceptos físicos de los datos experimentales que fueron obtenidos desde la herramienta tecnológica. El docente tiene como rol crear un ambiente de discusión de acuerdo con los resultados de los datos obtenidos, profundizar conceptualmente en la Física si se requiere y orientar la secuencia didáctica a una interpretación inductiva.

Marco de análisis conceptual matemático (MACM)

El objetivo de este marco es obtener el modelo matemático asociado al fenómeno físico, así como dar significado a los conceptos matemáticos asociados desde la modelización realizada en la experimentación física, teniendo en cuenta las habilidades de los pensamientos matemáticos dependiendo del nivel académico, los cuales se dividen en: pensamiento numérico, racional, algebraico y funcional (numeracy, rationacy, algebracy, functionacy) (Cuevas y Villamizar, 2018). Se construye un modelo matemático que permita interpretar el fenómeno físico partiendo de los datos obtenidos en la experimentación que se denomina interpretación inductiva matemática, se debe tener en cuenta las habilidades del pensamiento que posean los estudiantes y es fundamental el apoyo en las herramientas tecnológicas que simplifique los procesos y que permita concentrarse en los conceptos físicos y matemáticos (Villamizar, 2018).

El docente ejerce el rol de orientar la secuencia didáctica a los estudiantes, donde se identifican los conceptos matemáticos implícitos obtenidos con el apoyo de las herramientas digitales durante el proceso de modelización.

El modelo metodológico Cuvima dentro de sus cuatro marcos mencionados anteriormente parte de una situación real del contexto y promueve la comprensión de conceptual matemática asociada a un fenómeno físico y logra que el estudiante obtenga sentido y significado a su aprendizaje (Cuevas et al, 2017; Villamizar, 2018).

Marco Conceptual

Dentro del presente apartado se realiza una revisión documental acerca de la conceptualización y evolución del cálculo, para ello se reconoce que históricamente el cálculo ha tenido cuatro etapas cronológicas, inicialmente fue usado para resolver problemas específicos, acto seguido se identificó la generalidad alrededor de los usos que dio paso a explicar su manejo en la física como en la matemática. Por último, se dio la definición rigurosa que se concibió el concepto de la derivada a través de la teoría rigurosa (Grabiner, 1983). El desarrollo del cálculo no se puede atribuir solo a Newton y Leibniz, sino que desde tiempos atrás a los conceptos establecidos por ellos, se buscó dar respuesta a problemas relacionados con la disciplina las cuales asentaron las ideas base que conllevaron a la maduración de lo que hoy se conoce (Waldegg, 1982).

La evolución del cálculo

El código genético del cálculo tiene raíces en la comprensión del funcionamiento de la naturaleza y como no en los pensadores griegos, el entender el mundo que nos rodea llevo a pensadores como Platón y Aristóteles en el el IV a.C a concentrarse en el movimiento natural como la caída libre (Villamizar et al 2021), lo que llevo a tener en cuenta características como peso, resistencia del aire y tiempo. Por otra parte, Arquímedes en el siglo III a.C buscaba calcular los valores de las áreas y volúmenes (Álvarez, 2009) por lo cual posee un carácter deductivo que buscó desarrollarse desde la lógica y rigurosidad.

Durante siglos posteriores se desarrollaron diversos campos de la matemática en áreas como la aritmética, algebra y geometría. En el siglo XIV un grupo de estudiosos de la física, astronomía y matemáticas del Merton College en la universidad de Oxford de Inglaterra, dedicaron tiempo a estudios de la mecánica, buscando encontrar las leyes que determinaban el movimiento de los cuerpos que denominaron intensidad (velocidad) y extensión (tiempo) (León 2021, Villamizar et al 2021).

Pero fue en ese mismo siglo donde el filósofo y matemático Nicolas Oresme inició la demostración geométrica del cambio en la velocidad de un objeto con relación al tiempo, lo cual lo llevo a concluir que el área bajo el gráfico presente en esta relación era igual a la distancia recorrida por el objeto (Villamizar et al., 2021). La geometría empezó a jugar un papel muy importante gracias a la estrecha relación con otras áreas de las matemáticas, pero si lo visualizamos desde su representación física está ligada a las propiedades espaciales de los objetos y sus representaciones modeladas en el espacio. Cabe mencionar podemos hablar de dos polos el empírico (percepción, intuición, visualización) y el teórico en la geometría (aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos), que coexisten y son dependientes (Camargo y Acosta, 2012).

A principios del siglo XVII de la mano de Fermat y Descartes se vio el nacimiento de la geometría analítica que permite dar un tratamiento algebraico a problemas geométricos al asignar ecuaciones o fórmulas algebraicas para describir curvas, superficies, entre otras, dando una importante manipulación analítica para encontrar tangentes. (Álvarez, 2009)

Estas nuevas corrientes en el desarrollo de las matemáticas llevo a estudiar nuevos problemas como por ejemplo encontrar la tangente a una curva en un punto, el valor máximo o mínimo, determinar la longitud de una curva, encontrar el área de una región y hallar el volumen de un sólido. Además, el problema que más influyo en este tiempo fue como encontrar la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier instante de tiempo. Estos problemas convertidos en retos llevaron a Galileo a mencionar que el universo está escrito en lenguaje matemático (Feynman, 2008), por lo anterior realizó estudios en la descripción de cómo se mueven las cosas estableciendo la cinemática para el movimiento de los cuerpos en el vacío.

En el siglo XVII hubo una pérdida del miedo hacia los infinitesimales de la mano de Kepler y Cavalieri. Kepler se enfrentó al problema de “diseñar cubas de vino de manera que tuvieran la máxima capacidad, lo cual motivó su estudio sobre la cuestión” (Muñoz 1999, p.4). Cavalieri uso sistemáticamente los infinitesimales para resolver problemas asociados a volumen y área a través de los llamados indivisibles, el cual consistía en una colección de líneas la razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas, tomadas respecto de la misma regula el objetivo era proporcionar formas de obtener cuadraturas y cubaturas que superaran la insuficiencia del método de exhaución de Arquímedes (González 1992, Muñoz 1999, Suarez 2008).

Fermat realizó aportes significativos ya que obtuvo un método para hallar la tangente de una curva definida por un polinomio, se apoyaba en el razonamiento de si $f(x)$ es un polinomio entonces $f(x+h) - f(x)$ es un polinomio divisible por h y al realizar las operaciones se simplifica el término de h y se obtiene la recta tangente. Barrow usa la idea que la tangente es el límite de las secantes para las curvas dadas en la forma implícita $f(x,y) = 0$, mantuvo la idea de los griegos que los en la cual la tangente corta la curva en un solo punto (Muñoz 1999).

Newton encontró el cálculo a través del estudio del movimiento de un cuerpo como un modelo ideal para hacer ciencia. Motivado por investigaciones físicas y en la búsqueda de respuestas consideró las curvas generadas por el movimiento continuo de un punto en la medida de la variación de esta con respecto al tiempo a la cual llamo método de series de fluxiones. La derivada con respecto al tiempo es la fluente. (Waldegg, 1982; Alvarez 2009)

Alvarez (2009), menciona que simultáneamente Leibniz "consideraba una curva como formada por segmentos de longitud infinitesimal cuya prolongación generaba la tangente en cada punto y de cuya geometría se obtiene la correspondiente relación entre las diferenciales" (párr 16). Buscaba conservar un carácter geométrico dándole un trato a la derivada con el cociente incremental, y no como velocidad. Propone incrementos infinitamente pequeños consecutivos que los denomino diferenciales. A dicho incremento infinitamente pequeño en x lo llamo dx y para la y su notación es dy, el cociente entre ellos dy/dx, Newton lo consideraba fluxiones que hoy se conoce como derivadas. (Engler 2006, Muñoz 1999).

Hasta aquí se ha mencionado en forma resumida la evolución del cálculo, la intensión de esta investigación no es adentrar completamente en la formulación del Cálculo, sino destacar lo más importante a pesar de que hubo otros grandes autores que hicieron aportes significativos.

A modo de conclusión Newton y Leibnitz realizaron trabajos por separado, pero llegando a resultados similares. Newton basó las fluxiones o derivadas con respecto al tiempo, ya que sus ideas son de origen físico en la cual las fluxiones x e y son las velocidades de acuerdo con los ejes y su cociente es la pendiente de la recta tangente. Los resultados son experimentales y van de acuerdo con la experiencia. Leibnitz por el contrario parte desde problemas que buscan los infinitesimales, las nociones son los diferenciales y el cociente entre ellos tiene un significado geométrico, busca un resultado de forma general.

Dejando de un lado las diferencias estos dos grandes autores cambiaron radicalmente la historia de las matemáticas, donde pasaron de posibles métodos de resolución a un método general, así mismo Newton favoreció la comprensión de la naturaleza y el universo (González 1992, Muñoz 1999).

Posteriormente en el siglo XVIII, se hicieron desarrollos en la matemática de una manera más pura y aplicada. Es el caso del Cálculo donde Euler realizó aportes sobre el concepto de función, pasando de funciones particulares conocidas a una generalización $f(x)$, donde eran consideradas como expresiones analíticas en la cual intervenían la variable y, además de algunas constantes (Muñoz,1999), lo anterior simplificó lo hecho por Newton y Leibnitz ya que en su libro *Institutiones calculi differentialis* Tellechea (2003), define la función como se conoce hasta la actualidad:

> Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también sufren cambio, entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por *x y* se les llama funciones de *x* (p. 23).

A inicio del siglo XIX, se hacía más notable la necesidad de consolidar la gran cantidad de resultados, era notorio dar una definición precisa, científica y simbólica, apartadas de las intuiciones cinemáticas y geométricas. Era el momento de consolidar las expresiones vagas al estilo de aproximación a una cantidad y dotarla con un significado matemático para que sea usado en demostraciones. Básicamente era traducir lo verbal a lo escrito mediante el uso del algebran, ejemplo de ello era el concepto de continuidad que esporádicamente tenía una vista desde la filosofía y algo propio de la naturaleza más que un concepto matemático (Pérez, 2008). Lo anterior llevo a Augustin Louis Cauchy a proponer definiciones muy importantes como:

> Se llama cantidad variable aquella que se considera debe recibir sucesivamente varios valores diferentes unos de otros. [. . .] Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, éste último es llamado el límite de todos los otros. (p. 170)
>
> [. . .] Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que quedan por debajo de todo número dado, esta variable recibe el nombre de infinitésimo o de cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta naturaleza tiene por límite a cero.

> Cuando los valores numéricos (valores absolutos) sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que permanecen por encima de todo número dado, se dice que esta variable tiene por límite el infinito positivo, indicado por el signo ∞, cuando se trata de una variable positiva, y el infinito negativo, indicado por la notación $-\infty$, cuando se trata de una variable negativa. (Pérez, 2008, pp. 170-171)

Las anteriores definiciones son más precisas y se resalta la interpretación del algebra además del uso de las desigualdades, lo cual llevo a definir el concepto límite de una función. Se permite aclarar que los infinitamente pequeños como variables con límite cero y los infinitamente grandes que crecen indefinidamente convergen al infinito. La noción de continuidad quedaba clarificada lo que llevo a Weierstrass a eliminar del lenguaje del análisis con relación al movimiento y concepto usados por Newton como una variable se acerca a un número se convirtió en desigualdades aritmetizadas (Muñoz 1999).

Para este mismo siglo Bolzano fue el primero en definir el límite como se conoce actualmente:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El $f'(x)$ se considera un número hacia el cual se aproxima el cociente, pero no es el cociente entre dos ceros. Pero Cauchy toma esta definición para ajustarla quitando los diferenciales de Leibnitz y mencionando dx es una cantidad cualquiera y $dy = f'(x)dx$. Hace referencia que el diferencial es la función lineal donde se aproxima al punto considerado, lo cual muestra la diferencia entre dy y Δy que es la variación de los valores de función.

Hubo un actor más que realizaría aportes a lo que se conoce como el Cálculo hoy, se trata de Georg Cantor quien desarrollo la teoría de conjuntos lo que resulto útil para asentar las nociones de números cardinales, ordinales, la teoría del infinito y teoría de funciones, las cuales se emplean en la actualidad. Podemos hablar de colección de elementos infinitos como objetos con entidad propia. Esto llevo a una generalización de la aritmética (Muñoz, 1999).

El lapso de tiempo desde Fermat hasta Weierstrass es de más de doscientos años. ¿Cómo se desarrolló el concepto de derivada? Fermat lo usó implícitamente; Newton y Liebniz lo descubrieron; Taylor, Euler, Maclaurin lo desarrollaron; Lagrange lo nombró y caracterizó; y solo al final de este largo período de desarrollo lo definieron Cauchy y Weierstrass. De lo anterior concluimos que es ciertamente una inversión completa del orden habitual de exposición de libros de texto en matemáticas, donde normalmente se inicia con una definición, luego explora algunos resultados y solo entonces sugiere aplicaciones. (Grabiner, 1983). Este punto es importante para el profesor de matemáticas, para tener en cuenta que en el orden histórico de desarrollo de la derivada, primero se aplicó, lo que didácticamente le daría un contexto al objeto matemático.

Objetos Virtuales de Aprendizaje

El uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC), han sido de las herramientas más usadas en los últimos años, introducirlas en las aulas como un apoyo en el proceso de enseñanza – aprendizaje ha sido un reto para los docentes que ha llevado a reflexionar si es pertinente sustituir los elementos ya existentes como el pizarrón, marcadores y cuadernos considerados como parte de la educación tradicional.

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN 2011) define el objeto virtual de aprendizaje como:

> Todo material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo (en este caso para la educación superior) y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de la Internet. El objeto de

> aprendizaje debe contar además con una ficha de registro o metadato consistente en un listado de atributos que además de describir el uso posible del objeto, permiten la catalogación y el intercambio de este (p. 10).

La Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD define un OVA de acuerdo con la realizada por el Ministerio de Educación Nacional MEN (2012) como:

> El conjunto de recursos digitales, autocontenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: Contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. El objeto de aprendizaje debe tener una estructura de información externa (metadatos) que facilite su almacenamiento, identificación y recuperación (p. 25)

Bucheli et al. (2018), menciona que dentro de los diversos usos de las tecnologías en el aula por el docente se encuentran los OVA, y se encuentran fundamentados en el marco del paradigma constructivista promoviendo las secuencias de aprendizaje donde se interrelacionan los conocimientos previos, la innovación, el despertar del interés de los estudiantes por los temas, responsabilidad, y múltiples actitudes positivas hacia el aprendizaje. Tovar (2014) define un OVA como estructuras organizadas y diseñadas por equipos multidisciplinarios que pueden usar las ventajas que brinda la RA (realidad aumentada) para aceptar la atención del público la cual va dirigida la enseñanza.

Por otra parte, Triquell y Vidal (2007) mencionan que son objetos que pueden ser digitales o no digitales que permiten ser reutilizados dentro del aprendizaje empleando las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Secuencias didácticas

Rodríguez (2014), las secuencias didácticas son una serie de actividades consecutivas con un orden lógico en el proceso de enseñanza, están acompañadas de modelos de aprendizaje para que den sentido a la comprensión de los contenidos.

Por su parte una secuencia didáctica son actividades ordenadas, estructuradas y articuladas que propender por conseguir los objetivos, con un inicio y final que apropien conocimientos en educación, convirtiéndose en una potente que permite indagar, reflexionar y mejorar la praxis docente (Zabala 2008. p.16)

Tobón (2010), señala que es un conjunto de actividades de aprendizaje y evaluación con una serie de recursos que son mediadas por el docente que logren metas educativas.

Marco Legal

Para el desarrollo de esta investigación se tuvo en cuenta las leyes emitidas por el gobierno colombiano y establecidas en la constitución política de 1991.

Se parte de la Constitución Política de la República de Colombia de 1991, menciona en su artículo 67 que "la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura". En complemento los articulo 68 y 70 mencionan que la educación estará a cargo de personas con reconocimiento idóneo, ético y pedagógico, además de promover la igualdad de oportunidades, la educación permanente y científica técnica, artística y profesional.

La ley 30 concibe la educación superior como un servicio público cultural que hace posible desarrollar las potencialidades de la persona de forma integral y posterior a la educación media. Dentro de los objetivos se destacan la formación integral con calidades profesionales, investigativas y de servicio social en pro de la solución a necesidades del país con calidad. Las universidades son foco de desarrollo científico, económico, técnico además de la ciencia y la tecnología.

La ley 52 de 1981 y la ley 396 de 1997, dio paso a la creación y consolidación de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, de carácter público con programas académicos basados en una estrategia de educación a distancia pertinente dentro del ámbito local, regional, nacional e internacional acordes a las demandas de la sociedad. La estructura organizacional se encuentra enmarcada en cuatro sistemas estratégicos (Alta política universitaria, misional, funcional y operacional), donde existen responsabilidades que permiten las acciones necesarias para el funcionamiento y mejoramiento del servicio educativo garantizando la calidad y pertinencia.

La Resolución No 001049 enero 30 de 2019, se renovó el registro calificado del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, el cual es un programa de formación a nivel profesional que pertenece a la escuela de ciencias de la educación y está destinado a la formación docente conocedora del contexto capaces de enseñar matemáticas desde los ámbitos didáctico, pedagógico y tecnológico con fundamentación investigativa, que permita ejercer un liderazgo que transforme la comunidad.

Diseño Metodológico

La presente investigación se basó en un enfoque mixto con un peso más hacia lo cualitativo para el tratamiento de la información. Particularmente se diseñaron y aplicaron instrumentos de medición como pretest y postest para medir y analizar cualitativamente la comprensión conceptual de la derivada en estudiantes de nivel superior, al desarrollar una serie de actividades didácticas. Se propusieron cuatro fases para el desarrollo de la investigación las cuales son: fase de exploración, fase de diseño, fase de aplicación y fase de recolección de información, las cuales se describen a continuación:

Fase de exploración

El desarrollo y la evolución de la enseñanza se encuentra enmarcada por la aparición de diferentes recursos didácticos, que ejercen la función de apoyar la formación como lo son los libros de texto, calculadoras, aplicaciones y herramientas tecnológicas que en cierta medida contribuyen a optimizar la resolución de problemas asociados al Cálculo que suelen catalogarse como tareas complejas para los estudiantes. No podemos dejar a un lado el internet donde se encuentran ampliamente videos, tutoriales, bases de ejercicios y problemas, cuya función es orientar a los estudiantes en la solución pragmática de situaciones propuestas, pero las mismas requieren procesos de estudios e indagación.

Predominantemente los libros de texto han sido la herramienta más usada por los profesores para enseñar y por los estudiantes para aprender. Es claro que, en escenarios presenciales o escenarios mediados virtualmente, los docentes de matemática realizan explicaciones y los estudiantes son actores pasivos donde escuchan y toman apuntes, dejando la bibliografía para que se realice como una lectura extra complementaria pero no se tiene en cuenta que los libros en matemáticas presentan características distintas a cualquier otro texto (Carlino, 2005; Crespo, 2017).

Se realizo una en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD, en el programa de Licenciatura en Matemáticas (UNAD, 2017), que oferta el curso de Cálculo diferencial, con el objetivo de obtener información relevante en cuanto a su estructura, núcleo problémico, propósito de formación, bibliografía y resultados de aprendizaje.

El curso de Cálculo diferencial pertenece al componente de formación básica disciplinar bajo la metodología de aprendizaje basado en tareas, su núcleo problémico hace referencia a fundamentación matemática que hace posible el desarrollo del quehacer pedagógico y reflexivo del docente buscando un pensamiento lógico y aprendiendo a resolver problemas paso a paso con argumentaciones, dejando a un lado la línea de ecuaciones y formulas. El propósito de formación menciona la identificación del uso de las derivadas en distintos contextos, resolución de problemas enfocados a la ejercitación y modelación propiciando le pensamiento variacional y algebraico.

El curso se ha trazado cinco resultados de aprendizaje resaltando la importancia del reconocimiento simbólico y propiedades, mano operacional en los límites, continuidad, derivada, comprensión en la aplicación de las derivadas basados en la resolución de problemas y modelación, por último, busca que el estudiante implemente la argumentación en los procedimientos para lograr un pensamiento crítico y reflexivo.

De acuerdo con los resultados de aprendizaje propuestos los estudiantes se desarrollan cinco guías de aprendizaje que contienen tareas y una prueba objetiva cerrada con 25 problemas y ejercicios para solucionar que rápidamente resumiremos:

Tarea 1: Reconocimiento de historia del Cálculo de acuerdo con lectura propuesta Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales de Kemel Gonzalez y como actividad se propone realizar una línea de tiempo de las fechas más importantes del texto a través de herramientas digitales sugeridas.

Tarea 2: Actividad de funciones, busca que el estudiante identifique la simbología, definición y propiedades de las funciones, a su vez implemente la argumentación en los procedimientos usados. Proponen un trabajo colaborativo donde los estudiantes desarrollan una serie de ejercicios propuestos del libro Precálculo: matemáticas para el cálculo de James Stewart sexta edición. Los ejercicios deben contener objetivo, fundamentos y estrategias a emplear, problema y solución con argumentación del paso a paso. Complementariamente realizan una infografía acerca de los tipos de funciones teniendo en cuenta las definiciones, representaciones y aplicaciones.

Tarea 3: Actividad sobre límites y continuidad. Busca que el estudiante maneje a nivel operacional los límites identificando la simbología, definiciones y propiedades, a su vez implemente la argumentación en los procedimientos usados. Se propone un trabajo colaborativo donde se resuelven una serie de ejercicios concretamente cada estudiante resuelve seis ejercicios del libro Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas de James Stewart. Los ejercicios deben contener objetivo, fundamentos y estrategias a emplear, problema y solución con argumentación del paso a paso. Los ejercicios desarrollados se socializan en el foro de discusión. Como actividad complementaria el estudiante investiga los conceptos de límites, propiedades, aplicaciones y un video explicativo en inglés.

Tarea 4: Actividad sobre los fundamentos y reglas de derivación. Busca que el estudiante manipule a nivel operacional las reglas de derivación para mejorar los procesos de ejercitación y resolución de problemas e implemente la argumentación en los procedimientos usados. Se propone un trabajo colaborativo donde se resuelven una serie de ejercicios concretamente cada estudiante resuelve seis ejercicios del libro Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas de James Stewart. Adicionalmente realizan un ensayo critico de la lectura propuesta Diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización en software de geometría dinámica.

Tarea 5: Actividad sobre las aplicaciones de las derivadas. Busca que el estudiante comprenda las aplicaciones de las derivadas para obtener un aprendizaje significativo con el uso de la resolución de problemas y la modelización, implementando la argumentación en los procedimientos usados. Se propone un trabajo colaborativo donde se resuelven una serie de ejercicios concretamente cada estudiante resuelve cuatro ejercicios del libro Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas de James Stewart.

Tarea 6: Cuestionario de evaluación. Se propone una evaluación objetiva cerrada con 25 preguntas que contienen ejercicios y problemas donde el estudiante llegará a la solución especifica aplicando los conocimientos adquiridos fortaleciendo las competencias de enseñanza.

Realizando un análisis a la bibliografía propuesta en cada una de las unidades se hace uso del libro de Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas de James Stewart séptima edición. Dentro de las características contiene ejercicios que fomentan la comprensión conceptual, algunos solicitan la explicación de significado, ejercicios de uso de conceptos y ejercicios desde lo básico hasta lo más desafiante. (Stewart, 2012).

La estructura del curso parte desde el concepto el reconocimiento de autores hasta las aplicaciones de las derivadas, los ejercicios propuestos a desarrollar en cada una de las guías de aprendizaje podríamos describirlos como lo menciona Alanís y Soto (2011), son escenarios donde los estudiantes aprenden a desarrollar una serie de procedimientos estándar que conlleven a obtener una respuesta. Los ejercicios están acompañados de requerimientos de argumentación donde el estudiante explica el paso a paso de su resolución. Actividades complementarias acompañan el desarrollo de ejercicios donde en dos de ellas buscan la conceptualización por parte del estudiante del concepto de funciones y limites, y un ensayo de la importancia del diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización en software de geometría dinámica.

Para concluir el curso de Cálculo diferencial posee un enfoque mecanicista donde predomina la práctica algorítmica y algebraica y rezagando el pensamiento geométrico, necesario para la conceptualización del Cálculo; podemos cuestionar si con este método los estudiantes logran la verdadera compresión de los conceptos. De la exploración se concluye que es necesario reforzar el curso de Cálculo Diferencial, con problemas genuinos del Cálculo, como la acumulación que surjan de contextos reales para propiciar la modelización matemática.

Fase de diseño

En esta fase se describen los instrumentos de medición pretest y postest relacionados con el concepto de derivada, y el diseño de actividades didácticas como propuesta para promover la comprensión conceptual de la derivada en el Cálculo Diferencial.

Diseño de los instrumentos de medición: pretest y postest

El diseño de este tipo de instrumentos se realiza a un grupo en la dinámica de un pretest, seguido de la intervención de actividades didácticas, y después el postest, donde el pretest y el postest (MacMillan y Schumacher, 2005) son similares pero aplicados en momentos diferentes, para analizar los resultados obtenidos antes y después de la intervención o aplicación de actividades didácticas y así medir el grado de comprensión conceptual del Cálculo Diferencial y en particular de la derivada.

Los instrumentos son cuestionarios constan de 26 preguntas cada uno, con preguntas abiertas o cerradas (selección múltiple con única respuesta). donde se proponen ejercicios que permiten determinar los conocimientos previos necesarios por el estudiante para tomar el curso de cálculo diferencial e integral y conocimientos posteriores a la aplicación de las actividades didácticas. Se busca medir el pensamiento aritmético, algebraico-variacional y geométrico a través de los diversos ítems donde se plantean problemas o ejercicios. Adicionalmente se realizan preguntas conceptuales acerca de la derivada y ejercicios para del desarrollo básico. Para la validación se ajustó los instrumentos de la investigación de González (2016).

El instrumento pretest está diseñado con 26 preguntas (Apéndice 1), que se describen a continuación:

Las preguntas 1 y 2 miden el pensamiento aritmético y corresponde al orden de los números reales. Las preguntas permiten identificar los conocimientos para la interpretación de intervalos, dominio, rango, monotonía de una función.

1 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

a. 1.6899 b. 3.5001 c. -8.989 d. 0.54601 e. No sé.

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es verdadera?

a. $3 \leq 3$ b. $-3 > -2$ c. $4 > 3$ d. $3 < 4$ e. No sé.

La pregunta 3 busca identificar en el estudiante la habilidad de resolución de desigualdades para la comprensión de intervalos en funciones como también dominio y rango, además del significado de función creciente o decreciente, la cuales pertenece al pensamiento algebraico:

3. Calcular el intervalo de solución de la desigualdad $\frac{2x}{2} + \frac{2}{x} > \frac{6}{2}$

a. $(1,2)$ b. $x_1 = 1, x_2 = 2$ c. $(2, \infty)$ d. $(-\infty, \infty)$ e. No sé.

La pregunta 4 busca ver la habilidad del estudiante en el pensamiento algebraico para reducir expresiones algebraicas mediante la simplificación.

4. Desarrollar la siguiente fracción algebraica y simplificarla: $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

a. $\frac{1}{2n(n-1)}$ b 0 c $\frac{-1}{2}$ d $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$ e. No sé.

Las preguntas 5 y 6 buscan abordar las funciones, además pretende medir la capacidad de resolución de ecuaciones de dos variables para despejar una de la otra. Comúnmente se presentan en matemáticas conceptos asociados al reconocimiento de números reales y concepto de función.

5. De la siguiente ecuación $x = 1 + \frac{1}{y}$. Despejar $y\ en\ función\ de\ x$

a. $y = \frac{1}{x}$ b. y= $\frac{x+1}{x}$ c $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ d. $y = \frac{1}{x-1}$ e. No sé.

6. De la expresión $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ indica cuál de las siguientes propiedades se cumplen

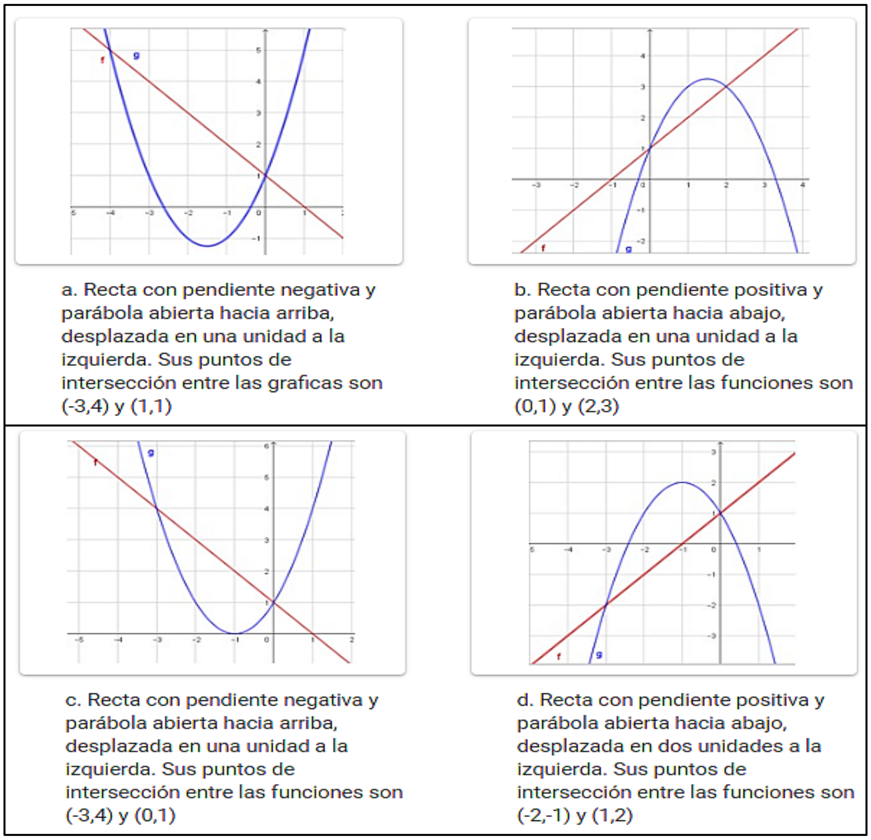
a. $f(0) = 2$
b. $f(1) = 1$
c. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
d. $f(x) = 2 - \frac{1}{f(x)}$
e. No sé

La pregunta 7 hace referencia a la relación que existe entre el reconocimiento algebraico de una función y su gráfica en el plano cartesiano además requiere que el estudiante ubique puntos y reconozca los cuadrantes del plano (Figura 5).

7. En las siguientes funciones $y = -x + 1$ y $y = x^2 + 2x + 1$ encuentran en el mismo plano ¿Cuál es su gráfica y puntos de intersección?

Figura 5

Funciones gráficas y sus puntos. Gráfica del ítem de la pregunta 7 del pretest



Las preguntas 8 y 9 hacen referencia al concepto de función y cuándo una función es derivable. Esto nos permitirá identificar si el estudiante solo aplica técnicas de derivación, ignorando el concepto desde el punto de geométrico.

8. ¿Cómo define una función continua?

9. ¿Toda función continua es derivable? Explica tu respuesta

La pregunta 10 explora la capacidad de resolución algebraica de los estudiantes y las operaciones con los reales. Se espera que los estudiantes

10. Si $x = 2$ entonces hallar $\frac{x^2-2^2}{x-2}$

a. 0 b. $Ind.$ c. 4 d. ∞ e. No se

La pregunta 11 pretende medir la comprensión de los conceptos de dominio y rango de una función además de la habilidad de resolución algebraica para determinar las raíces de una función

11. Dada la función real $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

11.1. ¿Cuál es el dominio y el rango?

a. $Df(-\infty,\infty) - \{1\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{1\}$
b. $Df(-\infty,\infty) - \{x\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{x\}$
c. $Df(-\infty,\infty) - \{-1\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{-2\}$
d. $Df(-\infty,\infty)$; $Rf(-\infty,\infty)$
e. No se

La pregunta 12 hace referencia a los elementos de la teoría de conjuntos y la forma de determinar el dominio de una función.

12. Si $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ $A = \{1,3,5,7,9\}$ $B = \{2,4,6,8\}$ $C = \{1,2,0\}$

12.1 Resolver $A \cup B$

a. {1,2,3,4,5,6,7,8,9,0} b. {1,2,3,4,5,6,7,8,9} c. Ø d. $A \cap B$ e. No se

La pregunta 13 desea resaltar la importancia de la comprensión de las raíces de una función

13. Considere la función $p(x) = x^3 - x$ ¿Cuáles son todas las raíces de la función?

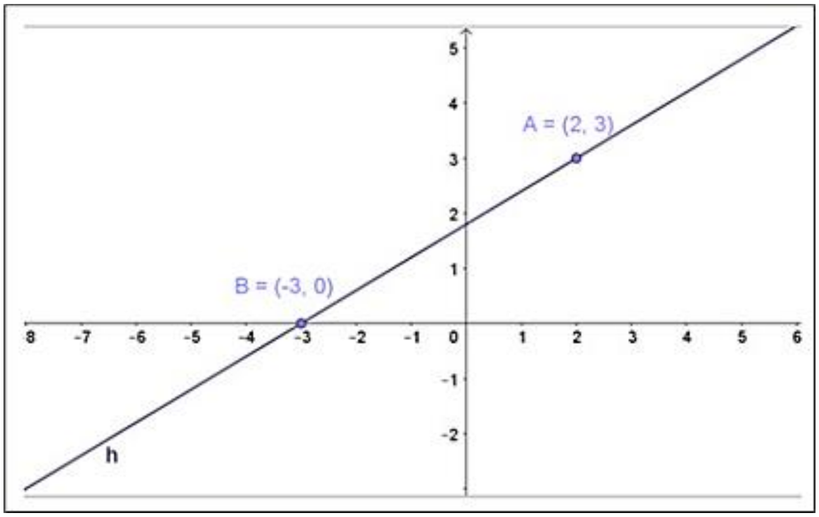
a. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1$
b. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$
c. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$
d. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$
e. No se

La pregunta 14 se pretende que el estudiante determine el valor de la pendiente de la recta y su sentido.

14. Para la recta que pasa por los puntos A y B como se indica en la figura 6 ¿Cuál es el valor de la pendiente?

Figura 6

Recta que pasa por dos puntos

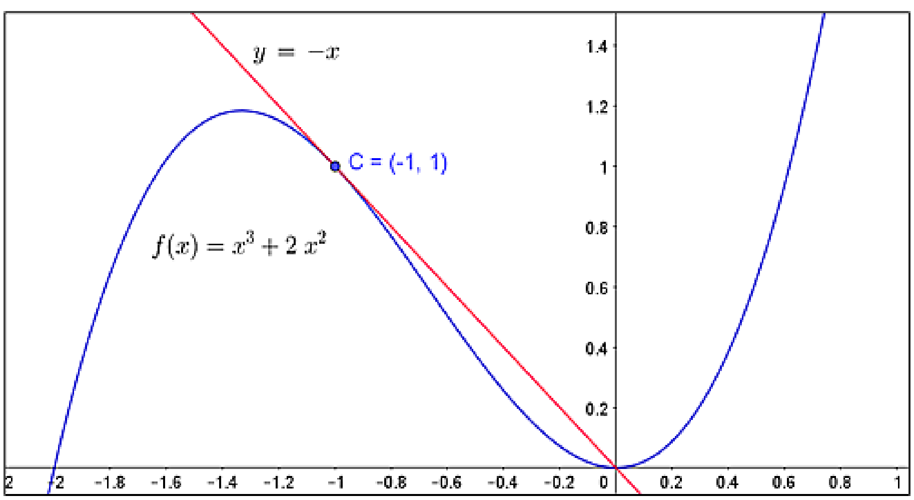


a. $m = 1$ b. $m = 3/5$ c. $m = -3/5$ d. $m = 5/3$ e. No sé

La pregunta 15 busca que el estudiante realice un análisis conceptual de la recta tangente como aquella que toca un punto específico de una función (a nivel infinitesimal) y se espera que la clasifique entre los tipos propuestos.

Figura 7

Clasificación de una recta que toca un solo punto de una función



$$f(x) = x^3 + 2x^2 \ en\ el\ punto\ C(-1,1)\ la\ recta\ y = -x\ es$$

a. Secante b. Tangente c. Perpendicular d. Oblicua e. No sé

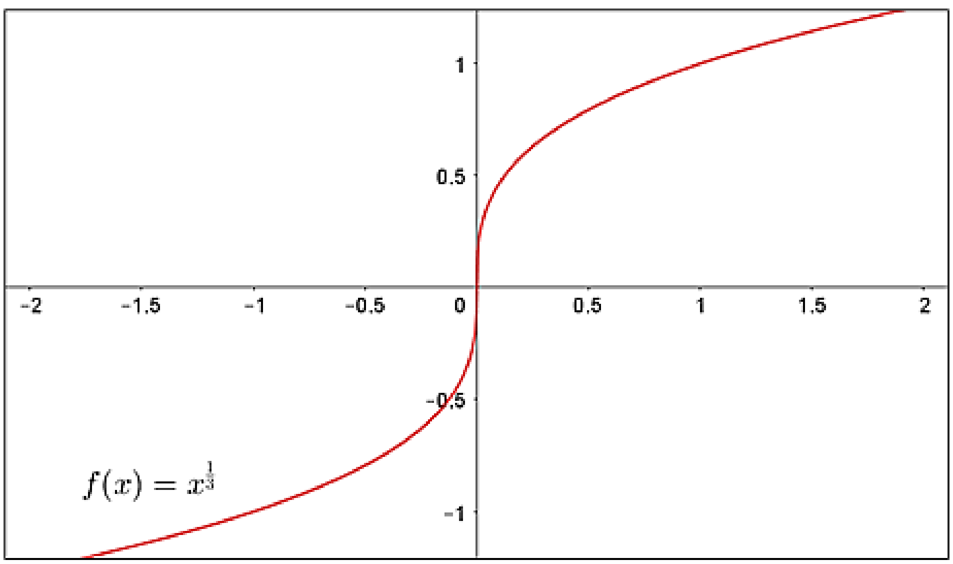
La pregunta 16 y 17 se enfatizan en el concepto de variación donde se busca que de acuerdo con la función propuesta el estudiante encuentre como es su comportamiento y determine el intervalo donde es creciente, decreciente o ambas. Esto permitirá brindarnos información si el estudiante tiene una clara conceptualización de la pendiente de una recta tangencial y sus valores para determinar la variación.

16. Para la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\ su\ variación\ es:$$

Figura 8

Gráfica de una función para determinar su variación



a. creciente de (-∞, ∞) b. decreciente de (-∞, ∞)

c. creciente (-∞ ,0) decreciente (0, ∞) d. decreciente (-∞ ,0) creciente (0, ∞) e. No se

17. De la función anterior f(x)= ∛x, de la variación en el punto x=0 podemos decir que:

a. Está definida b. Es indeterminada c. Es infinita d. Su valor es 0 e. No sé

Las preguntas 18 y 19 se proponen con el objetivo que el estudiante reconozca la importancia del concepto de máximos y mínimos y reconocer geométricamente que el cuadrado obtiene un área máxima sobre los demás cuadriláteros con el mismo perímetro; este problema es clásico del Cálculo Diferencial. La pregunta 19 se deja abierta para medir la capacidad resolutiva del estudiante. El ejercicio del ítem 19 es el mismo que el 18, pero no contextualizado dentro de un problema real.

18. En un jardín de forma cuadrilátera, para encerrarlo se requiere cierta cantidad c de alambre, ¿Cómo debe ser el cuadrilátero para que encierre su área máxima?

a. Cuadrado b. Rectángulo c. Rombo d. Trapecio

19. Dos números enteros suman 100. ¿Cuáles son dichos números para que su producto sea máximo? (escribe los números separados por una coma sin espacios ejemplo 90,10)

La pregunta 20 invita al estudiante a resolver el límite propuesto, para analizar si realmente tiene claro el concepto de límite, o si aplica operaciones mecánicas que no dan cuenta sobre la conceptualización.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Opciones de respuesta

a. 0 b. Indeterminado c. 4 d. ∞ e. No se

La pregunta 21 y 23 son ejercicios de derivada común donde se busca que el estudiante la resuelva como suele proponerse en los libros de texto y en la mayoría de los cursos de cálculo aplicando técnicas de derivación, sin embargo, los problemas pueden aplicarse teniendo en cuenta como el valor de la pendiente de una recta tangente, sin necesidad de acudir a las técnicas de derivación. La pregunta 23, busca observar si el estudiante reconoce la derivada conceptualmente como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

21. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = -2x$?

a. -2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinita e. No sé

23. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = x^2 - 4 \ en\, x = -2$$

La pregunta 22 y 24 tienen una relación con las preguntas anteriores, sin embargo, existen diferencias ya que se enfocan a un reconocimiento conceptual, se espera que el estudiante haga uso de los saberes adquiridos durante su formación y no solo resuelva la derivada analíticamente mediante técnicas de derivación que no dan cuenta sobre la conceptualización, sino que asocie al concepto geométrico de la derivada, reconociendo ésta como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, ya que las funciones se presentan en valor absoluto.

22. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = |-2x|$?

a. -2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinito

e. Intervalo $-2 \ desde \ (-\infty, 0) \ y \ 2 \ desde \ (0, \infty)$ f. No se

24. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = |x^2 - 4| \ en\, x = -2$$

a. 0 b. 4 c. -4 d. Indeterminada e. No se

La pregunta 25 pretende que el estudiante mencione cual ha sido el concepto que posee acerca de la derivada, más allá de las definiciones presentadas formalmente en los libros de texto.

25. ¿Qué es una derivada? Defínalo con sus propias palabras

La pregunta 26 pretende que el estudiante describa con sus palabras no solo el procedimiento realizado para solucionar la derivada, sino el significado como tal de la derivada.

26. ¿Qué significa que la derivada de la función $f(x) = x^2\ sea\ la\ función\ f'(x) = 2x$? Explica y justifica la solución

Diseño de actividades basadas en el modelo metodológico CUVIMA.

Las actividades didácticas consisten en una secuencia didáctica donde los estudiantes realizan la modelización (guiada por el modelo Cuvima) de fenómenos físicos, utilizando las tecnologías digitales como mediadores de la actividad, para la interpretación del concepto de derivada (ver apéndice 2).

Para la configuración de actividades asociadas al concepto de la derivada se parte de situaciones físicas como: la caída libre, movimiento rectilíneo y movimiento pendular. Las actividades son de tipo experimental a través del uso de un software, y la secuencia didáctica se diseñó a través de un OVA en H5P[1], debido a que es multiplataforma y permite el uso de diversas funciones multimedia. Las actividades dentro del OVA presentan la siguiente estructura:

- Portada de presentación de la actividad del OVA.
- Introducción: se describe de manera general las actividades propuestas al interior del OVA.
- Objetivos: se redacta un objetivo principal como: Reconocer el concepto de la derivada a través de la modelización de tres fenómenos físicos y haciendo uso de herramientas tecnológicas.
- Actividad previa: Se prepara al estudiante para realizar las configuraciones didácticas necesarias acerca de los materiales necesarios, tutoriales para el uso de software. Estas configuraciones se encuentran guiadas por láminas de presentación que contienen imágenes ilustrativas y vídeos instructivos, además de enlaces que llevan a los

[1] Nota: Apéndice D encuentra el enlace OVA.

instaladores de software[2] o configuraciones. Se solicita al estudiante que instale las herramientas tecnológicas siguiendo el paso a paso y se sugieren materiales para el desarrollo de la actividad.

- Contenido: Se presentan un conjunto de tres actividades experimentales donde se guía al estudiante mediante una secuencia didáctica a realizar la modelización de fenómenos físicos para deducir el concepto de razón de cambio, variación y derivada. Como punto didáctico el concepto de derivada se introduce a partir de un contexto. Los fenómenos físicos son:
    a. Caída Libre
    b. Movimiento rectilíneo
    c. Movimiento Pendular

Para realizar la experimentación se cuenta con el apoyo de láminas de presentación acompañadas de imágenes y videos explicativos, se dan las indicaciones para realizar los videos, instrucciones para realizar el análisis del video que modela el fenómeno físico con el uso del software Tracker Physics, se orienta la conceptualización y un repaso a los conocimientos previos, por último, se encuentran las instrucciones para la composición de funciones en software GeoGebra.

- Actividades de aprendizaje: proponen la modelización de fenómenos físicos, y a partir de ellos se introduce el concepto de derivada. La modelización es guiada por el modelo Cuvima (Cuevas et al, 2017), siguiendo los cuatro (4) marcos propuestos para el desarrollo y como resultado de la revisión del contenido junto con la construcción de la actividad, se cuenta con una herramienta a manera de ejemplo que le va a

[2] El software que se utiliza para la modelización es Tracker Physisc y GeoGebra, éstos son freeware, es decir, de acceso libre y son multiplataforma.

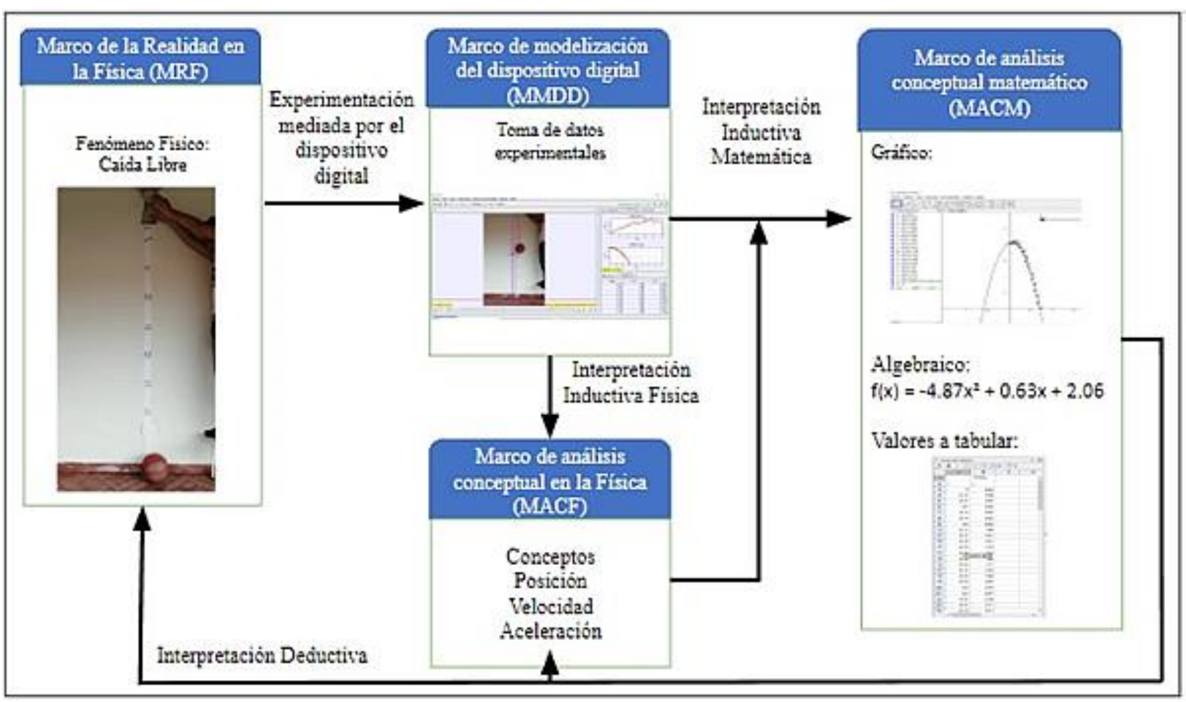
permitir al estudiante interactuar con la construcción realizada y a su vez encuentra preguntas orientadoras que buscan la deducción de conceptos como pendiente, ecuación de la recta, necesarios para la comprensión del concepto de derivada. Cada fenómeno físico cuanta con su respectiva secuencia didáctica y configuración. Los marcos del modelo Cuvima aplicados en el fenómeno físico de la caída libre se muestran en la Figura 9, y se describen a continuación:

Marco de la Realidad en la Física (MRF)

Este es el primer marco mostrado en la Figura 9, en el cual, se parte desde la experimentación de un fenómeno físico elegido por el estudiante (caída libre, movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o movimiento armónico simple) haciendo uso de las instrucciones dadas en el OVA o las guías del apéndice 2.

Figura 9

Modelo metodológico de modelización matemática Cuvima.

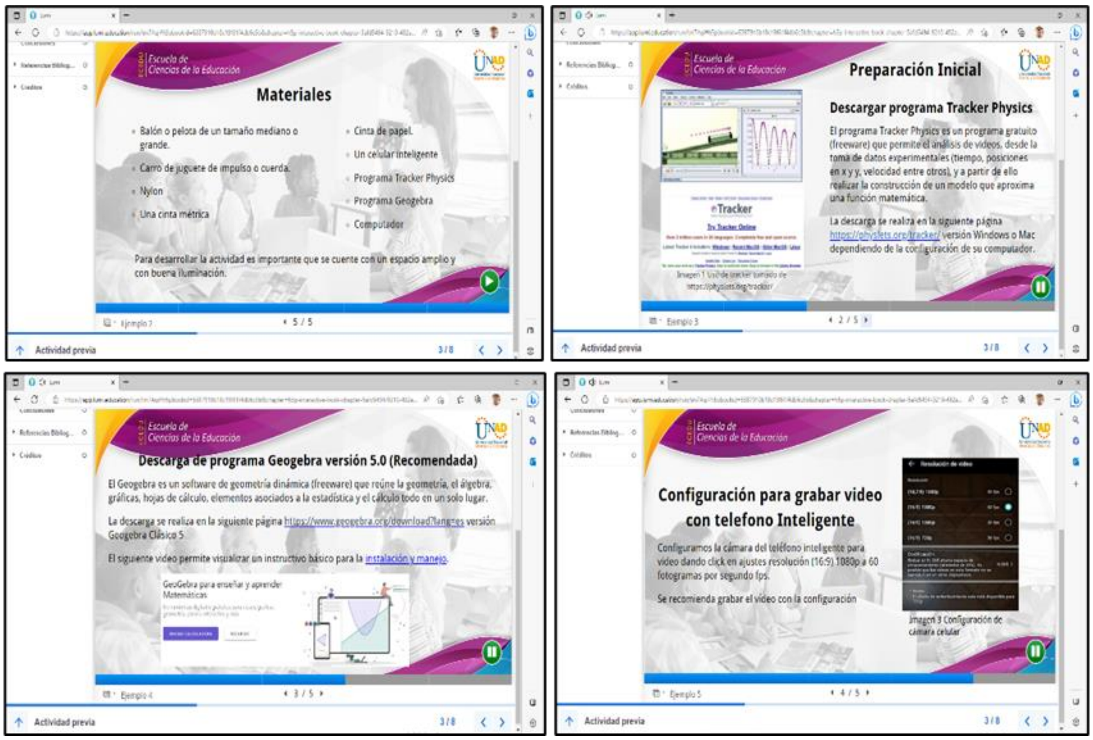


Nota: *Tomado y adaptado de Villamizar (2018, p. 59)*

Se inicia la configuración didáctica del experimento, donde se sugiere contar con los materiales dispuestos, configurar la cámara del dispositivo digital, realizar las instalaciones de las herramientas digitales Tracker Physics y GeoGebra; para ello, el estudiante cuenta con diapositivas y video tutoriales guías como se muestra en la Figura 10.

Figura 10

Materiales para la actividad en OVA



Nota: *imagen tomada desde el objeto virtual de aprendizaje actividades previa*[3]

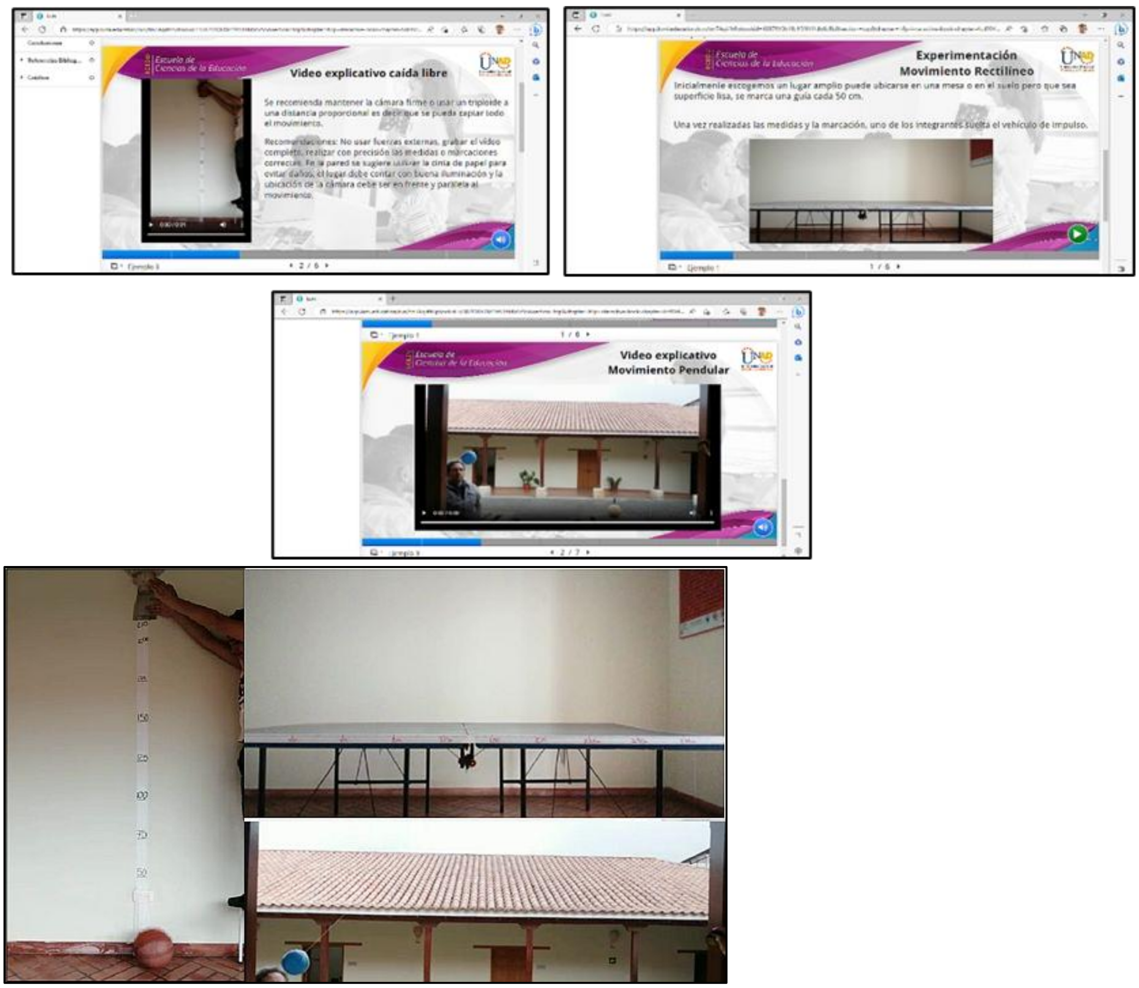
Los estudiantes disponen de un lugar adecuado e iluminado donde hacen la toma del vídeo experimental en el OVA se encuentran videotutoriales que orientan al estudiante a las tomas adecuadas como se muestra en la figura 11.

---

[3]Nota: Apéndice D encuentra el enlace OVA

Figura 11

Toma de vídeo experimentación caída libre, movimiento rectilíneo y pendular de un cuerpo



Nota: *imagen tomada desde el objeto virtual de aprendizaje - contenidos*

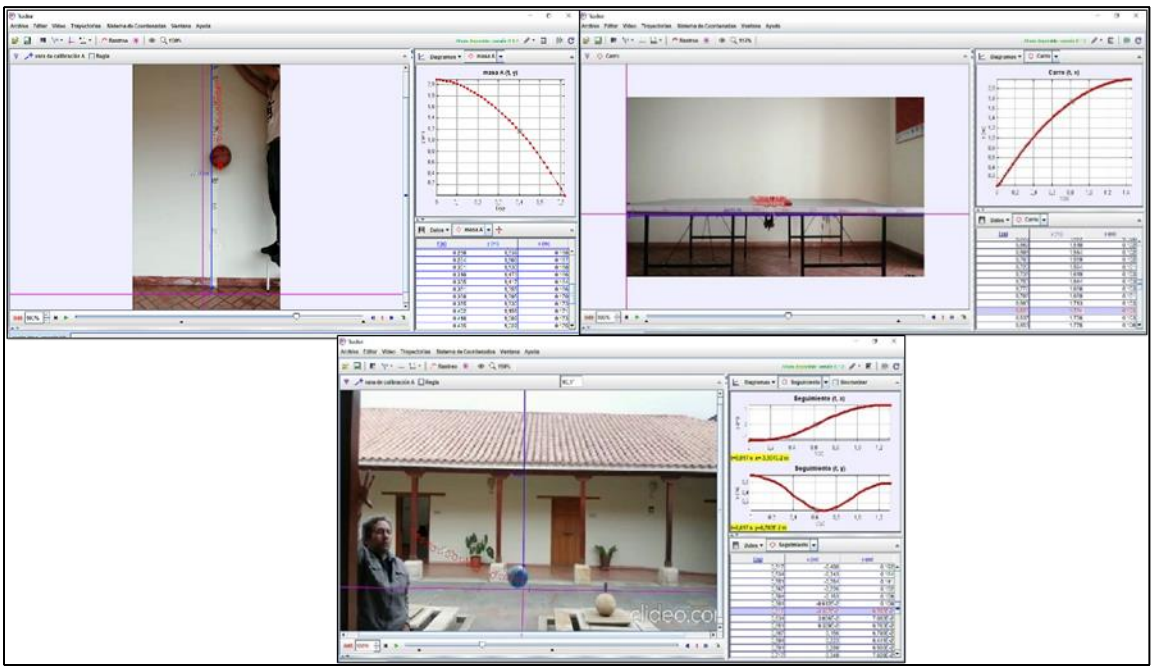
Marco de Modelización del Dispositivo Digital (MMDD).

En el segundo marco, una vez tomado el video del experimento, los estudiantes se disponen a importarlo en el software Tracker Physics para diversas representaciones arrojadas, tales como: gráfica, tabular y algebraica. Las representaciones modelan los movimientos con datos experimentales de posición vs tiempo (*x vs t* o *y vs t*), según sea el caso como se ejemplifica en la Figura 12.

Como se aprecia en la Figura 12, el software genera una tabla de valores en formato similar al utilizado en Excel que modelizan el movimiento de la posición versus tiempo los cuales el estudiante debe copiar y llevar a GeoGebra para explorar los datos experimentales de forma dinámica.

Figura 12

Captura de datos experimentales para modelización en Tracker Physics



Marco de Análisis Conceptual en la Física (MACF).

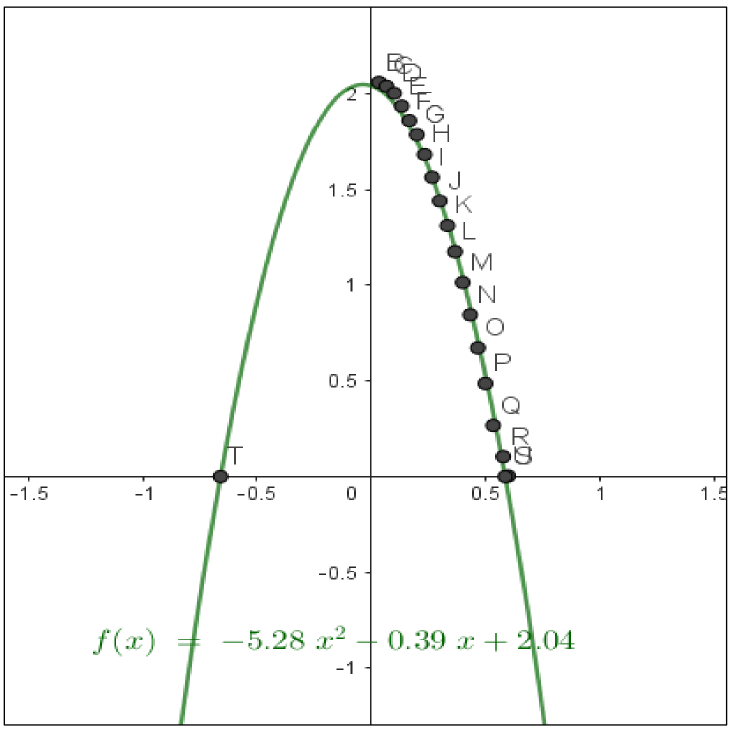
Dentro de este marco, con el apoyo algunos videos en el contenido del OVA, exploran los conceptos físicos asociados a los fenómenos, entre ellos se encuentran: posición, velocidad, tiempo, dirección, sentido y aceleración. El software Tracker Physics facilita la representación algebraica del fenómeno físico y lo modela en una función.

Marco de Análisis Conceptual en la Matemática (MACM).

Realizadas las actividades propuestas en los marcos anteriores que se apoyaron en el software Tracker Physics donde se modela la experimentación física (caída libre, movimiento rectilíneo o pendular), los estudiantes copian los valores que se encuentran en la tabla y los pega en el software GeoGebra en la vista de hoja de cálculo, seguidamente crean una lista de puntos con los datos experimentales para obtener la función gráfica del fenómeno y su función algebraica *f(x)* mediante un ajuste polinómico (Figura 13).

Figura 13

Representación de puntos y ajuste polinómico en GeoGebra

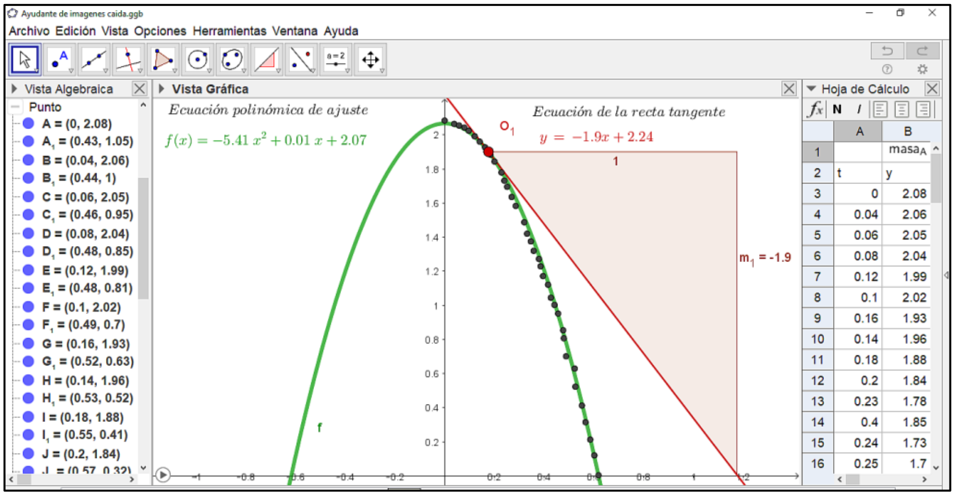


Nota: *Se ejemplifica uno de los movimientos propuestos, con orientaciones entregadas en el objeto virtual de aprendizaje*

Elaborado lo anterior se induce a través del OVA a los estudiantes hacia los conceptos como: la recta, ecuación de la recta, pendiente de una recta y tangente de una recta en cualquier punto de una gráfica, para que construyan dichas representaciones haciendo uso del software GeoGebra como se muestra en la figura 14.

Figura 14

Simulación en software GeoGebra de datos obtenidos de un fenómeno físico



Nota: *Se ejemplifica uno de los movimientos propuestos, con orientaciones entregadas en el objeto virtual de aprendizaje.*

El OVA cuenta con vídeos explicativos de los conceptos mencionados al igual de la importancia entre diferenciar una recta tangente y una secante de manera dinámica, se busca que los estudiantes asocien e interpretan inductivamente las representaciones matemáticas desde la física. Adicionalmente se plantean a través de un formulario Google preguntas orientadoras que buscan guiar de manera interactiva al estudiante a la construcción conceptual de la derivada mediada con GeoGebra (ver secuencia didáctica Apéndice 2).

La pregunta 1 y 2 de la secuencia didáctica del Anexo 2, hacen referencia a la interacción y contacto que el estudiante ha tenido con el instrumento y pretende obtener una respuesta analítica por el estudiante. En la pregunta 2 se dejó abierta para que el estudiante realice la descripción con sus propias palabras.

1. Mueve de izquierda a derecha el punto de la recta tangente (vista gráfica 1) y describe que pasa con el punto que ubicamos en la vista gráfica 2

   a. Aumenta. b. Disminuye. c. Se mantiene igual

2. ¿Las gráficas que se visualizan son iguales? Descríbelas

Las preguntas 3, 4, y 5 se encuentran enfocadas al concepto de pendiente, se considera la importancia de este concepto y la claridad que debe tener el estudiante, se proponen de forma abierta para dar al estudiante la posibilidad de resolver como mejor lo considere, pero haciendo uso de la actividad propuesta en el instrumento

3 Tomando dos puntos de la gráfica que se encuentran en la vista 2, es posible hallar la pendiente y la ecuación.

4 Haciendo uso de la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el valor de la pendiente es:

5 Haciendo uso de la ecuación $y = mx + b$ cuál es la ecuación de la recta:

La pregunta 6 es de corte conceptual y cerrada donde se pretende que el estudiante responda en forma concreta su interpretación acerca del valor encontrado en las operaciones realizadas.

6. ¿Qué representa el valor de la pendiente?

a. Posición b. Velocidad c. Aceleración

La pregunta 7 busca que el estudiante haga uso de las técnicas de derivación para que desde la ecuación que muestra el GeoGebra encuentre el valor.

7. Tomando la ecuación cuadrática que muestra el GeoGebra halle la derivada de esta haciendo uso de las técnicas de derivación. El resultado es:

La pregunta 8 pretende que el estudiante describa que encontró al comparar los resultados de la pregunta 4 y 7, desde su análisis mencione si son iguales, se aproximan o son diferentes.

8. Comparé el resultado obtenido en la pregunta 4. con la derivada encontrada en la pregunta 7. ¿Cómo es el resultado?

Una vez terminadas las actividades del objeto virtual de aprendizaje se busca que el estudiante conceptualice la derivada desde la geometría dejando a un lado la mecanización que suele conocerse, a través de una conclusión propia y se realiza la siguiente pregunta

En forma breve realizaremos la conclusión de la presente actividad teniendo en cuenta lo siguiente: Describa como es la variación de la posición con respecto al tiempo Describa con sus palabras como es la representación de la velocidad ¿Qué relación tiene el resultado de la derivada con respecto a la pendiente de la recta?

Se diseñaron guías impresas que contienen las actividades didácticas y que puedan realizarse y resolverse a lápiz y papel se encuentran en los Anexos 1, 2 y 3. Todo el documento cuenta con las respectivas referencias bibliográficas.

Fase de aplicación de los instrumentos de medición y actividades

La aplicación de los instrumentos se realizó en una muestra representativa de estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia, matriculados en el curso de Cálculo Integral.

Inicialmente se citaron a los estudiantes en una webconferencia realizada en 19 de septiembre de 2022, donde se socializó con los estudiantes la propuesta de investigación, y se les invito a participar en el pretest de conocimientos de cálculo integral el cual estuvo disponible por 40 días. Una vez aplicado el pretest, se recopiló la información y analizó, para tener en cuenta el diseño de las actividades. Se convocaron a los estudiantes que participaron a una nueva webconferencia realizada el 30 de noviembre de 2022, donde se socializó las actividades didácticas presentadas en un OVA para orientar al desarrollo de las mismas. Cada estudiante dispuso de su tiempo y horario para desarrollar las actividades durante 10 días, y evidenciar las respuestas o resolución de los problemas a través de un enlace diseñado en Google Forms, de este modo compartieron las experiencias y se creó un grupo a través de WhatsApp para atender inquietudes. Finalizado el tiempo para el desarrollo de las actividades se compartió el postest a través de un enlace de Google Forms para que los estudiantes lo resolvieran el formulario estuvo disponible por 35 días en el cual participaron 52 estudiantes.

La información se recopiló a través de videos y fotografías, adicionalmente se analizaron cualitativamente los resultados de las experiencias realizadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades. El pretest y postest se propusieron a través de un enfoque mixto para determinar el porcentaje de respuestas y la descripción conceptual propia de los estudiantes.

Fase de recolección de información

Población y Muestra

La licenciatura en matemáticas hace parte de la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD), oferta formación superior a distancia con una metodología de mediación virtual y se centra en la formación pedagógica didáctica, disciplinar e investigativa, a su vez prepara a los estudiantes para el manejo de las Tecnologías de la Información y Comunicación TIC y los recursos tecno-pedagógicos en ambientes virtuales. Para el periodo denominado 1604/2022 (cuarto período ofertado con 16 semanas) que se desarrolla en los meses de agosto a diciembre se cuentan con 1677 estudiantes en toda Colombia, de acuerdo con información entregada por el líder de programa. En su propuesta de malla académica se encuentran los cursos de cálculo y para llegar a ellos se debió aprobar cursos que los anteceden.

Como se mencionó en el capítulo anterior la enseñanza de estos cursos predomina la fuerte carga operativa y una herencia de la matemática formal, además alrededor de nuestra pregunta de investigación surgieron necesidades que nos llevaron a mejorar los esquemas de enseñanza – aprendizaje, que implementaran estrategias basadas en aprendizaje autónomo y el uso de herramientas digitales. Lo anterior llevó a seleccionar estudiantes que ya hubiesen aprobado el curso de cálculo diferencial y enfáticamente la población focal se centró en 121 estudiantes matriculados en el curso de cálculo integral.

Para calcular la muestra para una población finita se utilizó la ecuación (Reinoso, 2009)

$$n = \frac{N * Z_{\alpha}^{2} * p * q}{d^{2} * (N-1) + Z_{\alpha}^{2} * p * q}$$

• N = Total de la población

• Zα= 1.96 al cuadrado (si la seguridad es del 95%)

• p = proporción esperada (en este caso 5% = 0.05)

• q = 1 – p (en este caso 1-0.05 = 0.95)

• d = precisión

Se calculó una muestra de 44 estudiantes con un nivel de confianza de 90% y un margen de error de 10%. En aras de impactar positivamente la experiencia se hizo la invitación a través de las comunidades de aprendizaje conformada por docentes y estudiantes, en la cual participaron 70 estudiantes de manera activa. matriculados para el periodo indicado anteriormente.

Recolección de datos

De acuerdo con la muestra establecida de estudiantes que pertenecen al curso de cálculo integral y las actividades descritas en la fase de diseño se dispuso de formularios en Google Forms para la recolección de la información que permitió la recolección, organización y análisis.

Análisis de Resultados

Los resultados obtenidos se dividen en dos partes de acuerdo con la metodología planteada. En la parte 1 se contrastan los resultados del pretest con el postest para analizar el grado de evolución en la comprensión conceptual de la derivada, tanto para preguntas cerradas de ambos instrumentos como abiertas. La parte 2 corresponde al análisis de resultados referentes al desarrollo de las actividades experimentales realizadas por los estudiantes, donde interactuaron con el OVA y los respectivos software para la modelización matemática.

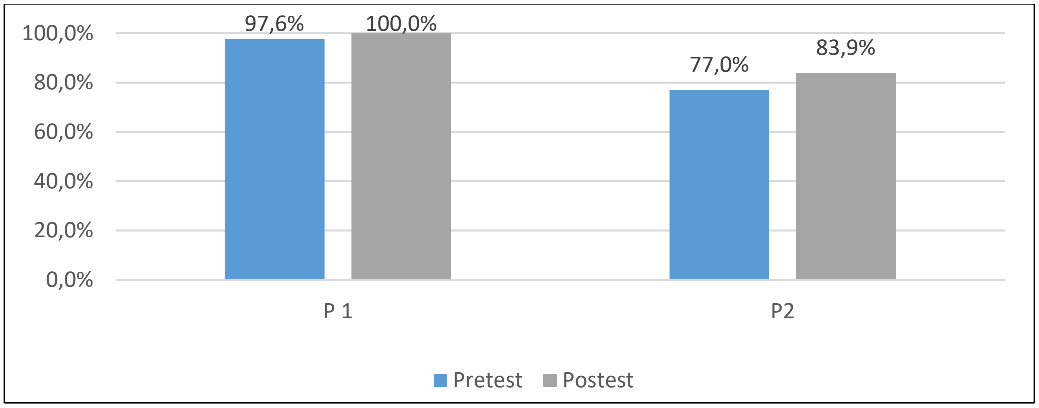
Parte 1: resultados del Pretest y Postest

En el presente apartado se presentan los resultados obtenidos en la aplicación del pretest y postest, mediante una comparación de resultados por ítems, y de esta manera poder analizar el avance o retroceso de los estudiantes en la comprensión conceptual y operativa relacionada con la derivada. Como se mencionó se propusieron un total de 26 preguntas, de las cuales 22 eran de selección múltiple con única respuesta y 4 preguntas abiertas, las cuales buscaban obtener resultados sobre las interpretaciones de los estudiantes con la derivada y otros objetos matemáticos afines para su comprensión (recta, pendiente, orden de los reales, dominio, rango, tangente).

Para cada una de las preguntas se utiliza la siguiente convención, P1 que significa pregunta pretest y postest 1, P2 significa pregunta pretest y postest 2, Pn significa pregunta pretest y postest n. La información se presenta en un gráfico de barras, se usan porcentajes para una mejor comprensión de los resultados comparativos teniendo en cuenta la respuesta correcta.

Figura 15.

Respuestas a preguntas de selección múltiple con única respuesta pretest y postest 1 y 2.



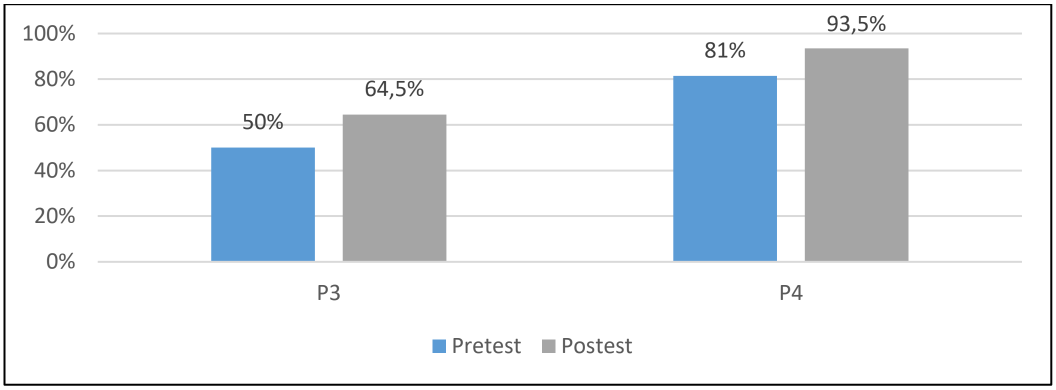
Las preguntas 1 y 2 hacen referencia al pensamiento aritmético, en las cuales, se preguntaba acerca del orden de los números reales, buscando que los estudiantes interpreten la importancia de intervalos, dominio y rango.

P1. Identificar el orden de los números es una de las primeras habilidades que se desarrollan en matemáticas, se buscaba que el estudiante identificara el número que fuese mayor. Se esperaba que los estudiantes respondieran la opción B (3,5001). En la Figura 15 se observa que los estudiantes respondieron de forma correcta la pregunta propuesta en el postest tuvo un aumento porcentual en un 2.4%.

P2. La pregunta se enfocaba a identificar la opción que no fuera verdadera de manera adicional era importante que los estudiantes reconocieran los símbolos de mayor que o menor que. En la figura 15 se observa que el 77% de los estudiantes que presentaron el pretest responden de forma adecuada encontrando la expresión que no es verdadera $(-3 > -2)$, para el postest hubo un incremento de 6.9% en los aciertos llegando al 83.9%. También se buscaba identificar en los estudiantes la capacidad de establecer la relación entre dos números.

Figura 15

Respuestas a preguntas de selección múltiple con única respuesta pretest y postest 3 y 4

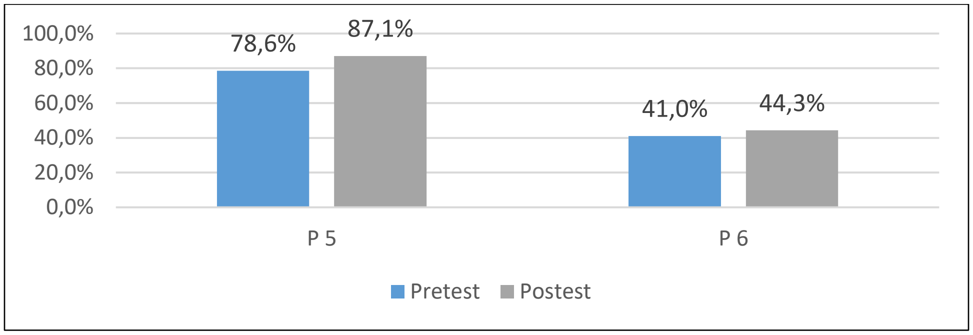


P3. Se buscaba medir en el estudiante la habilidad en la resolución de problemas con el uso de desigualdades que lleven a la comprensión de intervalos de una función. La respuesta correcta era la opción C $(2, \infty)$, en la figura 16 se observa que el 50% de los estudiantes muestran habilidades para establecer los intervalos de las funciones, el resto del porcentaje se dividió en las demás opciones, llama la atención que un 12.9% se representó en la opción e) No sé. Con respecto al postest hubo un incremento donde se alcanzó un 64.5%, es decir un aumento favorable del 14.5%. En cuanto a las respuestas inadecuadas las más recurrentes fueron las opciones a y b, sin embargo, la opción e (no se) hubo una disminución considerable en el postest llegando al 3,2%.

P4. Para esta pregunta se esperaba que los estudiantes respondieran la opción $a = \frac{1}{2n(n-1)}$ de acuerdo con la figura 16, el pretest el 81% de quienes presentaron el pretest demostraron habilidades algebraicas para resolver el ejercicio propuesto. Con respecto al postest hubo un aumento llegando al 93,5% esto puede deberse a que al revisar una vez más el ejercicio pueden recordar como lo solucionaron o realizar la corrección en caso de equivocación.

Figura 16

Respuestas a preguntas de selección múltiple con única respuesta pretest y postest 5 y 6

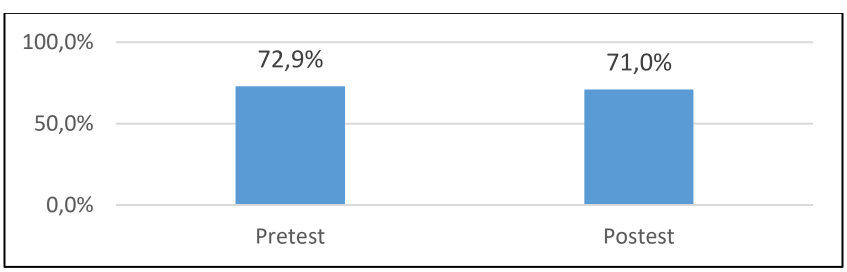


P5. Se esperaba que los estudiantes despejaran una la función propuesta de y en términos de x la opción correcta era la $d. \frac{1}{x-1}$ de acuerdo con la figura 17 en el pretest el 78.6% posee habilidades para resolver ecuaciones, además de establecer los intervalos de las funciones como dominio y rango, función creciente o decreciente. En el postest hubo un incremento llegando al 87.1% que logró responder de forma adecuada.

P6. Al igual que la pregunta anterior se buscaba que los estudiantes mostraran la capacidad de resolución de problemas La respuesta correcta para esta pregunta era la opción $b. f(1) =$ 1, de acuerdo con la figura 17 en el pretest 41% y postest 44.3% se mantienen muy similares en su respuesta correcta, se requería que el estudiante resolviera la función propuesta a través de reemplazar el valor solicitado.

Figura 17

Respuesta a pregunta de selección múltiple con única respuesta pretest y postest P7



P7: La pregunta hacía referencia a la relación entre el reconocimiento algebraico y la gráfica de la función. Para este ítem la respuesta correcta es *c Recta con pendiente negativa y parábola abierta hacia arriba, desplazada en una unidad a la izquierda. Sus puntos de intersección entre las funciones son (-3,4) y (0,1).* De acuerdo con la figura 18 el 72.9% de los estudiantes en el pretest reconocen la relación de una función con la gráfica correspondiente ubicando los puntos en el plano cartesiano. En el postest hubo una leve disminución llegando al 71%. La disminución en un pequeño porcentaje a esta pregunta, se discutirá más adelante.

P8: en esta pregunta se indaga al estudiante sobre cómo definen, conciben o interpretan una función continua.

Inicialmente los estudiantes definieron de forma rápida la función continua que podemos agrupar en las siguientes frases:

Figura 18

Respuesta de estudiantes a pregunta 8 en el pretest

Como su palabra lo dice, una función es continua cuando la gráfica continúa y su dominio siempre tiene una imagen.

Es aquella grafica que no tiene saltos ni interrupciones.

una función es continua cuando podemos representar su gráfica de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.

cuando va desde menos infinito hasta infinito

Como se muestra en las imágenes de la figura 19, los estudiantes describieron con sus palabras el significado, el cual es intuitivo, pero no es concreto o formal.

Para el postest, las respuestas de la mayoría de los estudiantes (78.57%) se apoyaron en las frases similares, pero maduraron el concepto de manera más formal, como se presenta en la figura 20. Estas respuestas pudieron ser influenciadas por la actividad didáctica donde se orienta al estudiante a la comprensión de pendiente, recta tangente, recta secante y la interpretación de límite.

Figura 19

Respuesta de estudiantes a la pregunta 8 en el postest

La función f (x) es continua a la derecha en el punto x = a cuando el límite a la derecha en dicho punto coincide con el valor que toma la función en el mismo. Es evidente que si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es continua en dicho punto

Una función es continua cuando cumple las siguientes condiciones: a) f(x) existe b) El limite cuando la funcion tiene a x existe y c) cuando el valor de la función evaluada en el punto es igual al valor del limite.

Aquella que no tiene saltos ni huecos. Debe cumplir algunas propiedades como que los limites laterales cuando tiende al punto de continuidad en cuestión sean iguales (que exista el limite en el punto) y este sea igual a la función evaluada en dicho punto.

Es positivo que los estudiantes tengan la libertad de escribir sus conceptos sin necesidad de apoyarse en la escritura formal de los libros o fuentes electrónicas. Por otra parte, es preocupante como el concepto no se encuentra muy claro para otros, a pesar de haber cursado cálculo diferencial y otros cursos de matemática en general.

P9: esta pregunta cuestiona al estudiante si toda función continua es derivable, y se pide una justificación de la respuesta, puesto que en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial se pide hallar de forma analítica o mecánica, la derivada de funciones que por lo general son continuas, mediante alguna de las técnicas de derivación, haciéndoles saber que efectivamente toda función continua es derivable, sin embargo, existen algunas que no lo son, en especial aquellas que generan puntas o picos como la función de valor absoluto de $f(x) = x$ o $f(x) = x^2 - 4$

La figura 21 muestra la respuesta de los estudiantes para el pretest quienes lo hicieron desde su apropiación conceptual y se buscaba indagar como lo concebían para lo cual encontramos respuestas como:

Figura 20

Respuestas de estudiantes a pregunta 9 en el pretest

no siempre

Para derivar una función se debe analizar primero su continuidad

no, para que sea derivable debe ser continua, existan derivadas literales y sean iguales. en ocasiones no coinciden la posición de limites de las rectas secantes.

Si una función es derivable en un punto (a,b) entonces es continua.

Para que se pueda derivar en un punto tiene que suceder, que la función sea continua, que existan las derivadas laterales y estas sean iguales.

La figura 22 hace referencia las respuestas de los estudiantes para el postest donde se encuentran frases similares, como por ejemplo:

Figura 21

Respuestas de estudiantes a pregunta 9 en el postest

No, pues hay funciones continuas que tienen derivadas tanto por derecha como por izquierda , pero estas tiene resultados diferentes.

el hecho de que sea continua no quiere decir que sea derivable en todos los puntos , si teneos una funcion f(x) en X0 donde X0 es un punto donde f(x) cambia de signo. aqui un ejemplo donde vemos una función continua en un punto pero no derivable en ese punto

Para que una función continua sea derivable , tienen que existir las derivadas laterales y estás sean iguales, es decir, que la función derivada sea continua

No, toda derivada es continua, pero no toda continuidad es derivable, ya que es necesario que en el punto dado exista el limite.

Si es derivable. Si es continua entonces se podrá establecer para todo punto perteneciente al intervalo, la pendiente de la recta tangente a la función ese ese punto.

Que la función sea continua. Que existan las derivadas laterales y estas sean iguales, es decir, que la función derivada sea una función continua.

Pese a que la mayoría de los estudiantes aún insisten en que toda función continua es derivable, existen algunos casos que evidencian sobre una interpretación conceptual, como el mostrado en la figura 22, donde se menciona que si es derivable. Si es continua entonces se podrá establecer para todo punto perteneciente al intervalo, la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. En esta respuesta, el estudiante comprende que es la derivada desde un punto de vista geométrico (el cual es influenciado por la secuencia didácticas del OVA), pese a que no pasa por su mente algunos casos excepcionales donde la función continua no es derivable.

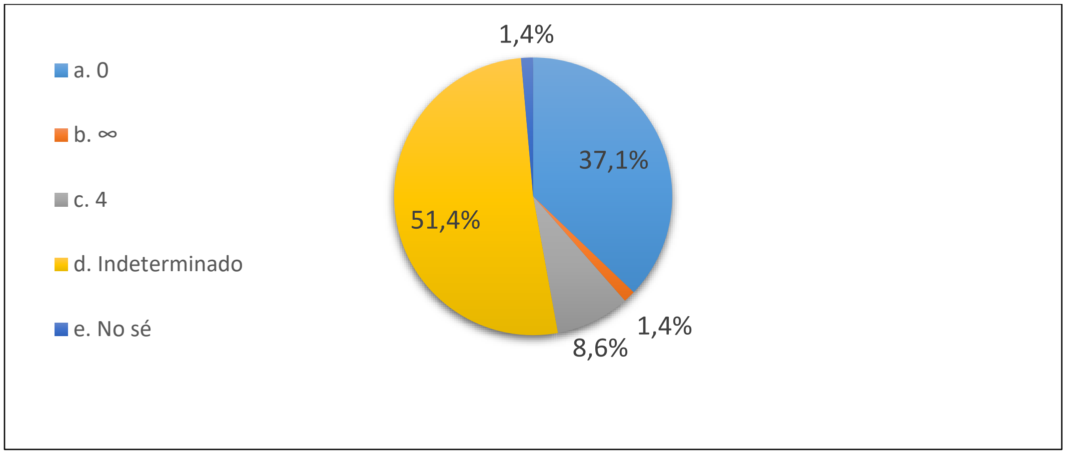
Otra respuesta como la mostrada en la figura 22, la estudiante menciona que: el falso, porque hay funciones que pueden ser continuas en un punto y no ser derivables; esto da cuenta que, es consciente de que existen casos excepcionales donde la función es continua pero no es derivable en un determinado punto, como lo es, la derivada de valor absoluto de x en x=0 o la derivada de $f(x) = |x^2 - 4|$, cuando x=-2 o x=2.

Se ha considerado que la pregunta 10, busca analizar si los estudiantes realizan adecuadamente operaciones con los reales y la capacidad de resolución algebraica, se piensa que cuando los estudiantes se enfrentan a una indeterminación, aplican procesos analíticos relacionados con el límite, siendo que el ejercicio no lo es. Se realizó un análisis al pretest y postest en forma detallada, obteniendo lo siguiente:

La respuesta a) indica 0 la cual puede deducirse al reemplazar el valor dado y como resultado se obtiene $\frac{0}{0}$ y el estudiante deduce que es 0, lo cual es incorrecto. De la misma manera sucede con la opción b) donde el estudiante al reemplazar obtiene $\frac{0}{0}$ y lo asocia como infinito ∞. La opción c) indica 4, dicho resultado se obtiene después de realizar procedimientos algebraicos, reduciendo la expresión $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$, y luego sustituyendo el valor numérico de x=2 se obtiene 4 como resultado, lo cual es referente a cómo se calcula si hubiese sido un límite. La opción d) indica indeterminado la cual es la opción correcta.

Figura 22

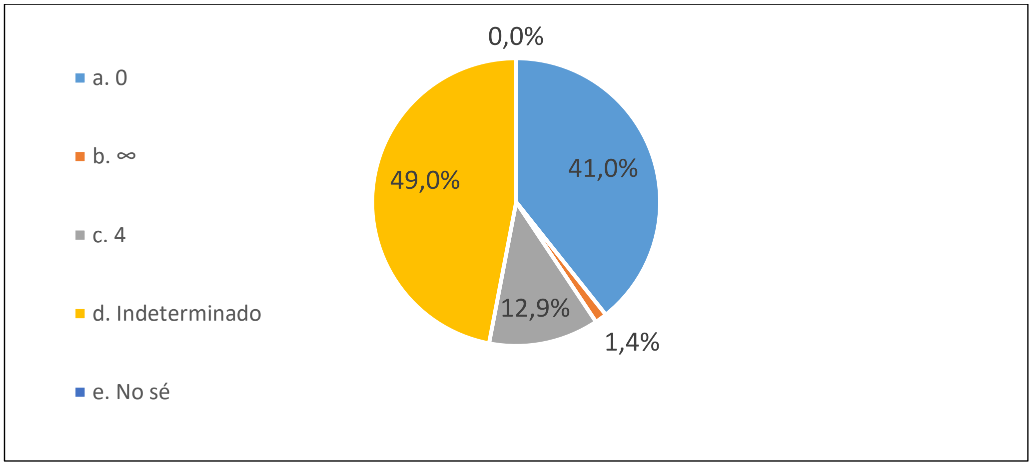
Respuestas de estudiantes a pregunta 10 en el pretest



P10: La figura 23 hace referencia a la respuesta de los estudiantes en el pretest. El 51.4% lograron resolver la situación problema propuesta, al analizar las otras opciones que eligieron la opción a) obtuvo un 37,1% y la opción c) un 8,6%, lo cual evidencia que los estudiantes acuden al procedimiento de límite cuando no hay que aplicarlo. El 1.4% considera que cero sobre cero es infinito.

Figura 23

Respuestas de estudiantes a pregunta 10 en el postest



La figura 24 hace referencia a los resultados del postest. El 49% de los estudiantes respondieron de forma correcta, al revisar las demás opciones la a) tuvo 41% y la opción c) 12,9%.

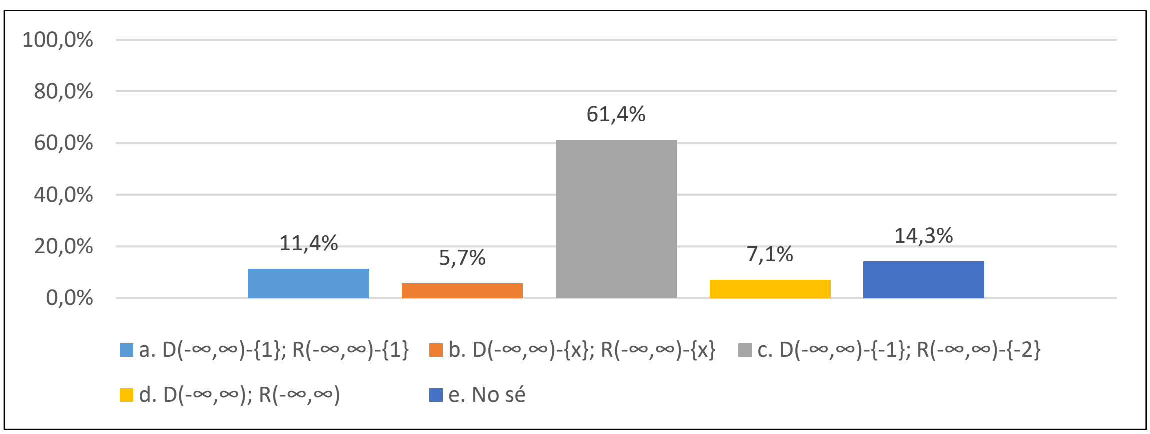
Para concluir. hubo una disminución del 2% en los estudiantes que respondieron de forma correcta. La opción a) aumentó en 4% y la c) en un 2,5%. Estos cambios pueden darse por la resolución algebraica a la cual los estudiantes están comúnmente acostumbrados al terminar un curso de Cálculo, pero también por errores conceptuales, relacionadas con las propiedades de los números reales.

P11. Tiene una característica muy importante porque se buscaba que el estudiante de forma analítica hallara el dominio y el rango de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. La opción correcta es la C.

En la figura 25 se observa que la mayoría de los estudiantes con un 61.4% responde manera acertada.

Figura 24

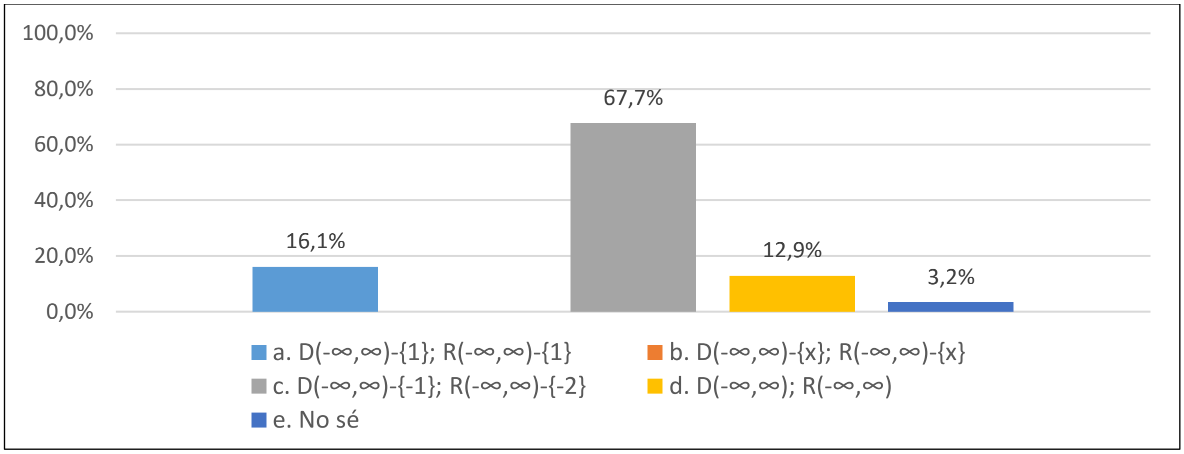
Respuestas de estudiantes a pregunta 11 en el pretest



En la figura 26 se puede observar que posterior a las actividades hubo un incremento de la respuesta correcta, en la cual un 67.7% tuvo la capacidad de hallar adecuadamente el dominio y rango de la función.

Figura 25

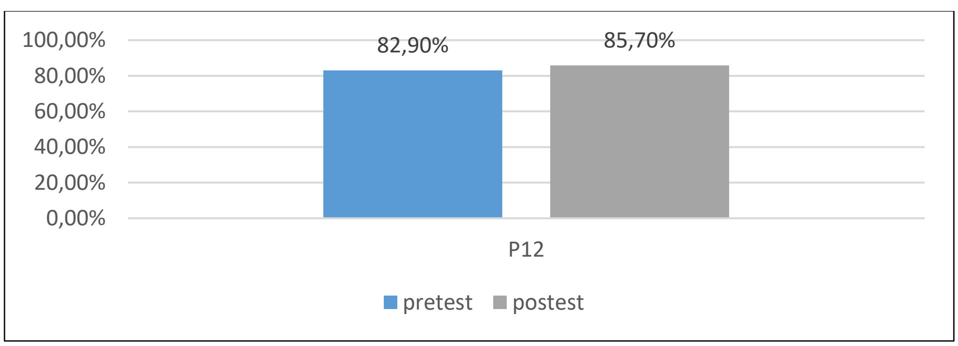
Respuestas de estudiantes a pregunta 11 en el postest



P12, hace referencia a teoría de conjuntos para conceptualizar el dominio de una función. Se esperaba que los estudiantes respondieran la respuesta b){1,2,3,4,5,6,7,8,9}. En la figura 27 se observa que en el pretest el 82.9% de los estudiantes respondieron de forma adecuada, al verificar las demás respuestas el 14,3% se inclinaron por la opción *e No sé*. Para el postest hubo un aumento en la respuesta adecuada hasta el 85.7%, la opción *e no sé*, disminuyó a 7,14%

Figura 26

Respuestas de estudiantes a pregunta 12 en el pretest y postest

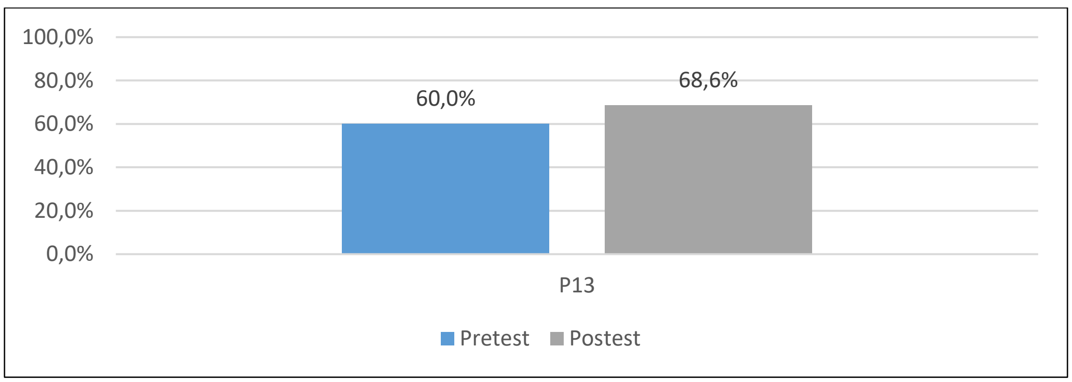


P13, es una de las preguntas fundamentales, ya que se pregunta por las raíces de una función, las cuales se encuentran asociadas con la primera derivada que ofrece información acerca de los valores los máximos y mínimos.

Se esperaba que los estudiantes escogieran la opción c) $x = 0, x = -1, x = 1$. En la figura 28 se observa que solo el 60% respondieron de forma adecuada, por su parte en el postest lo hicieron el 68,6%. Pese a que los resultados correctos mejoraron, se considera necesario que los estudiantes requieran profundizar sobre los métodos para hallar las raíces de una función.

Figura 27

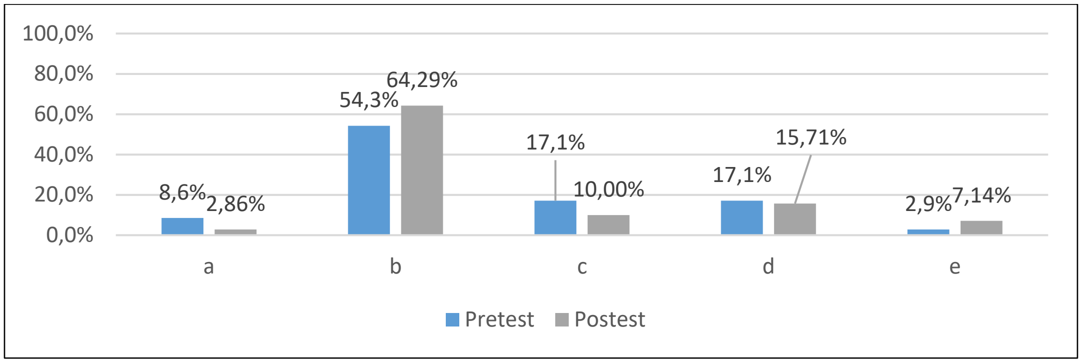
Respuestas de estudiantes a pregunta 13 en el pretest y postest



En P14, se pide calcular el valor de la pendiente de la recta y su sentido. Este concepto es fundamental, debido a que nos informa las propiedades de la recta además de su importancia para la geometría y el Cálculo, particularmente la derivada. La figura 29 representa los resultados donde se esperaba que los estudiantes escogieran la opción correcta como b) $m = \frac{3}{5}$, donde el 54.3% respondió de forma adecuada en el pretest, seguidamente los ítems que más puntaje obtuvieron fueron la c) $-\frac{3}{5}$ 17,1% que puede obtenerse por una confusión en el uso de los signos, también la opción d) $\frac{5}{3}$ 17,1%, este valor se puede obtener cuando se confunden los puntos con los cuales se hallan la pendiente.

Figura 28

Respuestas de estudiantes a pregunta 14 en el pretest y postest



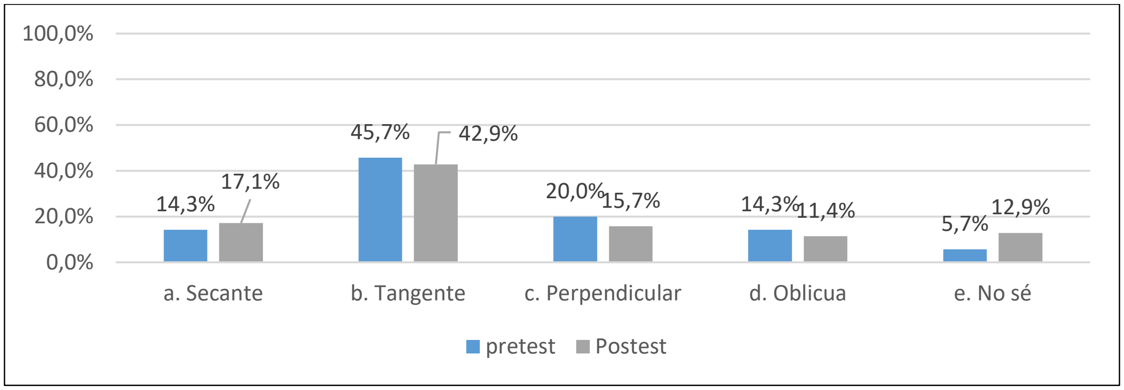
Nota. a. m = 1, b. m = 3/5, c. m = -3/5, d. m = 5/3, e. No sé

Por su parte en el postest, el 64.3% logró responder de forma adecuada. A pesar que hubo un incremento en la respuesta adecuada, las opciones $c)\ -\frac{3}{5}$ disminuyó hasta el 10% y la opción $d)\ \frac{5}{3}$ disminuyó hasta el 15,7% (Figura 29). Visualizado lo anterior se aprecia que a pesar de estar realizando cursos de Cálculo existen vacíos conceptuales en las nociones básicas.

P15, busca saber en los estudiantes que concepto conciben sobre la recta tangente. El concepto de recta tangente ha estado asociado en su explicación y conceptualización con la relación en la circunferencia (Vivier, 2011), sin embargo, se solicitaba a los estudiantes un análisis conceptual de la recta tangente como aquella que toca un punto específico de una función. Se esperaba que los estudiantes escogieran la opción $b)\ Tangente$, como la correcta, la figura 30 muestra el comparativo entre las opciones correctas y a su vez los resultados por cada uno de los ítems. El 45.2% de los estudiantes en el pretest lograron clasificar la recta tangente en un punto especifico de una función.

Figura 29

Respuestas de estudiantes a pregunta 15 en el pretest y postest

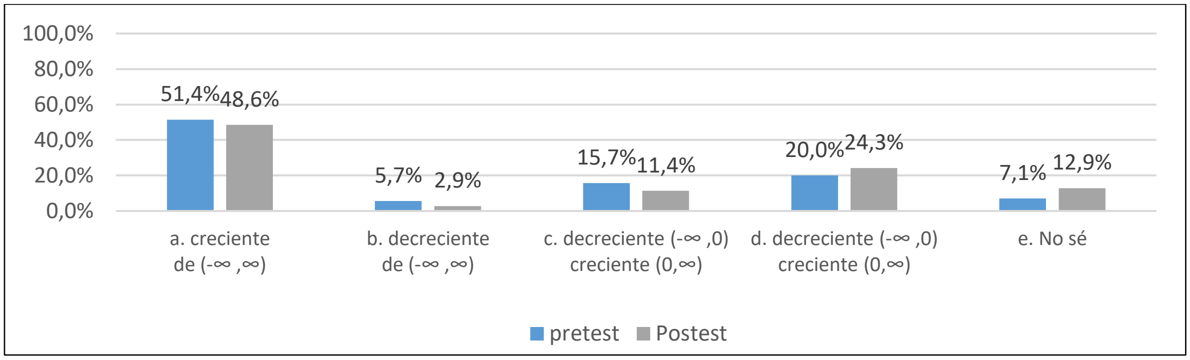


En el postest solo el 42.9% respondió adecuadamente. Se observa que a los estudiantes les cuesta comprender este tipo de conceptos, cabe mencionar que otra de las opciones escogidas fueron la a) recta secante y c) recta perpendicular, esto puede darse porque en la gráfica se aprecia como la función toca un punto y más adelante corta otro, por lo que aún no se concibe la noción de que la recta tangente es en un punto a nivel infinitesimal.

P16 hace referencia a la variación de una función donde los estudiantes determinan el comportamiento de esta partiendo de la conceptualización; el concepto de variación está muy ligado al de derivada, debido a que la variación es determinada por el comportamiento (creciente, decreciente o constante) de la recta tangente a la curva. Se esperaba que respondieran como opción correcta la d) *decreciente (-∞ ,0) - creciente (0, ∞)*. En la figura 31 se observa que solo el 20% en el pretest y el 24,3% en el postest respondieron de forma adecuada. Se aprecia también que los estudiantes eligieron tanto en el pretest 51,4% como el postest 48,6% la opción *a) creciente de (-∞, ∞)*, en la cual, el estudiante confunde la variación con el crecimiento o visualmente como es la gráfica.

Figura 30

Respuestas de estudiantes a pregunta 16 en el pretest y postest

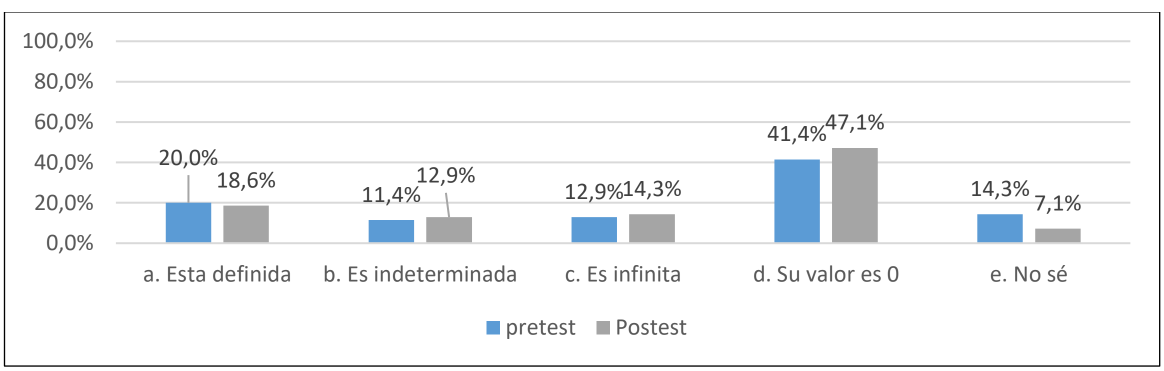


Pese a que los resultados mejoraron, la respuesta que predomina es incorrecta, donde expresan que la función tiene una variación creciente de menos infinito a infinito (opción a de la Figura 31), lo cual, evidencia que los estudiantes confunden la variación con el crecimiento o decrecimiento de la función, es decir para el problema planteado, pese a que la función es creciente, su variación no lo es.

P17, está asociada al concepto de variación y al comportamiento en un punto específico, la cuál es importante para dar evidencia si el estudiante comprende el concepto de derivada desde un punto de vista geométrico.

Figura 31

Respuestas de estudiantes a pregunta 17 en el pretest y postest

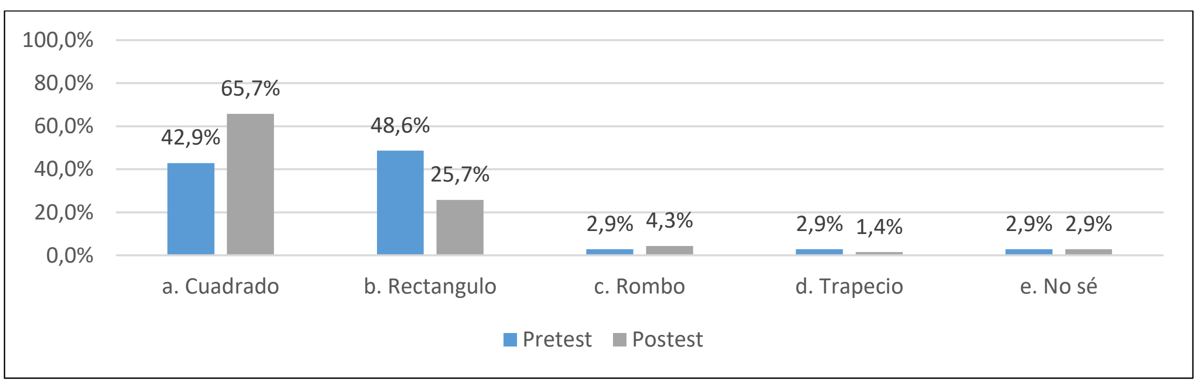


La opción correcta es la *c) Es infinita*, debido a que la pendiente de una recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en x=0 es una recta vertical, es decir, el valor de su pendiente o variación en dicho punto tiende a ser infinita, resultado que se puede notar desde un punto de vista geométrico. En los resultados hubo un incremento de respuestas correctas, sin embargo, sigue siendo muy bajo (12.9% en el pretest y 14.3% en el postest, ver figura 32). La respuesta que predomina es cero, que puede estar influenciado por la creencia de que un número finito dividido en cero da cero, lo cual es erróneo.

P18. se planteó para que los estudiantes determinaran el área máxima y analizar que noción tienen sobre máximo y mínimos, se esperaba que los estudiantes respondieran *a) cuadrado* como la respuesta correcta. En la figura 33 se observa que el 42,9% en el pretest y el 65,7% en el postest lo respondieron de forma adecuada. Por su parte la opción b) rectángulo logró en el pretest un valor considerable del 48,6%, pero el mismo, disminuyó en el postest. Es importante que el estudiante reconozca el concepto de máximos y mínimos.

Figura 32

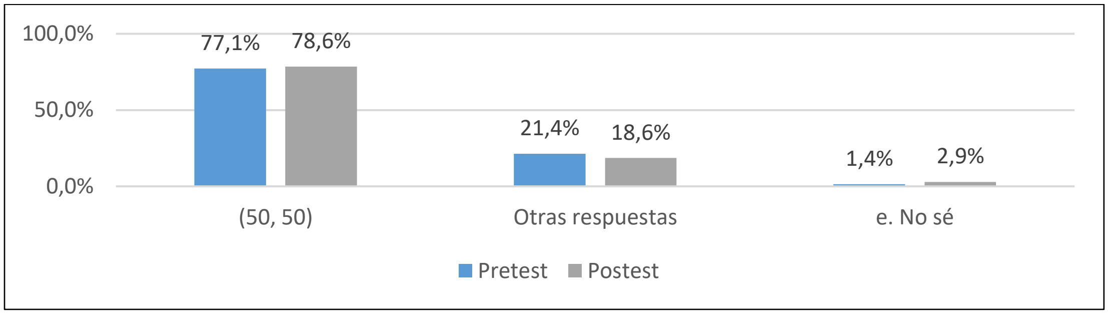
Respuestas de estudiantes a pregunta 18 en el pretest y postest



P19: la figura 34 muestra las respuestas de los estudiantes para la pregunta 19 la cual estaba diseñada para responder de forma abierta, el valor de dos números que sumen 100 y su producto sea máximo, dichos valores son respectivamente 50 y 50 debido a que los dos números suman 100 y su multiplicación es máxima. La figura 33 muestra que el 77,1% en el pretest y el 78,6% en el postest respondieron de forma adecuada.

Figura 33

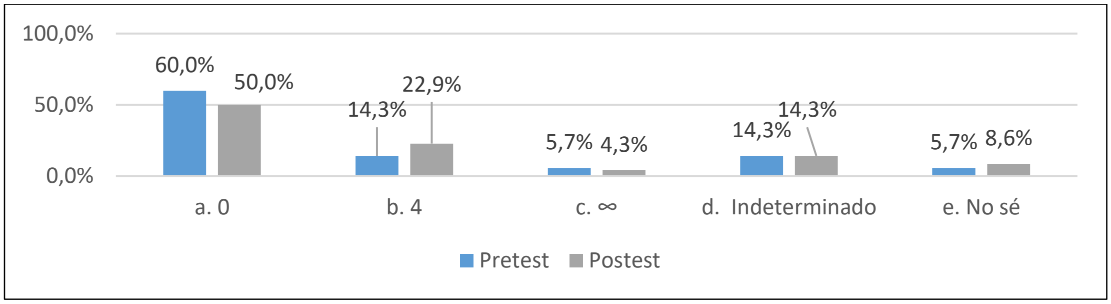
Respuestas de estudiantes a pregunta 19 en el pretest y postest



P20, es una pregunta que busca que el estudiante resuelva el límite de la función ya mencionada en el ítem 10, para determinar si efectivamente el estudiante aplica el proceso correspondiente a límite o realiza el valor numérico de una función. La opción correcta es la b) 4; en el pretest el 14.3% respondió adecuadamente y en el postest el 22.9%. La pregunta busca medir la capacidad resolutiva del estudiante cuando se tiene un límite. Comúnmente se logra con solo reemplazar el valor, en caso contrario se recurre al uso de casos de factorización para resolver. La opción que más eligieron los estudiantes fue la a 0, se puede deducir la escaza capacidad resolutiva y conceptual, o posiblemente que conciban el cero sobre cero como un cociente igual a cero.

Figura 34

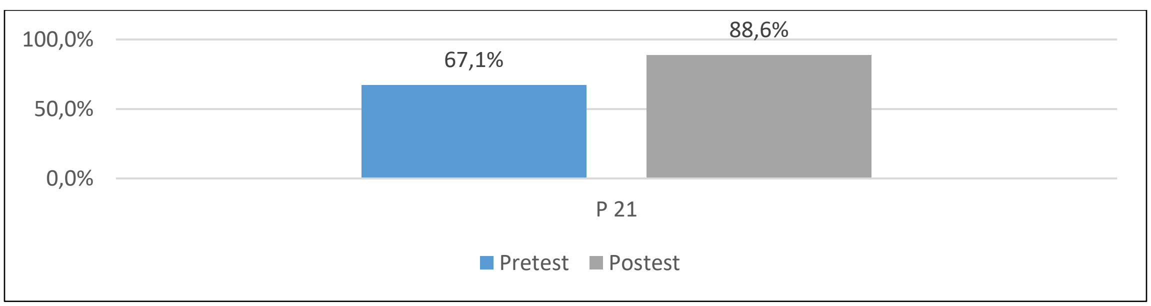
Respuestas de estudiantes a pregunta 20 en el pretest y postest



P21, esta pregunta buscaba que los estudiantes resolvieran una derivada a través de las técnicas de derivación; la respuesta correcta es la opción a) -2. En la figura 36 se observa que en el pretest el 67.1% resolvieron la derivada, por su parte en el postest hubo un aumento llegando al 88.6% de respuestas correctas. Es evidente que los estudiantes en general conocen las técnicas de derivación.

Figura 35

Respuestas de estudiantes a pregunta 21 en el pretest y postest

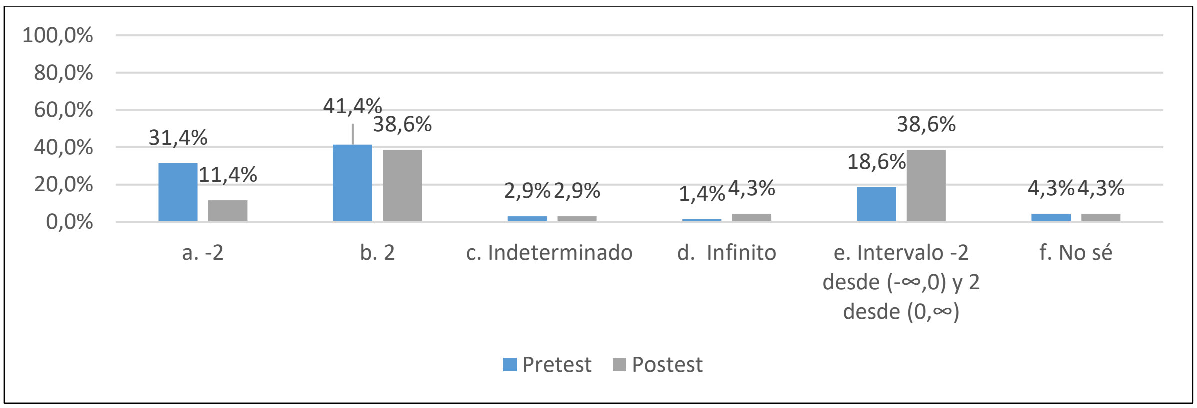


La pregunta P22 tenía una particularidad ya que era similar a la pregunta 21, pero se agregó el valor absoluto de la misma función. Se esperaba que el estudiante resolviera la derivada propuesta a través del razonamiento y comprensión del concepto desde un punto de vista geométrico y eligiera la opción *e) intervalo -2 desde (-∞,0) y 2 desde (0, ∞)*. Lo anterior evidencia que, muchos estudiantes pueden hallar la derivada de una función sin valor absoluto, sin embargo, cuando se plantea una con valor absoluto, el porcentaje de respuestas correctas baja (18.6%, ver figura 37), porque ya no se puede aplicar como tal una técnica de derivación.

Pese a que para el valor absoluto de una función la mayoría de estudiantes se equivocan para hallar la derivada, en el postest, los resultados correctos mejoraron, subiendo a un 18.6% a un 38.6% (figuta 37), lo cual pudo haber estado influenciado por el tratamiento de la derivada desde el punto de vista geométrico.

Figura 36

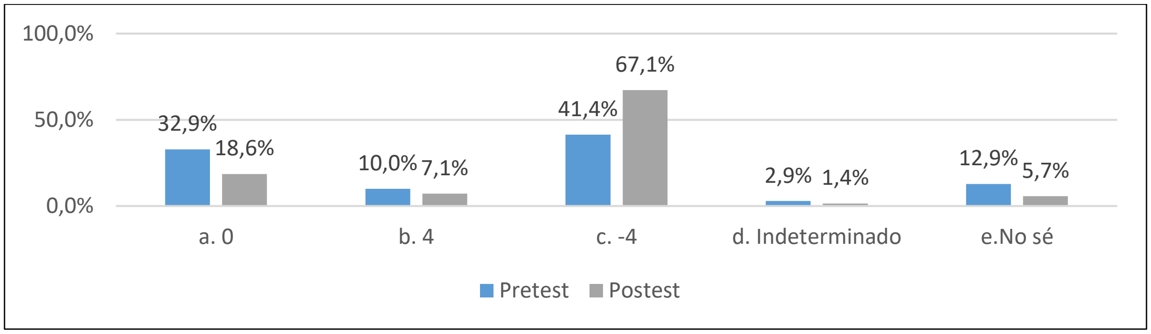
Respuestas de estudiantes a pregunta 22 en el pretest y postest



P23: la pregunta buscaba que el estudiante encontrara el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto dado es decir la opción c) -4. En la figura 38 se observa que en el pretest el 41.4% respondieron de manera adecuada y en el postest lo hicieron el 67.1%; este aumento indica que los estudiantes apropian la forma de solución de la derivada. Sin embargo, no se puede dejar a un lado que para la opción a) 0, hay un grupo considerable de estudiantes que la eligen, lo cual indica que reemplazaron directamente el valor de la x en la función f(x) e hicieron la operación, esto indica una confusión entre el concepto de evaluar una función y evaluar la función de derivada.

Figura 37

Respuestas de estudiantes a pregunta 23 en el pretest y postest

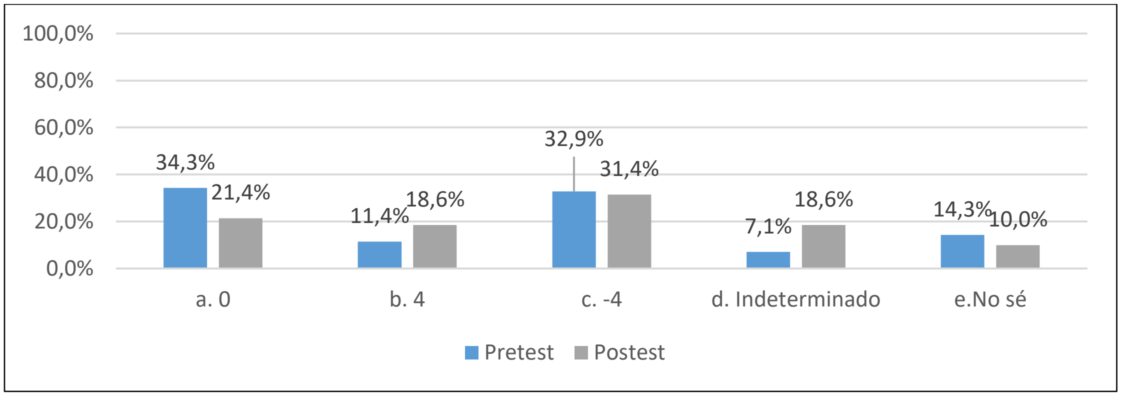


La pregunta P24 tenía una particularidad ya que era similar a la pregunta 23 pero se agregó el valor absoluto. Se esperaba que el estudiante resolviera el valor de la pendiente de la recta tangente propuesta a través del razonamiento y comprensión del concepto de derivada desde el punto de vista geométrico, y eligiera la opción *d) indeterminada*¸ debido a que en x=-2 para la función $f(x) = |x^2 - 4|$ pueden existir infinidad de rectas tangentes con valores finitos de su pendiente. En el pretest las respuestas correctas corresponden a 7.1% y el postest hubo un aumento con un 18.6% de respuestas correctas.

Pese al aumento en las respuestas correctas, en la figura 39 se observa que las respuestas que predominan tanto en el pretest como en el postest son incorrectas, lo cual evidencia que para casos en los que la derivada no puede resolverse mediante una técnica de derivación, conlleva a los estudiantes a equivocarse.

Figura 38

Respuestas de estudiantes a pregunta 24 en el pretest y postest



Consideraciones de la primera parte de los resultados.

De esta primera fase se analizaron los resultados del pretest y postest, donde se hizo un recorrido por los presaberes y soluciones puntuales a ejercicios propuestos de derivada. En general las respuestas correctas del postest mejoraron al compararse con el pretest, sin embargo, aún persisten dificultades de tipo algebraico. Aunque parece no haber un aumento considerable de respuestas correctas, se pudo evidenciar que en las situaciones donde los estudiantes debían aplicar el concepto de derivada, se lograron respuestas correctas, y en especial los resultados a las preguntas abiertas y en secuencia didáctica que se describirá a continuación.

Resultados a preguntas abiertas del pretest y postest.

A continuación, se presentan los resultados de las preguntas abiertas que pretendían indagar los conocimientos acerca de la derivada, por parte de los estudiantes que participaron en el pretest y postest. Las mismas no requerían conceptos formales o textuales de libros, sino aquellos que el estudiante a través de su formación los haya adquirido y apropiado.

P25: Se pregunto por la definición del concepto de la derivada, pero con sus propias palabras, la figura 40, muestra la repuesta más recurrente por los estudiantes.

Figura 39

Respuestas de estudiantes a pregunta 25 del pretest, sobre el concepto de derivada

relacion entre dos variables

Es una función matemática, es una manera de reducir una operación

Es el resultado arrojado cuando realizo procesos de cambios de valores en potencias o letras antes o después del igual.

Lo que resulta al cambiar el valor independiente de una funcion

derivar es hallar una funcion en la que se genere un cambio

No recuerdo

una división

es el resultado de un limite

Como se aprecia los estudiantes presentan posibles vacíos conceptuales, predomina el mecanicismo es decir el resultado después de realizadas las operaciones. Hacen una descripción meramente procedimental describiendo brevemente los pasos o lo que ellos realizan aplicando una técnica de derivación. Las respuestas no recuerdo o división llama la atención porque la población participante viene de aprobar el curso de Cálculo diferencial, lo que indica que no hubo un aprendizaje profundo de este concepto.

Para el postest se esperaba que los estudiantes maduraran el concepto o que se apropiaran del mismo al expresarlo con sus palabras. La figura 41 muestra los resultados de las respuestas más recurrentes.

Figura 40

Respuestas de estudiantes a pregunta 25 postest

se puede decir que es el limite de la rapidez de cambio de una función de dicho intervalo

La derivada es el calculo de la tangente de una curva

una derivada es un procedimiento matemático el cual nos permite calcular en una recta tangente, ciertos puntos que queremos hallar en una función o problema matemático, o un punto exacto de la pendiente.

Una derivada es la razón de cambio de y con respecto a x en un punto especifico, es igual a decir que la derivada es la pendiente en un punto determinado

Es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente.

Es la razón de cambio (o la variación) entre dos variables en un determinado intervalo.

Es la razón de cambio de una variable con respecto a otra.

Una derivada es la razón de cambio de y con respecto a x en un punto especifico, es igual a decir que la derivada es la pendiente en un punto determinado

Los resultados se consideran positivos por dos razones: primero, los estudiantes pierden el miedo a escribir, se arriesgan e intentan configurar un concepto más formal sin llegar a hacerlo como se pueden encontrar en un libro, sin embargo, la concepción que tienen los estudiantes ahora está más relacionada con el pensamiento geométrico, es decir, conciben la derivada como pendiente de la recta tangente o que está relacionada con la dicha recta. La segunda razón es porque se deja a un lado los métodos, resultados de procedimientos y formas de resolver, estableciendo relaciones conceptuales que conllevan a mejorar la comprensión de la definición desde un punto de vista del pensamiento geométrico.

P26: busca que los estudiantes describieran con sus palabras el significado de la derivada de una función propuesta, no se buscaba soluciones con procedimientos que lo solucionaran sino el razonamiento de la definición.

$$"Que\ significa\ que\ la\ derivada\ de\ la\ función\ sea\ y = x^2\ sea\ la\ función\ y' = 2x?"$$

Figura 41

Respuestas de estudiantes a pregunta 26 pretest

Para derivar una potencia se baja su exponente, se multiplica por el coeficiente y se le resta 1 a su exponente. En esta función la derivada de x2 es igual a 2x

que y o la f(x) es igual x elevado a la 2, y al momento de derivar es igual a 2x

comenzaremos dibujando una tabla de valores X Y para encontrar pares ordenados que determinan los puntos de nuestras rectas

Significa que la velosidad de cambio de la funcion es de 2x

Se baja el 2 del exponente y se resta 1 al exponente

Bajamos el 2 que está como exponente y restamos 1 al exponente

Se hace uso de la regla de la potencia

No sé aún

Al derivar, el exponente pasa a multiplicar con la literal que lo acompaña, en este caso el exponente es 2 pasa a multiplicar a la x.

La figura 42, muestra las respuestas más comunes por los estudiantes en el pretest, se aprecia que existe una respuesta basada en los procedimientos que se siguen para resolver una derivada, es decir, las técnicas de derivación lo cual lleva a concluir un predominio en la mecanización y operatividad a pesar de que la pregunta buscaba una explicación.

Para el postest los estudiantes maduran su conceptualización y se pueden encontrar respuestas que se agrupan como se muestran en la figura 43.

Figura 42

Respuestas de estudiantes a pregunta 26 postest

Corresponde a la función que contiene a todas las pendientes de la rectas tangentes a la función original

es la razon de cambio de dicha funcion en cualquier punto, la derivada es la pendiente de la funcion

Significa para cualquier punto x del dominio de la función x^2, la función derivada que representa la razón de cambio en y, cuando la variación en dicho punto x del dominio tiende a cero, es igual a la función 2x.

Que la pendiente de la recta tangente a la función definida como y en cualquier punto de la recta real se puede hallar mediante la función 2x

es la razon de cambio de dicha funcion en cualquier punto, la derivada es la pendiente de la funcion

La derivada de la función es la pendiente de la curva, en el punto dado, de tal forma que al reemplazar el valor de x... para cualquier punto, obtenemos la pendiente

En la figura 43, se observa que los estudiantes explicaron el significado de la derivada con sus propias palabras acercándose a la definición formal desde el punto de vista geométrico, es decir, lo relacionan más con la pendiente de la recta tangente a la curva. El 68% de los participantes, asociaron la derivada con la pendiente de la recta tangente, variación, razón de cambio de una función, y pese a que lo expresaron de manera distinta, se puede deducir que hablan de un mismo significado. Es innegable que para el resto de los estudiantes (32%) persiste la mecanización como forma de comprensión y significado de la derivada.

Parte 2: resultados de las actividades realizadas en OVA

En el siguiente apartado se describe el desarrollo de las actividades didácticas, que fueron desarrolladas por los estudiantes de acuerdo a cada uno de los marcos establecidos en el modelo CUVIMA, adicionalmente haciendo uso del OVA se elige alguno de los fenómenos físicos propuestos, se realiza la modelización con el uso de software sugerido y se finaliza con la conceptualización deductiva matemática. A continuación, se describen las actividades presentadas por los estudiantes de acuerdo a cada marco y al final se encuentran consideraciones reflexivas del desarrollo de las secuencias didácticas.

Marco de la Realidad en la Física (MRF)

Para el desarrollo del primer marco, la figura 44, muestra que los estudiantes grabaron el video de la actividad del fenómeno físico propuesto en el OVA, haciendo uso del teléfono inteligente. La actividad fue realizada por 65 estudiantes, algunos presentaron dificultades al momento de grabar el video como movimientos en la cámara. Para quienes optaron por realizar el fenómeno de la caída libre, el objeto elegido no lo hacía completamente vertical, se desviaba en forma horizontal, para lo anterior debieron hacer varias tomas. Quienes intentaban el movimiento rectilíneo uniforme, el vehículo no permanecía completamente horizontal se movía hacia cualquier lado lo cual dificultaba la captura del vídeo. Solo un estudiante manifestó que intento el pendular pero no suministro el vídeo. En términos generales los estudiantes manifestaron que les parecía una actividad interesante, ya que ellos tenían el reto de grabar un vídeo que aparentemente parecía sencillo, pero no lo era.

Figura 43

Experimentaciones físicas realizadas por los estudiantes

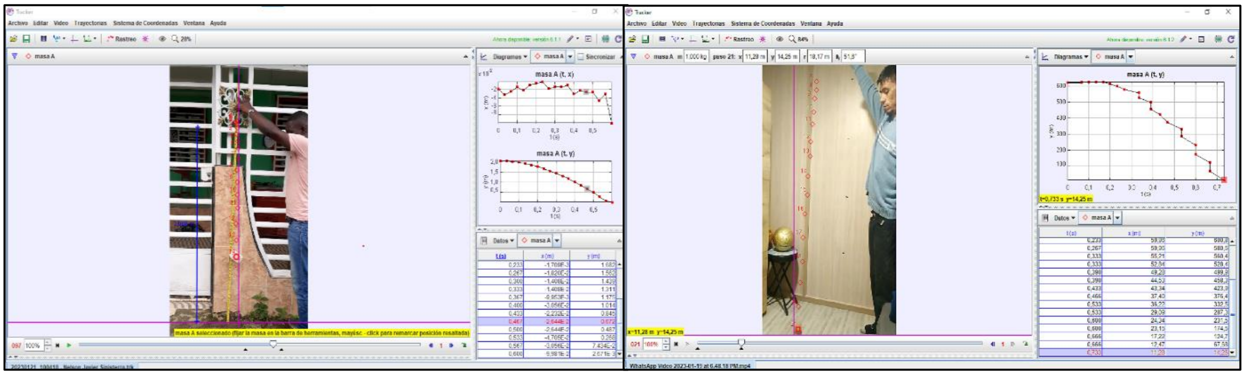
Nota: imágenes de experimentaciones realizadas por los estudiantes

Marco de Modelización del Dispositivo Digital (MMDD).

Para el desarrollo del segundo marco, la figura 45, muestra algunas imágenes donde los estudiantes modelizaron el fenómeno físico de acuerdo con el vídeo grabado por ellos, haciendo uso del software Tracker Physics. Obtuvieron gráficas y valores numéricos en tabla que modelan del movimiento induciendo a la interpretación física de la distancia y tiempo. Curiosamente en las comunicaciones con los estudiantes manifestaron que realizado el vídeo había el reto de llevarlo al software porque no lo había hecho en ningún curso ya aprobado.

Figura 44

Modelización de fenómeno físico en software Tracker Physics



Nota: imágenes de datos experimentales realizados por los estudiantes

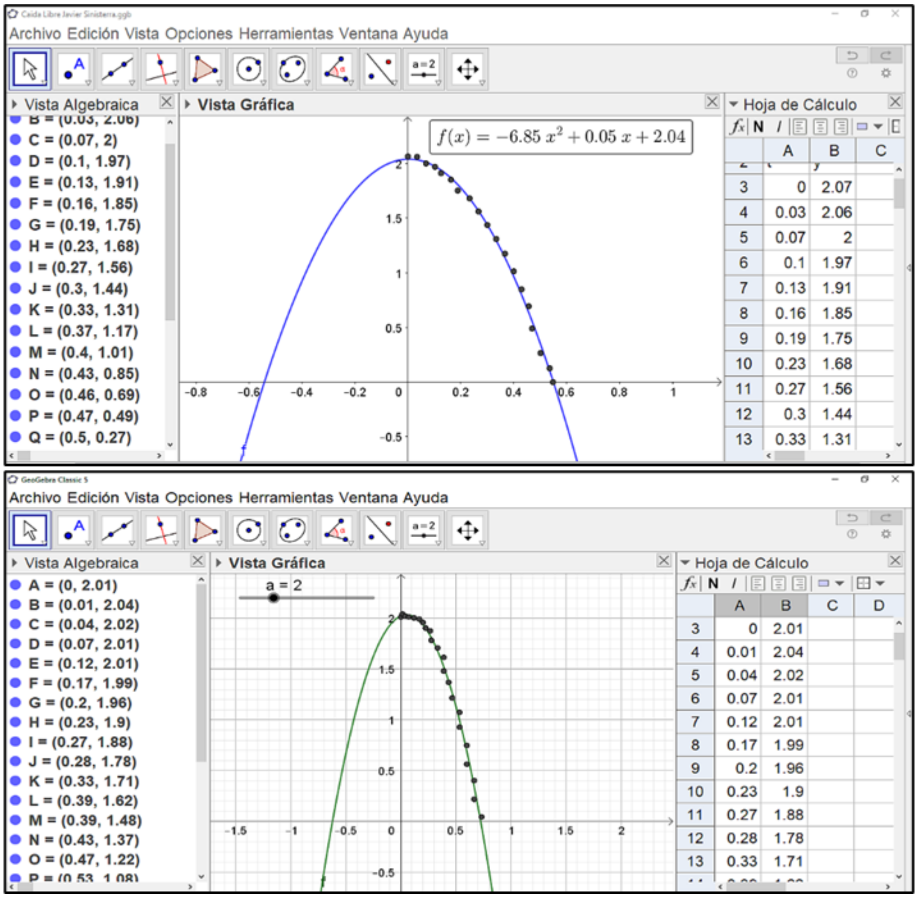
Los estudiantes, manifestaron dificultades al momento ajustar el video y colocar la vara calibradora que precisara la distancia desde donde inicia el vídeo. La conformación de los puntos en algunos casos no fue regular, lo cual llevo a aproximar e incluso al momento de hacer el seguimiento se presentaron dificultades como: el objeto con el que grabaron era muy pequeño y por la velocidad del vídeo no se notaba, o había movimientos en la cámara lo que dificultaba el enfoque. Los intentos de capturar los puntos de los vehículos fueron fallidos porque se movía y no era completamente horizontal. No se presentaron dificultades al momento de extraer los valores arrojados en la tabla por el software Tracker Physics y fueron llevados con facilidad la herramienta GeoGebra para crear una lista de puntos en el plano cartesiano.

Marco de Análisis Conceptual en la Física (MACF).

Los estudiantes manifestaron que asociaron los puntos con cada uno de los momentos del movimiento, es decir posición, tiempo, velocidad y aceleración. De los puntos extraídos de la modelización los estudiantes exploraron como cambian los valores en cada segundo de tiempo y como se construye una gráfica con estos, además como es la representa en la ecuación algebraica. De los puntos creados por el movimiento, lo llevaron a GeoGebra como se muestra en la figura 46 y crearon el listado de puntos para formalizar la ecuación.

Figura 45

Ajuste de datos experimentales en GeoGebra realizada por estudiantes



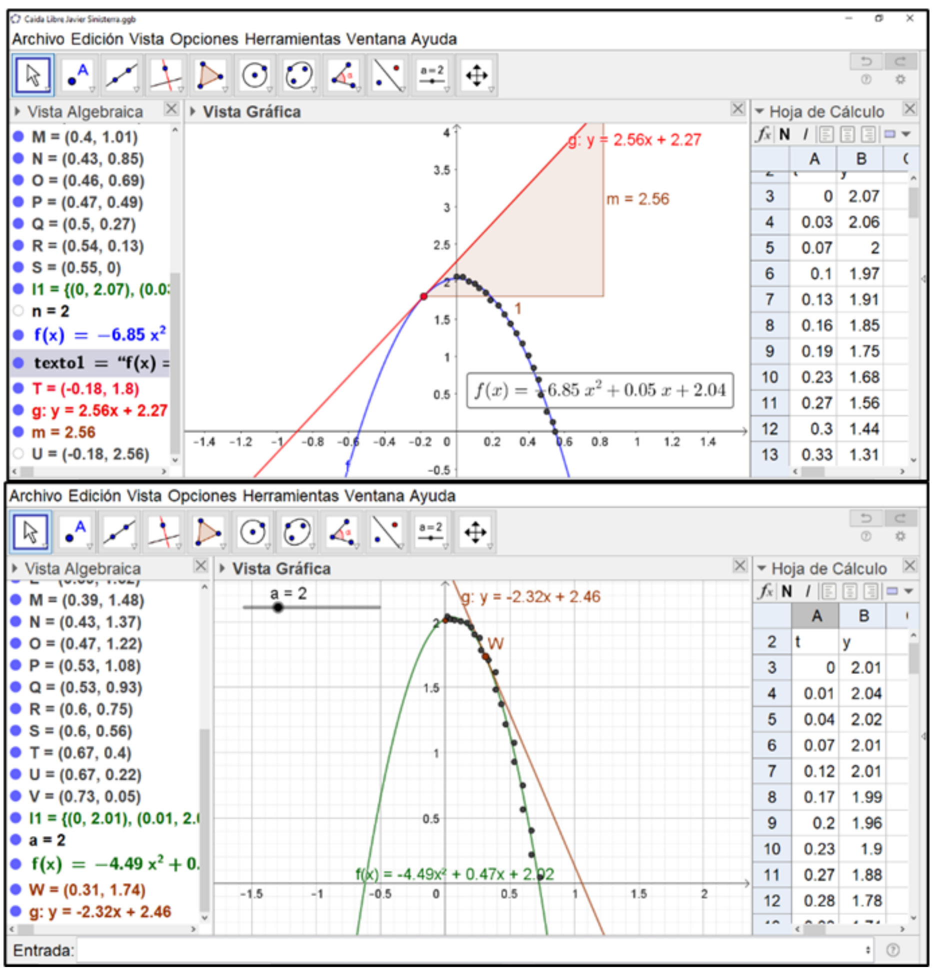
Se estableció comunicación con los estudiantes para conocer las dificultades presentadas durante el desarrollo de la secuencia, expresaron que inicialmente cuando creaban la función no entendían con exactitud que estaban graficando, algunos consideraban que iba a ser una recta ya que el movimiento era recto, pero después de realizarlo y visualizaron que era una parábola que correspondía al movimiento en el eje y está la altura y en el eje x el tiempo. En cuanto al ajuste de los puntos y la ecuación se presentaron dificultades porque la gráfica debía iniciar en el punto que ellos habían escogido como inicial pero no se visualizaba, lo cual llevo a orientar al estudiante para precisar los puntos en el software Tracker Physics.

Marco de Análisis Conceptual en la Matemática (MACM).

Partiendo de la gráfica construida en GeoGebra del desplazamiento del objeto y los intervalos de tiempo, y con la interacción del OVA los estudiantes construyen elementos que apoyan los conceptos como pendiente, recta, recta tangente, puntos de una función y variación como se muestra en la figura 46.

Figura 46

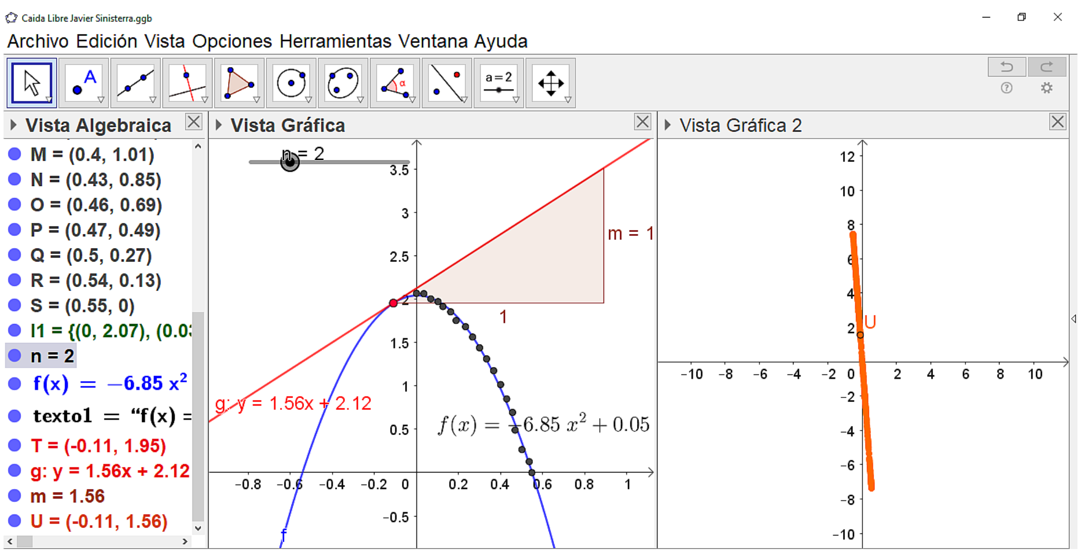
Construcción de elementos matemáticos asociados a conceptos previos de la derivada



En comunicación con los estudiantes manifestaron que en este punto era más sencillo ya que se trataba de manejo del GeoGebra, sin embargo, algunos manifestaron que no había manipulado la herramienta digital así por lo cual debieron visualizar en diversas ocasiones el video de apoyo que se encontraba en el OVA. Los estudiantes continúan el desarrollo de las actividades propuestas para la construcción geométrica de la derivada figura 47, donde interactúan con el objeto moviendo el punto sugerido de un lugar a otro.

Figura 47.

Construcción de la derivada por los estudiantes con GeoGebra



La dificultad en esta última parte de la actividad fue el poco manejo que los estudiantes tienen del GeoGebra ya que la gran mayoría manifestaron que no habían manejado la herramienta de esa forma. Para terminar los estudiantes llegaron a un modelo matemático partiendo de una realidad física donde se analiza la posición y tiempo, como también velocidad y tiempo. Los estudiantes replican la representación algebraica y encuentran la pendiente de la recta tangente a la curva además de obtener la ecuación.

Consideraciones del desarrollo de la secuencia didáctica

En términos generales participaron de la secuencia didáctica 65 estudiantes, es decir el 92,8%, lo hicieron de forma activa. Se presentaron dificultades al momento del video ya que no poseen las habilidades para realizar capturas precisas o no cuenta con un trípode. Los estudiantes optaron por realizar mayormente la experimentación con la caída libre, esto pudo ocurrir porque era la primera actividad en el OVA o que era la más fácil de realizar. Llevar los datos al Tracker Physics y modelarlos en el software fue nuevo para los estudiantes. En la comunicación establecida manifestaron abiertamente que no había hecho ninguna actividad con el software en cursos anteriores, por lo cual les tomó tiempo la exploración y manipulación de la herramienta.

Desarrolladas las actividades propuestas en la secuencia didáctica el 87% de los estudiantes lograron completar la actividad, de estos, el 77% establecieron de forma correcta la relación de la recta tangente con respecto a la función dada, además de como varía a medida que desplazamos el punto de la función. Se evidenció que los estudiantes concluyeron de forma correcta el cambio en las gráficas, el 92.3% logró encontrar el valor la pendiente de la recta y la ecuación. El 77% de los estudiantes concluyeron que la pendiente representa la velocidad, pero para quienes realizaron la experimentación de movimiento rectilíneo uniforme les fue complejo identificar con exactitud a que corresponde (distancia, velocidad, aceleración).

Al preguntar a los estudiantes por el valor de la pendiente hallada y lo que representa, el 72% lograron concluir que eran los mismos o similares, algunos manifestaron que era aproximado. El porcentaje restante manifestó que tuvieron inconvenientes en el manejo del GeoGebra.

Los estudiantes presentan dificultades en el manejo del software GeoGebra ya que ha sido solo un apoyo para realizar gráficas, pero el manejo que se indicó causo en algunos casos confusiones y una recurrente consulta en el OVA.

Discusión de los Resultados

Dentro del proceso investigativo realizado existen resultados que han permitido validar el diseño de las actividades que se apoyan en la bibliografía consultada. Inicialmente la aplicación del pretest y el postest tenían como propósito obtener resultados interpretativos de los estudiantes con respecto al concepto de derivada y adicionalmente se requería de conocimientos afines inmersos en la aritmética, álgebra y geometría.

Del análisis de los resultados se pudo observar que en general, las respuestas correctas del postest mejoraron al compararse con el pretest, sin embargo, aún persisten dificultades de tipo algebraico. Aunque parece no haber un aumento considerable de respuestas correctas, se pudo evidenciar que en las situaciones donde los estudiantes debían aplicar el concepto de derivada, se lograron respuestas correctas, y en especial los resultados a las preguntas abiertas y en secuencia didáctica que se describirá a continuación.

Visualizar el formalismo matemático desde la experimentación y la modelización, es parte de una estrategia didáctica que promovió mejorar la comprensión del concepto de derivada. Se partió desde fenómenos o aplicaciones reales, que se modelizaron integrando herramientas tecnológicas y secuencias didácticas, para así llegar a la comprensión conceptual, la cual se evidenció en los resultados analizados en el capítulo anterior. Es claro que no se logró en el total de los estudiantes, pero los valores indican que es un camino a seguir para lograr una mejor comprensión del concepto de derivada, y en especial reforzar otros tipos de pensamiento matemático como el geométrico, el cual, es dejado a un lado en los cursos tradicionales de Cálculo Diferencial.

Involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje además de dotarlos con elementos experimentales que promuevan el desarrollo del conocimiento y la comprensión genera una conexión entre las ideas nuevas y los saberes previos, cambia el modelo habitual de pasividad (hablante-receptor). Los estudiantes tienen la oportunidad de intentarlo, realizar ajustes y establecer relación entre las representaciones matemáticas que se explican desde la física y que tradicionalmente son explicados en un tablero de clase o libros de texto

Las actividades de modelización propuestas en herramientas tecnológicas se guiaron a través de modelo metodológico Cuvima, donde se integraron elementos comunes y de manejo diario en los estudiantes como lo son teléfonos inteligentes, computadores y aplicaciones digitales, las cuales los estudiantes se encuentran familiarizados dando un enfoque diferente a su uso, además atiende dinámicamente la enseñanza desde situaciones contextuales, activas, participativas y colaborativas.

Dentro del proceso de investigación se promovió el marco didáctico matemático del concepto de la derivada en el curso de cálculo diferencial de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia, donde la enseñanza y aprendizaje se integró al uso de herramientas digitales promoviendo la comprensión desde una interpretación inductiva y deductiva.

La enseñanza de conceptos matemáticos en modalidad virtual puede presentar ciertos desafíos, pero hay diversas estrategias que pueden utilizarse para promover una comprensión conceptual. Inicialmente se partió de una reflexión académica, revisión de libros, guías de aprendizaje, estadísticas de reprobación y la aplicación de un pretest a estudiantes que aprobaron el curso de cálculo diferencial, el resultado de lo anterior evidenció que los estudiantes requieren ampliar el conocimiento y las habilidades de resolución, ya que fueron evidentes vacíos los conceptuales.

El identificar fenómenos físicos que permitieran desarrollarse en entornos de fácil acceso o uso con adecuada iluminación, con materiales sencillos y accesibles, fue un reto ya que promovieron la experimentación como medio activo de educación e interacción real con el medio por parte del estudiante, dando sentido a sus conocimientos teóricos adquiridos previamente. El modelo Cuvima se consolida como una metodología posible de realizar en el aula o fuera de ella, partiendo desde contexto de la física, revalorando el uso de dispositivos digitales e integrando las herramientas tecnológicas a la apropiación de conceptos matemáticos.

El uso de herramientas tecnológicas como mediadores para la modelización, se puede considerar parte de una estrategia didáctica para la enseñanza de las ciencias y la matemática, que genera espacios de educación e interacción, fomenta oportunidades de acceso, involucra contextos y permite que, desde los fundamentos del aprendizaje autónomo, el estudiante explore y afiance dinámicamente los conceptos.

Aunque se evidenciaron dificultades en los estudiantes al momento del uso del software Tracker Physics, finalmente se logró afianzar una familiarización con la herramienta para mediar la modelización y hacer de la matemática un área más experimental, dejando huella de un camino de aprendizaje haciendo y participando, el cual es no convencional o habitual en la enseñanza de las matemáticas. El uso del GeoGebra se llevó más allá de utilizarse solamente para realizar gráficas de apoyo en un curso a explotar las bondades que tiene como el dinamismo de los objetos geométricos para la comprensión desde la Geometría.

El diseño del OVA brinda grandes ventajas en la formación de los estudiantes porque permite una interacción constante adicional las secuencias didácticas trazan el camino que se desea seguir en la formación. Se presentaron limitaciones en la plataforma H5P LUMI, que es el formato utilizado por la universidad, ya que el almacenamiento de los datos de quienes participan no son guardados automáticamente, lo cual llevo a generar formularios en Google Forms para conservar la información, es favorable que permita incrustar otras páginas, pero se espera que con el avance en estas herramientas puedan almacenar por completo las participaciones.

Como se evidenció en los resultados del postest el diseño de actividades contribuye positivamente en el mejoramiento de los conceptos del Cálculo; aunque se aplicó en una población que ya había realizado el curso es recomendable que la secuencia didáctica haga parte de las actividades de cálculo diferencial.

Conclusiones y recomendaciones

Durante el proceso investigativo las actividades implementadas bajo secuencias de aprendizaje e integradas a un OVA, fueron propuestas para la enseñanza del concepto de derivada desde la experimentación física hasta el formalismo matemático. Las actividades planteadas como propuesta de investigación aplicada buscaron responder la pregunta de investigación ¿cómo promover una comprensión del concepto de la derivada en cursos de Cálculo diferencial en la modalidad virtual de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia?

Para dar una respuesta a dicho cuestionamiento, se planteó como objetivo el diseñar una propuesta didáctica para la educación virtual y distancia, que promueva el concepto de la derivada. La propuesta encierra los mundos de las Matemáticas, tecnologías digitales y la Física, materializada en un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) el cual facilitó la mediación entre los estudiantes y el tutor, debido a las bondades que ofrece para trabajar en línea o incluso offline. En la estructura del OVA las actividades se enmarcan en la modelización de fenómenos físicos guiados bajo el modelo Cuvima, debido a que este proceso matemático permitió darle sentido y significado a la derivada dentro del contexto de la Física. El estudio de los objetos matemáticos y en este caso de la derivada a través de una aplicación o fenómenos físico, es didácticamente adecuado, puesto que enmarca al objeto matemático dentro de la realidad.

Se pudo evidenciar en los resultados que la propuesta aplicada llevó a gran parte de la muestra de estudiantes a comprender la derivada más desde un punto de vista geométrico, como complemento a la mecanización algebraica que es tradicional en los cursos de Cálculo. Para ello la propuesta se compone de presentarse mediante un OVA para promover el aprendizaje autónomo y de manera virtual y a distancia, brindando una flexibilidad al estudiante puesto que trabajaban en la actividad en sus tiempos, herramientas audiovisuales para la comprensión conceptual, experimentación de situaciones para la modelización matemática, y la reflexión mediante la evaluación.

Es importante mencionar que las actividades, deben enmarcarse en una didáctica para guiar al estudiante a la construcción de los conceptos, por lo que, la propuesta contempla en sus actividades elementos didácticos, tales como: partir de problemas en contexto, hacer uso de representaciones, ofrecer una ruta didáctica de manera dosificada hasta llegar a lo formal. En las actividades la tecnología digital jugó un papel importante en la modelización de un fenómeno físico para la obtención de datos experimentales que permitieron luego estudiar la derivada y la interacción dinámica de los objetos geométricos, tal y como se apreció en los resultados del desarrollo de la actividad mediada con un software de Geometría Dinámica. La comprensión conceptual de la derivada debe manifestarse en varios de los pensamientos matemáticos, tales como, aritmético, algebraico, variacional y geométrico

La propuesta puede ampliarse a investigaciones futuras, replicándose para otros conceptos matemáticos, manteniendo los siguientes elementos:

1. Utilizar entornos tecnológicos, tales como, OVA’s o plataformas virtuales, que contengan elementos audiovisuales, que permitan plasmar una secuencia didáctica para la construcción e interiorización de los conceptos. El uso de software que permitan la modelización matemática y manipulación de objetos geométricos de manera dinámica.
2. Plantear actividades que contengan elementos didácticos como: partir de un problema en contexto, problemas dosificados que guíen paso a paso al estudiante a la construcción conceptual, uso de diversas representaciones o registros de representación semiótica, de modo que no recaiga el concepto sobre la parte operativa y se busque un equilibrio entre los pensamientos aritmético, algebraico, variacional y geométrico.

Referencias Bibliográficas

Aebli, H. (1995). Elaborar un curso de acción; Construir una operación; Formar un concepto. En H. Aebli, *12 formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología.* 2, pp. 159-233.

Aguilar Quiroz, Gonzalo (2001). *Un resultado de Leonhard Euler relativo a series infinitas*. Miscelánea Matemática No.33, editada por la Sociedad Matemática Mexicana, México.

Alanís, J. y Soto, E. (2011). La integral de funciones de una variable: enseñanza actual. *El Cálculo y su Enseñanza*, 3(1), pp. 1-12. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/135/84

Álvarez, R. (2009). *El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros.* https://euler.us.es/~libros/calculo.html

Andreu, M., y Riestra, J. (2007). Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 12*, 165-187

Aparicio, E., Jarero, M., y Avila, E. (2007). La reprobación y el rezago en el Cálculo. Un estudio sobre factores institucionales. *Premisa. Revisa de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 9*(35), 3-12.

Apóstol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (Segunda ed., Vol. I). Reverté

Bachelard, G. (1938/2000). *La formación del espíritu científico*. 13 ed. México: Siglo XXI editores.

Barajas, C., Parada, S.E. y Molina, J.G. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Revista educación Matemática*, 30 (3), 297-323. DOI:

10.24844/EM3003.12
https://www.researchgate.net/publication/329601988_Analisis_de_dificultades_surgidas_al_resolver_problemas_de_variacion

Botello, I. y Parada S.E. (2015). Programa de atención a estudiantes en riesgo académico en las asignaturas de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS). *Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 1 (1), 386-391. http://funes.uniandes.edu.co/8584/1/Botello2015Programa.pdf

Bucheli, M. G. V., Villanueva, R. S. L., y Robelo, O. G. (2018). Objetos virtuales de aprendizaje en la educación superior. *Eikasia: revista de filosofía*, 79, 209. https://www.researchgate.net/publication/329881862_Objetos_Virtuales_de_Aprendizaje_en_Educacion_Superior

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Rev. Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&nrm=iso

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3), 265-292. https://www.redalyc.org/pdf/335/33503302.pdf

Carcaño, E. (2021). Herramientas digitales para el desarrollo de aprendizajes. *Revista Vinculando*, 1-12. https://vinculando.org/wp-content/uploads/kalins-pdf/singles/herramientas-digitales-para-el-desarrollo-de-aprendizajes.pdf

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica. https://www.fapyd.unr.edu.ar/wp-content/uploads/2017/08/Curso-Introductorio_Escribir-leer-y-aprender-en-la-universidad-Paula-Carlino.pdf

Castañeda R. (2016). *Formulación de una estrategia para la enseñanza del concepto de la derivada a partir de los conocimientos previos de estudiantes de primer semestre de ingeniería*. Universidad Pedagógica Nacional Facultad de Educación. https://repository.ucatolica.edu.co/server/api/core/bitstreams/061847d6-6e56-4770-bb63-27b2f89f6306/content

Confrey, J., y Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 57-68). Springer.

Crespo C., Leston P. (2017). El uso de libros de matemática en la formación docente. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (30) 1245-1256. http://funes.uniandes.edu.co/12351/1/Crespo2017El.pdf

Cuevas, C., y Madrid, H. (2013). Software educativo y el cálculo de raíces rales para el desarrollo de un curso conceptual del Cálculo: una historia sin fin. En C. Cuevas, & F. Pluvinage, *La enseñanza del Cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa* (págs. 1-17). México D.F.: Pearson.

Cuevas, C., y Martínez, M. (2013). Un modelo para la construcción de entornos didácticos educativos para la enseñanza de las matemáticas. En C. Cuevas, y F. Pluvinage, *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* 18, 159-174.

Cuevas, C., y Moreno, S. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática. Redalyc*, 16(2), 93-104. https://www.redalyc.org/pdf/405/40516205.pdf

Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 273-292.

Cuevas, C., y Pluvinage , F. (2009). Cálculo y Tecnología. (J. Riestra, y C. Cuevas, Edits.) *El Cálculo y su Enseñanza*, 1, 45-59.

Cuevas A., Rodriguez A., González O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México. http://funes.uniandes.edu.co/14906/1/Cuevas2014Introduccion.pdf

Cuevas C.A., Villamizar, F.Y., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 129-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2091

Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. En (J. Riestra, y C. Cuevas, Ed.). *El Cálculo y su Enseñanza*, 1, 91-91.

Díaz, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas Didácticas? *Revista de currículum y formación del profesorado*. 1(3),19-20. Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación. UNAM. México. https://www.ugr.es/~recfpro/rev173ART1.pdf

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman en los estudiantes del bachillerato en sus cursos del Cálculo diferencial. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II* 257-272

Dorier, L. (2013). Matemáticas en su relación con otras disciplinas. Algunos ejemplos relacionados con al Economía y la Física. En C. Cuevas, y F. Pluvinage. *La enseñanza del Cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa* 18. 175-193.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En *Advanced mathematical thinking* 11. 25-41

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en matemática educativa II*. México: Iberoamerica.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of Galculus*. SpringerVerlag.

Engler, A. (2006). La integral definida y el cálculo de áreas de regiones planas: un recurso en la web. *En Martínez, Gustavo (Ed.),* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 899-905). http://funes.uniandes.edu.co/5785/1/EnglerLaintegralAlme2006.pdf

Feynman, R. (1964/2008). *La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Barcelona: Tusquets editores.

Garbin, S. (2015). *Investigar en pensamiento en pensamiento matemático avanzado* Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación. 138 – 153. http://funes.uniandes.edu.co/8361/1/Cap%C3%ADtulo_10_Investigar_en_PMA_SG.pdf

González, O, (2016). *La derivada un enfoque variacional bajo un marco didáctico mediado con la tecnología digital (Tesis de doctorado)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). México

González, P. (1992). *Orígenes y evolución histórica del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change:The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, *56*(4), 195-206. https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1118ycontext=pitzer_fac_pub

Granja, M., Ramírez, B., Garcés, A., Villalobos, O., Zapata, I., Hernández, M. y Martínez, T. (2022). Factores asociados al índice de reprobación de asignaturas de ciencias básicas del ITSLP. *Ciencia Latina. Revista Multidisciplinar*, 6 (1), pp. 1781, 1809. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i1.1610 p1809

Granville, W. (2017). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Limusa.

Hitt, F. y Dufour, S. (2013). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. En C. Cuevas, y F. Pluvinage. *La enseñanza del Cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en Matemática Educativa* 18. 175-193.

Ímaz, J. C., y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Distrito Federal. Trillas.

Ímaz, J., y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. (J. Riestra, y L. Moreno, Edits.) *El Cálculo y su Enseñanza*, *1*, 99-112. http://funes.uniandes.edu.co/14915/1/Imaz2009Sobre.pdf

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo con Geometría Analítica (8ª ed.).* McGraw-Hill. http://www.cobaehtolcayuca.com/LECTURAS/Calculo%20Larsson%208%20edicion.pdf

León, M. (2021). Los calculadores de Merton. *Matemáticas y sus fronteras*. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2021/01/21/148697

Ley 30 de 1992 *por el cual se organiza el servicio público de la Educación Superior*. Diciembre 28 de 1992. D.O. No. 40.700.

Ley 52 de 1981 *por la cual se crea la Unidad Universitaria del Sur de Bogotá y se dictan otras disposiciones*. Julio 27 de 1981. D.O. No 35807.

Ley 396 de 1997 *Por la cual se transforma la Unidad Universitaria del Sur de Bogotá, en Universidad Nacional Abierta y a Distancia - UNAD - y se dictan otras disposiciones*. 14 de agosto de 1997 D.O. No. 43.107.

McDermott, L.C. (1991). What we teach and what is learned. *American Journal of Physics*, 59 (4), 301-315. doi: 10.1119/1.16539.

MacMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa (5ª ed.).* Pearson Educación, S.A. https://des-for.infd.edu.ar/sitio/upload/McMillan_J._H.__Schumacher_S._2005._Investigacion_educativa_5_ed..pdf

MEN (2011). *Recursos Educativos Digitales*. Corporación Red Nacional Académica de Tecnología Avanzada. Ministerios de Educación Nacional.

Moreno, L. (2014). *Educación matemática: del signo al pixel.* Universidad Industrial de Santander

Muñoz, M.C. Román, N. (1999). *Origen y desarrollo histórico del Cálculo Infinitesimal* Universidad Politécnica de Catalunya. https://web.mat.upc.edu/narciso.roman/docs/histci.pdf

Ortiz, E., Vergel, M. y Villamizar, F. Y. (2020). Experiencia didáctica para la introducción de la función cuadrática en nivel secundaria a parir de la modelización de un fenómeno físico con las tecnologías digitales. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 15, 21-33. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/58

Orton, A. (1983). “Students` Understanding of Differentiation”. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250

Penagos, M., Mariño, L. y Hernández, V. (2017) Pensamiento matemático elemental y avanzado como actividad humana en permanente evolución. *Revista Perspectivas*, 2(1), 105–116. https://revistas.ufps.edu.co/index.php/perspectivas/article/view/1289/1634

Pozo, J. (2007). Ni cambio ni conceptual: la reconstrucción del conocimiento científico como un cambio representacional. En Pozo, J. y F. Flores (eds.). Cambio conceptual y representacional en la enseñanza de la ciencia (pp. 73-89). Madrid: A. Machado libros y cátedra UNESCO de educación científica para América Latina y el Caribe

Purcell, E., Varberg, D., y Rigdon, S. (2007). *Cálculo* (Novena ed.). Pearson

Ramírez, H. (2012). *Tipología de errores presentados por estudiantes de primer curso de matemáticas universitarias (análisis epistemológico, didáctico y semiótico) (Tesis de maestría).* Universidad de los Andes. Centro de investigación y formación en educación.

https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/11851/u627421.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Reinoso, M. (2009). El análisis matemático aplicado al cálculo de la muestra. *Revista Ciencia UNEMI*. (2) 40-45 https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5210292.pdf

Roh, K. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). Springer

Semadeni, Z. (2003). The triple nature of mathematics: deep ideas, surface representations, formal models. *Lectura Regular en Proceedings of the 10th. International Congress on Mathematical Education (ICME-10).* https://www.researchgate.net/profile/Zbigniew-Semadeni/publication/228925441_The_triple_nature_of_mathematics_deep_ideas_surface_representations_formal_models/links/02e7e525ad32792b8f000000/The-triple-nature-of-mathematics-deep-ideas-surface-representations-formal-models.pdf

Sierpinska, A. (1996). *Understanding in Mathematics.* Routledge Publishing, Taylor y Francis.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching 77*, 20-26

Spivak, M. (2014). *Calculus* (3ª y 4ª ed.). Editorial Reverté. https://www.academia.edu/40143259/Calculus_3_Ed_M_Spivak_es_

Steward, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas (7ma ed.)*. Cengage Learning. http://colegioparroquialsanluisgonzaga.edu.co/wp-content/uploads/2018/04/Calculo-Una-variable-Stewart-7ed-1.pdf

Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al cálculo. En C. Cuevas, F. Pluvinage, y et all, *La enseñanza del cálculo diferencial e integral*. *Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 127-158). Pearson.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Tellechea, E. (2003) El Cálculo según Euler. Revista *Apuntes de Historia de las Matemáticas*. (1). 2. http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-3-euler.pdf

Tobón, T. S., Pimienta, P. J. y García, F. J. A. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson-Prentice Hall https://www.researchgate.net/publication/287206904_Secuencias_didacticas_aprendizaje_y_evaluacion_de_competencias

Tovar G. , I. C. . (2014). Los objetos virtuales de aprendizaje y su impacto en la calidad del proceso de enseñanza en la educación virtual. *Revista Eduweb*, 8(1), 113–126. https://revistaeduweb.org/index.php/eduweb/article/view/136

UNAD (2017). *Documento maestro licenciatura en Matemáticas, renovación de registro calificado*. Universidad Nacional Abierta y a Distancia.

Villamizar, F. (2018). *Modelo metodológico para promover conceptos físicos y matemáticos: hacia la orquestación de actividades didácticas con tecnologías digitales (Tesis de doctorado)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. https://www.researchgate.net/publication/363565688_Modelo_metodologico_para_prom over_conceptos_fisicos_y_matematicos_hacia_la_orquestacion_de_actividades_didacticas_con_tecnologias_digitales#fullTextFileContent

Villamizar, F.Y., Espinosa-Castro, J., F., Martínez, A. y Benavides-Parra, J.C. (2021). Oresme y Galileo, la huella indeleble de los primeros gigantes: una experiencia para la educación matemática y la física. En Hernández, Y., Contreras, Y., Aguilar, A., Barrrera, L., y M. Flórez (Eds.), pp. 87-106. *Educación Prácticas Pedagógicas Alternativas*. Ediciones Universidad Simón Bolívar. https://bonga.unisimon.edu.co/handle/20.500.12442/7981

Villamizar, F., Y., Martínez, A., Cuevas, C. y Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series,* 1415, p.p. 1–6. *DOI*:10.1088/1742-6596/1514/1/012003

Villamizar, F. Y., Rincón, O. y Vergel, M. (2017). Diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización en software de geometría dinámica. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología*, 10(2), 67-75. http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v10i2.571

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secundaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 15*, 173-199

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y Su enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 2, 111-144. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/149

Waldegg, G. (1982). *Historia del Cálculo*. México: Sección de Matemática Educativa y de Estudios Avanzados del IPN.

Zabala, V. A. (2008). *La práctica educativa. Cómo enseñar. México*: Grao. https://des-for.infd.edu.ar/sitio/profesorado-de-educacion-inicial/upload/zavala-vidiella-antoni.pdf

Apéndices

Apéndice A: Pretest

Se presentan preguntas que buscan reconocer los conceptos previos de acuerdo con los pensamientos matemáticos en estudiantes que ingresan al curso de Cálculo. El objetivo es obtener una medida del conocimiento una vez realizado el curso de Calculo Diferencial solo se pretende determinar los prerrequisitos matemáticos y el nivel de pensamiento matemático en estudiantes que actualmente se encuentran en Cálculo Integral.

1 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

a. 1.6899 b. 3.5001 c. -8.989 d. 0.54601 e. No sé.

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es verdadera?

a. $3 \leq 3$ b. $-3 > -2$ c. $4 > 3$ d. $3 < 4$ e. No sé.

3. Calcular el intervalo de solución de la desigualdad $\frac{2x}{2} + \frac{2}{x} > \frac{6}{2}$

a. $(1,2)$ b. $x_1 = 1, x_2 = 2$ c. $(2, \infty)$ d. $(-\infty, \infty)$ e. No sé.

4. Desarrollar la siguiente fracción algebraica y simplificarla: $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

a. $\frac{1}{2n(n-1)}$ b 0 c $\frac{-1}{2}$ d $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$ e. No sé.

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene al despejar la ecuación?

$x = 1 + \frac{1}{y}$. Despejar $y\ en\ función\ de\ x$

a. $y = \frac{1}{x}$ b. y= $\frac{x+1}{x}$ c $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ d. $y = \frac{1}{x-1}$ e. No sé.

6. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumplen para la expresión $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ indica cuál de las siguientes propiedades se cumplen

a. $f(0) = 2$
b. $f(1) = 1$

c. $f(x) = \frac{1}{2-x}$

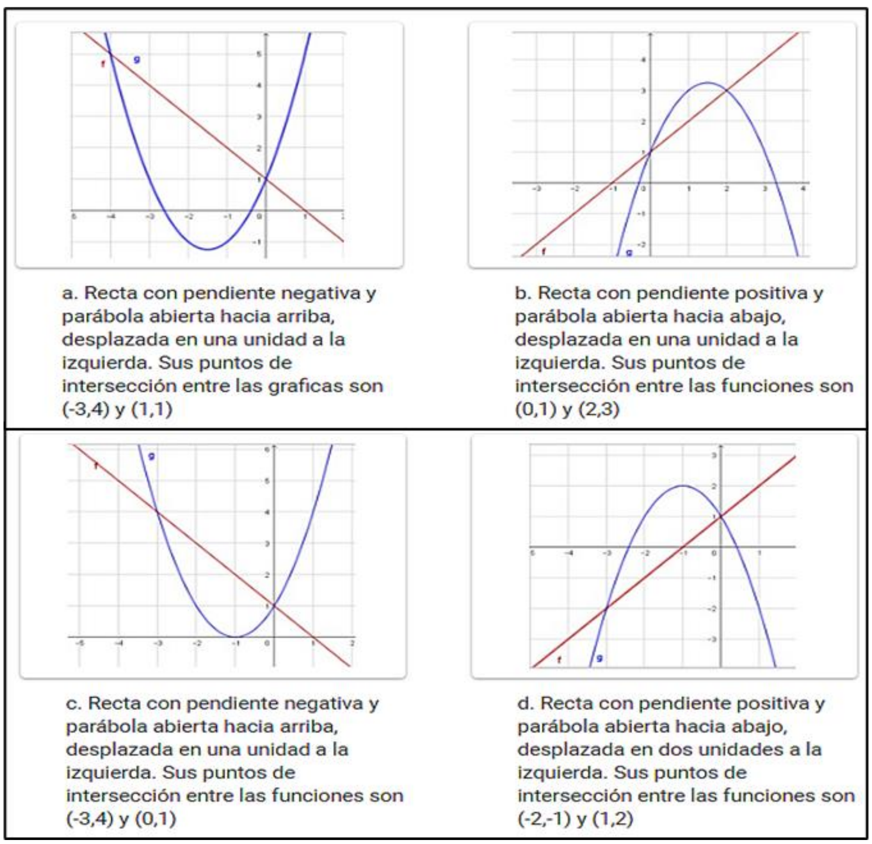
d. $f(x) = 2 - \frac{1}{f(x)}$

7. En las siguientes funciones

$y = -x + 1$ y $y = x^2 + 2x + 1$ encuentran en el mismo plano ¿Cuál es su gráfica y puntos de intersección?

Figura 48

Funciones gráficas y sus puntos



a. Recta con pendiente negativa y parábola abierta hacia arriba, desplazada en una unidad a la izquierda. Sus puntos de intersección entre las graficas son (-3,4) y (1,1)

b. Recta con pendiente positiva y parábola abierta hacia abajo, desplazada en una unidad a la izquierda. Sus puntos de intersección entre las funciones son (0,1) y (2,3)

c. Recta con pendiente negativa y parábola abierta hacia arriba, desplazada en una unidad a la izquierda. Sus puntos de intersección entre las funciones son (-3,4) y (0,1)

d. Recta con pendiente positiva y parábola abierta hacia abajo, desplazada en dos unidades a la izquierda. Sus puntos de intersección entre las funciones son (-2,-1) y (1,2)

8. Cómo define una función continua

9. ¿Toda función continua es derivable? Explica tu respuesta

Exprese mediante una ecuación los siguientes enunciados

10. Si $x = 2$ entonces hallar $\frac{x^2-2^2}{x-2}$

a. 0 b. ∞ c. 4 d. Indeterminado e. No se

11. Dada la función real $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

11.1. ¿Cuál es el dominio y el rango?

a. $Df(-\infty,\infty) - \{1\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{1\}$

b. $Df(-\infty,\infty) - \{x\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{x\}$

c. $Df(-\infty,\infty) - \{-1\}$; $Rf(-\infty,\infty) - \{-2\}$

d. $Df(-\infty,\infty)$; $Rf(-\infty,\infty)$

e. No se

12. Si $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ $A = \{1,3,5,7,9\}$ $B = \{2,4,6,8\}$ $C = \{1,2,0\}$

12.1 Resolver $A \cup B$

a. {1,2,3,4,5,6,7,8,9,0} b. {1,2,3,4,5,6,7,8,9} c. Ø d. $A \cap B$ e. No se

12.2 Resolver B^c $(Complemento\ de\ B)$

a. $\emptyset$ b. A c. B d. {2,4,6,8,0} e. No se

13. Considere la función $p(x) = x^3 - x$ ¿Cuáles son todas las raíces de la función?

a. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1$

b. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$

c. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1$

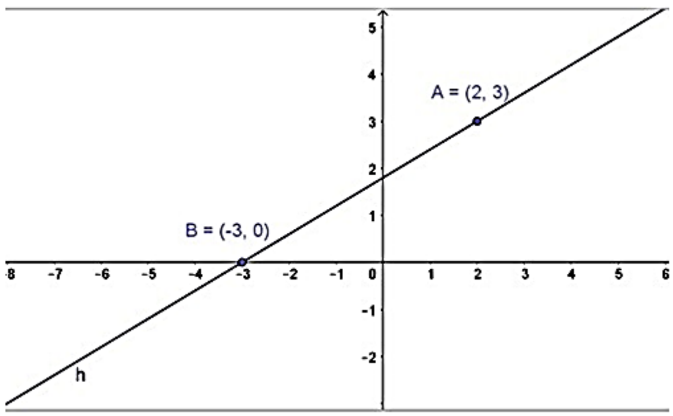
d. Raíces $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$

e. No se

14. Para recta que pasa por los puntos A y B como se indica en la figura ¿Cuál es el valor de la pendiente?

Figura 49

Recta que pasa por dos puntos



a. m = 1 b. m = 3/5 c. m = -3/5 d. m = 5/3 e. No sé

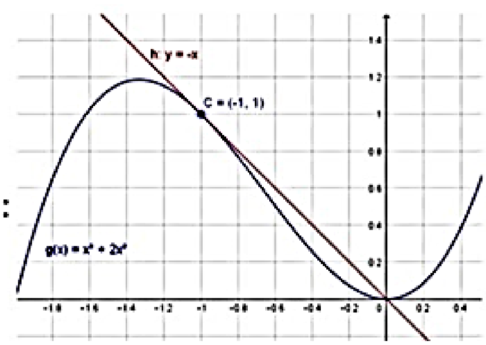
15. Para la función

Figura 50

Recta que toca un punto de la función

$$x^3 + 2x^2$$

en el punto C(-1,1) la recta $y = -x$ es :



a. Secante b. Tangente c. Perpendicular d. Oblicua e. No sé

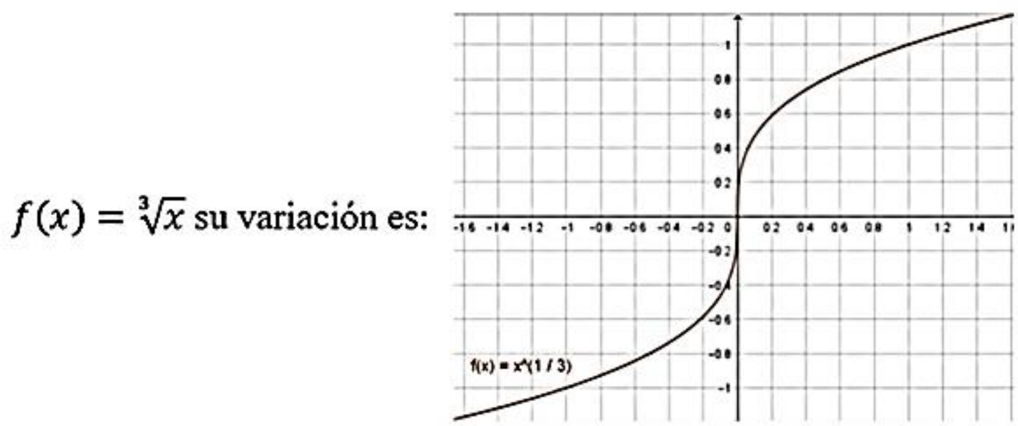
16. Para la función

a. creciente de (-∞, ∞) b. decreciente de (-∞ ,∞) c. creciente (-∞ ,0) decreciente (0, ∞) d. decreciente (-∞ ,0) creciente (0, ∞) e. No sé

17. De la función anterior f(x)= ∛x, de la variación en el punto x=0 podemos decir que

Figura 51

Gráfica de una función para determinar su variación



a. Está definida b. Es indeterminada c. Es infinita d. Su valor es 0 e. No sé

18. En un jardín de forma cuadrilátera, para encerrarlo se requiere cierta cantidad c de alambre, ¿Cómo debe ser el cuadrilátero para que encierre su área máxima?

a. Cuadrado b. Rectángulo c. Rombo d. Trapecio e. No sé

19. Dos números enteros suman 100. ¿Cuáles son dichos números para que su producto sea máximo? (escribe los números separados por una coma sin espacios ejemplo 90,10)

20. Para el límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

a. 0 b. 1 c. 4 d. Indeterminado e. No se

21. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = -2x$?

a.-2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinita e. No sé

22. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = |-2x|$?

a. -2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinita e. Intervalo Es - 2 para (-infinito,0) y 2 para (0, infinito) f. No sé

23. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = x^2 - 4 \; en \; x = -2$$

a. 0 b. 4 c. -4 d. Indeterminada e. No sé

24. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = |x^2 - 4| \, en \; x = -2$$

a. 0 b. 4 c. -4 d. Indeterminada e. No sé

25. ¿Qué es una derivada? Defínalo con sus propias palabras

26. ¿Qué significa que la derivada de la función?

Apéndice B: Secuencias Didácticas

Configuración Actividad Caída Libre

La presente actividad tiene como objetivo reconocer el concepto de la derivada a través del fenómeno de la caída libre. La actividad se puede realizar en grupos de tres (3) estudiantes.

Materiales

Balón o pelota de un tamaño mediano o grande, una cinta métrica, cinta de papel, un celular smartphone, programa Tracker Physics, programa Geogebra.

Para desarrollar la actividad es importante que se cuente con un espacio amplio.

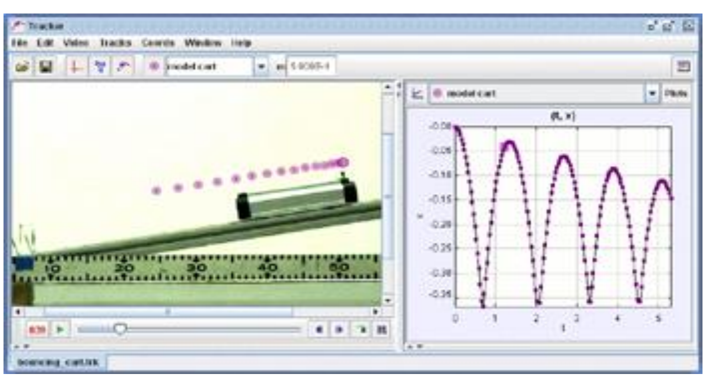
Preparación inicial

Descargar programa Tracker Physics

El programa Tracker Physics es un programa gratuito (freeware) que permite el análisis de videos, desde la toma de datos experimentales (tiempo, posiciones en *x* y *y*, velocidad entre otros), y a partir de ello realizar la construcción de un modelo que aproxima una función matemática.

Figura 52

Programa Tracker Physics



Nota: Uso de Tracker Physics tomado de [*https://physlets.org/Tracker Physics/*](https://physlets.org/Tracker Physics/)

La descarga se realiza en la siguiente página https://physlets.org/Tracker Physics/ versión Windows o Mac dependiendo de la configuración de su computador.

Figura 53

Descarga Tracker Physics

Nota: carga de Tracker Physics tomado de https://physlets.org/Tracker Physics/

El siguiente link: https://youtu.be/QeCwQyXa_A8 permite visualizar un video instructivo básico. Descarga de programa Geogebra versión 5.0 (Recomendada)

Figura 54

GeoGebra

Nota: GeoGebra tomado de https://www.geogebra.org/

El Geogebra es un software de geometría dinámica (freeware) que reúne la geometría, el álgebra, gráficas, hojas de cálculo, elementos asociados a la estadística y el cálculo todo en un solo lugar.

La descarga se realiza en la siguiente página https://www.geogebra.org/download?lang=es versión Geogebra Clásico 5

El siguiente video permite visualizar un instructivo básico para la instalación y manejo.

Figura 55

Configuración para grabar video con celular

Configuramos la cámara del smartphone para video dando click en ajustes resolución (16:9) 1080p a 60 fotogramas por segundo fps. Se recomienda grabar el vídeo con la configuración anterior y evitar grabar en cámara lenta.

Desarrollo de actividad

Instrucciones para realizar el video desde el celular

Inicialmente escogemos un lugar amplio, en una pared tomamos medidas desde el suelo hasta una altura de 2 metros. Podemos marcar una guía cada 25 o 50 cm según conveniencia de acuerdo como se presenta en la figura 56

Figura 56

Preparación inicial de lanzamiento.

Una vez realizadas las medidas y la marcación, uno de los integrantes toma el balón o la pelota y desde la altura de 2 metros suelta el balón.

La pelota se suelta desde la altura propuesta sin aplicar fuerza adicional ver video. Se recomienda mantener la cámara firme o usar un triploide a una distancia proporcional, es decir. que se pueda captar todo el movimiento

Recomendaciones: No usar fuerzas externas, grabar el vídeo completo, revisar con precisión las medidas o marcaciones correctas. En la pared se sugiere utilizar la cinta de papel para evitar daños, el lugar debe contar con buena iluminación y la ubicación de la cámara debe ser en frente y paralela al movimiento.

Preguntas problematizadoras

¿Describe con tus palabras que sucede? Supongamos que eres un científico ¿Cómo explicarías el movimiento?

¿Qué puede concluir una vez termina el movimiento?

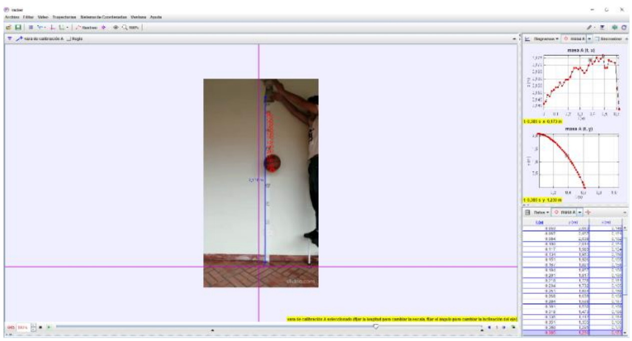
¿Cómo cree que puede relacionarse la matemática con este experimento?

¿Dentro del movimiento notas alguna razón cambio?

Secuencia de análisis de video en Tracker Physics
Previamente hemos instalado en el computador nuestro programa de análisis de video Tracker Physics. A continuación, da click en el enlace del video explicativo.

Figura 57

Uso de Tracker Physics.

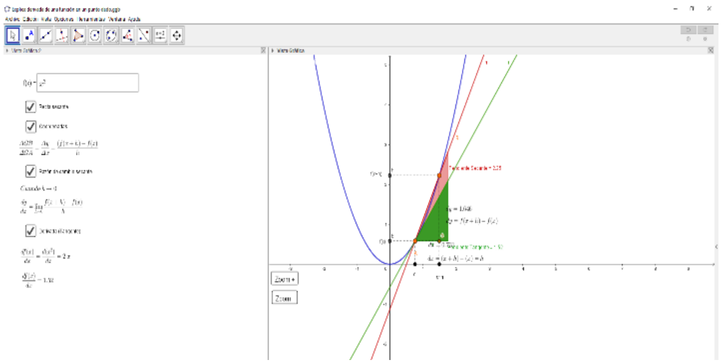


Observa el análisis de video del movimiento caída libre y replica lo mismo con el video que grabó anteriormente. Captura una imagen de la representación gráfica de la posición en ***y*** vs el tiempo.

Recordando conceptos de pendiente
Para realizar el análisis del fenómeno físico tenemos como objetivo obtener una función y después determinar cuál es la variación que éste presenta. Puede recordar los conceptos en cada uno de los enlaces de pendiente de la recta, recta tangente, límite y derivada que se encuentran en los vídeos.

Figura 58

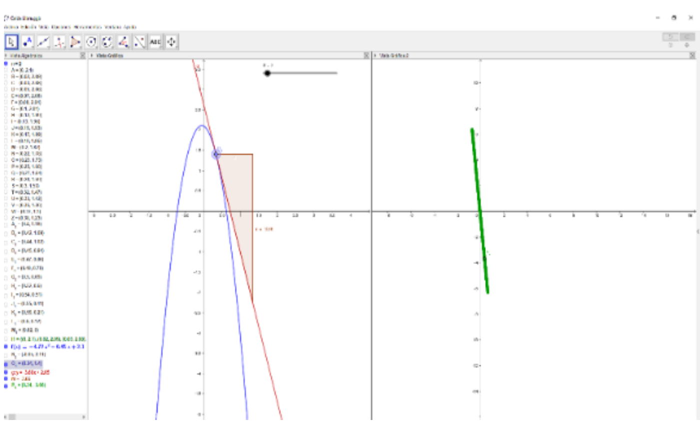
Concepto de derivada. Contreras y Villamizar (2022)



Para lograr el objetivo propuesto se presentan los siguientes videos donde se detallan el desarrollo de la actividad, iniciando por un ejemplo para la creación de una función polinómica y en segundo lugar se dan pautas claras y explicativas en búsqueda de la apropiación del concepto de razón de cambio y derivada.

Figura 59

Razón de cambio caída libre.



Secuencia didáctica para el concepto de derivada
1. Mueve de izquierda a derecha el punto de la recta tangente (vista gráfica 1) y describe que pasa con el punto que ubicamos en la vista gráfica 2 Aumenta. Disminuye. Se mantiene igual

2. ¿Las gráficas que se visualizan son iguales? Descríbelas
3. Tomando dos puntos de la gráfica que se encuentran en la vista 2, es posible hallar la pendiente y la ecuación. SI____ NO ____
4. Haciendo uso de la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el valor de la pendiente es: ___
5. Haciendo uso de la ecuación $y = mx + b$ cuál es la ecuación de la recta: __________
6. Que representa el valor de la pendiente

   Posición Velocidad Aceleración
7. Tomando la ecuación cuadrática que muestra el GeoGebra halle la derivada de esta haciendo uso de las técnicas de derivación. El resultado es: ____________________
8. Comparé el resultado obtenido en la pregunta 7.4. con la derivada encontrada en la 7.6. ¿Cómo es el resultado?

   Similar Diferente

Conclusiones
En forma breve realizaremos la conclusión de la presente actividad teniendo en cuenta lo siguiente: Describa como es la variación de la posición con respecto al tiempo Describa con sus palabras como es la representación de la velocidad ¿Qué relación tiene el resultado de la derivada con respecto a la pendiente de la recta?

Configuración actividad vehículo en movimiento rectilíneo

La presente actividad tiene como objetivo reconocer el concepto de la derivada a través del fenómeno de movimiento rectilíneo. La actividad se puede realizar en grupos de tres (3) estudiantes.

Materiales

Un carro de cuerda o impulso, una cinta métrica, cinta de papel, marcadores, un celular smartphone, programa Tracker Physics, programa GeoGebra.

Para desarrollar la actividad es importante que se cuente con un espacio amplio.

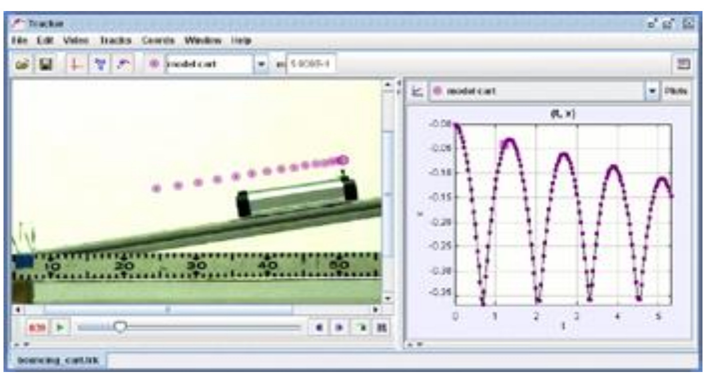
Preparación inicial

Descargar programa Tracker Physics

El programa Tracker Physics es un programa gratuito (freeware) que permite el análisis de videos, desde la toma de datos experimentales (tiempo, posiciones en *x* y *y*, velocidad entre otros), y a partir de ello realizar la construcción de un modelo que aproxima una función matemática.

Figura 60

Programa Tracker Physics



Nota: Uso de Tracker Physics tomado de https://physlets.org/Tracker Physics/

La descarga se realiza en la siguiente página https://physlets.org/Tracker Physics/ versión Windows o Mac dependiendo de la configuración de su computador.

Figura 61

Descarga Tracker Physics

Nota: carga de Tracker Physics tomado de https://physlets.org/Tracker Physics/

El siguiente link: https://youtu.be/QeCwQyXa_A8 permite visualizar un video instructivo básico. Descarga de programa GeoGebra versión 5.0 (Recomendada)

Figura 62

GeoGebra

Nota: GeoGebra tomado de https://www.geogebra.org/

El GeoGebra es un software de geometría dinámica (freeware) que reúne la geometría, el álgebra, gráficas, hojas de cálculo, elementos asociados a la estadística y el cálculo todo en un solo lugar.

La descarga se realiza en la siguiente página https://www.geogebra.org/download?lang=es versión Geogebra Clásico 5

El siguiente video permite visualizar un instructivo básico para la instalación y manejo.

Figura 63

Configuración para grabar video con celular

Configuramos la cámara del smartphone para video dando click en ajustes resolución (16:9) 1080p a 60 fotogramas por segundo fps. Se recomienda grabar el vídeo con la configuración anterior y evitar grabar en cámara lenta.

Desarrollo de actividad

Inicialmente escogemos un lugar amplio puede ubicarse en una mesa o en el suelo pero que sea superficie lisa, se marca una guía cada 50 cm. Ver imagen 1

Una vez realizadas las medidas y la marcación, uno de los integrantes suelta el vehículo de impulso

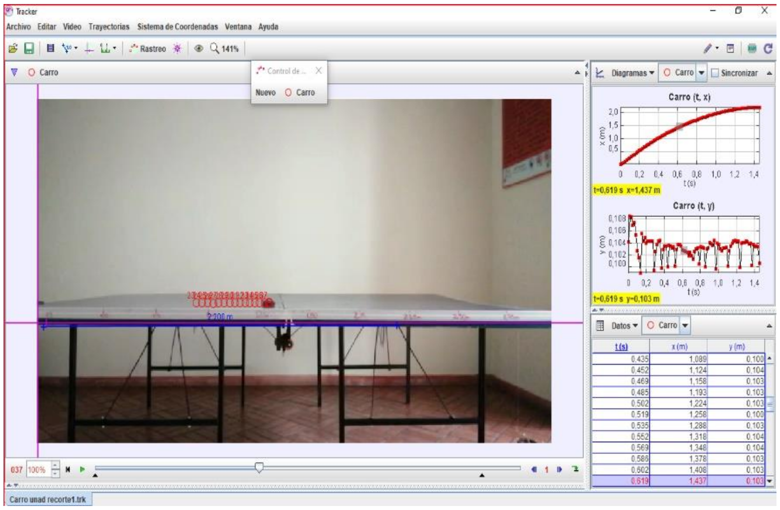
Figura 64

Representación del movimiento

El vehículo se suelta desde la superficie propuesta la misma puede variar el lugar, pero lo importante es que sea plana y tomar las medidas ver video explicativo. Se recomienda mantener la cámara firme a una distancia proporcional es decir que se pueda captar todo el movimiento. Recomendaciones: no usar fuerzas externas, grabar el vídeo completo, revisar con precisión las medidas o marcaciones correctas. En la pared se sugiere utilizar la cinta de papel para evitar daños, el lugar debe contar con buena iluminación y la ubicación de la cámara debe ser en frente y paralela al movimiento.
Preguntas problematizadas
¿describe con tus palabras que sucede? Supongamos que eres un científico ¿cómo explicarías el movimiento? ¿qué puede concluir una vez termina el movimiento? ¿cómo cree que puede relacionarse la matemática con este experimento? ¿dentro del movimiento notas alguna razón cambio?
Secuencia del Tracker Physics
Previamente hemos instalado en el computador nuestro programa de análisis de videos Tracker Physics Physics.

Figura 65

Uso de Tracker Physics



A continuación, da click en el enlace del video explicativo.

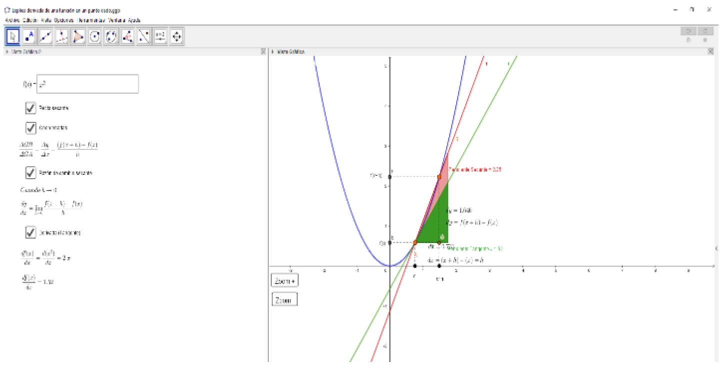
Observa el análisis de video del movimiento caída libre y replica lo mismo con el video que grabo anteriormente. Captura las representaciones gráficas de la posición en *x* vs el tiempo.

Secuencia de GeoGebra

Para realizar el análisis del fenómeno físico tenemos como objetivo obtener una función y después determinar cuál es la variación que éste presenta. Puede recordar los conceptos en cada uno de los enlaces de pendiente de la recta, recta tangente, límite y derivada que se encuentran en los vídeos.

Figura 66

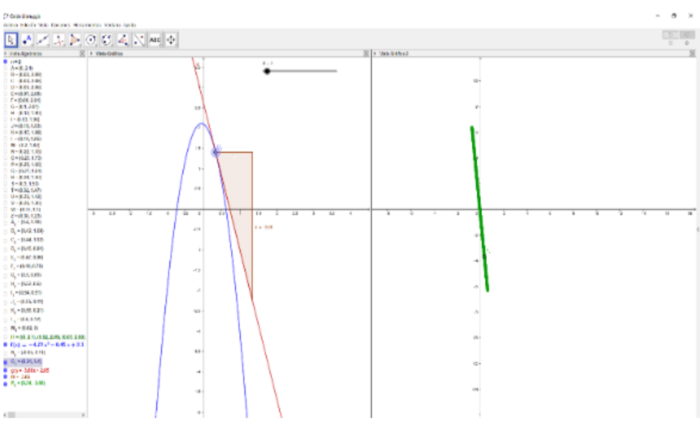
Concepto de derivada.



Para lograr el objetivo propuesto se presentan los siguientes videos donde se detallan el desarrollo de la actividad, iniciando por un ejemplo para la creación de una función polinómica y en segundo lugar se dan pautas claras y explicativas en búsqueda de la apropiación del concepto de razón de cambio y derivada.

Figura 67

Razón de cambio caída libre. Contreras y Villamizar (2022)



Secuencia didáctica para el concepto de derivada
¿las gráficas que se visualizan son iguales? Descríbelas Tomando dos puntos de la gráfica que se encuentran en la vista 2, es posible hallar la pendiente y la ecuación. Si____ no ____

Haciendo uso de la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el valor de la pendiente es: ___

Haciendo uso de la ecuación $y = mx + b$ cuál es la ecuación de la recta: __________

Que representa el valor de la pendiente

a. Posición b. Velocidad c. Aceleración

Tomando la ecuación cuadrática que muestra el GeoGebra halle la derivada de esta haciendo uso de las técnicas de derivación. El resultado es: ____________________

Comparé el resultado obtenido en la pregunta 7.4. Con la derivada encontrada en la 7.6.

¿cómo es el resultado? Similar diferente

Configuración actividad péndulo

La presente actividad tiene como objetivo reconocer el concepto de la derivada a través del fenómeno de la caída libre. La actividad se puede realizar en grupos de tres (3) estudiantes.

Materiales

balón o pelota de un tamaño mediano o grande, una cinta métrica, cinta de papel, nylon, un celular smartphone, Programa Tracker Physics, Programa GeoGebra.

Para desarrollar la actividad es importante que se cuente con un espacio amplio.

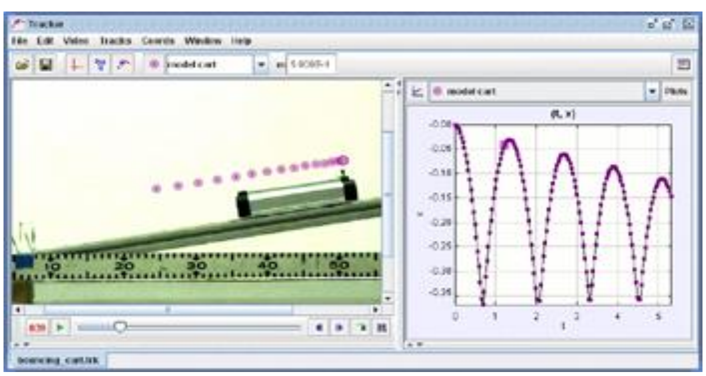
Preparación inicial

Descargar programa Tracker Physics

El programa Tracker Physics es un programa gratuito (freeware) que permite el análisis de videos, desde la toma de datos experimentales (tiempo, posiciones en *x* y *y*, velocidad entre otros), y a partir de ello realizar la construcción de un modelo que aproxima una función matemática.

Figura 68

Programa Tracker Physics



Nota: Uso de Tracker Physics tomado de [*https://physlets.org/Tracker Physics/*](https://physlets.org/Tracker Physics/)

La descarga se realiza en la siguiente página https://physlets.org/Tracker Physics/ versión Windows o Mac dependiendo de la configuración de su computador.

Figura 69

Descarga Tracker Physics

Nota: carga de Tracker Physics tomado de https://physlets.org/Tracker Physics/

El siguiente link: https://youtu.be/QeCwQyXa_A8 permite visualizar un video instructivo básico. Descarga de programa Geogebra versión 5.0 (Recomendada)

Figura 70

GeoGebra

Nota: GeoGebra tomado de https://www.geogebra.org/

El Geogebra es un software de geometría dinámica (freeware) que reúne la geometría, el álgebra, gráficas, hojas de cálculo, elementos asociados a la estadística y el cálculo todo en un solo lugar.

La descarga se realiza en la siguiente página https://www.geogebra.org/download?lang=es versión Geogebra Clásico 5

El siguiente video permite visualizar un instructivo básico para la instalación y manejo.

Figura 71

Configuración para grabar video con celular

Configuramos la cámara del smartphone para video dando click en ajustes resolución (16:9) 1080p a 60 fotogramas por segundo fps. Se recomienda grabar el vídeo con la configuración anterior y evitar grabar en cámara lenta.

Desarrollo de actividad

Instrucciones para realizar el video desde el celular

Inicialmente vamos a unir la pelota con el nylon y para asegurarla la pegamos con la cinta de papel. Antes de cortar se toma una medida de preferencia 1.20m hasta el otro extremo donde se amarra y lo deja descolgar.

Es importante tener en cuenta que el lugar que escoja para la actividad debe estar libre de obstáculos y paredes. Debe permitir que se realice una oscilación.

Figura 72

Preparación inicial de lanzamiento.

Una vez realizadas las medidas y la marcación, uno de los integrantes toma el balón o la pelota desde la altura más alta hacia la izquierda a y suelta el balón permitiendo que éste oscile La pelota se suelta desde la altura propuesta sin aplicar fuerza adicional ver video.

Se recomienda mantener la cámara firme o usar un triploide a una distancia proporcional es decir que se pueda captar todo el movimiento.

Recomendaciones: no usar fuerzas externas, grabar el vídeo completo, revisar con precisión las medidas o marcaciones correctas. El lugar debe contar con buena iluminación y la ubicación de la cámara debe ser en frente y paralela al movimiento.

Preguntas problematizadoras

¿describe con tus palabras que sucede? Supongamos que eres un científico ¿cómo explicarías el movimiento?

¿qué puede concluir una vez termina el movimiento?

¿cómo cree que puede relacionarse la matemática con este experimento?

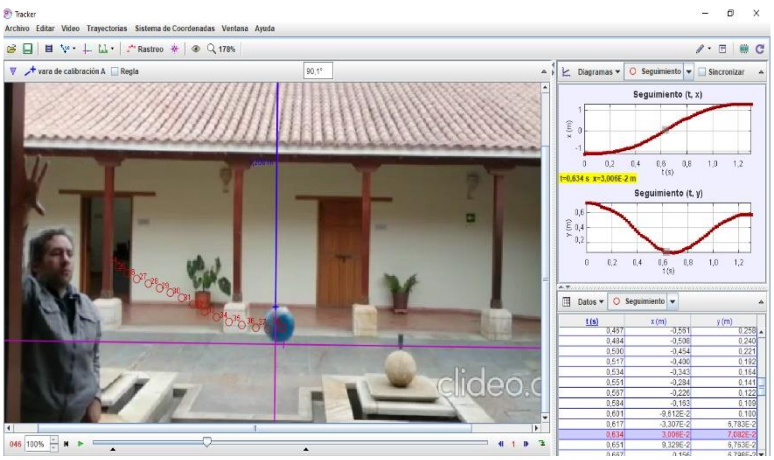
¿dentro del movimiento notas alguna razón cambio?

Secuencia de análisis de video en Tracker Physics

Previamente hemos instalado en el computador nuestro programa de análisis de video Tracker Physics physics.

Figura 73

Uso de Tracker Physics



A continuación, da click en el enlace del video explicativo

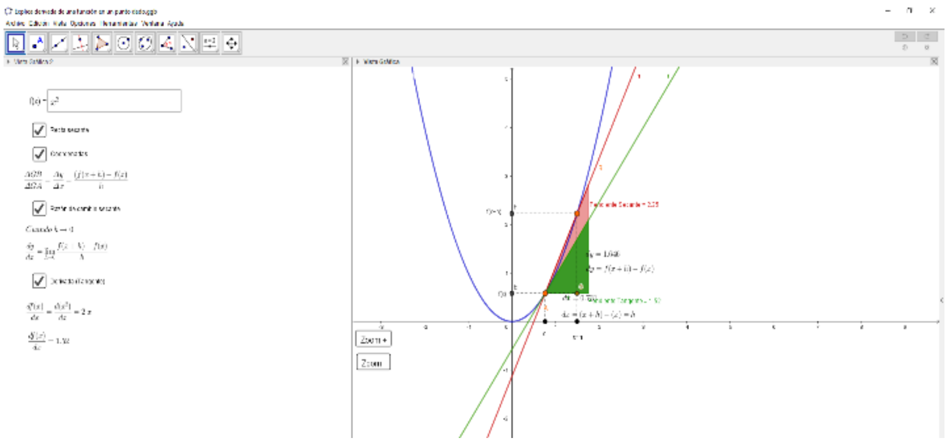
Observa el análisis de video del movimiento de péndulo y replica lo mismo con el video que grabó anteriormente. Captura una imagen de la representación gráfica de la posición en *x* vs el tiempo.

Composición de datos de movimiento en GeoGebra

Para realizar el análisis del fenómeno físico tenemos como objetivo obtener una función y después determinar cuál es la variación que éste presenta. Puede recordar los conceptos en cada uno de los enlaces de pendiente de la recta, recta tangente, límite y derivada que se encuentran en los vídeos.

Figura 74

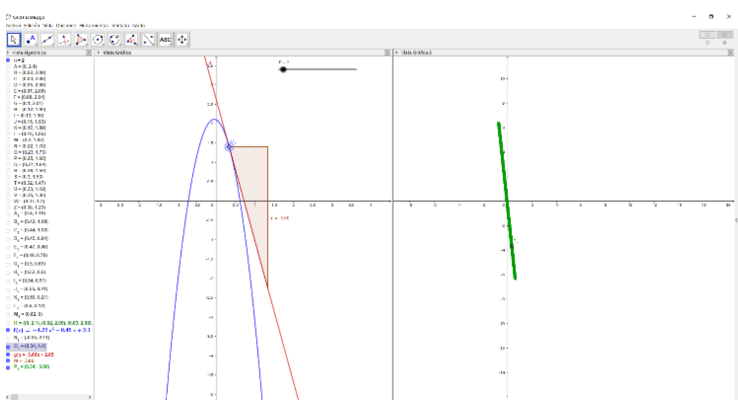
Concepto de derivada



Para lograr el objetivo propuesto se presentan los siguientes videos donde se detallan el desarrollo de la actividad, iniciando por un ejemplo para la creación de una función seno y en segundo lugar se dan pautas claras y explicativas en búsqueda de la apropiación del concepto de razón de cambio y derivada.

Figura 75

Razón de cambio



Secuencia didáctica para el concepto de derivada
Mueve de izquierda a derecha el punto de la recta tangente (vista gráfica 1) y describe que pasa con el punto que ubicamos en la vista gráfica 2

a. Aumenta. b. Disminuye. c. Se mantiene igual ¿Las gráficas que se visualizan son iguales? Descríbelas ¿Por qué considera que las gráficas son diferentes? ¿cómo puede encontrar la función de la nueva gráfica? Que representa el valor de la pendiente a. Posición b. Velocidad c. Aceleración Tomando la ecuación posición que muestra el GeoGebra halle la derivada de esta haciendo uso de las técnicas de derivación. El resultado es: ____________________ Para comprobar la derivada en GeoGebra en la entrada digite “derivada(f)” es de aclarar que la letra f hace referencia a la función. Comparé el resultado obtenido en geogebra con la derivada realizada por usted ¿cómo es el resultado? Similar b. Diferente
Conclusiones
En forma breve realizaremos la conclusión de la presente actividad teniendo en cuenta lo siguiente: Describa como es la variación de la posición con respecto al tiempo Describa con sus palabras como es la representación de la velocidad ¿qué relación tiene el resultado de la derivada con respecto a la pendiente de la recta?

Apéndice C Postest

Se presentan preguntas que buscan evaluar los conceptos adquiridos por los estudiantes una vez realizadas las actividades propuestas en el objeto virtual de aprendizaje.

1 ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

a. 1.6899 b. 3.5001 c. -8.989 d. 0.54601 e. No sé.

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es verdadera?

a. $3 \leq 3$ b. $-3 > -2$ c. $4 > 3$ d. $3 < 4$ e. No sé.

3. Calcular el intervalo de solución de la desigualdad $\frac{2x}{2} + \frac{2}{x} > \frac{6}{2}$

a. $(1,2)$ b. $x_1 = 1, x_2 = 2$ c. $(2, \infty)$ d. $(-\infty, \infty)$ e. No sé.

4. Desarrollar la siguiente fracción algebraica y simplificarla: $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

a. $\frac{1}{2n(n-1)}$ b 0 c $\frac{-1}{2}$ d $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$ e. No sé.

5. ¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene al despejar la ecuación?

$x = 1 + \frac{1}{y}$. Despejar $y\ en\ función\ de\ x$

a. $y = \frac{1}{x}$ b. y= $\frac{x+1}{x}$ c $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ d. $y = \frac{1}{x-1}$ e. No sé.

6. ¿Cuál de las siguientes propiedades se cumplen para la expresión $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ indica cuál de las siguientes propiedades se cumplen

e. $f(0) = 2$

f. $f(1) = 1$

g. $f(x) = \frac{1}{2-x}$

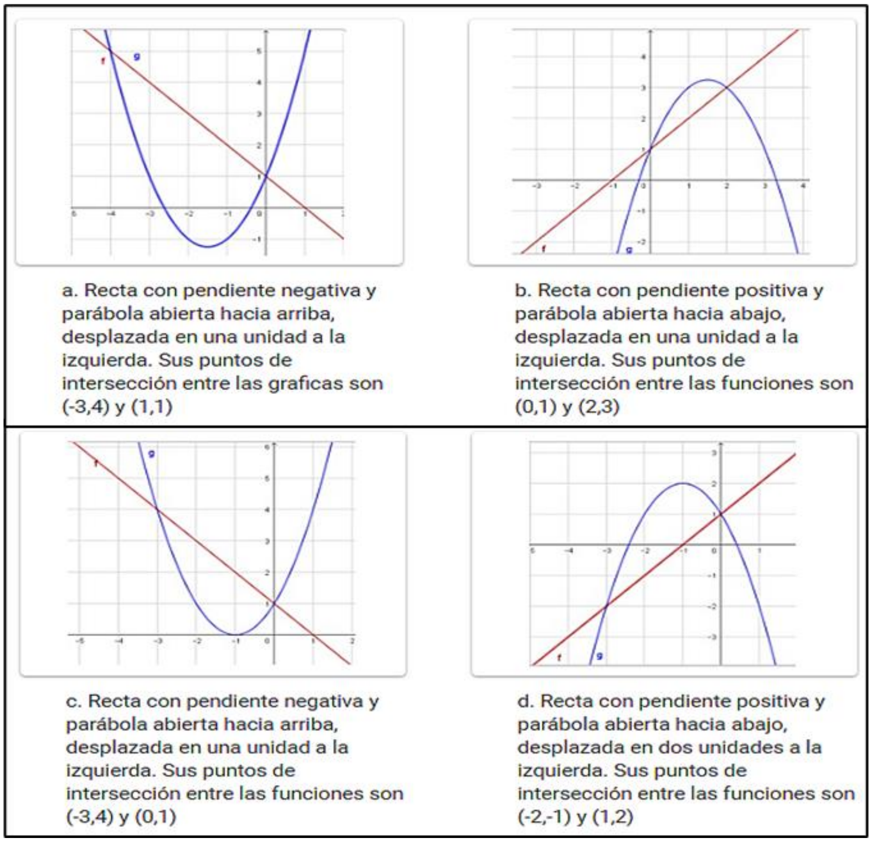
h. $f(x) = 2 - \frac{1}{f(x)}$

7. En las siguientes funciones

$y = -x + 1$ y $y = x^2 + 2x + 1$ encuentran en el mismo plano ¿Cuál es su gráfica y puntos de intersección?

Figura 76

Funciones gráficas y sus puntos



8. Cómo define una función continua

9. ¿Toda función continua es derivable? Explica tu respuesta

Exprese mediante una ecuación los siguientes enunciados

10. Si $x = 2$ entonces hallar $\frac{x^2-2^2}{x-2}$

a. 0 b. ∞ c. 4 d. Indeterminado e. No se

11. Dada la función real $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

11.1. ¿Cuál es el dominio y el rango?

f. $Df(-\infty,\infty)-\{1\}$; $Rf(-\infty,\infty)-\{1\}$

g. $Df(-\infty,\infty)-\{x\}$; $Rf(-\infty,\infty)-\{x\}$

h. $Df(-\infty,\infty)-\{-1\}$; $Rf(-\infty,\infty)-\{-2\}$

i. $Df(-\infty,\infty)$; $Rf(-\infty,\infty)$

j. No se

12. Si $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ $A=\{1,3,5,7,9\}$ $B=\{2,4,6,8\}$ $C=\{1,2,0\}$

12.1 Resolver $A\cup B$

a. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ b. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ c. Ø d. $A\cap B$ e. No se

12.2 Resolver B^c $(Complemento\ de\ B)$

a. $\emptyset$ b. A c. B d. $\{2,4,6,8,0\}$ e. No se

13. Considere la función $p(x)=\ x^3-x$ ¿Cuáles son todas las raíces de la función?

a. Raíces $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=1$

b. Raíces $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=1$

c. Raíces $x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=1$

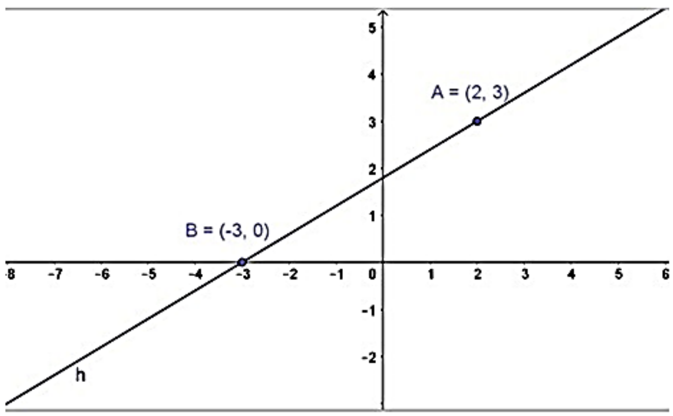
d. Raíces $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=0$

e. No se

14. Para recta que pasa por los puntos A y B como se indica en la figura ¿Cuál es el valor de la pendiente?

Figura 77

Recta que pasa por dos puntos



a. m = 1 b. m = 3/5 c. m = -3/5 d. m = 5/3 e. No sé

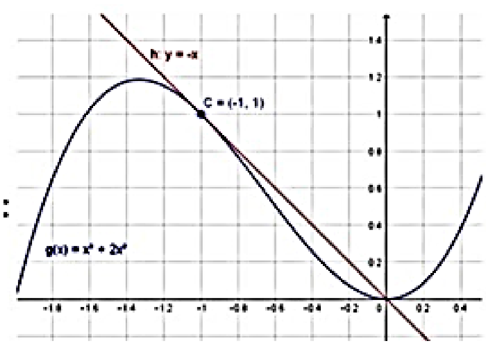
15. Para la función

Figura 78

Recta que toca un punto de la función

$$x^3 + 2x^2$$

en el punto C(-1,1) la recta $y = -x$ es :



a. Secante b. Tangente c. Perpendicular d. Oblicua e. No sé

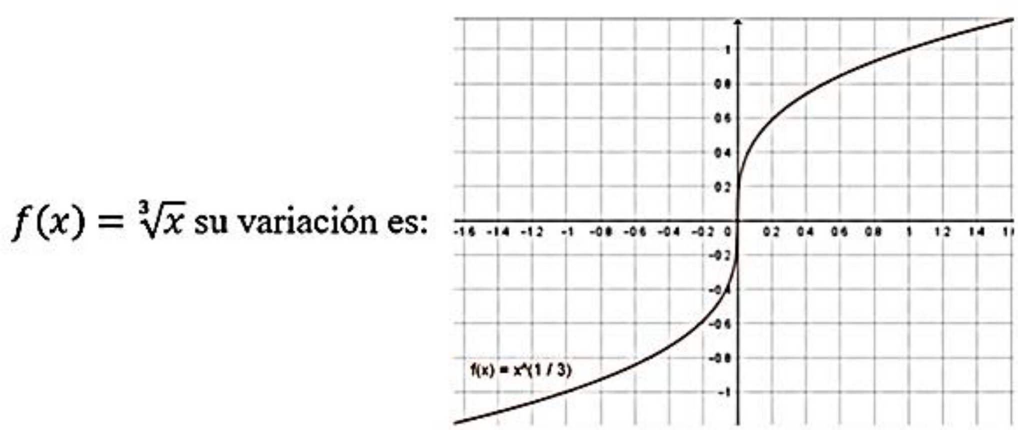
16. Para la función

a. creciente de (-∞, ∞) b. decreciente de (-∞ ,∞) c. creciente (-∞ ,0) decreciente (0, ∞) d. decreciente (-∞ ,0) creciente (0, ∞) e. No sé

17. De la función anterior f(x)= $\sqrt[3]{x}$, de la variación en el punto x=0 podemos decir que

Figura 79

Gráfica de una función para determinar su variación



b. Está definida b. Es indeterminada c. Es infinita d. Su valor es 0 e. No sé

18. En un jardín de forma cuadrilátera, para encerrarlo se requiere cierta cantidad c de alambre, ¿Cómo debe ser el cuadrilátero para que encierre su área máxima?

a. Cuadrado b. Rectángulo c. Rombo d. Trapecio e. No sé

19. Dos números enteros suman 100. ¿Cuáles son dichos números para que su producto sea máximo? (escribe los números separados por una coma sin espacios ejemplo 90,10)

20. Para el límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

a. 0 b. 1 c. 4 d. Indeterminado e. No se

21. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = -2x$?

a.-2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinita e. No sé

22. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = |-2x|$?

a. -2 b. 2 c. Indeterminada d. Infinita e. Intervalo Es - 2 para (-infinito,0) y 2 para (0, infinito) f. No sé

23. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = x^2 - 4 \; en \; x = -2$$

b. 0 b. 4 c. -4 d. Indeterminada e. No sé

24. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva?

$$f(x) = |x^2 - 4\,| en \; x = -2$$

b. 0 b. 4 c. -4 d. Indeterminada e. No sé

25. ¿Qué es una derivada? Defínalo con sus propias palabras

26. ¿Qué significa que la derivada de la función?

Apéndice D Enlace LUMI

En el presente apéndice se muestra el enlace del OVA

https://app.lumi.education/run/tm7Aqi