



**NOVA**

NOVA SCHOOL OF  
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA E INDUSTRIAL

NUNO MIGUEL PINHO DA SILVA LELO FILIPE  
Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

# OTIMIZAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
Universidade NOVA de Lisboa  
SETEMBRO, 2022





# OTIMIZAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

**NUNO MIGUEL PINHO DA SILVA LELO FILIPE**

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Orientador:** Professor Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso,  
Professor Auxiliar, Universidade NOVA de Lisboa

**Júri:**

**Presidente:** Professor Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho,  
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

**Arguentes:** Professor Doutor Rui Fernando dos Santos Pereira Martins,  
Professor Associado, FCT-NOVA

**Orientador:** Professor Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso,  
Professor Auxiliar, FCT-NOVA



## **Otimização de Configuração de Estruturas Reticuladas**

Copyright © Nuno Miguel Pinho da Silva Lelo Filipe, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que

Este documento foi criado com o processador de texto Microsoft Word e o template NOVAthesis Word [72].









## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao meu orientador, o Professor Doutor João Cardoso, por me ter guiado ao longo desta dissertação, pelo otimismo e boa disposição, e sobretudo pela disponibilidade e empenho inesgotável para me ajudar.

Agradeço à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT-NOVA), ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI), e a todo o corpo docente e aos funcionários por me terem dado todas as condições para a minha formação e crescimento. É um orgulho poder chamar a esta instituição de casa e ter a FCT como *alma mater*.

Quero também agradecer à minha família, aos meus amigos e a todos aqueles que se cruzaram comigo durante o meu percurso académico. Desde sessões e noitadas de estudo na 3.6, no VII, no *Skype* ou *Discord*, passando por almoços e jantares no Fórum ou no Tanto Faz, conversas ao pé da Natacha, treinos na Tapadinha ou em qualquer pavilhão e míticas idas aos bolos. Estou grato a todos vocês, foram fundamentais.

Agradeço em particular à Carolina Bandeira Luís, Catarina Fanico, Francisco Fernandes e Frederico Nobre, por estarem comigo diariamente, nas vitórias e nas derrotas, por todo o vosso apoio e críticas e por todos os momentos. Levo-vos para a vida.

À minha namorada, Susana Roque, agradeço-te por seres a luz que alumia o meu caminho, por seres o meu porto de abrigo, por todo o apoio e me fazeres acreditar todos os dias nas minhas capacidades. Sem ti, não era possível.

Agradeço à minha mãe, Cândida, por todos os ralhetes, por toda a preocupação, por todo o amor e carinho que me demonstrou, mas sobretudo por me ter dado todas as condições para chegar ao fim desta etapa e me ensinar que tudo é possível com trabalho e dedicação.

Por fim, agradeço ao meu irmão, Duarte, por ser a grande referência e exemplo na minha vida, por todas as dicas, por todo o apoio, por sempre me querer mostrar qual o melhor caminho a seguir e ser incansável a tentar ajudar-me e tornar-me um pouco melhor todos os dias. Foi um orgulho ter seguido as tuas pisadas e ter partilhado a formação e a casa académica contigo.





"I am the master of my fate,  
I am the captain of my soul" (William Ernest Henley).



## RESUMO

A presente dissertação tem como principal objetivo explorar a capacidade do programa PROAES calcular as derivadas das funções objetivo e constrangimento em relação a variáveis de configuração para resolver exemplos que combinam simultaneamente otimização de configuração e otimização topológica ou robusta de estruturas reticuladas.

A otimização de configuração de estruturas reticuladas constituídas por barras está associada à seleção mais adequada da orientação do eixo de cada um dos elementos na estrutura e, num modelo de elementos finitos, as variáveis de configuração permitem modificar a orientação no espaço dos referenciais locais dos respetivos elementos estruturais. Este tipo de solução para otimizar o desempenho das estruturas, torna-se particularmente interessante quando combinada com otimização topológica, que permite que seja adicionado ou removido material dentro de um domínio de projeto, o que significa que quando ambas as otimizações se combinam surgem resultados bastante interessantes. A combinação foi também efetuada conjuntamente com otimização baseada em incerteza, de forma a enriquecer o estudo.

De forma a testar a aplicabilidade destes conceitos de otimização simultaneamente, bem como averiguar as potencialidades das metodologias criadas, foram realizados diferentes testes em estruturas compostas por elementos barra 2D e 3D recorrendo a casos de estudo referenciados na bibliografia, tendo sido criado um caso de estudo de raiz. Os resultados obtidos revelam um bom desempenho do programa e validam as metodologias utilizadas.

**Palavras chave:** Otimização de Configuração, Otimização de Topologia, Otimização Robusta, Otimização Estrutural, Estruturas Reticuladas, Otimização combinada, PROAES





## ABSTRACT

The main objective of this dissertation is to explore the capabilities of the *PROAES* Program to calculate the gradients of objective and constraint functions with regard to configuration design variables to solve problems that involve simultaneously, Shape Optimization, Topology Optimization and Robust Optimization.

Shape Optimization of Truss Structures is associated with the most accurate selection of the axis of every single one of the elements that are part of the Truss Structure. That is connected with shape variables, which happen every time that the space orientation of local referentials of the finite elements are modified. This type of solution, which has the objective of improving structural performance, is particularly interesting when combined with Topology Optimization. This later method allows material to be added or removed from the initial structure within the project boundaries, which means that when the two types of Optimization are combined the potential results of the final structure are very interesting. It was also tested the possibility of combination with methods that regard uncertainty considerations in order to have a richer content in this study.

In order to test the applicability of these concepts simultaneously as well as to test the potential results of the created methodologies some tests in 2D and 3D Truss Structures were developed from previous studies obtained in the literature and another case study was fully created. The results obtained show a good performance of the program and validate the used and developed methodologies.

**Keywords:** Shape Optimization, Topology Optimization, Robust Optimization, Structural Optimization, Truss Structures, Combined Optimization, PROAES



# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	Contextualização e Motivação .....	1
1.2	Objetivos .....	3
1.3	Estrutura da Dissertação.....	4
<b>2</b>	<b>ESTADO DA ARTE</b> .....	<b>7</b>
2.1	Método dos Elementos Finitos .....	7
2.2	Otimização Estrutural .....	8
2.2.1	Otimização Dimensional .....	9
2.2.2	Formulação do problema de Otimização .....	11
2.3	Otimização de Configuração .....	12
2.3.1	Formulação de um problema de Otimização de Configuração .....	13
2.3.2	Revisão de Literatura .....	17
2.4	Otimização Topológica .....	20
2.4.1	Programas de Otimização Topológica.....	22
2.5	Otimização Robusta .....	24
2.5.1	Otimização com Incerteza .....	24
2.5.2	Otimização Robusta (RDO).....	25
2.5.3	Formulação do Problema de RDO.....	26
<b>3</b>	<b>PROGRAMA PROAES</b> .....	<b>29</b>
3.1	Introdução.....	29

3.2	Funcionamento do Programa.....	30
3.3	Ferramenta de Otimização ( <i>optimtool</i> ).....	33
<b>4</b>	<b>EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO NO PROAES.....</b>	<b>35</b>
4.1	Exemplo Estrutura 38 Barras.....	35
<b>5</b>	<b>CASOS DE ESTUDO E RESULTADOS.....</b>	<b>40</b>
5.1	Estrutura 38 Barras 2D.....	41
5.1.1	Metodologia e Exemplo Utilizado.....	41
5.1.2	Resultados.....	44
5.2	Estrutura 38 Barras 2D com RDO.....	49
5.2.1	Metodologia e Exemplo Utilizado.....	49
5.2.2	Resultados.....	52
5.3	Estrutura 72 Barras 3D.....	61
5.3.1	Metodologia e Exemplo Utilizado.....	61
5.3.2	Resultados.....	65
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>78</b>
6.1	Conclusões.....	78
	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>ANEXOS.....</b>	<b>91</b>
A.1	: Ficheiro <i>trelica_72_barras3D_no12.inp</i> - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12.....	91
A.2	: Ficheiros <i>obj_OT_trelica_72_barras_no12.m</i> e <i>grad_obj_OT_trelica_72_barras_no12.m</i> - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12.....	94
A.3	: Ficheiros <i>con_OT_trelica_72_barras_no12.m</i> e <i>grad_con_OT_trelica_72_barras_no12.m</i> - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12.....	98
A.4	: Ficheiros <i>inicializacao_OT_Trelica_72_barras_no12.m</i> e <i>grafico_topologia_optima3D_com_configuracao.m</i> - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12.....	100

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - 3 Tipos de Otimização Estrutural. a) Otimização Dimensional; b) Otimização de Configuração; c) Otimização de Topologia. À esquerda encontram-se apresentados os problemas e à direita as soluções ótimas de cada caso. Adaptado de [20] .....	9
Figura 2 - Exemplo de Otimização Dimensional, adaptado de [26].....	10
Figura 3 - Exemplos de função objetivo, variáveis de projeto e constrangimentos. Adaptado de [3].....	12
Figura 4 - Otimização de configuração de estruturas bidimensionais. À esquerda, uma treliça de 10 barras. À direita, um viga em consola. Adaptado de [3].....	13
Figura 5 - Otimização Topológica e de Configuração, adaptado de [33].....	16
Figura 6 - Processo iterativo de Otimização de Topologia e Configuração, adaptado de [33]	17
Figura 7 - Otimização topológica de uma treliça de 10 barras. Adaptado de [3] .....	21
Figura 8 - Diagrama de Execução do Programa PROAES .....	31
Figura 9 - Estrutura do Programa PROAES, adaptado de [11].....	32
Figura 10 - Otimização no Programa PROAES com a ferramenta <i>optimtool</i> .....	34
Figura 11 - Configuração inicial da estrutura. Adaptado de [11].....	36
Figura 12 - Configuração final da estrutura, adaptado de [11] .....	37
Figura 13 - Configuração Final Exemplo 38 Barras 2D.....	44
Figura 14 - Comparação entre configuração inicial e final da estrutura 38 Barras 2D .....	45
Figura 15 - Comparação entre Configuração final com Otimização Topológica e Otimização Combinada Estrutura 38 Barras 2D.....	46
Figura 16 - Configuração Inicial Exemplo André Teixeira, adaptado de [15] .....	49
Figura 17 - Otimização de configuração combinada com RDO para $\alpha = 0$ .....	53
Figura 18 - Comparação entre Otimização RDO e Otimização combinada para $\alpha = 0$ .....	54
Figura 19 - Otimização de configuração combinada com RDO para $\alpha = 0.1$ .....	55

Figura 20 - Comparação Otimização RDO com Otimização Combinada para $\alpha = 0.1$ .....	56
Figura 21 - Otimização de configuração combinada com RDO para $\alpha = 1$ .....	57
Figura 22 - Estrutura Inicial 72 barras 3D .....	61
Figura 23 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Perspetiva .....	66
Figura 24 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista Frontal.....	67
Figura 25 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista Lateral .....	68
Figura 26 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista de Cima .....	69
Figura 27 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Perspetiva .....	72
Figura 28 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista Frontal.....	73
Figura 29 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista Lateral .....	74
Figura 30 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista de Cima .....	75

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela de cálculo de gradientes, adaptado de [11].....	38
Tabela 2 - Tabela das áreas de secções transversais adaptada de [11].....	39
Tabela 3 - Áreas de Secção Transversal dos Elementos na Configuração Final .....	47
Tabela 4 - Valores finais pós-simulação Exemplo 1 .....	48
Tabela 5 - Áreas de Secção Transversal Final para $\alpha = 0$ .....	58
Tabela 6 - Área de Secção Transversal Final para $\alpha = 0,1$ .....	59
Tabela 7 - Valores finais pós-simulação Exemplo 2 para $\alpha = 0$ .....	60
Tabela 8- Valores finais pós-simulação Exemplo 2 para $\alpha = 0,1$ .....	60
Tabela 9 - Configuração dos nós da estrutura 72 barras 3D.....	62
Tabela 10 - Área de Secção Transversal Final do Caso 1 da Estrutura 3D.....	70
Tabela 11 - Valores finais pós-simulação Exemplo 3 para o Nó 8 .....	71
Tabela 12 - Área de Secção Transversal Final do Caso 2 da Estrutura 3D.....	76
Tabela 13 - Valores finais pós-simulação Exemplo 3 para o Nó 12.....	77





## SIGLAS E ACRÓNIMOS

<b>AHEFA</b>	<i>Adaptive Hybrid Evolutionary Algorithm</i>
<b>BESO</b>	<i>Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization</i>
<b>CDT</b>	<i>Canonic Dual Theory</i>
<b>CGO</b>	<i>Chaos Game Optimization</i>
<b>DAJA</b>	<i>Discrete Advanced JA</i>
<b>DE</b>	<i>Differential Evolution Algorithm</i>
<b>ESO</b>	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
<b>FA</b>	<i>Firefly Algorithm</i>
<b>HS</b>	<i>Harmony Search</i>
<b>LSM</b>	<i>Level Set Method</i>
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MMA</b>	Método das Assíntotas Móveis
<b>MOEAs</b>	Algoritmos Evolucionários de Multiobjetivos
<b>PROAES</b>	Programa de Análise Estrutural
<b>RBDO</b>	<i>Reliability-Based Design Optimization</i>
<b>RDO</b>	<i>Robust Design Optimization</i>
<b>SBO</b>	<i>School-Based Optimization</i>
<b>SIMP</b>	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>

SOS	<i>Symbiotic Organisms Search</i>
SQP	Programação Quadrática Sequencial
TOBS	<i>Topology Optimization of Binary Structures</i>

# INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização e Motivação

No final do século XIX e princípio do século XX, (Maxwell, 1890) [1] e (Michell, 1904) [2], iniciaram o estudo da otimização estrutural tendo feito as primeiras publicações nesta área, no entanto, a verdadeira explosão desta vertente em termos de desenvolvimento ocorreu a partir da década de 50 do século XX, não só com o aparecimento dos computadores digitais, como também com a introdução de métodos numéricos de programação matemática e de análise de estruturas, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos (MEF) [3].

Tomando uma perspectiva mais geral, com base na obra de (Arora, 1989) [4], a otimização estrutural acaba por estar diretamente relacionada com uma das atividades inerentes à Engenharia, o projeto, uma vez que à semelhança deste, procura dar a resposta mais adequada a um problema imposto. É então possível inferir que a otimização estrutural tem por objetivo obter a estrutura que desempenha de forma mais eficiente a função pretendida.

A formulação de um problema de otimização estrutural passa pela determinação das variáveis de projeto de uma estrutura, de forma a minimizar ou maximizar uma função objetivo (como a sua flexibilidade ou rigidez), obedecendo aos constrangimentos ou restrições aplicadas (por exemplo uma limitação de volume de material ou mesmo peso total da estrutura).

Sendo assim, as metodologias de otimização estrutural permitem perceber com elevada precisão e rapidez a solução mais adequada ao problema inicial, fazendo com que sejam uma componente interessante na sistematização e simplificação da atividade de projeto,

particularmente de estruturas de maior complexidade, com elevado número de parâmetros e constrangimentos a considerar [3].

Como já foi referido, a otimização estrutural foi impulsionada em grande parte devido ao aparecimento do Método dos Elementos Finitos, que teve a sua génese com (Hrenikoff, 1941) [5] e (Courant, 1943) [6] e atingiu um patamar de importância superior quando (Schmit, 1960) [7], através da introdução da combinação da análise estrutural com os métodos de otimização, conseguiu demonstrar que o processo de otimização estrutural se tratava de um processo automático eficiente e viável para resolver problemas reais.

No seguimento do trabalho de Schmit, e da viabilidade do Método dos Elementos Finitos, a otimização estrutural foi-se expandindo para diversos tipos de aplicações, sempre em paralelo com os métodos de otimização utilizados ao longo do tempo, sendo numa primeira fase (a partir da década de 50 do século XX), métodos de Programação Linear como o SIMPLEX.

Numa segunda fase (nas décadas de 70 e 80 do século XX), passaram a ser utilizados como complemento ao MEF, métodos de Programação Não Linear, como a Programação Quadrática Sequencial (SQP), desenvolvida por (Schittkowski, 1985) [8] e que se destaca pela sua versatilidade na análise ou o Método das Assíntotas Móveis (MMA), desenvolvido por (Svanberg, 1987) [9], que possui propriedades interessantes na resolução de problemas com elevado número de variáveis de projeto. E por fim com o surgimento das técnicas Meta-Heurísticas (Glover, 1986) [10] houve um desenvolvimento de métodos aplicáveis a problemas de otimização estrutural discretos e mistos.

É neste contexto que são formulados alguns programas de elementos finitos por parte de instituições de diversas áreas, desde universidades a empresas de software, passando por agências governamentais, sendo exemplos desses mesmos programas os seguintes: ANSYS, DIANA FEA, OOFEM, entre outros [11]. Surgiram também, ainda mais recentemente alguns projetos e implementação de códigos MATLAB particularmente na área de otimização topológica que irão ser detalhados mais à frente nesta dissertação.

Tendo estes exemplos como ponto de partida, e com interesse, colaboração e orientação de professores do Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial, particularmente do Professor João Cardoso, começaram a ser desenvolvidos por alunos programas de análise estrutural, na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, como por exemplo o programa PROAES (PROgrama de Análise EStructural) desenvolvido e utilizado

anteriormente por Tiago Baptista [12], Marco Correia [13], Raquel Leal [14] e mais recentemente João Marmeleiro e André Teixeira [15].

A presente dissertação acaba por se focar na continuidade do trabalho dos alunos referidos, dando também maior ênfase à componente de otimização do programa em si, com a criação de mais e diversificados exemplos de aplicação prática do Programa, particularmente explorando a combinação entre otimização topológica e otimização de configuração, de forma a avaliar a prestação do PROAES nestas vertentes e melhorar no Programa nesta componente de forma a ficar ainda mais eficiente. Sugere-se que de futuro a componente do cálculo de sensibilidades do PROAES seja mais trabalhada, bem como sejam feitos exemplos de combinação de otimizações considerando a encurvadura e comparando os resultados com os de programas similares.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação passa então por dar continuidade ao trabalho iniciado e previamente desenvolvido por alunos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Lisboa em colaboração e sob a orientação do Professor João Cardoso, particularmente no que diz respeito ao Programa de Análise Estrutural (PROAES).

Pretende-se assim que no fim desta dissertação, o programa esteja mais completo e com as suas funcionalidades operacionais e mais eficientes, particularmente no que diz respeito à Otimização, de forma a futuramente poder ser utilizado como um meio alternativo para realizar análise de elementos finitos, quer por alunos da FCT-NOVA em dissertações ou trabalhos académicos, quer por qualquer pessoa com interesse na área que pretenda utilizar esta ferramenta para fins educacionais ou de investigação na área da Análise Estrutural e Otimização.

Sendo assim e tendo por base o trabalho de João Marmeleiro (2017) e André Teixeira (2017), que se seguiram à utilização de Raquel Leal (2015) e desenvolvimento de Marco Correia, (2015) e Tiago Baptista (2012), nesta dissertação os objetivos passam, sobretudo pelo teste e demonstração das capacidades do programa PROAES na resolução de problemas de Otimização Estrutural de vários tipos, aplicando diferentes formulações e metodologias, com foco nos ramos de Otimização de Configuração e de Topologia, considerando inclusivamente Otimização Robusta, procedendo também a uma melhoria do Manual de Instruções do Programa, de forma a facilitar a sua compreensão e futura utilização.

Sumariamente, pretende-se com esta dissertação:

1. Revisão bibliográfica sobre os temas associados;

2. Estudo e compreensão dos programas de otimização topológica lançados recentemente;
3. Criação de novos exemplos de análise estrutural para diversos tipos de elementos finitos (Barra2D e Barra3D);
4. Elaboração detalhada de exemplos de otimização topológica e otimização de configuração para diversos tipos de elementos finitos (Barra2D e Barra3D);
5. Desenvolvimento de metodologias que combinem otimização de configuração com otimização topológica e com otimização robusta de estruturas;
6. Melhoria do Manual de Instruções do Programa PROAES, de modo que este seja mais intuitivo e de mais fácil compreensão para os utilizadores.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em 6 capítulos, tendo, após os capítulos um conjunto de anexos associados. De seguida serão brevemente apresentados, sendo também feita uma descrição sucinta dos conteúdos e objetivos presentes em cada um dos capítulos.

Capítulo 1 - Introdução: Neste primeiro capítulo será feita uma breve introdução dos temas abordados nesta dissertação, desde os seus primeiros estudos até aos mais recentes desenvolvimentos. Serão também destacados os principais objetivos e motivações desta dissertação e elencada a sua estrutura.

Capítulo 2 - Estado da Arte: No segundo capítulo será apresentado o estado de arte sobre os componentes e temas associados a esta dissertação, sobretudo no que à Otimização Estrutural diz respeito, desde a formulação de problemas de Otimização, até à descrição mais intensiva das componentes de Otimização de Configuração e Otimização Topológica, dado que são as principais matérias de estudo, culminando com uma sintética descrição acerca de Otimização Robusta e apresentação de programas semelhantes ao desenvolvido na dissertação.

Capítulo 3 - Programa PROAES: No capítulo 3 será feita uma introdução e descrição do funcionamento do Programa utilizado, o PROAES, desde a sua construção e definição dos diferentes componentes até à apresentação de diagramas de funcionamento, tendo como destaque naturalmente, a componente mais utilizada e importante nesta dissertação, que se trata da sua ferramenta de otimização (*optimtool*) e essa vertente do programa.

Capítulo 4 - Exemplo de Otimização no PROAES: No quarto capítulo é dada continuidade à explicação do Programa PROAES iniciada no terceiro capítulo, sendo apresentado um exemplo de resolução de um problema de Otimização previamente realizado no próprio Programa, de modo a complementar a explicação do seu funcionamento.

Capítulo 5 - Casos de Estudo e Resultados: No quinto capítulo serão apresentados os 3 exemplos de aplicação prática dos métodos de Otimização realizados nesta dissertação, bem como a descrição mais detalhada das metodologias associadas a cada um deles em particular, tendo todos na sua gênese a combinação entre Otimização de Configuração e Otimização Topológica, contemplando ainda a introdução de Otimização Robusta num dos exemplos. Posteriormente, ainda neste capítulo serão analisados e destacados os resultados práticos obtidos dos 3 casos de estudo.

Capítulo 6 - Conclusões: De modo a finalizar, serão apresentadas as conclusões dos casos de estudo realizados e será feita uma análise e retrospectiva acerca da própria dissertação e um resumo do trabalho dos diversos coautores do Programa PROAES para que possa ser mais divulgado após esta dissertação.





## ESTADO DA ARTE

Neste capítulo encontram-se definidos e caracterizados alguns conceitos relacionados com os métodos analíticos e os tipos de otimização que irão ser utilizados ao longo desta dissertação, sendo feita também uma revisão bibliográfica dos temas abordados.

### 2.1 Método dos Elementos Finitos

Como já foi referido o Método dos Elementos Finitos (MEF) teve o seu início com os estudos de [5] e [6], mas com as obras de (Clough, 1960) [16], que cria o nome que designa este método e considera a possibilidade de ser feita análise de estruturas de elevada complexidade, o MEF assume-se como um dos Métodos mais viáveis no que diz respeito à área de análise estrutural.

O Método dos Elementos Finitos é definido por (Hutton, 2004) [17], como sendo uma técnica computacional utilizada para a obtenção de soluções aproximadas para problemas em que uma ou mais variáveis dependentes devem satisfazer uma equação diferencial num determinado domínio conhecido de variáveis independentes e estar compreendidas dentro do limite desse mesmo domínio.

Segundo (Nikishkov, 2004) [18], o MEF pode ser considerado como um método numérico de resolução de problemas descritos por equações diferenciais parciais ou problemas que possam ser formulados como minimizações funcionais, sendo que o domínio que se pretende estudar será representado por um conjunto assemblado de elementos finitos que têm por objetivo simplificar o sistema a ser estudado.

Nikishikov [18] descreve sucintamente o funcionamento do Método dos Elementos Finitos em 6 partes distintas:

1. Discretização do Domínio. A primeira fase do MEF passa por dividir o problema em elementos finitos através da criação de uma malha gerada através de um pré-processador.
2. Seleção de funções interpoladoras. Estas funções são aplicadas na interpolação das variáveis de campo sobre o elemento, geralmente recorrendo a polinómios cujo grau varia e depende consoante o número de nós do elemento a estudar.
3. Definição das propriedades do elemento. Na terceira fase é estabelecida a equação matricial que relaciona os valores nodais com outros parâmetros, tipicamente através da utilização de um método variacional.
4. Assemblagem das equações dos elementos. De forma a obter a equação global do sistema é necessário efetuar a assemblagem das equações dos referenciais locais, ou seja, combinar as equações locais de todos os elementos usados para a discretização do sistema. Durante este processo é necessário ter em conta as ligações entre os elementos.
5. Resolução do sistema de equações global. O sistema de equações global é tipicamente disperso, simétrico e positivo definido, sendo que poderão ser usados métodos diretos ou iterativos para determinar a solução do mesmo sistema. Os valores nodais da função desejada são obtidos como resultado da sua solução.
6. Computação de resultados adicionais. Existem parâmetros nos problemas de análise estrutural, designadamente esforços e tensões, que necessitam de ser calculados, e neste caso, serão obtidos após a resolução do sistema de equações global.

É necessário ter em consideração o tipo de elemento finito constituinte de uma estrutura para que a mesma seja corretamente analisada do ponto de vista da formulação dos problemas. No Programa PROAES existem 4 tipos de elementos finitos: relativamente às barras, Barra 2D e Barra 3D e relativamente às vigas, Viga 2D e Viga 3D.

## 2.2 Otimização Estrutural

Como foi referido no primeiro capítulo, a otimização estrutural tem sido um tópico abordado desde o final do século XIX, tendo crescido de importância a partir da década de 50 e 60

do século XX, sendo atualmente um tópico de elevada importância e diretamente ligado com a atividade de projeto, particularmente de estruturas de maior complexidade.

De acordo com (Park, 2007) [19], a otimização estrutural pode ser subdividida em 3 categorias, sendo que esta classificação é feita através da escolha e influência dos valores das variáveis consideradas em cada problema. Sendo assim as 3 categorias de otimização estrutural podem ser consideradas as seguintes:

1. Otimização Dimensional;
2. Otimização de Forma ou de Configuração;
3. Otimização de Topologia.

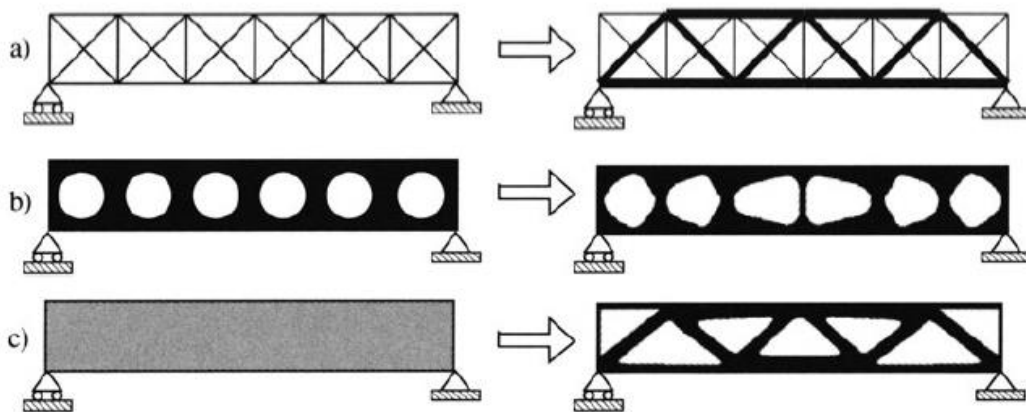


Figura 1 - 3 Tipos de Otimização Estrutural. a) Otimização Dimensional; b) Otimização de Configuração; c) Otimização de Topologia. À esquerda encontram-se apresentados os problemas e à direita as soluções ótimas de cada caso. Adaptado de [20]

## 2.2.1 Otimização Dimensional

Relativamente à Otimização Dimensional, pode dizer-se que nesta o domínio se mantém constante [19], isto é, neste tipo de otimização, as localizações dos nós e dos elementos são fixas, o que significa que a configuração e topologia da estrutura se mantém inalteradas ao longo do processo de otimização [3].

Segundo [21] este tipo de otimização usa frequentemente metodologias associadas a modelos computacionais e envolve programação matemática, no caso de (Vanderplaats, 1984) [22] e (Groomes *et al*, 1992) [23], métodos heurísticos (Chu *et al*, 1998) [24] ou mesmo métodos empíricos, como intuição do próprio indivíduo.

Neste tipo de Otimização, segundo (Bendsøe e Sigmund, 2003) [20], tipicamente o objetivo nestes problemas passa por determinar a distribuição de espessura ótima numa placa ou

as áreas das secções das barras numa estrutura. A distribuição de espessura ótima irá assim minimizar ou maximizar uma quantidade física, como por exemplo as tensões a que a estrutura está sujeita, tendo em conta e respeitando sempre os constrangimentos e restrições impostos. Sendo assim é possível definir que as variáveis associadas à Otimização Dimensional como as dimensões das secções transversais dos elementos [14], quando esta é realizada isoladamente, isto é, sem estar combinada com os restantes métodos de Otimização. Como tal, as variáveis estarão compreendidas entre uma gama de valores, discretos ou contínuos, dependendo se são tratadas com valores normalizados. Se, por exemplo, no caso de uma treliça, as variáveis consideradas se tratarem de um conjunto de áreas de secção transversal normalizadas, de forma a serem escolhidas as mais eficientes para a otimização da estrutura, estamos perante um problema de variáveis discretas, que se trata de um problema de análise combinatória. Já se se partir da mesma base, mas as variáveis à escolha não forem exclusivamente áreas de secção transversal normalizadas, ou seja, não sendo necessário respeitar essa norma, podendo recair a escolha sobre um valor entre limites estabelecidos, aí temos um problema de variáveis contínuas [25].

A Figura 2 abaixo ilustra um exemplo de otimização dimensional.

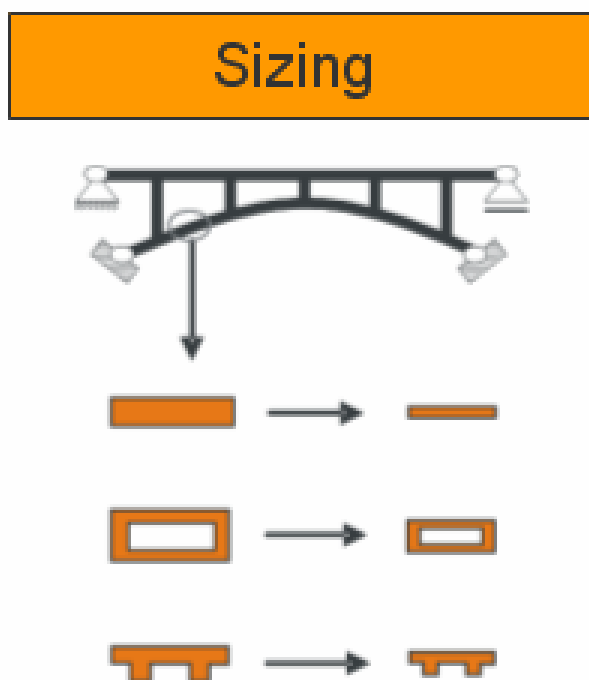


Figura 2 - Exemplo de Otimização Dimensional, adaptado de [26]

## 2.2.2 Formulação do problema de Otimização

De forma a poder realizar os diferentes tipos de otimização estrutural, é necessário em primeiro lugar formular o problema, sendo a formulação de um problema de otimização constituída por 3 passos [3]:

1. Identificação das variáveis de projeto, que deverão, se possível, ser independentes umas das outras;
2. Identificação de uma função objetivo e expressão da mesma como função das variáveis de projeto. A função objetivo é aplicada como o critério necessário para analisar se um projeto é melhor ou não que outro;
3. Identificação dos constrangimentos de projeto e tradução dos mesmos para linguagem e expressões matemáticas. Se todos os constrangimentos forem satisfeitos o projeto pode ser considerado como sendo admissível.

Sendo assim, tendo em consideração os passos acima, é possível formular matematicamente pela forma standard um problema de otimização da seguinte forma, adaptada de [3]:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad ; j = 1, \dots, m \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad ; k = 1, \dots, p \\ & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad ; i = 1, \dots, n \end{array} \quad (1)$$

Sendo que  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  corresponde ao vetor das  $n$  variáveis de projeto;  $f(\mathbf{x})$  corresponde à função objetivo;  $g_j(\mathbf{x})$  são os  $m$  constrangimentos de desigualdade;  $h_k(\mathbf{x})$  são os  $p$  constrangimentos de igualdade;  $x_i^l$  e  $x_i^u$  são os limites inferior e superior de variação de variáveis de projeto  $x_i$ , respetivamente.

Usualmente em otimização estrutural as funções objetivo estão associadas a uma minimização do peso ou volume da estrutura, mas existem outras alternativas para a formulação de um problema. A figura 3, retirada de [3] exemplifica as funções objetivo, variáveis de projeto e constrangimento comuns em problemas de otimização estrutural.

<b>Função objectivo</b>	<b>Variáveis de projecto</b>	<b>Constrangimentos</b>
• <i>Peso</i>	• Dimensões	• Deslocamento
• <i>Custo</i>	• Forma	• Tensão
	• Topologia	• Frequência natural
		• Carga crítica
		• Fiabilidade

Figura 3 - Exemplos de função objetivo, variáveis de projeto e constrangimentos. Adaptado de [3]

## 2.3 Otimização de Configuração

Os três tipos de otimização existentes acabaram por ter o seu desenvolvimento cronologicamente de forma crescente. Numa primeira fase, o foco da otimização estrutural encontrava-se em grande parte na área da otimização dimensional. A otimização de configuração começa a ser alvo de grande interesse científico e de estudo a partir da década de 70 do século XX, sendo que esta pode ser combinada com a otimização dimensional de modo a obter soluções mais eficientes para uma estrutura [3].

Neste tipo de otimização de configuração, o domínio do problema é variável e os parâmetros que definem a posição da fronteira desse domínio acabam por ser as variáveis de projeto a considerar [19].

No caso de elementos estruturais unidimensionais ou bidimensionais a otimização de configuração pode associar-se a variáveis de configuração, que ocorrem sempre que se modifica a orientação no espaço dos referenciais locais dos respetivos elementos estruturais [3]. Neste tipo de otimização, a topologia inicial da estrutura, isto é, o número de nós, o número de barras e as conectividades, mantém-se constante ao longo do processo de otimização.

Na figura 4 encontram-se representados dois exemplos de otimização de configuração em estruturas bidimensionais, retiradas de [3].

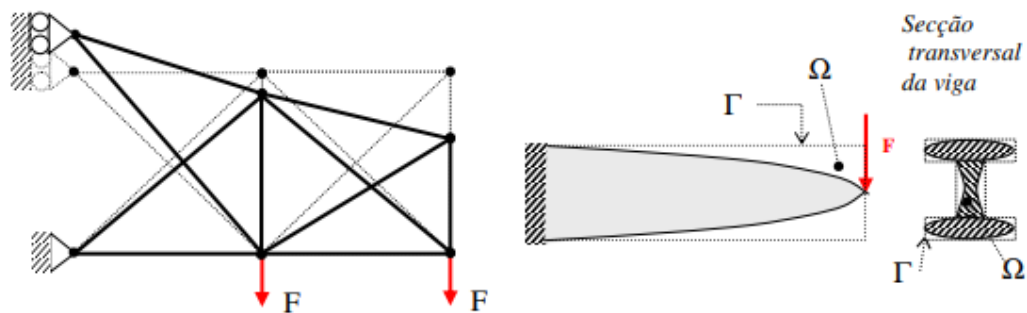


Figura 4 - Otimização de configuração de estruturas bidimensionais. À esquerda, uma treliça de 10 barras. À direita, um viga em consola. Adaptado de [3]

Como é possível verificar, na figura à esquerda encontra-se ilustrada a modificação da posição dos nós de uma treliça, mantendo a sua topologia original, enquanto na figura à direita está exemplificada a otimização de configuração numa viga em consola, em que se pode observar que as fronteiras do domínio, no caso as secções transversais da viga são alteradas, modificando assim a configuração da estrutura.

Segundo (Torii *et al*, 2012) [27], existem diversos métodos para a otimização de estruturas reticuladas em que as áreas das secções são consideradas como as variáveis de projeto, como os estudos de (Pedersen, 1970) [28], (Pedersen, 1993) [29], (Hemp, 1973) [30]. Já no que diz respeito a otimização de configuração de estruturas reticuladas, considerando as posições dos nós como variáveis de projeto existem relativamente poucos exemplos, nos quais se destacam os estudos de (Kocvara e Zowe, 1996) [31] (Achtziger, 2006) [32], (Achtziger, 2007) [33], no entanto, será esta segunda temática a abordada nos exemplos práticos desta dissertação, otimização de configuração considerando as posições dos nós como variáveis de configuração.

O trabalho de [33] é particularmente interessante neste âmbito, uma vez que combina a otimização entre as áreas de secção transversal da estrutura e as posições dos seus nós, focando-se em analisar a combinação dos dois processos quer realizados simultaneamente, quer de forma alternada.

### 2.3.1 Formulação de um problema de Otimização de Configuração

Neste estudo acima referido, Achtziger [33], formula o problema, começando por considerar a estrutura como tendo geometria fixa, para numa segunda fase inserir a variabilidade da mesma. Este, considera uma estrutura como tendo inicialmente  $m$  elementos (barras) e  $N$

nós presentes em  $d$  dimensões espaciais, sendo  $d \in \{2,3\}$ . As condições de apoio, representadas por  $s$ , são dadas por:

$$s = n + 1, \dots, N \cdot d \quad (2)$$

Em que  $n = N \cdot d - s$  corresponde ao número de graus de liberdade da estrutura. De seguida constrói-se a matriz de rigidez global, focando na definição mais detalhada do vetor geométrico  $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$ , que contém os senos e cossenos referentes à posição da  $i$ ésima barra da estrutura, dado que o estudo [33] incide sobre o impacto das posições dos nós. Assim, tendo um índice espacial  $k \in \{1, \dots, d\}$ , a direção de deslocamento nodal para cada nó correspondendo a  $j_{i,1,k}, j_{i,2,k} \in \{1, \dots, N \cdot d\}$  e o ângulo entre o  $k$ ésimo eixo de coordenadas espaciais e a  $i$ ésima barra da estrutura dado por:

$$\varphi_{i,k} \in [0, 2\pi[ \quad (3)$$

Definindo que  $[z]_p$  corresponde à  $p$ ésima coordenada de um vetor  $z$ , tem-se que  $\gamma_i \in \mathbb{R}^n$  é dado pela seguinte definição para  $p = 1, \dots, n$ :

$$[\gamma_i]_p := \begin{cases} \cos \varphi_{i,k} & \text{se } p = j_{i,1,k} \text{ para algum } k \in \{1, \dots, d\}, \\ -\cos \varphi_{i,k} & \text{se } p = j_{i,2,k} \text{ para algum } k \in \{1, \dots, d\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

Com estas definições e tendo um vetor  $f \in \mathbb{R}^n$  correspondendo às cargas estáticas externas aplicadas aos nós, o sistema de equações seguinte define o equilíbrio entre as forças internas e externas:

$$\sum_{i=1}^m q_i \gamma_i + f = 0 \quad (5)$$

Neste caso,  $q \in \mathbb{R}^m$  contém as forças ao longo de cada barra, respetivamente  $q_i, i = 1, \dots, m$  e tendo um vetor deslocamento  $u \in \mathbb{R}^n$ , os valores  $\gamma_i^T u$ ,  $i = 1, \dots, m$  exprimem  $u$  em termos de deslocamentos lineares para cada barra respetivamente.



De seguida, definindo  $\ell_i$  como o comprimento da  $i$ ésima barra da estrutura, definindo  $E_i \in \mathbb{R}$  como o módulo de *Young* do material utilizado e aplicando como variável de projeto o vetor  $a \in \mathbb{R}_+^m$  que corresponde ao vetor das áreas de secção de cada elemento da estrutura,  $a_1, \dots, a_m \geq 0$ , é possível assim construir a matriz de rigidez global da estrutura:

$$K(a) := \sum_{i=1}^m a_i \frac{E_i}{\ell_i} \gamma_i \gamma_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (6)$$

De seguida, correspondendo o vetor  $f \in \mathbb{R}^n$  às cargas estáticas externas referidas acima, tem-se que as condições de equilíbrio elástico podem ser escritas da seguinte forma:

$$K(a)u = f \quad (7)$$

Com estas notações é possível formular o problema de otimização, com minimização da flexibilidade (ou *compliance*) sujeito a um constrangimento de volume da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{a \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n} \quad & f^T u \\ \text{s. t.} \quad & K(a)u = f \\ & \sum_{i=1}^m a_i \ell_i \leq V \\ & a \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

De seguida, acrescentando as variáveis de configuração, passo a passo, que pode ser verificado em [33], a formulação para o problema de otimização de configuração passa a ter a seguinte composição:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y_0, a \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n} \quad & f^T u \\ \text{s. t.} \quad & K(y, a)u = f \\ & \sum_{i=1}^m a_i \ell_i(y) \leq V \\ & a \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Sendo que  $y$  e  $Y$  correspondem naturalmente às variáveis de configuração bem como o conjunto completo de geometrias, respetivamente. Nas figuras 5 e 6 encontram-se apresentados os resultados da otimização topológica combinada com otimização de configuração realizadas por [33]. Os exemplos referidos representam inicialmente uma estrutura retangular de 12 nós, como se pode ver na parte superior esquerda, estando 3 deles com os movimentos nas direções  $x$  e  $y$  restringidos por apoios fixos e estando aplicada uma força vertical no sentido descendente no nó 11. Na coluna da esquerda de ambas as figuras, 5 e 6, encontram-se representadas não só as configurações iniciais, no topo da coluna, como também a posição final dos nós e conseqüentemente dos elementos a que estão ligados após os cálculos realizados em cada iteração. Já na coluna da direita, em ambas as figuras, 5 e 6, é possível visualizar a distribuição de material na estrutura determinada pela posição dos nós após a retirada dos elementos com área de secção transversal insuficiente para fazerem parte da estrutura final. De notar ainda que os valores à direita na figura 6 correspondem aos valores da função objetivo em cada iteração.

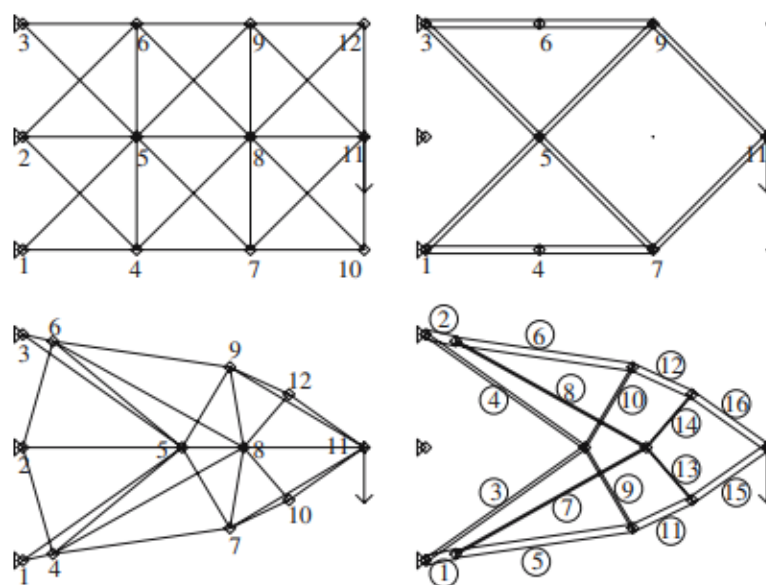


Figura 5 - Otimização Topológica e de Configuração, adaptado de [33]

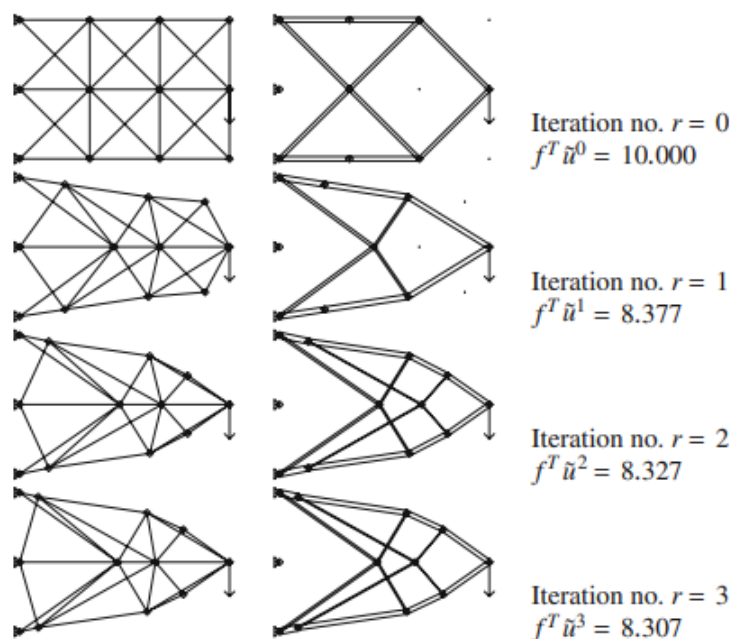


Figura 6 - Processo iterativo de Otimização de Topologia e Configuração, adaptado de [33]

Sendo assim, é possível verificar em ambas as figuras, que acontece a remoção de barras e material não necessário, bem como o movimento dos nós de forma a obter a estrutura que melhor responde aos objetivos pretendidos e constrangimentos, mostrando que este tipo de combinação entre otimização topológica e de configuração apresenta soluções ótimas com menor valor de flexibilidade.

### 2.3.2 Revisão de Literatura

Como já foi referido, tanto no primeiro capítulo, como no mais recente subcapítulo, a otimização de configuração, é particularmente eficaz quando combinada ou sendo trabalhada em paralelo com outro tipo de otimização, permitindo obter resultados bastante interessantes nas mais diversas áreas de estudo. É nesse sentido e também um pouco na sequência do trabalho referenciado acima, de [33], que surgem os mais recentes avanços nesta área.

Fadel Miguel e Fadel Miguel, 2012 [34] utilizaram pela primeira vez dois algoritmos meta-heurísticos previamente desenvolvidos, *Harmony Search (HS)* e *Firefly Algorithm (FA)* para resolver problemas de otimização dimensional e de configuração de estruturas com múltiplos constrangimentos de frequência, de forma a resolver os usuais problemas de descontinuidade e falta de convergência da função objetivo aquando da utilização de algoritmos baseados no gradiente e obtendo resultados bastante aceitáveis. A aplicação de metodologia meta-

heurística na resolução de problemas de otimização de configuração seguiu-se com o estudo de (Farshchin *et al*, 2016) [35] que modificou um algoritmo pré-existente, de forma a criar um algoritmo mais eficaz com o mesmo grau de complexidade, denominado *School-Based Optimization (SBO)*, capaz de utilizar uma estratégia cooperativa entre otimização dimensional e otimização de configuração para resolver este tipo de problemas, revelando-se interessante e eficaz para problemas com maior complexidade e de maior dimensão.

Mais recentemente, (Lieu *et al*, 2017) [36], tendo também por base a resolução de problemas de otimização dimensional e de configuração com múltiplos constrangimentos de frequência desenvolveram uma evolução híbrida entre o *Differential Evolution Algorithm (DE)* e o *Firefly Algorithm (FA)*, denominada *Adaptive Hybrid Evolutionary Firefly Algorithm (AHEFA)*. Este algoritmo equilibra de forma eficaz a procura global e local pela melhor solução, devido a um parâmetro adaptado do desvio da função objetivo entre a melhor solução individual e todo o domínio, que é utilizado para selecionar adequadamente o operador mutacional para a performance em estudo em cada fase. Este trabalho acabou por ser seguido por (Nguyen-Van *et al*, 2021) [37] que, aplicando premissas e metodologias semelhantes às enunciadas no trabalho anterior construíram um algoritmo, denominado *HDS* combinando o *Differential Evolution Algorithm (DE)* com *Symbiotic Organisms Search (SOS)*, que alternando a procura local e global de forma balanceada consegue resultados de otimização de qualidade com uma velocidade de convergência melhorada.

Por fim, neste tipo de problemas, considerando constrangimentos de frequência aplicados a otimização dimensional e de configuração, destaca-se o estudo de (Azizi *et al*, 2022) [38] que aplica princípios da Teoria do Caos como ponto de partida para o algoritmo *Chaos Game Optimization (CGO)* que revelou ser possível efetuar este tipo de otimização com qualidade, podendo inclusivamente apresentar resultados bastante interessantes em problemas considerando estruturas de elevada complexidade.

Uma outra abordagem, com comprovada aplicabilidade nestes problemas, que pode ser incorporada nos três grandes tipos de otimização, foi a considerada por (Frans e Arfiadi, 2014) [39] que construíram algoritmos genéticos híbridos para a otimização de estruturas, particularmente para a aplicação de telhados. Neste caso, as áreas de secção transversal e o número de elementos ligados a cada nó seriam otimizados utilizando algoritmos genéticos de código binário, enquanto as coordenadas dos nós seriam determinadas com recurso a algoritmos

genéticos de código real, o que ao utilizar números reais para representar estas variáveis de projeto, permite flexibilidade na obtenção das posições finais dos nós.

Relacionado com o exemplo referido, está o estudo de (Dillen *et al*, 2021) [40] que constrói um algoritmo combinando métodos baseados no gradiente e métodos meta-heurísticos, explorando as vantagens de ambos, designadamente a capacidade de trabalhar com variáveis de projeto discretos, bem como a rápida convergência das variáveis de projeto contínuas em problemas de minimização de peso em estruturas de aço. E um pouco antes deste estudo, (Degertekin *et al*, 2019) [41] haviam criado um método a partir do algoritmo *Jaya*, denominado *Discrete Advanced JA (DAJA)*, que aplicada a variáveis discretas conseguiu obter resultados bastante razoáveis e robustos sem necessitar de uma quantidade significativa de análise estrutural.

Por fim, têm sido realizados nos últimos anos alguns avanços no que respeita à aplicação simultânea dos três tipos de otimização, dimensional, de configuração e topológica, tendo esta temática de estudo sido iniciada entre outros, por (Noilublao and Bureerat, 2011) [42] na definição de um problema de otimização de uma estrutura 3D com diversas funções objetivo (massa, *compliance*, frequências naturais, frequências de resposta e transmissibilidade), utilizando algoritmos evolucionários de multiobjectivos (*MOEAs*), que apesar de resolverem este tipo de problemas especificamente poderiam ainda não ser suficientes e não estar preparados para resolver problemas com aplicações práticas do mundo real, mas apesar das lacunas estava dado o ponto de partida neste âmbito. Na sequência, (Fernandez *et al*, 2020) [43] desenvolveram um programa de otimização que permite realizar simultaneamente os três tipos de otimização utilizando três domínios de projeto, através do uso de funções *level-set* para representar os limites que definem a forma e topologia da estrutura, funções diferenciáveis para combinar as formas e topologias através de operações Booleanas e incorporação de materiais de rigidez dependente com outro domínio de projeto.

Para finalizar, na combinação simultânea dos três tipos de otimização, um avanço notável foi alcançado por (Dang *et al*, 2022) [44], através da implementação de um algoritmo combinando o *Differential Evolution Algorithm (DE)* com *Symbiotic Organisms Search (SOS)*, que permite realizar em apenas um passo, otimização dimensional, de configuração e topológica em estruturas 2D e 3D com múltiplos constrangimentos e cujas áreas de secção transversal e coordenadas espaciais dos nós funcionam como variáveis de projeto.

## 2.4 Otimização Topológica

O terceiro e último tipo de otimização será em paralelo com a otimização de configuração o mais explorado ao longo desta dissertação, estando presente em todos os casos de estudo abordados e trata-se da otimização topológica. Este conceito começou a ser trabalhado nos finais do século XIX, tendo Maxwell [1] como pioneiro, no entanto passa a ser estudado com maior profundidade a partir dos anos 80 do século XX, tendo como grande referência o trabalho de (Bendsøe e Kikuchi, 1988) [45] que acabou por servir como alicerce para outras obras desenvolvidas neste ramo da otimização, sendo nos dias de hoje um campo reconhecido na comunidade científica uma vez que não só permite otimizar a topologia de uma estrutura para alcançar o desempenho desejado, como também permite satisfazer restrições e constrangimentos, sejam eles ao nível do material usado ou até de propriedades do próprio material como a sua resistência, como refere (Liu et al. 2021) [46].

Segundo [20] a otimização topológica de estruturas sólidas baseia-se na distribuição adequada e racional do material disponível numa determinada área ou volume, através da remoção de material nas zonas em que os níveis de tensão ou esforço a que a estrutura está sujeita são relativamente baixos e não requerem a presença de material. Os problemas de otimização topológica são modelados por variáveis booleanas (0 ou 1), que representam um estado de existência (1) ou ausência (0) de material, sendo que este valor (0) pode ser indicativo de um elemento que não deva ser considerada durante a análise estrutural [3].

Existem diversos métodos para a resolução de problemas de otimização topológica, sendo um deles conhecido por *Ground Structure Approach*. Este método, cuja génese é atribuída a (Dorn et al. 1964) [47], especificamente aplicado a estruturas reticuladas, as que se pretendem estudar nesta dissertação, procura descobrir os nós e barras (conectividades) que correspondem à utilização mais eficiente do material, isto é, a configuração que minimiza o peso (ou volume) da estrutura e satisfaz os constrangimentos de tensão, deslocamento e encurvadura. [3].

A figura 7 ilustra o *Ground Structure Approach*, na medida em que partindo de uma topologia inicial, seleciona as barras e nós mais eficientes e mantém-nos, eliminando os restantes.

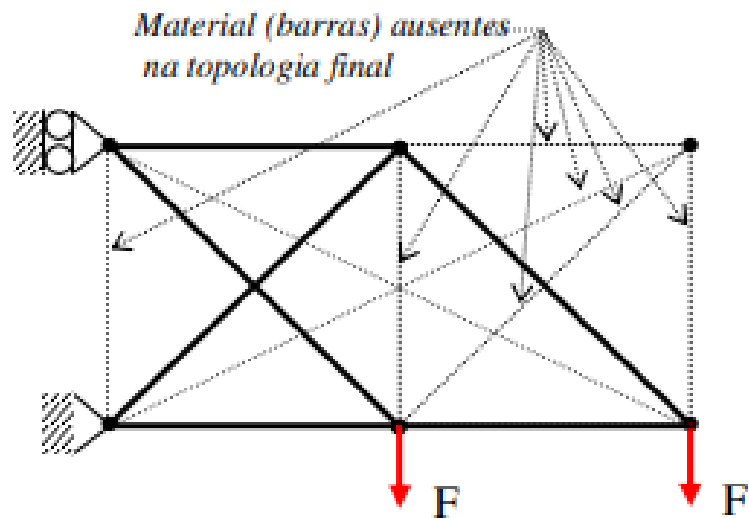


Figura 7 - Otimização topológica de uma treliça de 10 barras. Adaptado de [3]

Nos casos de otimização topológica que envolvam problemas de elasticidade é aplicado o método *Hard-Kill Method*, no qual é considerado um domínio inicial que é posteriormente discretizado numa malha de elementos finitos, sendo depois essa mesma malha analisada por um algoritmo que identifica os elementos sujeitos a uma tensão baixa e os elimina.

Para o caso de problemas de elasticidade em meios contínuos existe o método *Soft-Kill Method*, em que se estabelece uma relação entre o campo de tensão e a densidade relativa do material. Neste método inicialmente todo o material do domínio da estrutura tem uma densidade relativa uniforme igual a 1, sendo que o objetivo passa por obter a distribuição ótima de material variando entre 0 e 1 o valor da densidade dos elementos finitos, sendo que zonas próximas de 0 representam um vazio de material, zonas entre 0 e 1 indicam uma possível zona de contorno e zonas próximas de 1 determinam existência de material [3].

Existe ainda outro método bastante importante e estudado, denominado *SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)*, que é baseado num modelo material de densidade variável. O modelo *SIMP* penaliza densidades intermédias de modo a obter no domínio final apenas zonas de vazio ou ausência de material (0), ou zonas de existência de material (1). De notar que este modelo, apesar de ser considerado um modelo de otimização topológica não visa otimizar o material, mas sim identificar claramente o domínio que irá ser ocupado pela estrutura [3].

É importante existir uma correlação e combinação entre os vários tipos de otimização, uma vez que dessa forma é possível obter os resultados pretendidos para uma determinada estrutura.

### 2.4.1 Programas de Otimização Topológica

Tal como indicado nos capítulos anteriores, a otimização topológica tem sido um tópico de interesse e relevo na comunidade científica, com particular importância na área da engenharia, apresentando soluções eficientes para problemas do mundo real nas mais diversas áreas de projeto. Têm sido apresentadas várias abordagens com diferentes metodologias para resolver problemas relacionados com otimização topológica.

Como (Han et al. 2021) [48] refere, com o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica têm sido publicados gradualmente programas computacionais relacionados com otimização estrutural de topologia, sendo que estes programas, criados sobretudo para a vertente didática e educacional, abriram caminho para o desenvolvimento do tópico de otimização de topologia.

Apesar do trabalho de [48], estar relacionado com outra vertente da otimização topológica, não abordada nesta dissertação, que trata de otimização não-linear, no mesmo artigo faz referência a alguns programas didáticos desta área criados ao longo dos últimos 20 anos em diferentes ambientes e abordando diferentes metodologias, que acabam por ter um papel semelhante ao Programa PROAES e que reforçam a utilidade deste tipo de programas no seio da comunidade científica. Ao longo deste capítulo serão sucintamente explicados alguns desses mesmos programas, com destaque para os que foram desenvolvidos em ambiente MATLAB, abordando as diferenças entre as metodologias e, por fim, será mencionado com maior detalhe o programa a trabalhar ao longo desta dissertação.

É necessário recuar a 2001 e fazer referência ao trabalho de (Sigmund, 2001) [49], que acabou por ser um dos pioneiros na realização de programas didáticos de otimização topológica. Sigmund [49] desenvolveu um código de 99 linhas em ambiente MATLAB, denominado "**99-line**", que permite efetuar tanto análise de elementos finitos, como otimização topológica através da aplicação do método *SIMP*, já referido no capítulo 2. Este programa é reconhecido pela comunidade científica, sendo utilizado como meio educacional para estudantes de engenharia. Sigmund continuou ligado à área e em paralelo com Ferrari (Ferrari e Sigmund, 2020)



[50], lançou o programa "**top99neo**", também aplicando o método *SIMP*, mas já com melhorias significativas e com um código substancialmente mais eficiente.

Ao longo do tempo foram aparecendo outros trabalhos relacionados com a temática da otimização estrutural, nos quais se destacam dois programas desenvolvidos por Paulino e Zegard. O primeiro, (Paulino e Zegard, 2014) [51], denominado "**GRAND**" (*GRound structure ANalysis and Design*) consiste numa aplicação do *Ground Structure Method*, já referido no primeiro capítulo, em problemas de otimização topológica em domínios arbitrários 2D. No ano seguinte, em 2015, os mesmos (Paulino e Zegard, 2015) [52], alargaram a sua investigação e desenvolveram o programa "**GRAND3**", aplicado a domínios 3D. Estes dois programas revelam a adequabilidade do *Ground Structure Method*, quer em domínios 2D, quer em domínios 3D e são particularmente importantes para esta dissertação uma vez que em termos de metodologia e princípios são os programas mais semelhantes com o programa a ser utilizado (PRO-AES).

Mais recentemente através do trabalho de (Xia et al. 2018) [53], foi desenvolvido um programa de otimização topológica, denominado "**esoL esoX**", recorrendo ao método *BESO* (*Bi-Directional Evolutionary Structural Optmization*), que consiste num método que deriva do método *ESO* (*Evolutionary Structural Optmization*), e que permite, através da premissa de retirada de material sujeito a esforços baixos, e posterior eventual reposição de material, que seja obtida a topologia ideal de uma estrutura. Este método e particularmente o programa revelaram que o método *BESO* é altamente eficiente e robusto com diversos tipos de problemas de projeto, e tem aplicações particularmente interessantes nas áreas de projeto de estruturas avançadas e no projeto de microestruturas de materiais.

Posteriormente, (Liang e Cheng 2020) [54], desenvolveram um programa "**128-line**" em ambiente MATLAB e com recurso ao método *CDT* (*Canonic Dual Theory*), que transforma os problemas de otimização topológica numa sequência de sub-problemas separáveis num ambiente de programação. No mesmo artigo, Liang e Cheng referem as vantagens e desvantagens face aos métodos usualmente aplicados, indicando que o *CDT* consegue ser tão eficiente quanto os métodos de variáveis contínuas, acrescentando ainda que este aplica programação racional matemática para renovar as variáveis de projeto, sendo ainda capaz de suportar uma elevada quantidade de constrangimentos locais. Este método é visto como eficiente em aplicações da otimização topológica como por exemplo em problemas de maximização de eficiência de transferência de calor, entre outras.

Também (Yaghmaei et al. 2020) [55] deram a sua contribuição para o tópico de programas de otimização topológica, ao criar um programa "**62-line**" utilizando na sua base o método

*LSM (Level Set Method)*, que consiste na aplicação de um filtro de densidade à função *level set*, de forma a suavizar as configurações otimizadas, o que leva a que, ao contrário dos métodos existentes, não necessite de resolver um elevado número de equações lineares. Devido a esta característica, o método *LSM* apresenta uma vantagem substancial em termos de tempo de computação face às restantes metodologias, sendo também um método que ao derivar dos usuais métodos de otimização *level set*, possui uma ligação forte à componente de otimização de configuração, ligação essa que, como já foi referido no segundo capítulo pode trazer mais eficiência a todo o processo.

Por fim, através do contributo e trabalho de (Picelli et al. 2020) [56], foi desenvolvido um código em MATLAB "**tobs101**", utilizando o método *TOBS (Topology Optimization of Binary Structures)*, que consiste num método baseado no gradiente que implica variáveis de projeto binárias e programação matemática formal. Este método combina linearização sequencial dos problemas, alívio de constrangimentos, filtragem de sensibilidades e ainda programação integrada, o que faz com que este programa seja superior aos métodos *CDT* em relação à discretização dos elementos nas topologias de cada iteração, no entanto acaba por ser um método que peca no tempo de computação, sendo ligeiramente mais lento.

## 2.5 Otimização Robusta

### 2.5.1 Otimização com Incerteza

Segundo (Kang e Bai, 2013) [57], convencionalmente, o processo de Otimização Estrutural é realizado tendo por base alguns pressupostos determinísticos, no entanto sabe-se que na prática, nos problemas reais, existem fatores de incerteza inerentes a cada sistema que são inevitáveis e que podem ter impacto nas estruturas, sejam as propriedades dos materiais constituintes, as dimensões geométricas da estrutura, ou até mesmo esforços e carregamentos a que as estruturas estejam sujeitas, como tal estes fatores de incerteza têm de ser tidos em conta quando se realiza o processo de Otimização Estrutural (Schueller e Jensen, 2008) [58]; Beck e de Santana Gomes, 2010) [59]. Ao longo dos anos têm sido desenvolvidos diferentes estudos acerca de otimização estrutural tendo em conta a incerteza, tomando os fatores referidos acima como as variáveis de incerteza a incorporar na otimização, entre eles destacam-se

na vertente de propriedades dos materiais (Papadrakakis *et al*, 2005) [60]; (Asadpoure *et al*, 2011) [61], quanto às dimensões como fator de incerteza (Sigmund, 2009) [62] e relativamente aos esforços suportados pelas estruturas existe uma maior panóplia de documentos de estudo, designadamente (Pantelides e Ganzerli, 1998) [63]; (Lombardi e Haftka, 1998) [64]; (Ganzerli e Pantelides, 2000) [65]; [60]; (Kanno e Takewaki, 2006) [66]; (Takezawa *et al*, 2011) [67].

## 2.5.2 Otimização Robusta (RDO)

Existem 2 tipos de formulação para os problemas de Otimização Estrutural considerando incerteza: Otimização baseada em Fiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization* - RBDO) e Otimização Estrutural Robusta (*Robust Design Optimization* - RDO).

Ao longo desta dissertação será abordada e aplicada a segunda metodologia referida, a Otimização Estrutural Robusta (RDO). Este tipo de formulação foi estudado e desenvolvido em primeiro lugar por (Taguchi, 1987) [68], considerado um pioneiro da área de Projeto Robusto. Este, definiu o conceito de robustez como sendo "um estado em que a tecnologia o produto ou o desempenho de um processo tem uma sensibilidade mínima para com os fatores que causam variabilidade (seja no fabrico ou no ambiente de utilização) e que envelhece com um menor custo unitário", que tem sido desenvolvido ao longo do tempo de forma a aumentar a qualidade e fiabilidade de um produto ou projeto, e dos processos de fabrico em engenharia industrial [15]. Em paralelo com Taguchi, outro nome importante da área do Projeto Robusto, (Phadke, 1989) [69], define Projeto Robusto como "uma metodologia da engenharia utilizada para melhorar a produtividade durante a pesquisa e desenvolvimento de forma que produtos de alta qualidade possam ser produzidos rapidamente e a baixo custo".

Tendo por base estas premissas, Taguchi desenvolveu uma metodologia dividida em três fases de forma a incrementar a qualidade de um produto ou processo, minimizando a variação desempenho que pudesse ter, sem eliminar a causa das variações [15]. As três fases desta metodologia são as seguintes, segundo (Beyer e Sendhoff, 2007) [70]:

1. Projeto dos Sistemas: determinar os parâmetros básicos de desempenho do produto e a sua estrutura global;
2. Projeto dos Parâmetros: otimizar os parâmetros de projeto de forma a cumprirem os requisitos de qualidade;
3. Projeto das Tolerâncias: ajuste detalhado dos parâmetros de projeto obtidos na segunda fase.

Na sequência das definições desta metodologia foram diversos os estudos e projetos dedicados ao ramo da Otimização Robusta, que tem sido cada vez mais estudada ao longo

dos anos. Alguns destes avanços e estudos podem ser consultados na dissertação de André Teixeira [15].

### 2.5.3 Formulação do Problema de RDO

Em contraste com a clássica otimização estrutural, os problemas de otimização robusta não possuem uma formulação única [70]. Segundo (Arora, 2011) [71], o objetivo da otimização robusta passa por procurar reduzir a dispersão da função objetivo tendo em conta a incerteza, uma vez que a mesma é equivalente à sensibilidade, o que implica a minimização não só do desvio padrão da função objetivo, como também do valor médio da mesma função. De forma a proceder à resolução deste objetivo é utilizado o método da soma ponderada, podendo a função objetivo da otimização robusta ser definida da seguinte forma:

$$f = \omega_{\mu}\mu_f + \omega_{\sigma}\sigma_f \quad (9)$$

Na qual,  $\omega_{\mu}$  e  $\omega_{\sigma}$  representam os coeficientes que representam o peso (números reais não negativos) e  $\mu_f$  e  $\sigma_f$ , por sua vez representam a média e o desvio padrão da função, respetivamente. No caso de  $\omega_{\mu}$  ser mais elevado, o foco estará mais assente na minimização da função objetivo ao passo que se este tiver um valor mais reduzido, haverá maior ênfase na produção de uma solução robusta.

Já de forma a obter uma expressão normalizada da função  $f$ , representada na equação (2), tem-se a seguinte equação:

$$f = \alpha \frac{\mu_f}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_f}{\sigma^*} \quad (10)$$

De forma a proceder à normalização, substituíram-se os coeficientes de peso e aparece o coeficiente  $\alpha$ , que representa a importância relativa de cada objetivo e é um valor real não negativo compreendido entre 0 e 1. No caso de  $\alpha = 0$ , o problema corresponde a uma minimização do desvio padrão, já para  $\alpha = 1$ , o problema corresponde a uma minimização do valor esperado. De referir ainda que  $\mu^*$  se trata do valor esperado para  $(\omega_{\mu}, \omega_{\sigma}) = (1,0)$ , e  $\sigma^*$  corresponde ao desvio padrão para  $(\omega_{\mu}, \omega_{\sigma}) = (0,1)$ .

Por fim, no caso em que as variáveis não são correlacionadas, a variância da função  $f$ , pode ser obtida através da expressão (3), vinda de [71]:

$$\text{var } f = \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^{NV} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{(x_i)}^2 \quad (11)$$

Sendo esta expressão uma dedução das séries de Taylor aplicada à função  $f$  no ponto do valor médio  $\mu_i$  e representando uma aproximação do primeiro grau.



## PROGRAMA PROAES

### 3.1 Introdução

Como foi referido na introdução, esta dissertação visa dar continuidade ao trabalho realizado por alunos de mestrado com a colaboração e orientação do Professor João Cardoso, com vista à finalização e publicação do Programa PROAES. À semelhança dos programas indicados neste capítulo, o PROAES é um programa didático na área da análise estrutural, particularmente dedicado à vertente de otimização.

É um programa bastante versátil, escrito em linguagem MATLAB, podendo também ser utilizado em ambiente OCTAVE e possui as seguintes funcionalidades [11] :

1. Realizar a análise de modelos estruturais pelo Método dos Elementos Finitos;
2. Calcular derivadas de funções associadas ao desempenho estrutural (performances) em ordem a variáveis de projeto;
3. Realizar análise de fiabilidade de modelos estruturais pelo método FORM;
4. Otimizar modelos de estruturas, considerando constrangimentos associados a medidas de desempenho estrutural e/ou medidas de fiabilidade.

Como foi referido no primeiro capítulo alguns dos objetivos desta dissertação passam por corrigir os aspetos menos positivos do programa, tornando a sua versão final mais eficiente, no entanto o foco principal será a exploração da vertente de otimização do programa, com a criação de diversos exemplos, melhorando assim o PROAES, numa área que como se viu acima neste capítulo é bastante estudada nos tempos recentes e é de elevada importância na engenharia, particularmente na ligação ao processo de projeto. Sendo assim, de seguida será explicado sucintamente o funcionamento do programa, com base no manual de

instruções criado pelos alunos que previamente o desenvolveram, particularmente [11], com foco na ferramenta de otimização.

## 3.2 Funcionamento do Programa

De seguida, serão sucintamente explicados os passos associados ao funcionamento e correta execução do Programa PROAES, baseado em [11].

Existem 3 opções para executar o programa na janela de comandos do mesmo, em ambiente MATLAB ou OCTAVE:

1. >> PROAES
2. >> PROAES ('problema')
3. >> PROAES ('problema','o')

Sendo "problema" uma designação hipotética e meramente ilustrativa, que na realidade representa a designação que o utilizador queira dar ao problema que pretende resolver.

Na 1ª opção, o programa, através da sua interface gráfica pergunta ao utilizador que ficheiro com extensão **.inp** pretende executar e realiza posteriormente a análise de elementos finitos do ficheiro selecionado.

Na 2ª opção, uma vez que na janela de comandos já foi indicada a designação do problema pretendido pelo utilizador, o programa automaticamente e imediatamente executa a análise de elementos finitos com os dados do ficheiro de extensão **.inp** descrita pelo utilizador.

Por fim, na 3ª opção, o programa irá ler os dados do ficheiro da extensão **.inp** indicada pelo utilizador, bem como do ficheiro **opt2ef** (que consiste num componente relacionado com otimização que irá ser explicado no subcapítulo seguinte), executando de seguida a análise de elementos finitos e o cálculo das performances e/ou sensibilidades de acordo com o que está indicado no ficheiro **opt2ef**. Esta opção foi criada com o intuito de permitir que o programa possa ser utilizado para o cálculo de funções de estado limite e respetivas derivadas ou de forma a calcular a função objetivo, os estrangimentos e as respetivas derivadas quando utilizado em paralelo com a ferramenta de otimização que será detalhada de seguida.

Em qualquer um dos 3 casos, o programa cria um ficheiro com a extensão **.out**, que terá o mesmo nome que o ficheiro de extensão **.inp** com que o utilizador deu início à análise, e que englobará todos os dados inseridos, bem como os resultados da análise de elementos finitos.



A figura 8 corresponde ao diagrama de execução do PROAES:

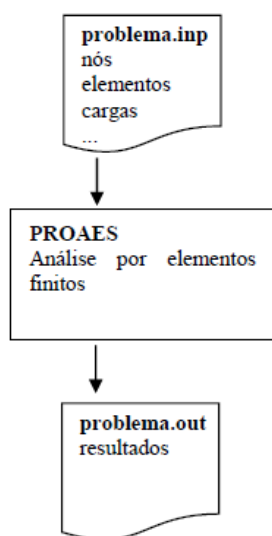


Figura 8 - Diagrama de Execução do Programa PROAES

Já relativamente à estrutura do Programa, dada a sua elevada complexidade, o programa é constituído por 16 sub-rotinas que realizam funções específicas, nomeadamente leitura de dados, realização de cálculos, escrita de resultados e interligação entre componentes do programa, havendo uma rotina principal, que, com base nos dados inseridos irá direccionar e seleccionar as sub-rotinas a utilizar para a análise pretendida. Assim, a estrutura do programa PROAES pode ser descrita através do diagrama apresentado na figura 9.

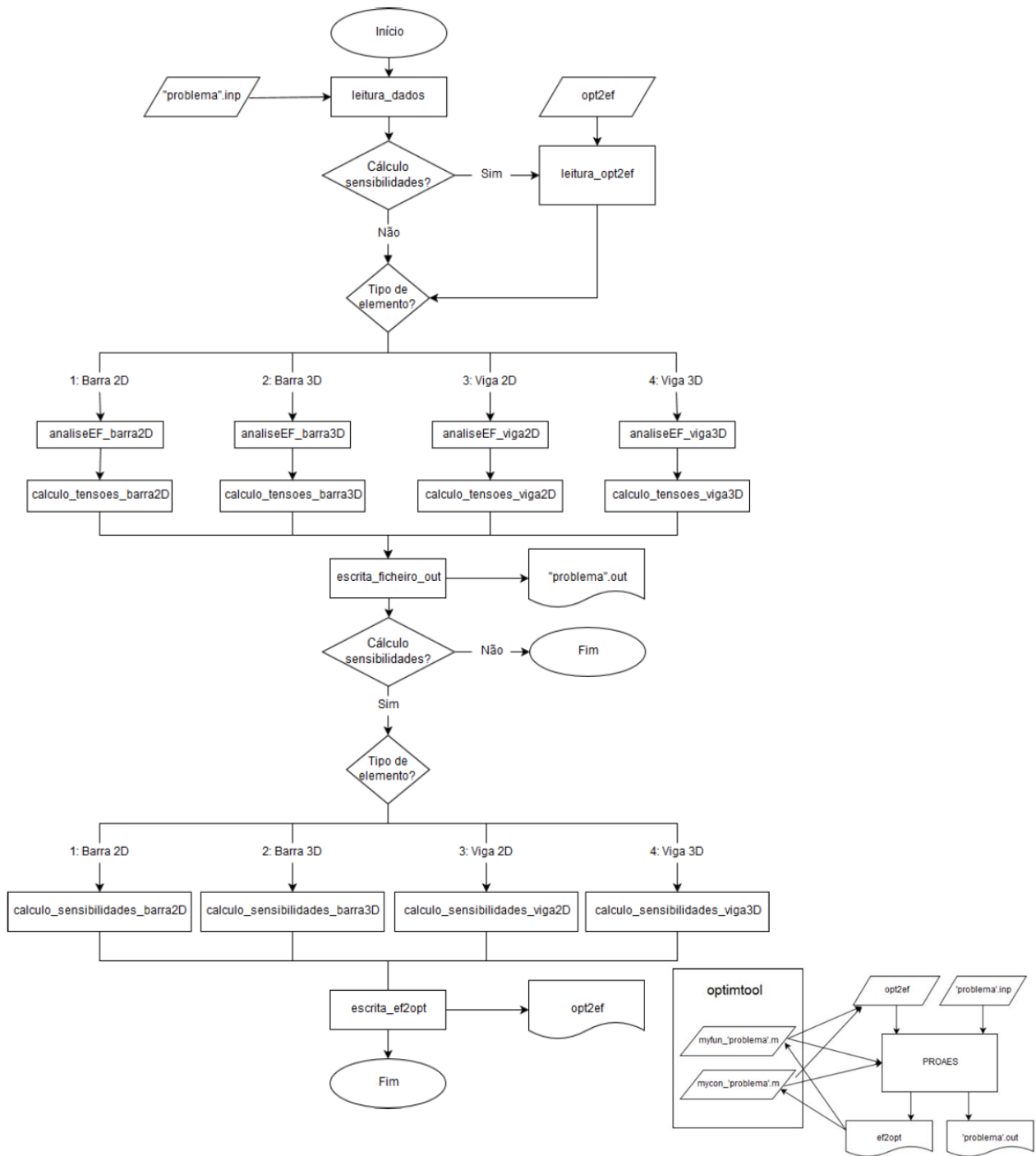


Figura 9 - Estrutura do Programa PROAES, adaptado de [11]

### 3.3 Ferramenta de Otimização (*optimtool*)

Como já foi referido, esta dissertação irá ter um foco particular na componente de otimização de estruturas que pode ser efetuada com recurso ao PROAES, uma vez que este é capaz de calcular a resposta das estruturas e alterar os parâmetros e constrangimentos que condicionam um problema hipotético inicial. Com recurso ao algoritmo de otimização *SQP* (*Sequential Quadratic Programming*), disponível na *toolbox* de otimização do MATLAB (*optimtool*) e também no OCTAVE é possível resolver este tipo de problemas.

Então, com base em [11] e de forma a proceder ao processo de otimização com recurso ao PROAES é necessário criar um ficheiro com os dados da estrutura (**'problema'.inp**) e definir o problema de otimização, ou seja, criar os ficheiros **myfun\_'problema'.m** e **mycon\_'problema'.m**, que correspondem respetivamente aos ficheiros que irão ser chamados pelo MATLAB para calcular as funções objetivo e os constrangimentos do problema, respetivamente. Podem também ser criados, opcionalmente, particularmente na versão OCTAVE do programa, os ficheiros **grad\_myfun\_'problema'.m** e **grad\_mycon\_'problema'.m**, que indicam as derivadas associadas à função objetivo e aos constrangimentos. O ficheiro **opt2ef** já referido anteriormente irá ser escrito pelos ficheiros acima enunciados.

Sendo assim, é possível sintetizar a contribuição do PROAES para o processo de otimização em 4 passos:

1. Criação do ficheiro **opt2ef** a partir do *start point* definido no *optimtool*;
2. Cálculo da função objetivo e constrangimentos por parte do PROAES, que escreverá os resultados no ficheiro **ef2opt**;
3. Análise do ficheiro **ef2opt** de forma a verificar se foi obtida a solução ótima e, caso não se verifique, o ficheiro **opt2ef** é alterado pelo algoritmo;
4. Repetição dos passos 2 e 3 até que não seja possível melhorar a estrutura sem violar um dos constrangimentos.

Na figura abaixo encontra-se ilustrado o processo de otimização no Programa PROAES:

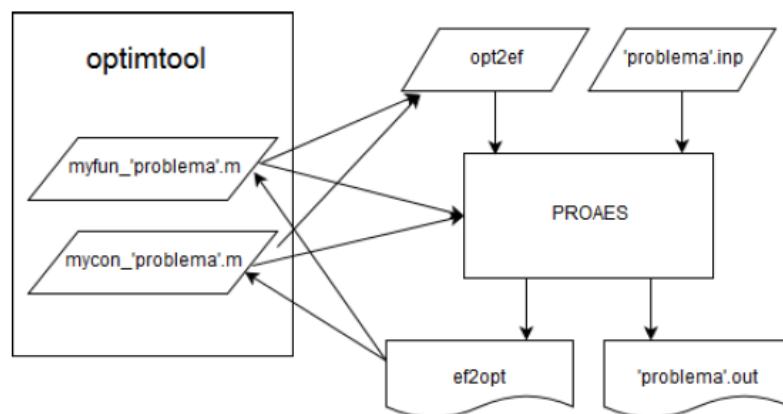


Figura 10 - Otimização no Programa PROAES com a ferramenta *optimtool*

## EXEMPLO DE OTIMIZAÇÃO NO PROAES

Neste capítulo, na sequência da introdução e explicação do Programa PROAES, é realizado um exemplo ilustrativo das capacidades de otimização do Programa.

### 4.1 Exemplo Estrutura 38 Barras

De forma a ilustrar as potencialidades do Programa PROAES no que diz respeito à otimização, foi retirado um exemplo colocado no Manual de Instruções do Programa PROAES, originalmente criado por João Marmeleiro [11] que consiste na otimização de topologia de uma Treliza 2D composta por 38 elementos e 13 nós, estando 3 dos nós com deslocamentos restringidos tanto na horizontal como na vertical e que possui um constrangimento de volume (o que significa que o volume total da estrutura deverá ser inferior a um determinado valor). O exemplo escolhido é particularmente pertinente, uma vez que não só utiliza corretamente e demonstra de forma adequada as potencialidades do Programa PROAES na vertente de otimização, como também servirá de base a um dos casos de estudo aplicados nesta dissertação, presentes no capítulo 4. Na figura 11 encontra-se a configuração inicial da estrutura.

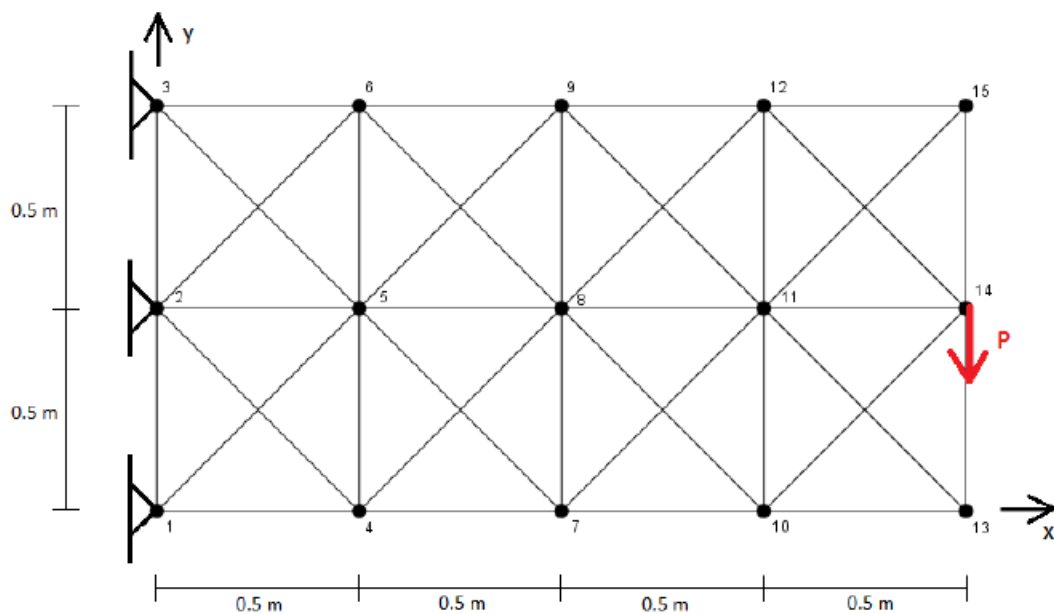


Figura 11 - Configuração inicial da estrutura. Adaptado de [11]

No exemplo apresentado, foi considerada uma força aplicada no nó 14,  $P = 1000 \text{ N}$  e um módulo de *Young*,  $E = 210 \text{ GPa}$ , bastante usual em estruturas de aço. Estas propriedades e os restantes dados correspondentes à estrutura (coordenadas dos nós, elementos, tipo de material) foram elencados no ficheiro input, denominado para o caso **trelica\_38\_barras.inp**, sendo estes dados introduzidos no PROAES através da leitura do ficheiro input. Foram também indicados neste ficheiro as variáveis de projeto (no caso as áreas de secção dos 38 elementos) e as duas performances (o deslocamento do nó 14 e o volume total).

Já a função objetivo, minimização do deslocamento no nó 14 (ponto de aplicação da força), escrita sob a forma **myfun\_trelica\_38\_barras.m** e o constrangimento, limitação do volume total da estrutura, escrito sob a forma **mycon\_trelica\_38\_barras.m** são lidos diretamente pela *optimtool* e responsáveis pela escrita do ficheiro **opt2ef** e por chamar o programa PROAES de forma a calcular a performance deslocamento e sensibilidades da performance em relação às variáveis de projeto (no caso da função objetivo) e de forma a efetuar cálculos análogos para o volume (relativamente ao constrangimento).

Foram definidos também parâmetros específicos para o problema em questão, designadamente:

- A área de secção transversal de cada um dos elementos estar compreendida entre  $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2$  e  $1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , sendo os valores iniciais os segundos referidos;
- O volume da estrutura final não poder ser superior a 10% do volume da estrutura inicial.

Após a realização da otimização, foi obtido o valor de  $1.365809 \times 10^{-5} \text{ m}$  para a função objetivo, o que corresponde ao valor mínimo de deslocamento do nó 14 segundo a direção  $y$  que é possível obter tendo em conta os constrangimentos impostos.

Através da realização de um ficheiro auxiliar, denominado **grafico\_topologia\_optima\_2D.m**, é possível ler os valores das variáveis finais, obtidos através da análise do ficheiro **opt2ef** final e construir no software MATLAB ou OCTAVE uma imagem que permite visualizar a estrutura final após a otimização no PROAES. Este ficheiro auxiliar desenha apenas elementos com área de secção transversal superior a  $5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , sendo que as áreas compreendidas entre  $2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e  $1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  são representadas com uma espessura superior no desenho.

Na figura 12 encontra-se para o exemplo referido o resultado final e a estrutura pós-otimização, sendo possível verificar que, sobram apenas 16 elementos por comparação com os 38 iniciais, o que indica que a otimização topológica pretendida foi bem sucedida e o seu objetivo, que passa pela eliminação das barras desnecessárias para cumprir os objetivos e constrangimentos estabelecidos foi concretizado. De referir que o fenómeno de encurvadura nas barras não foi considerado quer neste exemplo, quer ao longo desta dissertação, podendo ser um tema a abordar futuramente.

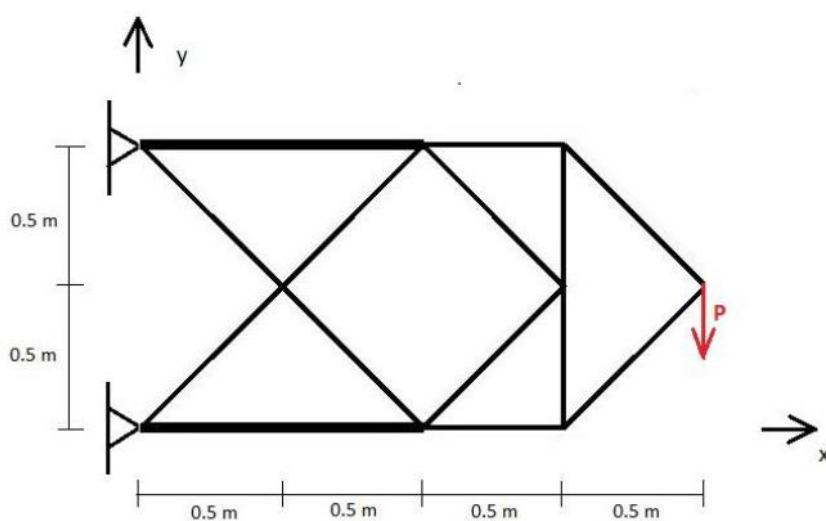


Figura 12 - Configuração final da estrutura, adaptado de [11]

O programa pode fornecer ao *optimtool* os resultados dos cálculos das sensibilidades, para que tal ocorra, é necessário que na versão MATLAB do programa se altere a opção *Approximated by Solver* para *Gradient Supplied* no *optimtool*. A estrutura é igual à apresentada na figura 10, e tabela 1 representa a tabela adaptada de [11] com a comparação dos resultados entre ambos os métodos de cálculo dos gradientes.

Tabela 1 - Tabela de cálculo de gradientes, adaptado de [11]

	<b>Approximated by solver</b>	<b>Gradient Supplied</b>	<b>Diferença</b>
<b>Nº de iterações</b>	151	174	+15.23%
<b>Resultado obtido (m)</b>	$1.365809 \times 10^{-5}$	$1.365809 \times 10^{-5}$	0.00%
<b>Duração (s)</b>	443	38	-91.42%

Já na tabela 2, também adaptada de [11] encontra-se apresentada uma tabela com os valores das áreas das secções transversais obtidas de ambos os métodos.



Tabela 2 - Tabela das áreas de secções transversais adaptada de [11]

<b>E.</b>	<b><i>Approximated by solver</i></b> <b>(m<sup>3</sup>)</b>	<b><i>Gradient Supplied</i></b> <b>(m<sup>3</sup>)</b>	<b>E.</b>	<b><i>Approximated by solver</i></b> <b>(m<sup>3</sup>)</b>	<b><i>Gradient Supplied</i></b> <b>(m<sup>3</sup>)</b>
1	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	20	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
2	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	21	1.404877×10 <sup>-3</sup>	1.394972×10 <sup>-3</sup>
3	4.183360×10 <sup>-3</sup>	4.183268×10 <sup>-3</sup>	22	1.959754×10 <sup>-3</sup>	1.972201×10 <sup>-3</sup>
4	1.970472×10 <sup>-3</sup>	1.972219×10 <sup>-3</sup>	23	1.434034×10 <sup>-5</sup>	5.910662×10 <sup>-7</sup>
5	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	24	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
6	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	25	1.164282×10 <sup>-5</sup>	1.141652×10 <sup>-6</sup>
7	3.815908×10 <sup>-6</sup>	6.141446×10 <sup>-7</sup>	26	1.958578×10 <sup>-3</sup>	1.970812×10 <sup>-3</sup>
8	1.970485×10 <sup>-3</sup>	1.972289×10 <sup>-3</sup>	27	1.402848×10 <sup>-3</sup>	1.394795×10 <sup>-3</sup>
9	4.186467×10 <sup>-3</sup>	4.184004×10 <sup>-3</sup>	28	1.383810×10 <sup>-3</sup>	1.395713×10 <sup>-3</sup>
10	8.220965×10 <sup>-6</sup>	8.102423×10 <sup>-7</sup>	29	1.386785×10 <sup>-3</sup>	1.394300×10 <sup>-3</sup>
11	7.424001×10 <sup>-6</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	30	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
12	4.175887×10 <sup>-3</sup>	4.182140×10 <sup>-3</sup>	31	1.972217×10 <sup>-3</sup>	1.972288×10 <sup>-3</sup>
13	1.166740×10 <sup>-5</sup>	1.152880×10 <sup>-6</sup>	32	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
14	1.959233×10 <sup>-3</sup>	1.970977×10 <sup>-3</sup>	33	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
15	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	34	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
16	1.959174×10 <sup>-3</sup>	1.971326×10 <sup>-3</sup>	35	1.972217×10 <sup>-3</sup>	1.972238×10 <sup>-3</sup>
17	1.430857×10 <sup>-5</sup>	6.583133×10 <sup>-7</sup>	36	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
18	4.173761×10 <sup>-3</sup>	4.182862×10 <sup>-3</sup>	37	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>
19	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>	38	1.000000×10 <sup>-8</sup>	1.000000×10 <sup>-8</sup>

## CASOS DE ESTUDO E RESULTADOS

Neste capítulo serão explicados os casos de estudo utilizados nesta dissertação, designadamente no que diz respeito à apresentação dos problemas em questão, objetivos, bem como acerca da formulação dos mesmos.

Encontram-se apresentados os 3 exemplos realizados e cujos objetivos passam por definir adequadamente tanto as variáveis de configuração, como a metodologia de cálculo das respetivas derivadas, como também por testar as capacidades do PROAES na realização de otimização de configuração, particularmente combinando simultaneamente, à semelhança do que já foi estudado em alguns exemplos presentes no capítulo 2, este tipo de otimização com otimização topológica.

No caso dos dois primeiros exemplos será feita uma análise comparativa com os exemplos previamente desenvolvidos, uma vez que serão utilizados os mesmos parâmetros das dissertações de João Marmeleiro [11] e André Teixeira [15], uma vez que o terceiro exemplo foi construído de raiz para testar as competências do PROAES em realização simultânea de otimização topológica e de configuração numa estrutura 3D distinta não haverá este tipo de análise comparativa, havendo no entanto uma análise dos resultados. Neste capítulo encontram-se também apresentados todos os resultados obtidos.

## 5.1 Estrutura 38 Barras 2D

### 5.1.1 Metodologia e Exemplo Utilizado

O primeiro exemplo estudado nesta dissertação baseia-se no exemplo realizado por João Marmeleiro [11], e que se encontra descrito no capítulo 4, uma vez que foi utilizado como exemplo de referência do Manual de Instruções do Programa PROAES. Sendo assim, será apenas feito um breve resumo dos parâmetros e a estrutura inicial considerada pode ser observada na figura 11.

Trata-se, portanto, de uma estrutura 2D composta por 15 nós, ligados entre si por 38 elementos do tipo barra. A estrutura possui apoios fixos nos nós 1, 2 e 3, isto é, estes 3 nós possuem restrição aos seus movimentos na direção  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical). A estrutura está ainda sujeita a uma carga concentrada,  $P = 1000 N$ , no sentido negativo da direção  $y$ , considerando o mesmo referencial presente na figura 11. Todos os elementos da estrutura possuem o mesmo módulo de elasticidade (módulo de *Young*),  $E = 210 GPa$ , que corresponde aos valores típicos de estruturas em aço e as áreas de secção transversal iniciais são iguais em todos os elementos  $A_i = 1.0 \times 10^{-2} m^2$ . As variáveis de projeto do problema serão, a nível topológico, as áreas da secção transversal de todos os elementos (38 elementos, por consequência, 38 variáveis), e, a nível de configuração, as coordenadas dos nós (no caso de uma barra 2D, serão 2 por cada nó, posição  $x$  e posição  $y$ ) dos nós da estrutura que não estão sujeitos a carregamentos ou restrições, isto é, as variáveis de projeto de configuração correspondem às posições  $x$  e  $y$  dos nós 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 15, dado que os nós 1, 2 e 3 têm o seu movimento restringido e o nó 14 se encontra sujeito a uma carga. Representa assim o problema uma otimização distribuição do volume total da estrutura pelas 38 barras que a compõem e otimização dos locais onde os nós estarão presentes de forma a obter a melhor configuração possível para cumprir os objetivos estabelecidos.

Passando agora à formulação do problema, uma vez que um dos objetivos será ter um termo de comparação com o exemplo previamente realizado, tanto a definição da função objetivo como os constrangimentos impostos serão idênticos aos de [11]. Ou seja, este problema terá como objetivo uma minimização da *compliance* (flexibilidade) da estrutura, ou seja, maximizando a sua rigidez, tendo de respeitar um constrangimento de volume, isto é, o seu volume não poderá ser superior a um limite definido. Sendo assim, e recorrendo à formulação clássica de um problema de otimização, indicada na equação (1), tem-se para este exemplo:

$$\begin{aligned}
& \min_x \quad f(x) = -1 \times d \\
& \text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^N A_i \times L_i \leq V_{adm} \quad ; i = 1, \dots, N \quad (12) \\
& \quad \quad \quad 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad ; i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Em que  $d$  representa o deslocamento do nó 14, e se encontra negativo, dado o sentido da aplicação da força, de notar que a função  $f(x)$  não corresponde à *compliance* mas a sua minimização é equivalente a minimizar o deslocamento dado que a carga que está aplicada no nó 14 é constante. De notar também que o valor da área de secção transversal de cada elemento inicialmente corresponde a  $A_i = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , podendo estar compreendido entre  $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ . De notar ainda que  $L_i$  corresponde ao comprimento de cada elemento barra e  $V_{adm}$  corresponde ao volume da configuração final da estrutura. Quanto aos limites impostos ao deslocamento das posições dos nós, a sua variação seria progressiva, isto é os nós 4, 5 e 6, poderiam deslocar-se 0.2 m a partir da sua posição inicial, em cada sentido das direções  $x$  e  $y$ , os nós 7, 8 e 9 poderiam deslocar-se 0.3 m em cada sentido das direções  $x$  e  $y$ , os nós 10, 11 e 12 poderiam deslocar-se 0.4 m em cada sentido das direções  $x$  e  $y$ , e os nós 13 e 15 poderiam deslocar-se 0.5 m em cada sentido das direções  $x$  e  $y$ .

Estando explicada a formulação do problema, passou-se de seguida à construção do mesmo no Programa PROAES.

O primeiro passo consiste na criação do ficheiro input, no caso denominado **OT\_trelca\_38\_barras.inp**, que contém toda a informação necessária acerca da estrutura, de forma à análise estrutural ser executada, designadamente a definição dos nós e elementos, definição do material e respetivo módulo de elasticidade, definição das características das secções transversais (correspondência com o número de elemento e área), definição da carga aplicada, com o respetivo módulo, direção e sentido, restrição de movimento dos nós apoiados, indicação das 60 variáveis de projeto (38 áreas de secção e 22 posições dos nós) e por fim as 2 performances, que correspondem ao deslocamento do nó 14 e ao volume da estrutura respetivamente.

São também escritos os ficheiros correspondentes à função objetivo e respetivas derivadas, designados **obj\_OT\_trelica\_38\_barras.m** e **grad\_obj\_OT\_trelica\_38\_barras.m**, cujo propósito passa por escrever o ficheiro **opt2ef**, definindo o valor das 60 variáveis de projeto (38 áreas de secção e 22 posições dos nós) e das 2 performances indicadas e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os cálculos relativos à performance deslocamento e às respetivas sensibilidades em relação às variáveis de projeto.

No que diz respeito aos ficheiros correspondentes ao constrangimento e respetivas derivadas, são escritos os ficheiros **con\_OT\_trelica\_38\_barras.m** e **grad\_con\_OT\_trelica\_38\_barras.m**, ficheiros estes cujo propósito passa também pela escrita do ficheiro **opt2ef** e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os restantes cálculos auxiliares associados que sejam necessários.

São ainda escritos mais 2 ficheiros, denominados **inicializacao\_OT\_Trelica\_38\_barras.m** e **grafico\_topologia\_optima\_PROAES.m**.

O primeiro é composto pela definição inicial dos valores das 60 variáveis de projeto selecionadas, bem como pela indicação dos limites superiores e inferiores entre os quais as variáveis devem estar compreendidas. O seu objetivo passa por conjugar as 4 funções previamente criadas (associadas às funções objetivo e constrangimentos) e chamar o algoritmo de forma a proceder à otimização. De notar que a tolerância à convergência selecionada foi de  $1 \times 10^{-12}$ , e o número de iterações estabelecido foi de 1000, de forma à otimização ser realizada com bastante rigor. O algoritmo utilizado neste exemplo foi o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*), uma vez que este se trata de um algoritmo de programação não-linear que permite a realização de otimizações não-lineares com constrangimentos, e, além disso trata-se de um algoritmo bastante versátil que é adequado à realização de otimização com um número reduzido de variáveis, como é o caso. De referir ainda que o software onde o Programa PROAES foi executado nestes exemplos foi o software *OCTAVE*.

Já o segundo ficheiro, como o próprio nome indica irá proceder à realização de um gráfico que permitirá a visualização da estrutura final otimizada. Este ficheiro desenha apenas os elementos cuja área de secção transversal é superior a  $1 \times 10^{-4} m^2$ , desenhando com maior espessura elementos com área superior a  $2.5 \times 10^{-3} m^2$  e com menor espessura elementos com área inferior a  $2.5 \times 10^{-3} m^2$  incluídos ambos dentro dos limites impostos.

## 5.1.2 Resultados

Tendo todos os ficheiros criados e todos os componentes necessários definidos procedeu-se então à otimização de configuração e topologia da estrutura de 38 barras 2D, tendo-se obtido uma estrutura com a seguinte configuração:

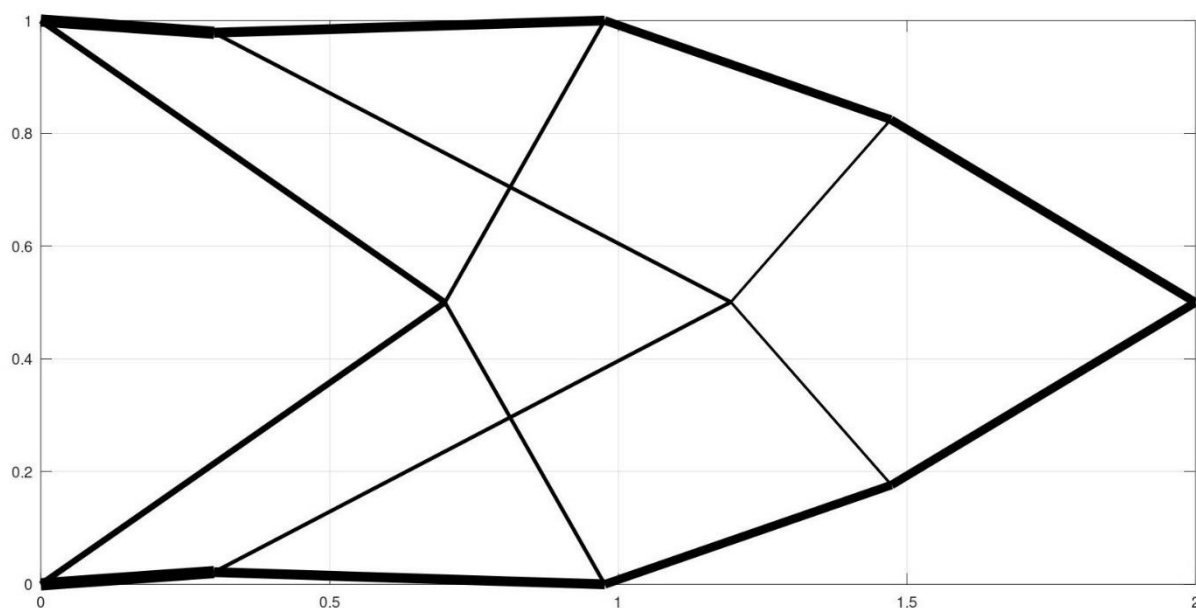


Figura 13 - Configuração Final Exemplo 38 Barras 2D

Como é possível verificar, das 38 barras iniciais que compunham a estrutura, apenas 16 fazem parte da estrutura final e é possível também verificar o movimento dos diversos nós na estrutura, fazendo variar conseqüentemente o tamanho original das barras. De notar que ao contrário da estrutura final obtida por João Marmeleiro [11], neste caso, a estrutura procura assumir uma configuração triangular desde sensivelmente o ponto médio e a configuração final de todas as barras leva a crer que esta solução será bastante estável e que a otimização de configuração se processou com sucesso.

Na figura 14 encontra-se apresentada a comparação entre a estrutura inicial e a estrutura final após a realização combinada entre otimização topológica e otimização de configuração.

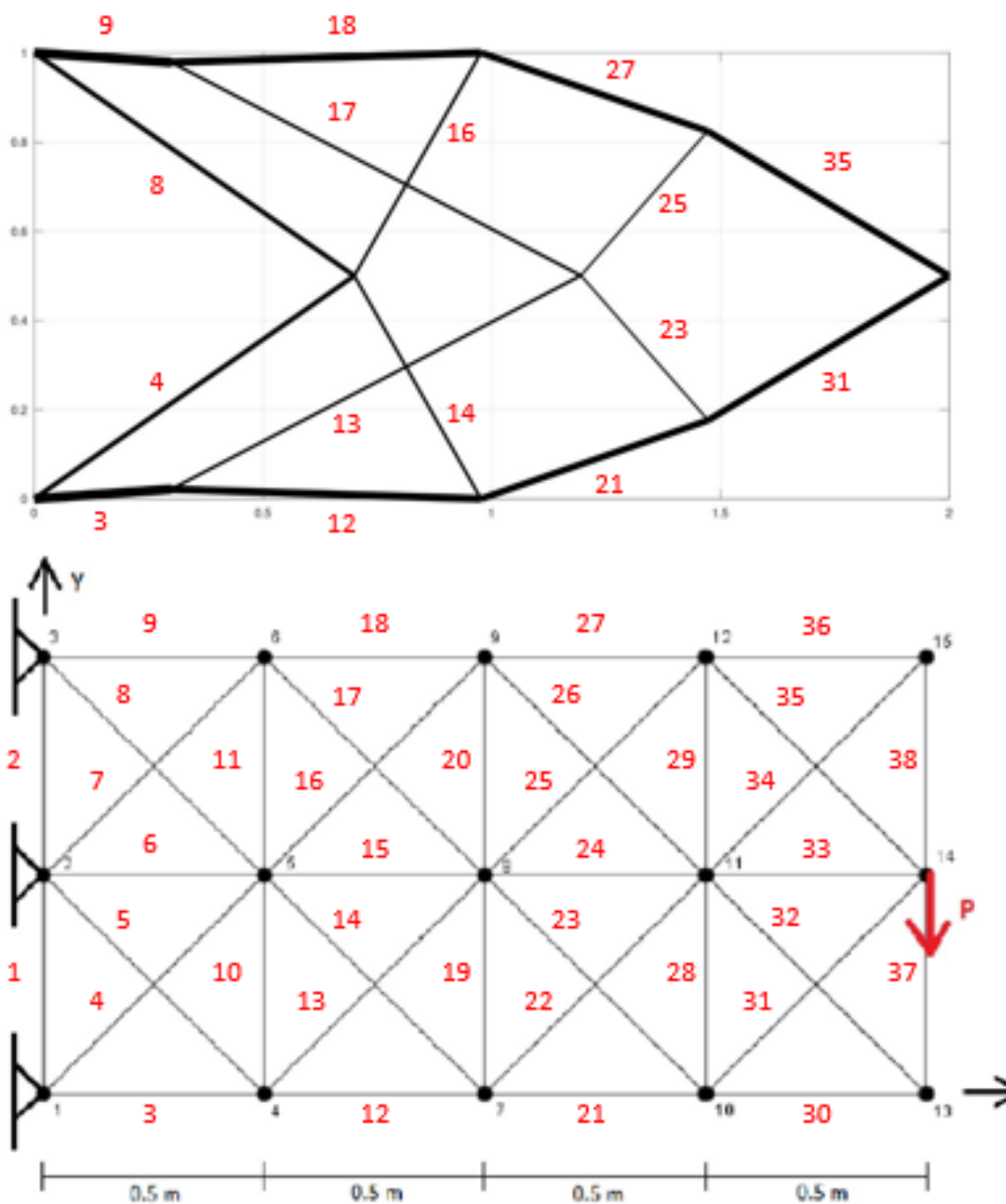


Figura 14 - Comparação entre configuração inicial e final da estrutura 38 Barras 2D

Já na figura 15, é possível observar a comparação entre a estrutura final obtida com recurso apenas a otimização topológica e a estrutura que engloba otimização de configuração na resolução do problema.

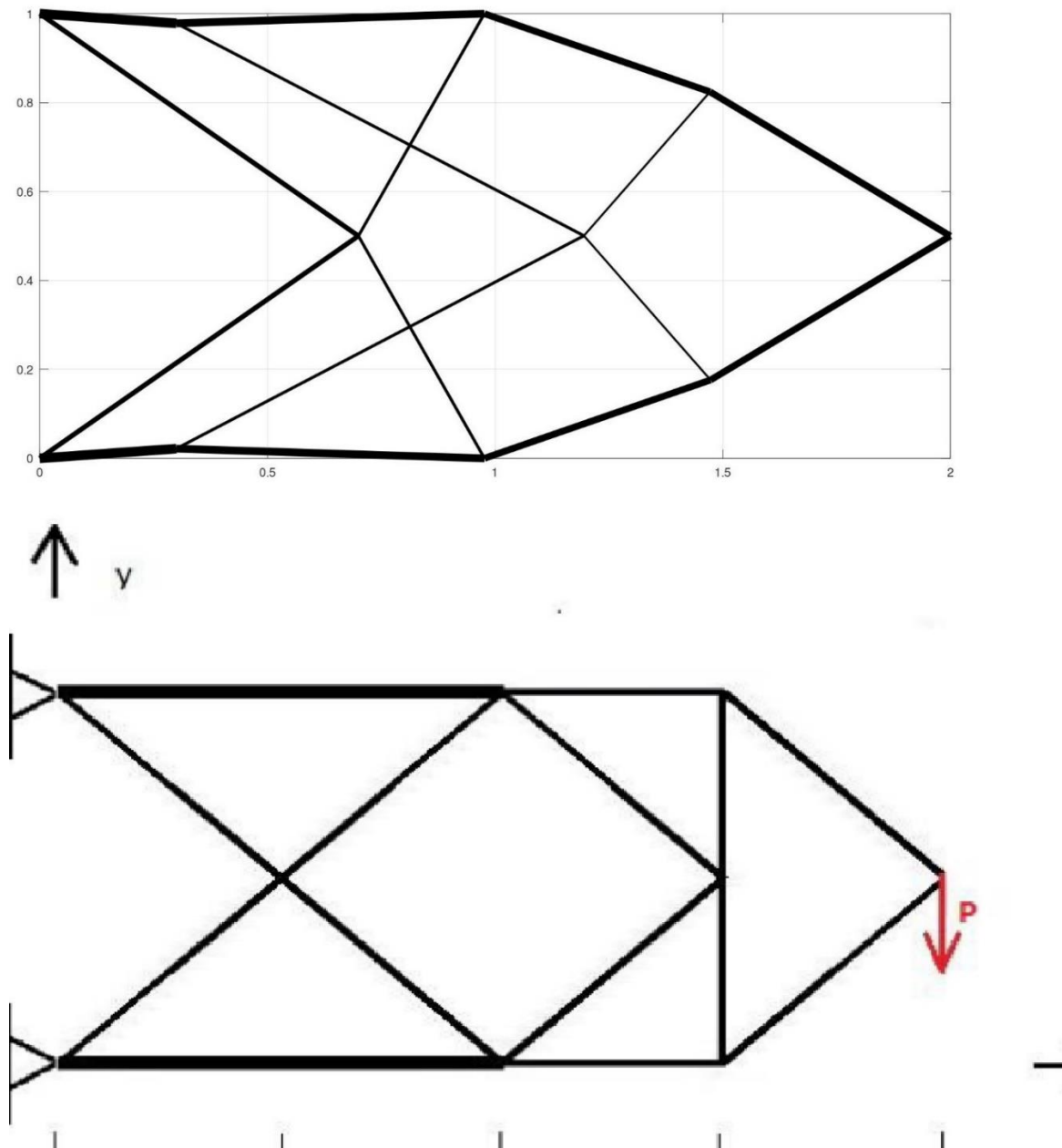


Figura 15 - Comparação entre Configuração final com Otimização Topológica e Otimização Combinada Estrutura 38 Barras 2D



Tabela 3 - Áreas de Secção Transversal dos Elementos na Configuração Final

Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )		Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )
1	1.000000000000e-08		20	1.000000000000e-08
2	1.000000000000e-08		21	3.127453351227e-03
3	4.576020669381e-03		22	1.000000000000e-08
4	1.996248766286e-03		23	6.607045938566e-04
5	6.650297960438e-05		24	1.000000000000e-08
6	1.000000000000e-08		25	6.599159148630e-04
7	6.612784563929e-05		26	1.000000000000e-08
8	1.997124109501e-03		27	3.126149701990e-03
9	4.574913963318e-03		28	1.000000000000e-08
10	1.000000000000e-08		29	1.000000000000e-08
11	1.000000000000e-08		30	5.472641267236e-08
12	3.591990816328e-03		31	2.954243568662e-03
13	1.064170518691e-03		32	1.000000000000e-08
14	1.326718550015e-03		33	1.000000000001e-08
15	1.000000000000e-08		34	1.000000000001e-08
16	1.325275449673e-03		35	2.953599662466e-03
17	1.064728998835e-03		36	5.482944798720e-08
18	3.590092803920e-03		37	1.213024446963e-07
19	1.000000000000e-08		38	1.209140744544e-07

A tabela 3 complementa ainda mais a informação dos gráficos apresentados anteriormente, uma vez que permite perceber quais os elementos, dos 16 finais, com maior preponderância dentro da estrutura, que varia consoante a área dos mesmos, isto é, quanto maior for a área de um elemento após a realização da otimização, maior será a sua importância para a estabilidade da estrutura final. Nesta tabela destacam-se os elementos sombreados num tom mais escuro, que correspondem a alguns dos elementos dispensáveis, os elementos destacados atingiram o limite mínimo imposto para a variação de área durante a otimização e, como tal, foram eliminados da configuração final. Igualmente eliminados do gráfico e das imagens representativas da configuração final encontram-se os elementos sombreados num tom mais claro e a negrito, que, apesar de terem uma área superior à área mínima, possuem dimensões pouco significativas podendo assim ser considerados desprezáveis para a estrutura final.

Adicionalmente, foi também construída uma segunda tabela neste exemplo, semelhante à tabela 1, obtida por João Marmeleiro [11], e que indica não só o tempo decorrido na simulação, como também o nº de iterações necessárias para a obtenção da configuração final e ainda o valor final da função objetivo, que corresponde naturalmente ao deslocamento do nó 14. Assim, na tabela 2, encontra-se a informação mencionada.

Tabela 4 - Valores finais pós-simulação Exemplo 1

Nº de iterações	Tempo de simulação (s)	Deslocamento nó 14 (m)
839	1019.574	1.1099e-05

Comparando com a tabela 1, que corresponde aos valores análogos obtidos por João Marmeleiro [11], aquando da realização de otimização topológica partindo da mesma estrutura inicial notamos desde já diferenças notórias. O número de iterações e o tempo decorrido nesta simulação superam largamente os valores de Marmeleiro [11]. Tal poderá por um lado estar relacionado com as capacidades dos equipamentos utilizados e pelo software ser distinto (OCTAVE ao invés do MATLAB). No entanto a diferença acaba por ser tão díspar a favor da otimização topológica combinada com otimização de configuração que tal pode indicar que a solução ótima obtida será mais próxima da solução ideal com otimização combinada, o que acaba por ser corroborado quando se comparam os valores da função objetivo (a minimização do deslocamento do nó 14), que possui um valor inferior com a utilização de variáveis de configuração.

## 5.2 Estrutura 38 Barras 2D com RDO

### 5.2.1 Metodologia e Exemplo Utilizado

O segundo exemplo realizado nesta dissertação combina três tipos de otimização, já conceptualmente explicados e resumidos no segundo capítulo, otimização de configuração, otimização topológica e otimização robusta (RDO). Partindo de um dos casos de estudo da dissertação de André Teixeira [15], cuja figura 18 representa o ponto inicial:

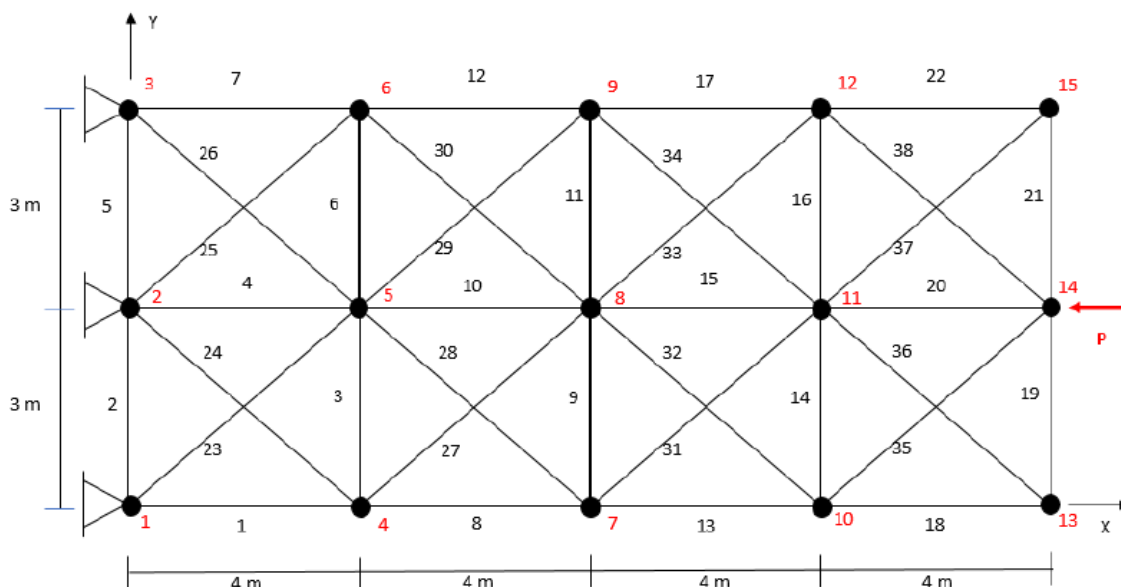


Figura 16 - Configuração Inicial Exemplo André Teixeira, adaptado de [15]

Como é possível observar, à semelhança de João Marmeleiro, a estrutura estudada na dissertação de André Teixeira consiste numa estrutura 2D contendo 38 elementos barra 2D, ligados entre si por 15 nós, no entanto além da construção da estrutura a nível de definição do número de cada barra e nó, os elementos possuem dimensões distintas, com as barras horizontais com um comprimento de 4 m e as barras verticais com um comprimento de 3 m, inferindo-se assim, pelo teorema de Pitágoras que as barras diagonais terão um comprimento de 5 m. A estrutura possui apoios fixos nos nós 1, 2 e 3, restringindo o seu movimento nas direções x e y e tem uma força aplicada no sentido negativo do eixo das abcissas (x), de módulo  $P = 1000 N$ . Todas as barras da estrutura são compostas pelo mesmo material, cujo módulo de elasticidade (módulo de *Young*) corresponde a  $E = 210 GPa$ , uma vez mais típico das

estruturas em aço e todas as barras possuem também a mesma área de secção transversal inicial  $A_i = 3.14159 \times 10^{-4} m^2$ .

À semelhança do primeiro exemplo aplicado nesta dissertação o objetivo do problema de otimização estrutural será minimizar simultaneamente o valor esperado da *compliance* (flexibilidade) e o seu desvio padrão, ou seja, maximizar a rigidez da estrutura tendo de respeitar um constrangimento de volume total. De notar que como se trata de um problema com otimização robusta, será necessário definir um parâmetro de incerteza, que, neste caso corresponderá ao módulo de elasticidade do material.

Posto isto e através da aplicação das equações apresentadas no capítulo 2 e subcapítulo referente a otimização robusta (RDO), particularmente a equação (10) podemos passar à formulação do problema, segundo a formulação clássica de problemas de otimização:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f = \alpha \frac{\mu_f}{\mu^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_f}{\sigma^*} \\ \text{Sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^N A_i \times L_i \leq V_{adm} \quad ; i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (13)$$

$$1 \times 10^{-8} m^2 \leq A_i \leq 3.14 \times 10^{-4} m^2 \quad ; i = 1, \dots, n$$

Nestas equações a função  $f$  representa, naturalmente, mais uma vez a *compliance* da estrutura, a variável que se pretende minimizar e  $\mu_f$  e  $\sigma_f$ , por sua vez representam a média e o desvio padrão da função, respetivamente. No caso de  $\omega_\mu$  ser mais elevado, o foco estará mais assente na minimização da função objetivo ao passo que se este tiver um valor mais reduzido, haverá maior ênfase na produção de uma solução robusta. Já o coeficiente  $\alpha$ , que representa a importância relativa de cada objetivo e é um valor real não negativo compreendido entre 0 e 1. No caso de  $\alpha = 0$ , o problema corresponde a uma minimização do desvio padrão, já para  $\alpha = 1$ , o problema corresponde a uma minimização do valor esperado. De referir ainda que  $\mu^*$  se trata do valor esperado para  $(\omega_\mu, \omega_\sigma) = (1,0)$ , e  $\sigma^*$  corresponde ao desvio padrão para  $(\omega_\mu, \omega_\sigma) = (0,1)$ .

O referido desvio padrão da *compliance* pode ser calculado através da seguinte equação, baseada naturalmente na equação (11):

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{NV} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{(x_i)}^2} \quad (14)$$

Estando explicada a formulação do problema, passou-se de seguida à construção do mesmo no Programa PROAES.

O primeiro passo consiste na criação do ficheiro input, no caso denominado **trelica\_38\_l.inp**, que contém toda a informação necessária acerca da estrutura, de forma à análise estrutural ser executada, designadamente a definição dos nós e elementos, definição do material e respetivo módulo de elasticidade, definição das características das secções transversais (correspondência com o número de elemento e área), definição da carga aplicada, com o respetivo módulo, direção e sentido, restrição de movimento dos nós apoiados, indicação das 98 variáveis de projeto (38 áreas de secção, 22 posições dos nós e 38 módulos de elasticidade, um por cada barra) e por fim as 2 performances, que correspondem ao volume da estrutura e deslocamento do nó 14 respetivamente.

São também escritos os ficheiros correspondentes à função objetivo e respetivas derivadas, neste caso englobados apenas num único ficheiro designado **myfun\_trelica\_38\_l.m**, cujo propósito passa por escrever o ficheiro **opt2ef**, definindo o valor das 98 variáveis de projeto (38 áreas de secção, 22 posições dos nós e 38 módulos de elasticidade) e das 2 performances indicadas e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os cálculos relativos à performance deslocamento e às respetivas sensibilidades em relação às variáveis de projeto. Este ficheiro é ainda responsável por abrir o ficheiro **ef2opt**, lendo o valor do deslocamento, que será idêntico ao esperado,  $\mu_f$ , calcular também o desvio padrão da função  $\sigma_f$  e calcular a soma ponderada destes valores para o coeficiente de peso  $\alpha$  definido. De notar que devido à diferença da ordem de grandeza dos dois termos da função objetivo é necessário fazer uma primeira iteração com a equação não normalizada, de modo a obter os valores de  $\mu^*$  e  $\sigma^*$  e posteriormente realizar a análise dos dados na forma normalizada.

No que diz respeito os ficheiros correspondentes ao constrangimento e respetivas derivadas, compactados num único ficheiro denominado **mycon\_trelica\_38\_l.m**, cujo propósito passa também pela escrita do ficheiro **opt2ef** e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os restantes cálculos auxiliares associados que sejam necessários.

São ainda escritos mais 2 ficheiros, denominados **inicializacao\_OT\_Trelica\_38\_barras.m** e **grafico\_topologia\_optima\_PROAES.m**.

O primeiro é composto pela definição inicial dos valores das 98 variáveis de projeto selecionadas, bem como pela indicação dos limites superiores e inferiores entre os quais as variáveis devem estar compreendidas. O seu objetivo passa por conjugar as funções previamente criadas (associadas às funções objetivo e constrangimentos) e chamar o algoritmo de forma a proceder à otimização. De notar que a tolerância à convergência selecionada foi de  $1 \times 10^{-12}$ , e o número de iterações estabelecido foi de 400, de forma à otimização ser realizada com bastante rigor. O algoritmo utilizado neste exemplo foi o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*), uma vez que este se trata de um algoritmo de programação não-linear que permite a realização de otimizações não-lineares com constrangimentos, e, além disso trata-se de um algoritmo bastante versátil que é adequado à realização de otimização com um número reduzido de variáveis, como é o caso. De referir ainda que o software onde o Programa PROAES foi executado nestes exemplos foi o software *OCTAVE*.

Já o segundo ficheiro, como o próprio nome indica irá proceder à realização de um gráfico que permitirá a visualização da estrutura final otimizada. Este ficheiro desenha apenas os elementos cuja área de secção transversal é superior a  $1 \times 10^{-5} m^2$ , desenhando progressivamente elementos com maior área, com maior espessura, desde que incluídos dentro dos limites impostos.

## 5.2.2 Resultados

Na dissertação de André Teixeira [15] são realizados exemplos contemplando diferentes valores de variabilidade (10%, 20% e 30%), bem como valores do coeficiente de peso  $\alpha$  a variar de 0.1 em 0.1 entre 0 e 1. No entanto, uma vez que o propósito desta dissertação não é apenas o estudo de otimização de configuração combinada com otimização robusta e um dos objetivos será a comparação entre otimização robusta isolada com ambos os processos simultâneos, foi utilizada apenas a variabilidade de 10% e foram selecionados 3 valores do coeficiente de peso  $\alpha$ , neste caso  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  e um valor arbitrário entre ambos, o escolhido acabou por ser  $\alpha = 0.1$ .

Para o caso  $\alpha = 0$ , uma vez que o primeiro termo da equação descrita em (13) passa a ser nulo, este acaba por corresponder a um problema de minimização do desvio padrão do

deslocamento. A figura 17 representa o resultado obtido através da combinação de otimização topológica, robusta e de configuração.

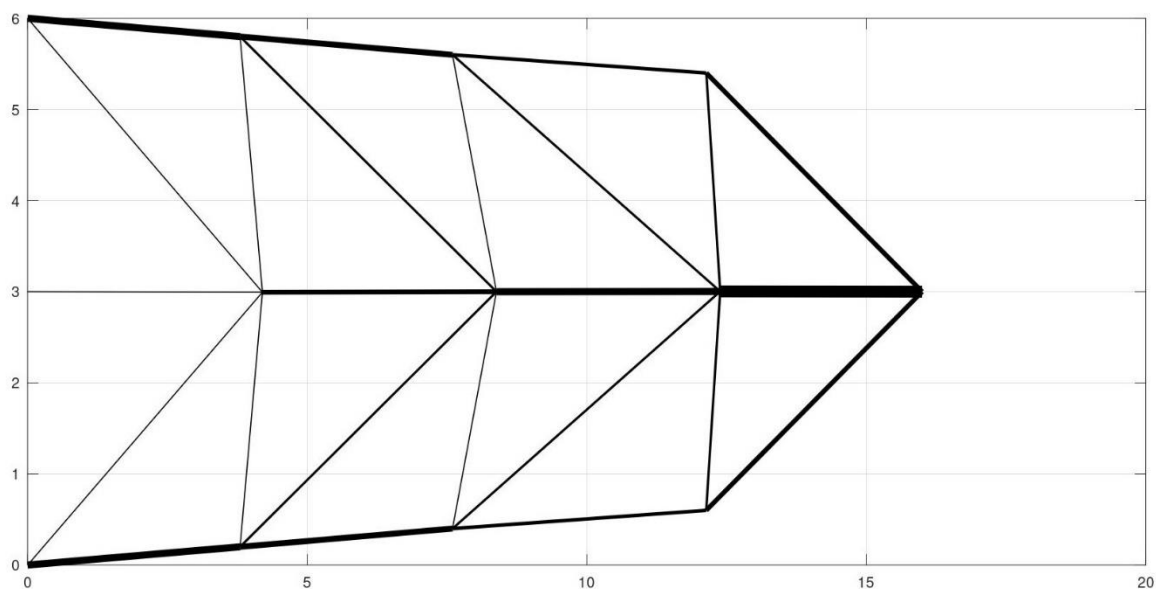


Figura 17 - Otimização de configuração combinada com RDO para  $\alpha = 0$

Como é possível verificar, das 38 barras iniciais que compunham a estrutura, apenas 22 fazem parte da estrutura final e é possível também verificar o movimento dos diversos nós na estrutura, fazendo variar conseqüentemente o tamanho original das barras. De notar que ao contrário da estrutura inicial, a estrutura procura assumir uma configuração triangular desde sensivelmente os seus nós apoiados e a configuração final de todas as barras leva a crer que esta solução será bastante estável e que a otimização de configuração se processou com sucesso.

Como se poderá identificar na figura 18, que efetua a comparação entre esta estrutura e a estrutura ótima obtida por André Teixeira, apesar de possuírem o mesmo número de barras na configuração final, a sua orientação é bastante distinta.

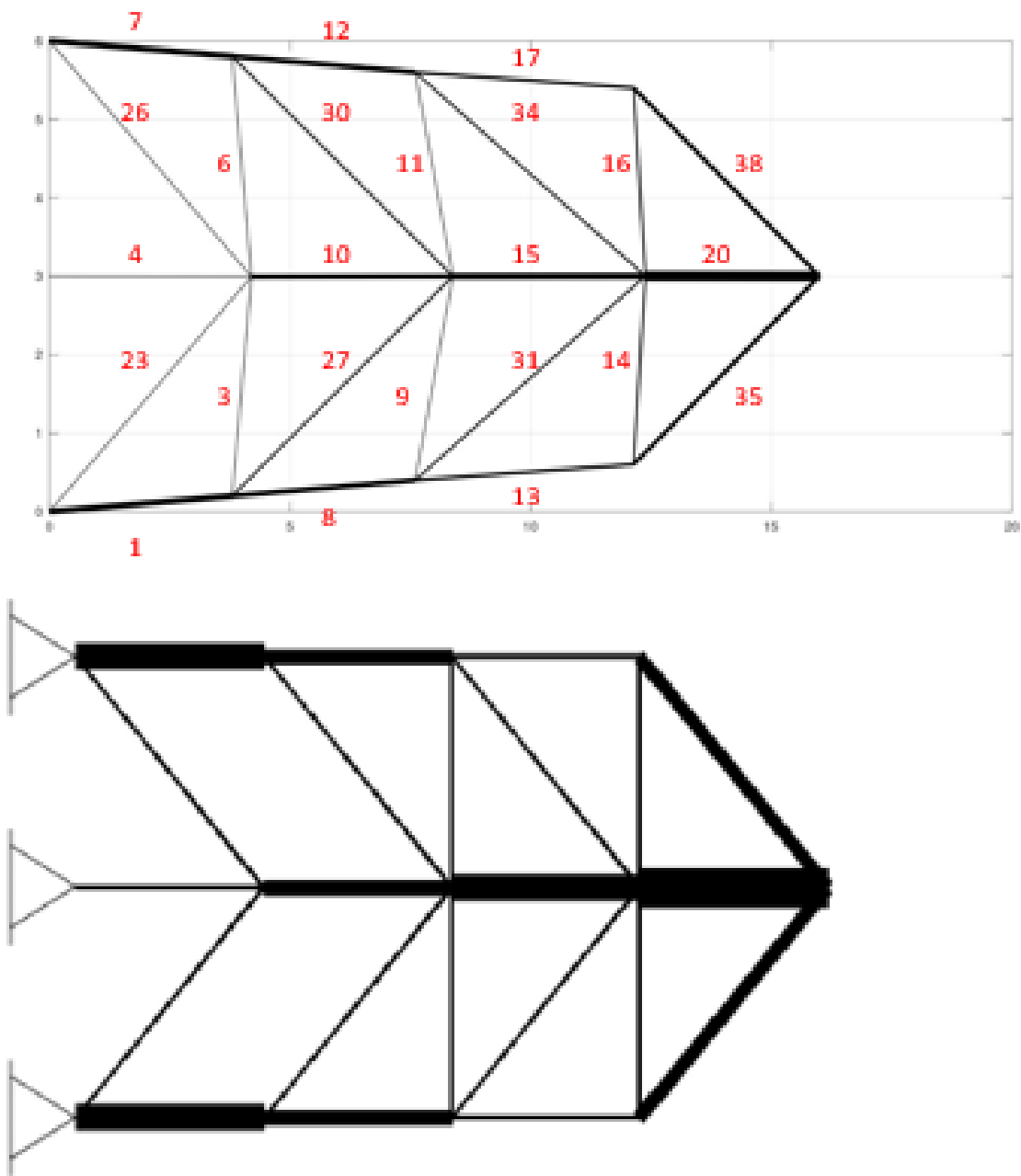


Figura 18 - Comparação entre Otimização RDO e Otimização combinada para  $\alpha = 0$

De seguida apresenta-se a estrutura obtida para  $\alpha = 0.1$ , trata-se de uma estrutura bastante semelhante a  $\alpha = 0$ , com apenas 22 barras das 38 iniciais a manterem-se na estrutura e o comportamento da mesma é idêntico, com um afunilamento progressivo da estrutura, através do movimento dos nós e consequentemente das barras.



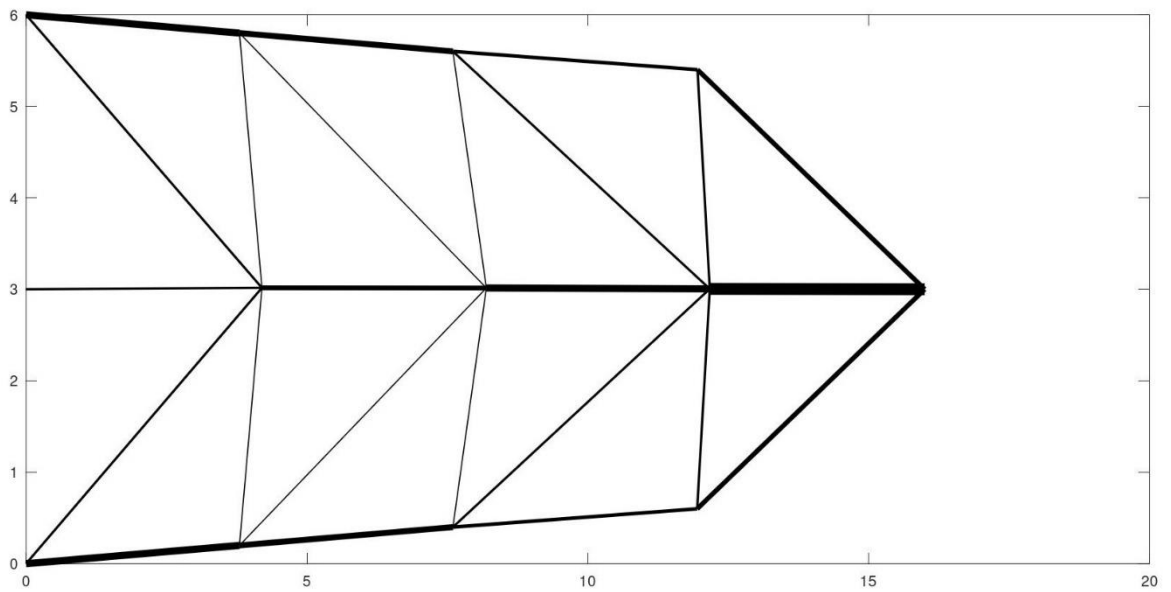


Figura 19 - Otimização de configuração combinada com RDO para  $\alpha = 0.1$

Já a figura 20 representa a comparação entre a estrutura obtida por este método e a estrutura inicialmente obtida pelo método definido por André Teixeira, novamente com bastantes semelhanças no que diz respeito ao coeficiente  $\alpha = 0$ .

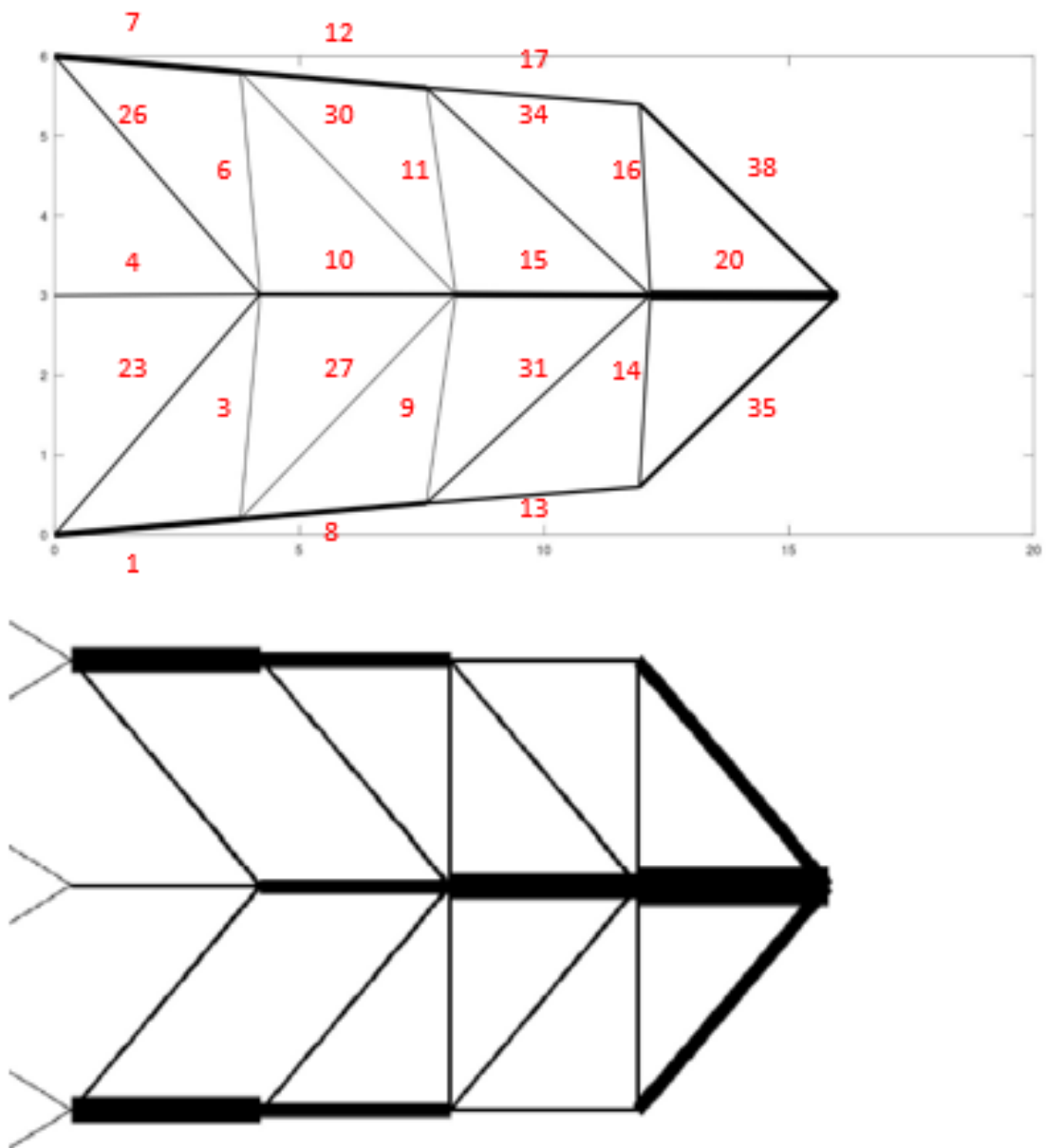


Figura 20 - Comparação Otimização RDO com Otimização Combinada para  $\alpha = 0.1$

Por fim, foi realizado um exemplo para o valor do coeficiente de peso  $\alpha = 1$ . Uma vez que o segundo membro da equação descrita em (13) passa a ser nulo, este acaba por corresponder a um problema de minimização do valor médio da função objetivo, ou seja, um problema determinístico. A figura 21 representa o resultado obtido através da combinação de otimização topológica, robusta e de configuração.

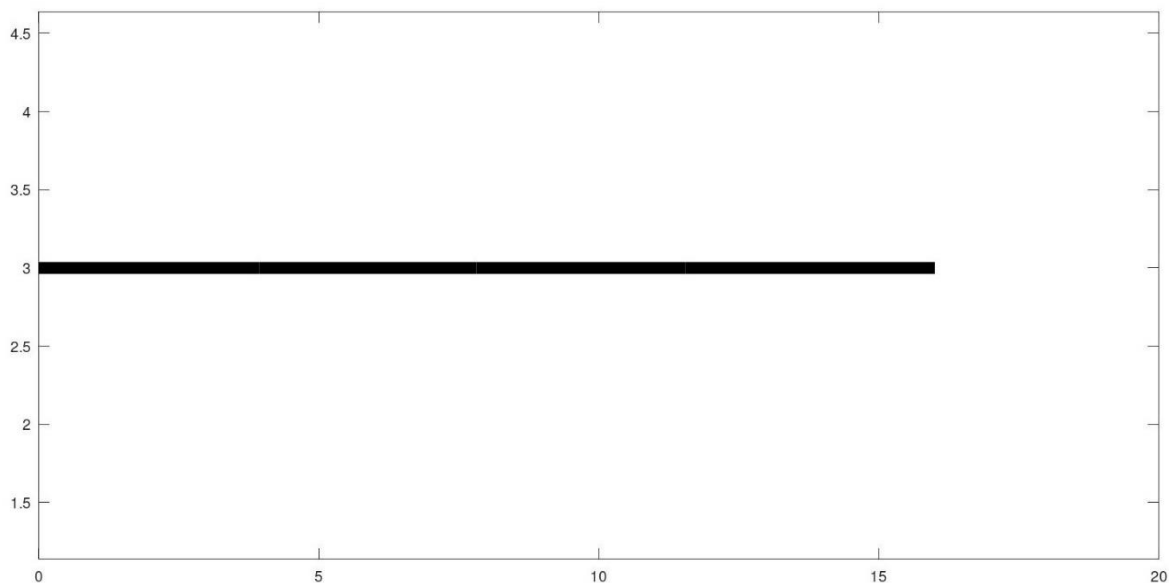


Figura 21 - Otimização de configuração combinada com RDO para  $\alpha = 1$

Como é possível verificar, das 38 barras iniciais que compunham a estrutura, apenas 4 fazem parte da estrutura final, sendo eles as barras 4, 10, 15 e 20. Esta solução é rigorosamente igual à obtida por André Teixeira [15] e, eliminando a componente do desvio padrão, a solução obtida é totalmente instável e desadequada ao objetivo que se pretende atingir.

À semelhança do que foi realizado para o primeiro exemplo apresentado nesta dissertação, de seguida encontram-se duas tabelas, que indicam as áreas dos elementos na configuração final, quer para o caso do coeficiente de peso  $\alpha = 0$ , quer para o caso do coeficiente de peso  $\alpha = 0,1$ , efetuando ainda o respetivo termo de comparação com os valores obtidos na dissertação de André Teixeira [15]. Devido ao facto de a solução do coeficiente de peso  $\alpha = 1$  ser instável e desajustada, não será apresentada a tabela com os valores das áreas da mesma.

Tem-se então para  $\alpha = 0$ :

Tabela 5 - Áreas de Secção Transversal Final para  $\alpha = 0$ 

Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO ( $m^2$ )		Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO ( $m^2$ )
1	1.103813924371e-04		20	1.983125158840e-04
2	1.000000000000e-08		21	1.000000000000e-08
3	8.178526607404e-06		22	1.000000000000e-08
4	1.615568149478e-05		23	1.961618897650e-05
5	1.000000000000e-08		24	1.000000000000e-08
6	8.241261279397e-06		25	1.000000000000e-08
7	1.106288006131e-04		26	1.947371423903e-05
8	8.191316129182e-05		27	2.191811677858e-05
9	1.007701888371e-05		28	1.000000000000e-08
10	6.343158978950e-05		29	1.000000000000e-08
11	1.011698847481e-05		30	2.207951936347e-05
12	8.196949425155e-05		31	3.298478179751e-05
13	4.977261498068e-05		32	1.000000000000e-08
14	2.135787770345e-05		33	1.000000000000e-08
15	1.124893355156e-04		34	3.325208656998e-05
16	2.121683856577e-05		35	6.716331859588e-05
17	4.952610639923e-05		36	1.000000000000e-08
18	1.000000000000e-08		37	1.000000000000e-08
19	1.000000000000e-08		38	6.679302711981e-05

À semelhança do primeiro exemplo realizado, a tabela apresentada permite perceber quais os elementos, dos 22 presentes na estrutura final, com maior importância para a estabilidade da solução. Nesta tabela 3 destacam-se os elementos sombreados num tom mais escuro, que correspondem a alguns dos elementos dispensáveis, os elementos destacados atingiram o limite mínimo imposto para a variação de área durante a otimização e, como tal, foram eliminados da configuração final. Igualmente eliminados do gráfico e das imagens representativas da configuração final encontram-se os elementos sombreados a num tom mais claro, que, apesar de terem uma área superior à área mínima, possuem dimensões pouco significativas podendo assim ser considerados desprezáveis para a estrutura final.

E para  $\alpha = 0,1$  tem-se a seguinte tabela 6:

Tabela 6 - Área de Secção Transversal Final para  $\alpha = 0,1$

Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )		Nº ELEMENTO	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )
1	1.061163121649e-04		20	1.883401423884e-04
2	1.000000000000e-08		21	1.000000000000e-08
3	7.705519890887e-06		22	1.000000000000e-08
4	2.018239794420e-05		23	2.100482032232e-05
5	1.000000000000e-08		24	1.000000000000e-08
6	7.724467685006e-06		25	1.000000000000e-08
7	1.055433099514e-04		26	2.136928574057e-05
8	8.505642567709e-05		27	1.728861957126e-05
9	1.097351880464e-05		28	1.000000000000e-08
10	6.963850676985e-05		29	1.000000000000e-08
11	1.080031973825e-05		30	1.748169144974e-05
12	8.421097294889e-05		31	3.139666437984e-05
13	5.351419158846e-05		32	1.000000000000e-08
14	2.245262788042e-05		33	1.000000000000e-08
15	1.076366792174e-04		34	3.091056112622e-05
16	2.238440159474e-05		35	7.101879029651e-05
17	5.290926386609e-05		36	1.000000000000e-08
18	1.000000000000e-08		37	1.000000000000e-08
19	1.000000000000e-08		38	7.031881181828e-05

Como se pode verificar as barras retiradas são precisamente as mesmas que com o coeficiente de peso  $\alpha = 0$ , no entanto é possível verificar que apesar das estruturas serem bastante semelhantes, as áreas de cada barra variam sempre ligeiramente, o que indica não só que as suas importâncias relativas em cada uma das estruturas são diferentes, como também pode indicar que a própria configuração da estrutura poderá ser diferente, uma vez que os nós poderão não se encontrar exatamente nas mesmas posições.

À semelhança do primeiro exemplo, foram construídas tabelas neste exemplo de otimização de topologia combinada com otimização de configuração e otimização robusta. Neste caso, as tabelas dizem respeito ao tempo decorrido na simulação, ao nº de iterações necessárias para a obtenção da configuração final e ainda o valor final da função objetivo, que corresponde naturalmente ao deslocamento do nó 14, para os casos do coeficiente de peso  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 0,1$ . Assim, na tabela 7, estão apresentados os valores para  $\alpha = 0$ .

Tabela 7 - Valores finais pós-simulação Exemplo 2 para  $\alpha = 0$

Nº de iterações	Tempo de simulação (s)	Deslocamento nó 14 (m)
210	4666.448	0.9041

E, analogamente, na tabela 8, estão apresentados os valores para  $\alpha = 0,1$ .

Tabela 8- Valores finais pós-simulação Exemplo 2 para  $\alpha = 0,1$

Nº de iterações	Tempo de simulação (s)	Deslocamento nó 14 (m)
118	2627.582	0.9543

Analisando os valores de ambas as tabelas é possível verificar que no que diz respeito ao número de iterações e tempo de simulação os valores para exemplo com o coeficiente de peso  $\alpha = 0$ , estão próximos do dobro da otimização realizada para  $\alpha = 0,1$ . Juntando a isso, é possível verificar as diferenças no deslocamento do nó 14 nos dois casos de estudo, que acaba por realçar que apesar de aparentarem graficamente ser bastante semelhantes estas duas soluções possuem de facto diferenças, que se prenderão naturalmente com o peso do coeficiente  $\alpha$ .

## 5.3 Estrutura 72 Barras 3D

### 5.3.1 Metodologia e Exemplo Utilizado

Por fim, o último exemplo realizado nesta dissertação, tem como objetivo o estudo das capacidades do Programa PROAES em realizar otimização de configuração combinada com otimização topológica numa estrutura composta por elementos barra 3D. Para isso, foi construída de raiz uma estrutura paralelepípedica, semelhante à assemblagem de 3 cubos conjuntamente, sendo composta por 16 nós e 72 barras. O ponto de partida será uma estrutura representada na figura 22, que contém alguns dos nós visíveis, bem como um diagrama das forças aplicadas num dos casos de estudo:

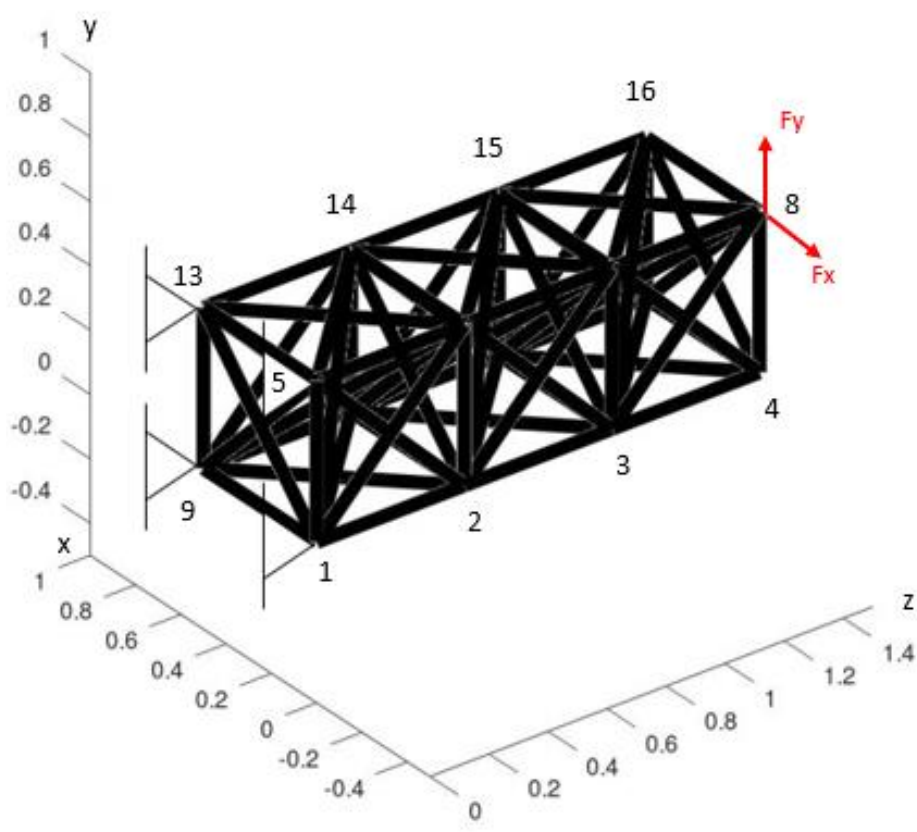


Figura 22 - Estrutura Inicial 72 barras 3D

Os elementos horizontais e verticais possuem dimensões idênticas, com cada uma das barras a possuir um comprimento de  $0.5\text{ m}$ . Cada nó correspondente aos vértices da extremidade da estrutura, ou seja, os nós 1, 4, 5, 8, 12, 13 e 16, encontram-se ligados a 7 nós cada, respetivamente, e os restantes encontram-se conectados a 11 nós cada, respetivamente. A estrutura encontra-se ainda com 4 nós (1, 5, 9 e 13) sob apoio fixo, isto é, com todos os

movimentos destes nós nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  encontram-se restringidos. Foram estudados 2 casos particulares, mas em ambos, foram aplicadas duas forças aplicadas de igual módulo  $P_x = P_y = 20000\text{ N}$ , tanto no eixo  $x$  como no eixo  $y$ , sendo que na direção  $x$  a força vai no sentido negativo e na direção  $y$  tem o sentido positivo nos casos 1 e sentidos inversos no caso 2, variando ainda nos 2 casos o ponto de aplicação das mesmas, estando respetivamente aplicadas no nó 8 e 12. Todas as barras da estrutura são compostas pelo mesmo material, cujo módulo de elasticidade (módulo de *Young*) corresponde a  $E = 210\text{ GPa}$ , uma vez mais típico das estruturas em aço e todas as barras possuem também a mesma área de secção transversal inicial  $A_i = 1.0 \times 10^{-2}\text{ m}^2$ . Na tabela 9, para uma melhor compreensão visual do problema encontra-se um esquema com a configuração, numeração e coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de cada um dos nós, sendo que os nós sombreados num tom mais claro representam os nós restringidos e o nó sombreado num tom mais escuro e a negrito estão destacados os nós onde as forças foram aplicadas.

Tabela 9 - Configuração dos nós da estrutura 72 barras 3D

NÓ	COORDENADA X (m)	COORDENADA Y (m)	COORDENADA Z (m)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.5
3	0.0	0.0	1.0
4	<b>0.0</b>	<b>0.0</b>	<b>1.5</b>
5	0.0	0.5	0.0
6	0.0	0.5	0.5
7	0.0	0.5	1.0
<b>8 (caso 1)</b>	<b>0.0</b>	<b>0.5</b>	<b>1.5</b>
9	0.5	0.0	0.0
10	0.5	0.0	0.5
11	0.5	0.0	1.0
<b>12 (caso 2)</b>	<b>0.5</b>	<b>0.0</b>	<b>1.5</b>
13	0.5	0.5	0.0
14	0.5	0.5	0.5
15	0.5	0.5	1.0
16	0.5	0.5	1.5



À semelhança dos restantes exemplos estudados nesta dissertação o objetivo do problema de otimização estrutural será minimizar a *compliance* (flexibilidade), ou seja, maximizar a rigidez da estrutura tendo de respeitar um constrangimento de volume total. No entanto, como temos duas forças aplicadas, temos a particularidade de ter 3 performances neste problema, duas associadas ao deslocamento provocado por cada força respetivamente e a última o próprio volume da estrutura.

Passando agora à formulação do problema, como referido, este problema terá como objetivo uma minimização da *compliance* (flexibilidade) da estrutura, ou seja, maximizando a sua rigidez, tendo de respeitar um constrangimento de volume, isto é, o seu volume não poderá ser superior a um limite definido. Sendo assim, e recorrendo à formulação clássica de um problema de otimização, indicada na equação (1), tem-se para este exemplo:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f = d(x) - d(y) \\
 \text{Sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^N A_i \times L_i \leq V_{adm} \quad ; i = 1, \dots, N \\
 & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \quad ; i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{15}$$

Em que  $d$  representa o deslocamento do nó em que a força é aplicada em cada caso, e é positivo para a força aplicada em  $x$  e se encontra negativo para a força aplicada em  $y$ , de notar que a função  $f(x)$  não corresponde à *compliance* mas a sua minimização é equivalente a minimizar o deslocamento dado que ambas as cargas que estão aplicadas nos nós 8 e 12, respetivamente, são constantes. De notar também que, como referido, o valor da área de secção transversal de cada elemento inicialmente corresponde a  $A_i = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , podendo estar compreendido entre  $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ . De notar ainda que  $L_i$  corresponde ao comprimento de cada elemento barra e  $V_{adm}$  corresponde ao volume da configuração final da estrutura. Quanto aos limites impostos ao deslocamento das posições dos nós, a sua variação seria igual em todos, isto é, todos os nós poderiam deslocar-se  $0.2 \text{ m}$  a partir da sua posição inicial, em cada sentido das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Estando explicada a formulação do problema, passou-se de seguida à construção do mesmo no Programa PROAES, exemplificado o processo para o caso 2.

O primeiro passo consiste na criação do ficheiro input, no caso 2 denominado **trelica\_72\_barras3D\_no12.inp**, que contém toda a informação necessária acerca da estrutura, de forma à análise estrutural ser executada, designadamente a definição dos nós e elementos, definição do material e respetivo módulo de elasticidade, definição das características das secções transversais (correspondência com o número de elemento e área), definição das cargas aplicadas, com o respetivo módulo, direção e sentido, restrição de movimento dos nós apoiados, indicação das 105 variáveis de projeto (72 áreas de secção e 33 posições dos nós) e por fim as 3 performances, que correspondem aos deslocamentos do nó em que as forças são aplicadas em cada caso nas direções  $x$  e  $y$ , respetivamente e ao volume da estrutura.

São também escritos os ficheiro correspondentes à função objetivo e respetivas derivadas, designados **obj\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m** e **grad\_obj\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m**, cujo propósito passa por escrever o ficheiro **opt2ef**, definindo o valor das 105 variáveis de projeto (72 áreas de secção e 33 posições dos nós) e das 3 performances indicadas e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os cálculos relativos à performance deslocamento e às respetivas sensibilidades em relação às variáveis de projeto.

No que diz respeito aos ficheiros correspondentes ao constrangimento e respetivas derivadas, são escritos os ficheiros **con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m** e **grad\_con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m**, ficheiros estes cujo propósito passa também pela escrita do ficheiro **opt2ef** e por chamar o Programa PROAES de forma a efetuar os restantes cálculos auxiliares associados que sejam necessários.

São ainda escritos mais 2 ficheiros, denominados **inicializacao\_OT\_Trelica\_72\_barras\_no12.m** e **grafico\_topologia\_optima3D.m**.

O primeiro é composto pela definição inicial dos valores das 105 variáveis de projeto selecionadas, bem como pela indicação dos limites superiores e inferiores entre os quais as variáveis devem estar compreendidas. O seu objetivo passa por conjugar as 4 funções previamente criadas (associadas às funções objetivo e constrangimentos) e chamar o algoritmo de forma a proceder à otimização. De notar que a tolerância à convergência selecionada foi de  $1 \times 10^{-12}$ , e o número de iterações estabelecido foi de 1200, de forma à otimização ser realizada com bastante rigor. O algoritmo utilizado neste exemplo foi o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*), uma vez que este se trata de um algoritmo de programação não-linear que permite a realização de otimizações não-lineares com constrangimentos, e, além disso trata-se de um algoritmo bastante versátil que é adequado à realização de otimização

com um número reduzido de variáveis, como é o caso. De referir ainda que o software onde o Programa PROAES foi executado nestes exemplos foi o software *OCTAVE*.

Já o segundo ficheiro, como o próprio nome indica irá proceder à realização de um gráfico que permitirá a visualização da estrutura final otimizada. Este ficheiro desenha apenas os elementos cuja área de secção transversal é superior a  $1 \times 10^{-4} m^2$ , desenhando com maior espessura elementos com área superior a  $2.5 \times 10^{-3} m^2$  e com menor espessura elementos com área inferior a  $2.5 \times 10^{-3} m^2$  incluídos ambos dentro dos limites impostos.

## 5.3.2 Resultados

### 5.3.2.1 Caso 1 - Ponto de Aplicação no nó 8

Tendo todos os ficheiros criados e todos os componentes necessários definidos procedeu-se então à otimização de configuração e topologia da estrutura de 72 barras 3D referente ao primeiro caso, com as forças (na direção  $x$  no sentido negativo e na direção  $y$  no sentido positivo) aplicadas no nó 8 da estrutura tendo-se obtido uma estrutura com a seguinte configuração:

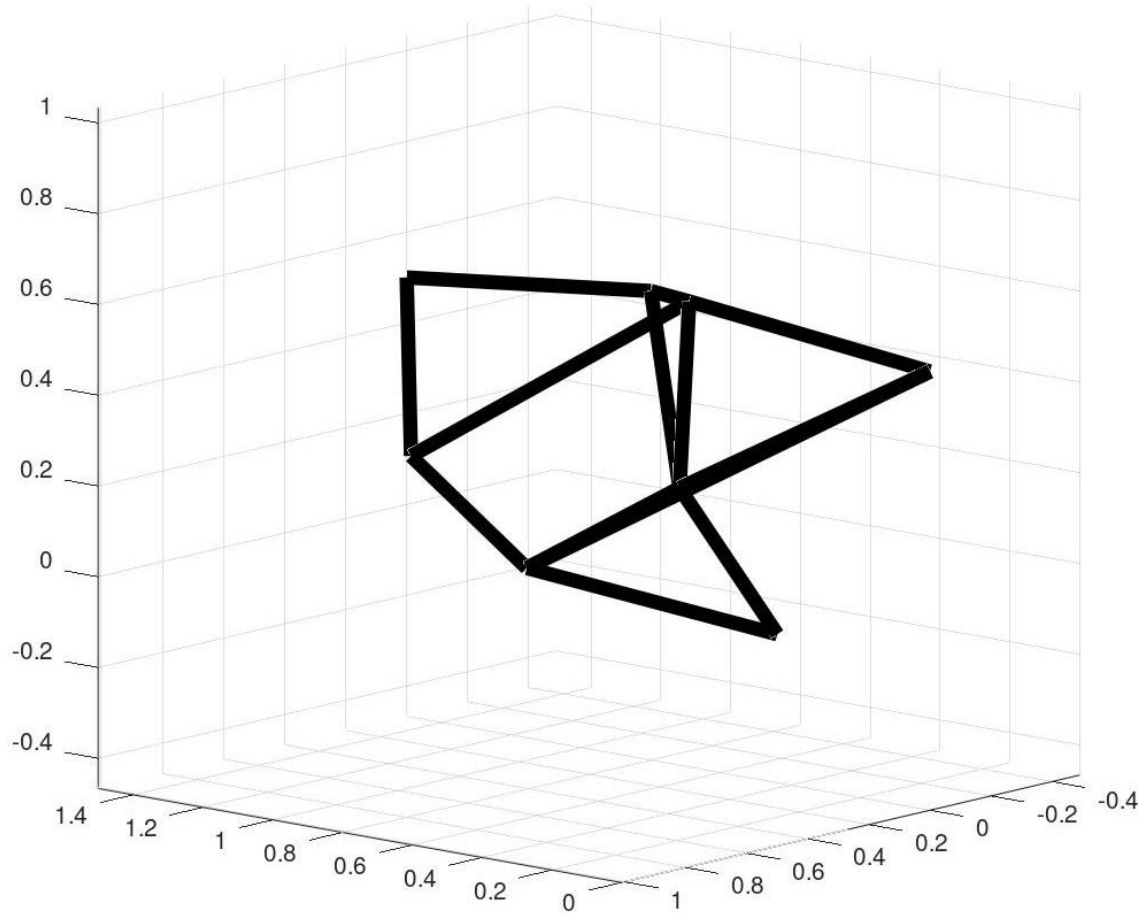


Figura 23 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Perspetiva

Como é possível verificar, das 72 barras iniciais que compunham a estrutura, apenas 13 fazem parte da estrutura final, e é possível também verificar o movimento dos diversos nós na estrutura, fazendo variar conseqüentemente o tamanho original das barras. De notar que ao contrário da estrutura inicial, a estrutura apresenta-se na diagonal, que poderá ser resultado do módulo das forças ser igual, pelo que o deslocamento dos nós em ambas as direções será similar. A configuração final da estrutura leva a crer que a otimização de configuração se processou com sucesso, uma vez que se reduziu significativamente o número de barras da estrutura e a configuração foi substancialmente alterada.

Nas figuras abaixo encontram-se apresentadas as diferentes vistas (frontal, lateral e de cima) da estrutura final, para permitir uma melhor visualização da mesma.

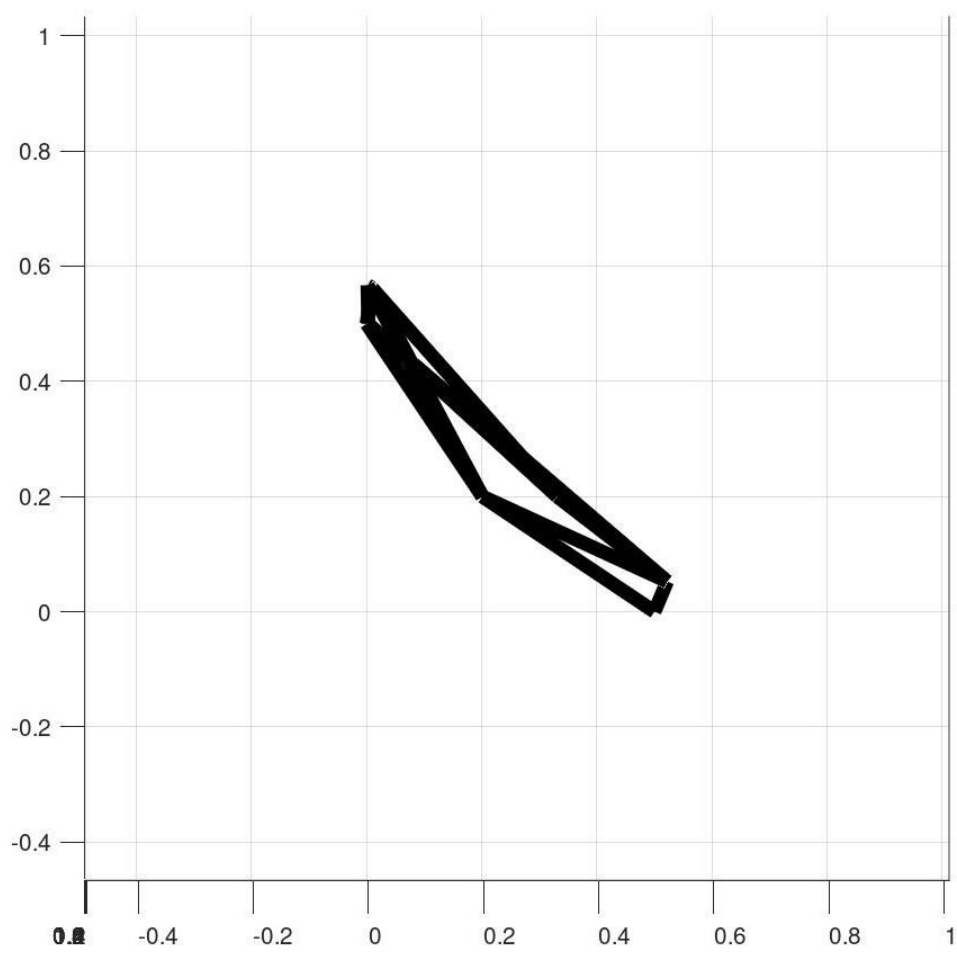


Figura 24 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista Frontal

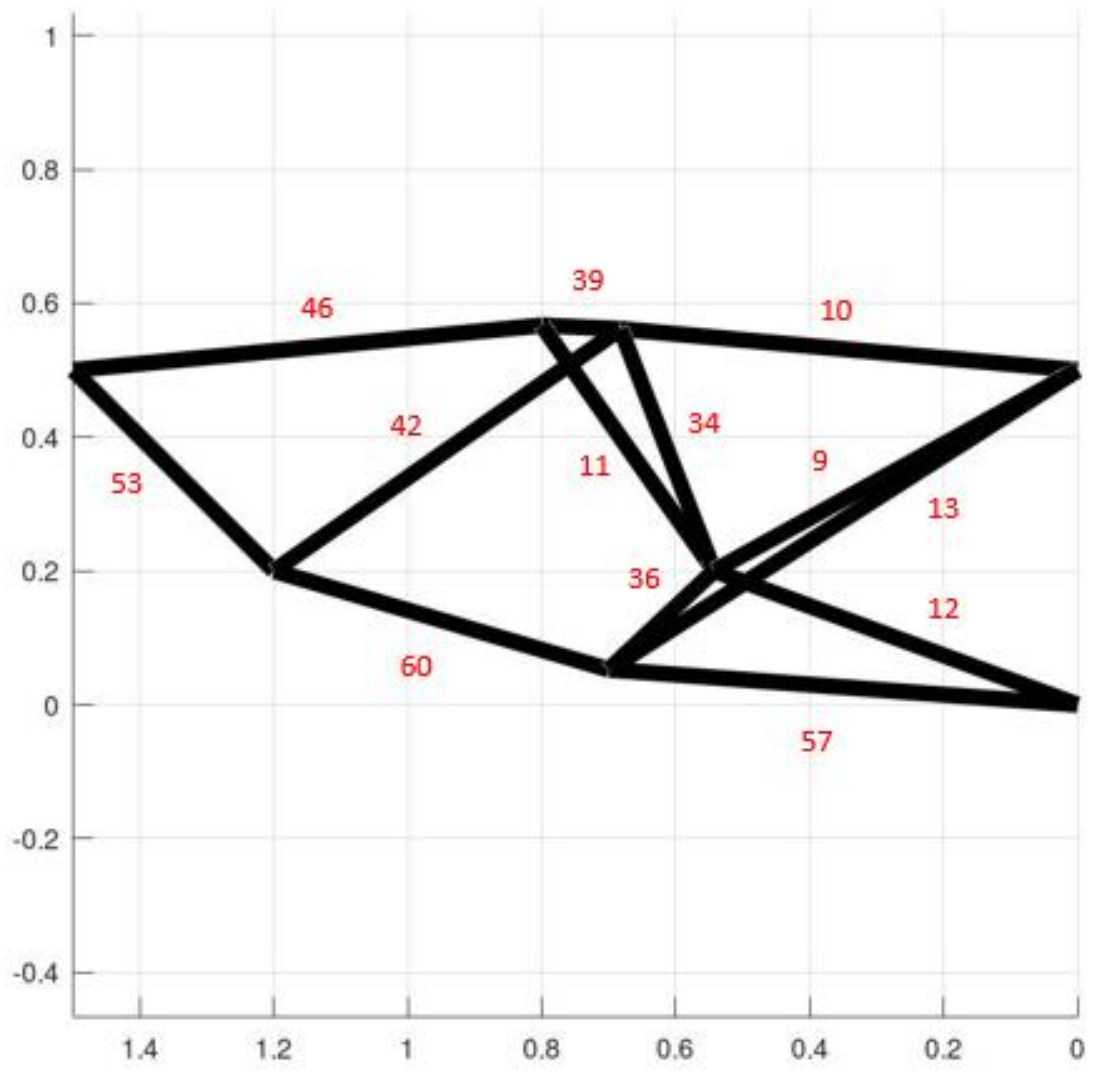


Figura 25 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista Lateral

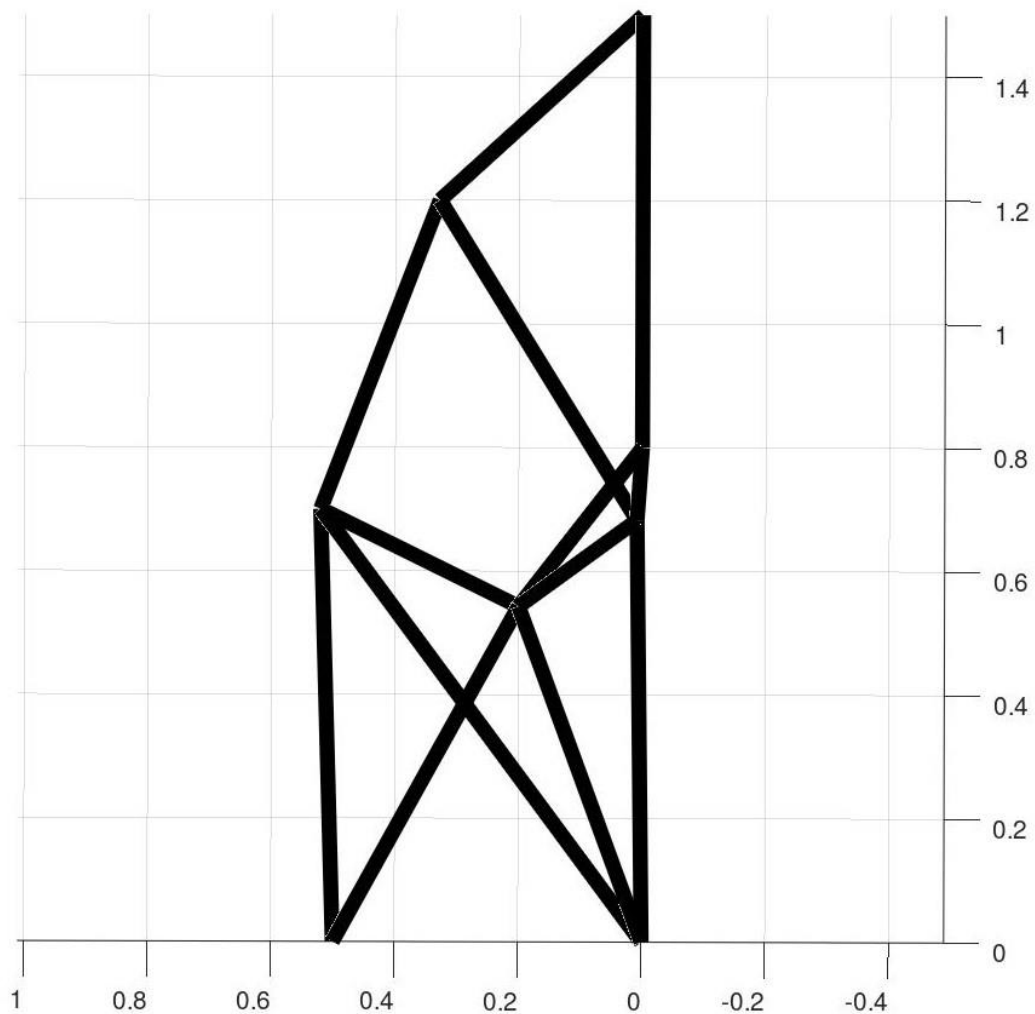


Figura 26 - Configuração Final do Caso 1 da Estrutura 3D Vista de Cima

Como já foi referido, esta configuração atesta a capacidade do programa PROAES no que diz respeito à resolução de problemas de Otimização Topológica combinada com Otimização de Configuração em Estruturas 3D uma vez que obteve uma solução ótima, respondendo às solicitações e restrições aplicadas. Esta possui ainda uma particularidade que a torna bastante interessante do ponto de vista físico e de engenharia, uma vez que a configuração inicial se transformou numa espécie de Treliza 2D, com algumas nuances, devido ao movimento dos nós, no plano oblíquo onde atua a carga. Esta particularidade pode dever-se ao facto de as cargas aplicadas no nó 8 terem exatamente o mesmo módulo e sentidos opostos, o que faz com que a resultante das forças aponte no sentido do plano oblíquo referido, fazendo todo o sentido que a estrutura esteja também alinhada com este mesmo plano,

eliminando todas as restantes barras e fazendo com que a estrutura responda às cargas aplicadas cumprindo os objetivos de minimização de material pretendidos.

De seguida, apresenta-se a tabela 10 para complementar a informação relativa às áreas de secção transversal de todos os elementos desta estrutura.

Tabela 10 - Área de Secção Transversal Final do Caso 1 da Estrutura 3D

Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )	Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )	Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )
1	1.000000000000e-08	25	1.000000000000e-08	49	9.999999999999e-09
2	1.000000000000e-08	26	9.999999999999e-09	50	1.000000000000e-08
3	1.000000000000e-08	27	1.000000000000e-08	51	9.999999999999e-09
4	1.000000000000e-08	28	9.999999999998e-09	52	1.000000000000e-08
5	1.000000000000e-08	29	1.000000000000e-08	53	<b>9.588102842848e-03</b>
6	1.000000000000e-08	30	9.999999999999e-09	54	1.000000000000e-08
7	1.000000000000e-08	31	9.999999999999e-09	55	1.000000000000e-08
8	1.000000000000e-08	32	1.000000000000e-08	56	1.000000000000e-08
9	<b>7.562866788736e-03</b>	33	1.000000000000e-08	57	<b>1.000000000000e-02</b>
10	<b>4.047265730645e-03</b>	34	<b>1.000000000000e-02</b>	58	9.999999999999e-09
11	<b>1.041082256577e-03</b>	35	1.000000000000e-08	59	3.106213706984e-08
12	<b>7.654326123141e-03</b>	36	<b>4.177140872662e-04</b>	60	<b>1.000000000000e-02</b>
13	<b>4.371160105281e-03</b>	37	1.000000000000e-08	61	9.999999999999e-09
14	1.000000000000e-08	38	2.946627325168e-08	62	2.442280538118e-08
15	9.999999999999e-09	39	<b>5.926807657568e-03</b>	63	1.000000000000e-08
16	1.000000000000e-08	40	9.999999999999e-09	64	9.999999999999e-09
17	9.999999999999e-09	41	9.999999999999e-09	65	1.000000000000e-08
18	1.000000000000e-08	42	<b>5.201862128449e-03</b>	66	9.999999999998e-09
19	1.000000000000e-08	43	1.000000000001e-08	67	1.000000000000e-08
20	9.999999999998e-09	44	1.000000000000e-08	68	9.999999999999e-09
21	1.000000000000e-08	45	9.999999999998e-09	69	9.999999999998e-09
22	1.000000000000e-08	46	<b>5.384226760321e-03</b>	70	1.000000000000e-08
23	9.999999999999e-09	47	1.000000000000e-08	71	1.000000000000e-08
24	1.000000000000e-08	48	1.000000000000e-08	72	9.999999999991e-09



Esta tabela 11 permite perceber sem qualquer dúvida, quais os elementos, dos 13 presentes na estrutura final, com maior importância para a estabilidade da solução. No entanto, nesta tabela, dada a quantidade elevada de elementos com a área igual ao limite mínimo, o que indica que a otimização foi realizada na sua plenitude e com resultados bastante razoáveis, optou-se por colocar um código de cores distinto, salientando num tom mais escuro os elementos de facto presentes na estrutura final e num tom mais claro os elementos que, apesar de não terem o valor igual ao limite inferior de área (no caso deste exemplo encontram-se bastante próximos) serem também desprezáveis para a construção da estrutura mais eficiente para corresponder às necessidades pretendidas.

Para finalizar a análise deste caso particular, foi construída ainda mais uma tabela, a tabela 10. Esta contribui com informação relativa ao tempo decorrido na simulação, ao nº de iterações necessárias para a obtenção da configuração final e ainda o valor final da função objetivo, que corresponde naturalmente ao deslocamento do nó 8 neste caso.

Tabela 11 - Valores finais pós-simulação Exemplo 3 para o Nó 8

Nº de iterações	Tempo de simulação (s)	Deslocamento nó 8 (m)
2145	4637.237	1.3995e-04

Após o caso 2 serão analisados e comparados os resultados acima indicados, mas fica como nota prévia a constatação do incremento substancial no tempo de simulação e nº de iterações, que deverá ser resultante do elevado número de elementos que compõem a estrutura e de variáveis, quer de topologia, quer de configuração, consideradas no exemplo 3D.

### 5.3.2.2 Caso 2 - Ponto de Aplicação no nó 12

Por fim, foi alterado novamente o ponto de aplicação das forças, mantendo todas as restantes condições e variáveis iguais ao caso 1, isto é que na direção  $x$  a força no sentido positivo e na direção  $y$  no sentido negativo, e procedeu-se ao caso de estudo final desta dissertação, que diz respeito à otimização de configuração e topologia da estrutura de 72 barras 3D referente à sua terceira variante, com as forças aplicadas no nó 12 da estrutura, tendo-se obtido uma estrutura com a seguinte configuração:

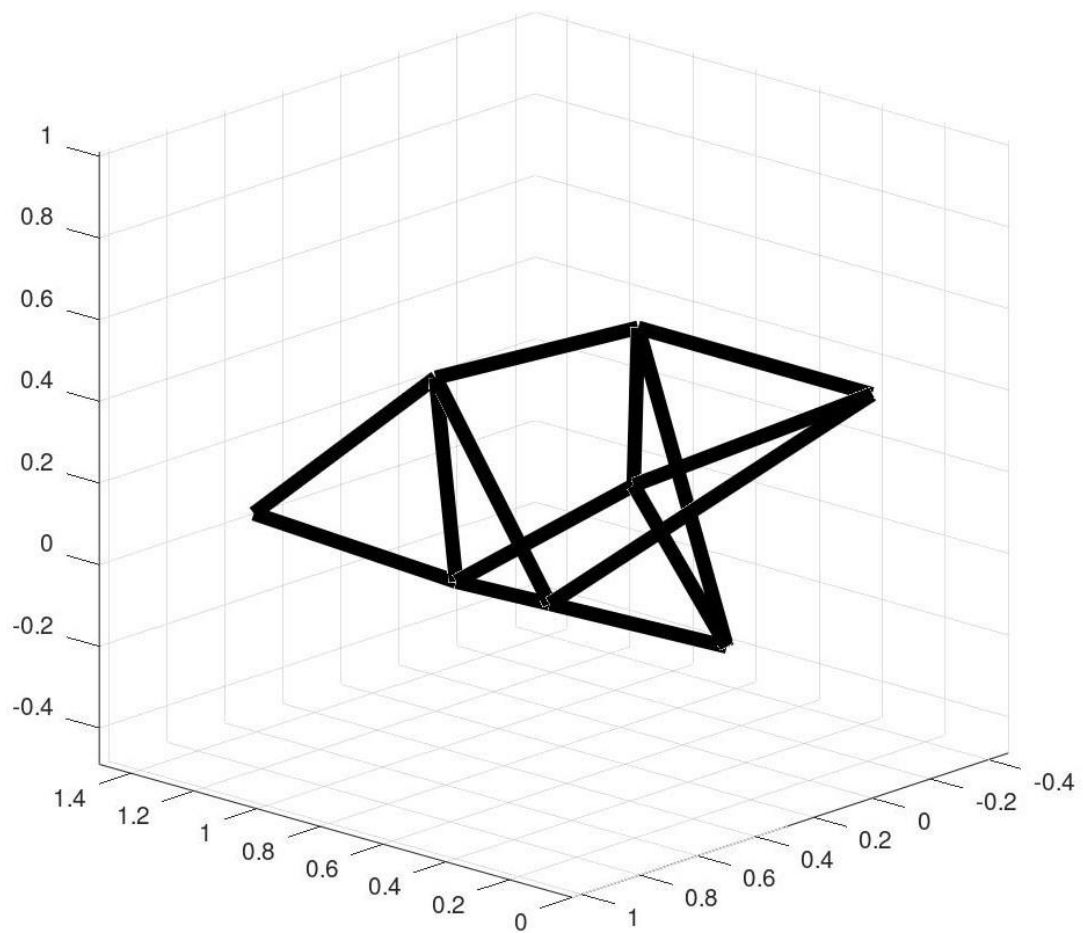


Figura 27 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Perspetiva

Como é possível verificar, das 38 barras iniciais que compunham a estrutura, apenas 14 fazem parte da estrutura final, e é possível também verificar o movimento dos diversos nós na estrutura, fazendo variar conseqüentemente o tamanho original das barras. De notar que ao contrário da estrutura inicial, a estrutura assume está apenas em duas dimensões, apresentando-se na diagonal, que poderá ser resultado do módulo das forças ser igual, pelo que o deslocamento em ambas as direções será similar. A configuração final da estrutura leva a crer que a otimização de configuração se processou com sucesso, uma vez que se reduziu significativamente o número de barras da estrutura e a configuração foi substancialmente alterada. Como também é possível verificar esta estrutura, apesar de semelhante em termos de configuração acaba por ser distinta do caso 1 do exemplo 3D, em que as forças foram aplicadas no

nó 8. Neste segundo caso o movimento dos nós é visivelmente diferente face ao primeiro, e o número de barras é também diferente, o que leva a crer que, apesar dos parâmetros serem idênticos para ambos os casos, a otimização realizada faz com que a estrutura final se adapte para responder de forma distinta a cada um dos problemas especificamente, uma vez que as forças são aplicadas em pontos diferentes, alterando como tal a solução ótima para atingir o objetivo pretendido.

Nas figuras abaixo encontram-se apresentadas as diferentes vistas (frontal, lateral e de cima) da estrutura final, para permitir uma melhor visualização da mesma.

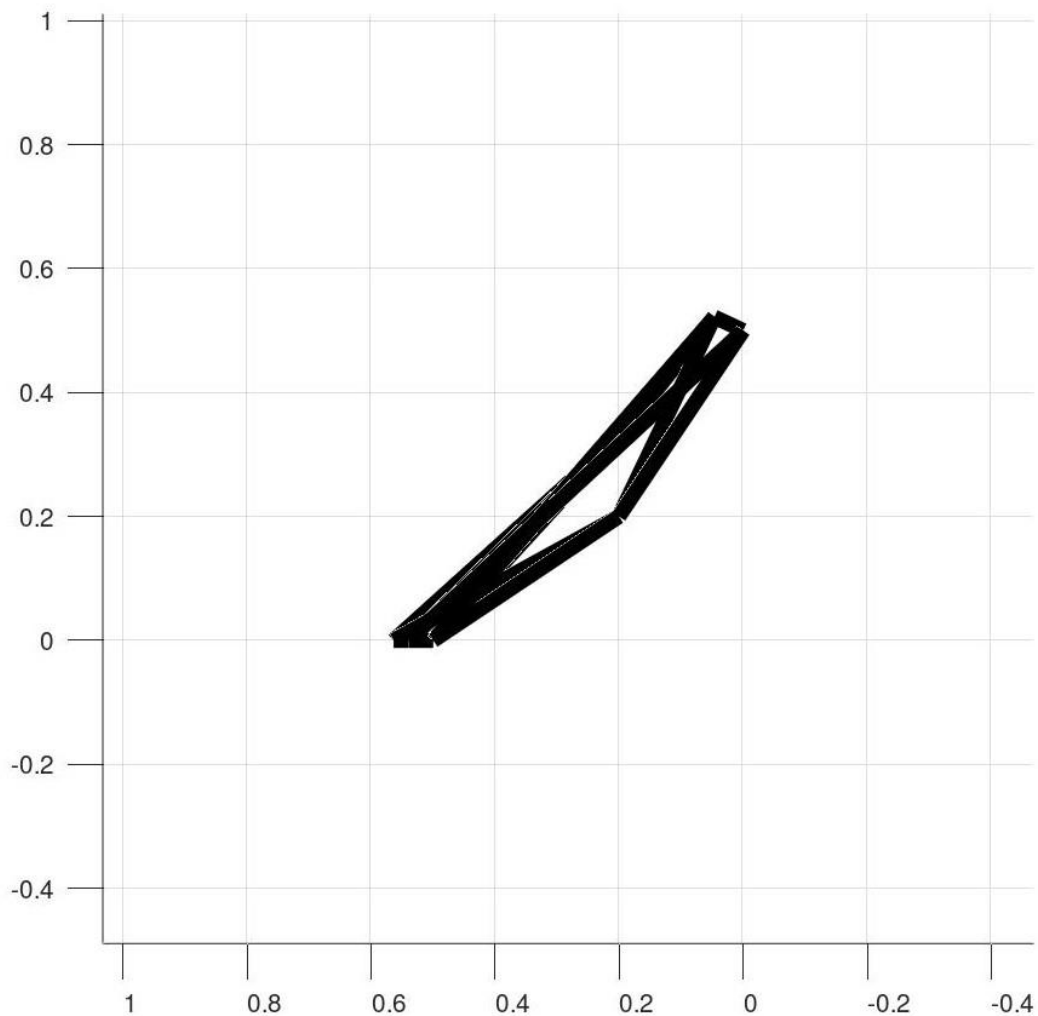


Figura 28 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista Frontal

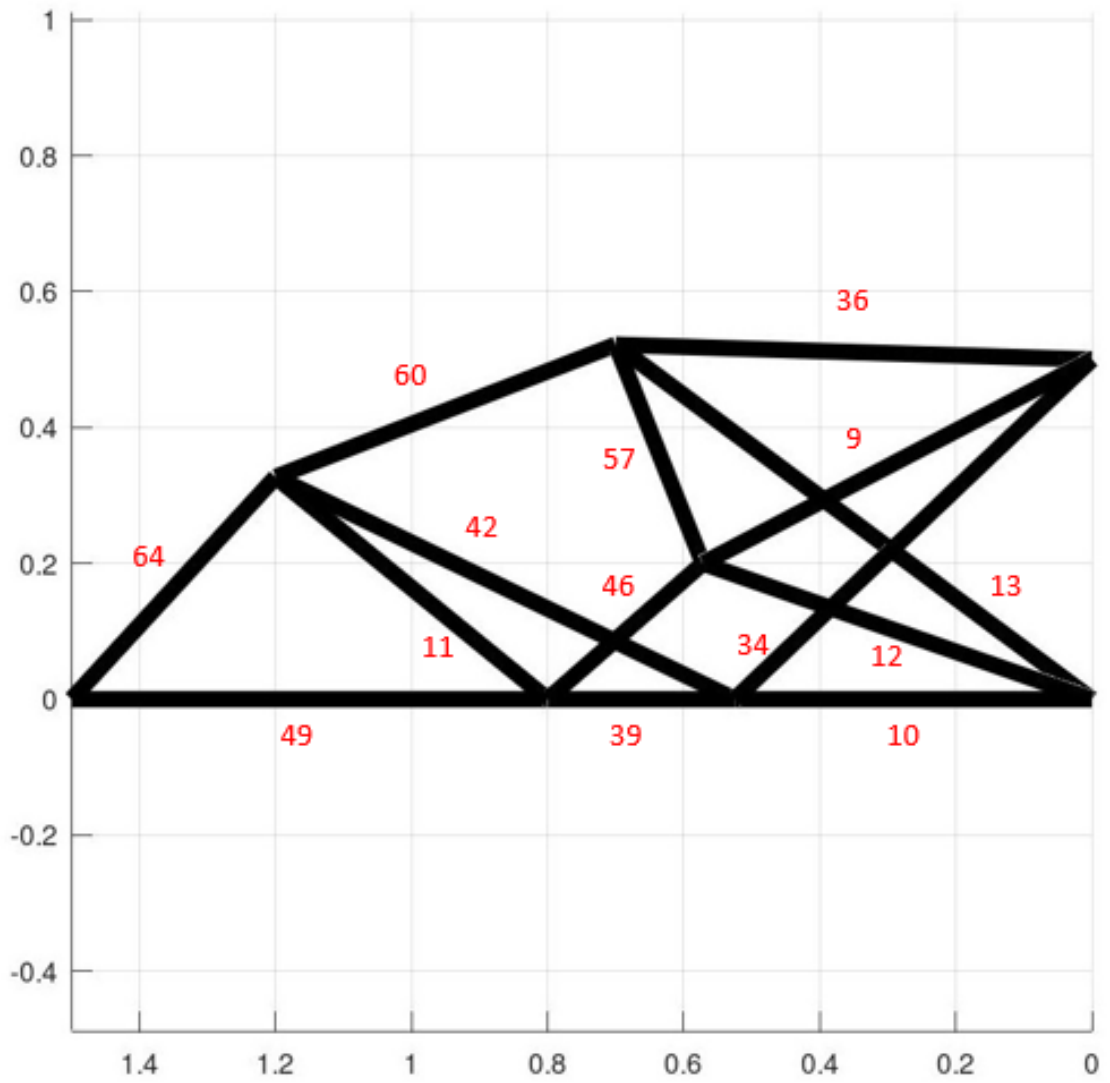


Figura 29 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista Lateral

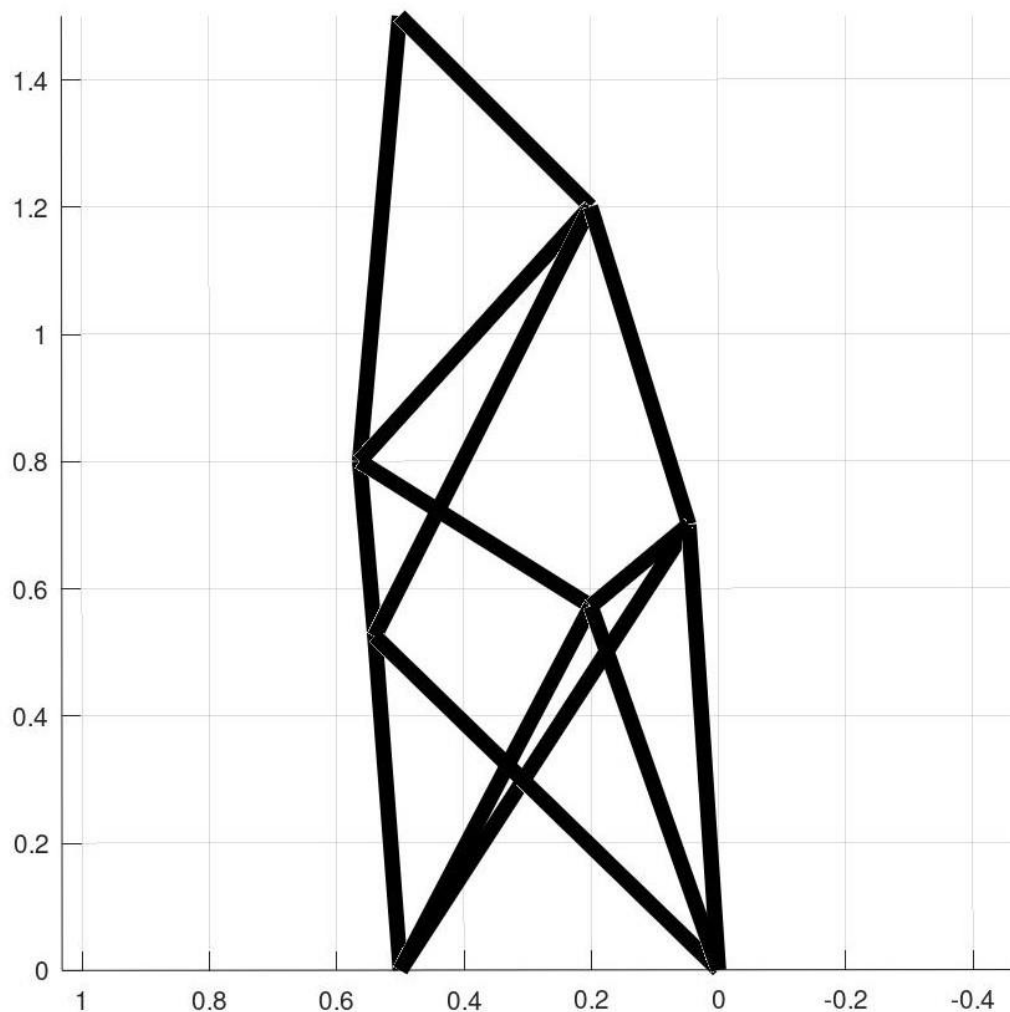


Figura 30 - Configuração Final do Caso 2 da Estrutura 3D Vista de Cima

Como já foi referido, esta configuração atesta a capacidade do programa PROAES no que diz respeito à resolução de problemas de Otimização Topológica combinada com Otimização de Configuração em Estruturas 3D uma vez que obteve uma solução ótima, respondendo às solicitações e restrições aplicadas. Esta possui ainda uma particularidade que a torna bastante interessante do ponto de vista físico e de engenharia, uma vez que a configuração inicial se transformou numa Trelíça 2D no plano oblíquo onde atua a carga. Esta particularidade pode dever-se ao facto de as cargas aplicadas no nó 12 terem exatamente o mesmo módulo e sentidos opostos, o que faz com que a resultante das forças aponte no sentido do plano oblíquo referido, fazendo todo o sentido que a estrutura esteja também alinhada com este mesmo plano, eliminando todas as restantes barras e fazendo com que a estrutura responda às cargas aplicadas cumprindo os objetivos de minimização de material pretendidos.

Por fim, apresenta-se uma tabela para complementar a informação relativa às áreas de secção transversal de todos os elementos desta estrutura.

Tabela 12 - Área de Secção Transversal Final do Caso 2 da Estrutura 3D

Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )	Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )	Nº	ÁREA SECÇÃO (m <sup>2</sup> )
1	1.000000000000e-08	25	1.000000000000e-08	49	<b>9.461081763092e-03</b>
2	1.000000000000e-08	26	9.999999999999e-09	50	1.000000000000e-08
3	1.000000000000e-08	27	1.000000000000e-08	51	1.000000000000e-08
4	1.000000000000e-08	28	9.999999999998e-09	52	1.000000000000e-08
5	1.000000000000e-08	29	1.000000000000e-08	53	1.000000000000e-08
6	1.000000000000e-08	30	9.999999999999e-09	54	1.000000000000e-08
7	1.000000000000e-08	31	9.999999999999e-09	55	1.000000000001e-08
8	1.000000000000e-08	32	1.000000000000e-08	56	1.000000000000e-08
9	<b>7.562866788736e-03</b>	33	1.000000000000e-08	57	<b>1.000000000000e-02</b>
10	<b>4.047265730645e-03</b>	34	<b>1.000000000000e-02</b>	58	1.000000000000e-08
11	<b>1.041082256577e-03</b>	35	1.000000000000e-08	59	1.605835927241e-08
12	<b>7.654326123141e-03</b>	36	<b>4.177140872662e-04</b>	60	<b>9.730830532649e-03</b>
13	<b>4.371160105281e-03</b>	37	1.000000000000e-08	61	1.000000000000e-08
14	1.000000000000e-08	38	2.946627325168e-08	62	1.000000000000e-08
15	9.999999999999e-09	39	<b>5.926807657568e-03</b>	63	1.000000000000e-08
16	1.000000000000e-08	40	9.999999999999e-09	64	<b>5.319798551249e-03</b>
17	9.999999999999e-09	41	9.999999999999e-09	65	1.000000000000e-08
18	1.000000000000e-08	42	<b>5.201862128449e-03</b>	66	1.000000000000e-08
19	1.000000000000e-08	43	1.000000000001e-08	67	1.000000000000e-08
20	9.999999999998e-09	44	1.000000000000e-08	68	1.000000000000e-08
21	1.000000000000e-08	45	9.999999999998e-09	69	1.000000000000e-08
22	1.000000000000e-08	46	<b>5.384226760321e-03</b>	70	1.000000000000e-08
23	9.999999999999e-09	47	1.000000000000e-08	71	1.000000000000e-08
24	1.000000000000e-08	48	1.000000000000e-08	72	9.999999999998e-09

À semelhança do primeiro exemplo realizado, a tabela apresentada permite perceber quais os elementos, dos 14 presentes na estrutura final, com maior importância para a

estabilidade da solução. No entanto, nesta tabela, dada a quantidade elevada de elementos com a área igual ao limite mínimo, o que indica que a otimização foi realizada na sua plenitude e com resultados bastante razoáveis, optou-se por colocar um código de cores distinto, salientando num tom mais escuro os elementos de facto presentes na estrutura final e num tom mais claro os elementos que, apesar de não terem o valor igual ao limite inferior de área (no caso deste exemplo encontram-se bastante próximos) serem também desprezáveis para a construção da estrutura mais eficiente para corresponder às necessidades pretendidas.

Por fim, foi construída uma tabela, em tudo semelhante à tabela 10 que diz respeito ao caso 1 do exemplo 3D. Para o caso 2, a tabela 13 contribui igualmente com informação relativa ao tempo decorrido na simulação, ao nº de iterações necessárias para a obtenção da configuração final e ainda o valor final da função objetivo, que corresponde naturalmente ao deslocamento do nó 12 neste caso.

Tabela 13 - Valores finais pós-simulação Exemplo 3 para o Nó 12

Nº de iterações	Tempo de simulação (s)	Deslocamento nó 12 (m)
1377	2808.016	1.4146e-04

Comparando com o caso 1, podemos verificar diferenças substanciais. Como se pode verificar, o tempo de simulação e o número de iterações são substancialmente inferiores, o que pode querer indicar que não terá sido tanto processamento de informação como no caso 1 para chegar à solução ótima. No entanto, no que diz respeito aos deslocamentos, os valores são bastante similares, o que leva a crer que ambas as simulações se processaram de forma correta, alcançando uma solução ótima semelhante, mas que responde naturalmente a cada solicitação em particular. Posteriormente à obtenção destes resultados, é possível inferir não só que o programa PROAES pondera em cada caso específico o peso relativo que as variáveis de configuração e topologia devem ter, como também, que se adequa especificamente a cada solicitação imposta e apresenta soluções ótimas semelhantes do ponto de vista físico, mas com características particulares para cada problema de otimização estrutural.

## CONCLUSÕES

### 6.1 Conclusões

Os objetivos principais desta dissertação consistem, não só na aplicação de uma metodologia para calcular de forma eficiente as derivadas associadas às funções objetivo e restrições de um problema de otimização de configuração, como também no estudo do funcionamento e dos resultados potenciais que é possível obter ao realizar simultaneamente diversos tipos de otimização, particularmente combinando otimização de configuração com otimização topológica, tendo também uma vertente de otimização robusta, de forma a contemplar algumas incertezas que acontecem e existem em problemas do mundo real, recorrendo a um programa, criado e desenvolvido por alunos da FCT-NOVA em conjunto com o Professor João Cardoso, denominado PROAES para testar todo o desenvolvimento.

Foram considerados vários exemplos de aplicação, o que permitiu perceber que as metodologias desenvolvidas se revelaram bastante adequadas, produzindo resultados, particularmente ao nível da otimização de configuração bastante razoáveis, o que não só ilustra a importância deste tipo de otimização no âmbito da otimização estrutural, como também indica que um caminho de futuro para a obtenção de estruturas mais eficientes será certamente a combinação dos diversos tipos de otimização, sobretudo tendo em conta que cada vez mais é possível criar de raiz estruturas geometricamente mais complexas.

É possível concluir assim que as metodologias desenvolvidas nesta dissertação cumpriram os objetivos previamente estabelecidos, que o Programa PROAES é extremamente versátil e capaz de processar simultaneamente otimização de configuração, topológica e robusta, apresentando em todos os casos resultados de elevada precisão e qualidade e que de futuro o caminho da otimização estrutural será certamente com base na combinação dos diversos



métodos existentes e porventura com a criação e desenvolvimento de novos métodos ou algoritmos adaptados aos métodos existentes.

Estando a temática de otimização estrutural em constante evolução, o tema desta dissertação permanece em aberto para ser desenvolvido futuramente. Uma vez que durante esta dissertação não foi considerado o fenómeno de encurvadura deixa-se como sugestão para trabalhos futuros a aplicação dos princípios de otimização de configuração combinada com otimização topológica tendo em conta este fenómeno, podendo ser estudados assim os fenómenos com características mais próximas dos problemas do mundo real.

O Programa PROAES poderá também ser ainda mais desenvolvido, particularmente na sua vertente dos cálculos das sensibilidades.

Ainda como sugestão, poderá ser utilizada esta dissertação, entre outras do Programa PROAES para comparar o desempenho do programa em problemas de otimização de configuração com outros programas do mesmo género, realizando exemplos de otimização semelhantes e analisando os resultados.





## BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Maxwell. "On reciprocal figures, frames and diagrams of forces". Scientific papers, vol2, pp. 175-177, 1890.
- [2] A.G.M. Michell. "The limit of economy of material In frame structures". Philosophical Magazine, Series 6, 8, pp. 589-597, 1904.
- [3] P. Coelho. Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural (Optimização Estrutural). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.
- [4] J. S. Arora. "Introduction to Optimum Design", McGrawHill International Editions, Singapore, 1989.
- [5] A. Hrenikoff. "Solution of Problems In Elasticity by the Frame Work Method". Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 8, 169-175, 1941.
- [6] R. Courant. "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations". Bulletin of the American Mathematical Society, 49, 1-23, 1943.
- [7] L. A. Schmit. "Structural design by systematic synthesis". Proc. 2d Conf. Electron. Computation ASCE, Pittsburgh, Pa., pp. 105-132, Sept. 8-9, 1960.
- [8] K. Schittkowski. "NLQPL: A FORTRAN-Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems". Annals of Operations Research, vol.5, pp 485-500, 1985.
- [9] K. Svanberg. "The method of moving asymptotes - a new method for structural optimisation". Int J Num Meth In Engrg, 24, 359-373, 1987.
- [10] F. Glover. "Future paths for Integer programming and links to artificial Intelligence". Computers and Operation Research, 13, 533-549, 1986.
- [11] J. Marmeleiro. "PROAES-Programa de análise de estruturas para aplicação em otimização e análise de fiabilidade". Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017.

- [12] T. Baptista. "Análise de fiabilidade de estruturas". Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2012.
- [13] M. A. Correia. "Optimização Robusta". Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2014.
- [14] R. Leal. "Comparação entre um método aproximado e um método numérico para cálculo de deformações em treliças e otimização dessas estruturas" Tese de mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2015.
- [15] A. Teixeira. "Otimização de topologia de treliças considerando incerteza". Tese de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017
- [16] R. W. Clough. "The Finite Element Method In Plane Stress Analysis", Journal of the Structures Division, ASCE, Proceedings of the 2nd Conference on Electronic Computations, 345-378, 1960.
- [17] D. V. Hutton. "Fundamentals of Finite Element Analysis", McGraw-Hill International Editions, 2004.
- [18] G. P. Nikishkov. "Introduction to the Finite Element Method", Lecture Notes, University of Aizu, Japan, 4-5, 2004.
- [19] G. J. Park. "Analytic Methods for Design Practice", Springer-Verlag London Limited, 2007.
- [20] M.P. Bendsøe and O. Sigmund. "Topology Optimization: Theory, Methods and Applications". Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
- [21] A.B. Barton. "Integrating Manufacturing Issues Into Structural Optimization". PhD Dissertation. University of Sydney, 2002. [Online]. Available: <https://ses.library.usyd.edu.au/bitstream/handle/2123/857/adt-NU20020703.20410505chapter4.pdf;jsessionid=BF2525A0438D2C80B00C8501A1B07EFC?sequence=1>

- [22] G. N. Vanderplaats. "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications". McGraw-Hill Inc., New York, 1984.
- [23] H. R. Grooms, C. F. DeBarro, S. Paydarfar. "What is an Optimal Spacecraft Structure?". *Journal of Spacecraft and Rockets*. Vol. 29, No. 4, pp. 480-3, 1992.
- [24] D. N. Chu, Y. M. Xie, G. P. Steven. "An evolutionary structural optimization method for sizing problems with discrete design variables". *Computers and Structures*. Vol. 98, pp. 419-431, 1998.
- [25] J. B. Cardoso and P. G. Coelho. "Apontamentos de Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica". 2011.
- [26] "Structural Optimization". [Online]. Available [[http://carat.st.bv.tum.de/caratuserswiki/index.php/Users:Structural\\_Optimization/General\\_Formulation](http://carat.st.bv.tum.de/caratuserswiki/index.php/Users:Structural_Optimization/General_Formulation)]
- [27] A. J. Torii, R. H. Lopez and F. Biondini "An approach to reliability-based shape and topology optimization of truss structures, *Engineering Optimization*", (2012) 44:1, 37-53, DOI: 10.1080/0305215X.2011.558578
- [28] P. Pedersen. "On the minimum mass layout of trusses". *Symposium on structural optimization*. (1970) AGARD Conf Proc 36: 189-192
- [29] P. Pedersen. "Topology optimization of three-dimensional trusses". In M. P. Bendsøe, C. A. Mota Soares (eds) *Topology design of structures*. Kluwer, Dordrecht, pp.19-30, 1993
- [30] W. S. Hemp. "Optimum Structures". Clarendon, Oxford. 1973
- [31] M. Kocvara and J. Zowe. "How mathematics can help in design of mechanical structures". In D. F. Griffiths and Watson G. A. Watson (eds) *Numerical Analysis*. Longman, Harlow, pp-76-93, 1996

- [32] W. Aichtziger. "Simultaneous optimization of truss topology and geometry", revisited. (2006) In: M. Bendsøe, N. Olhoff, O. Sigmund (eds). IUTAM Symposium on topological design optimization of structures, machines and materials: status and perspectives. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 413-423
- [33] W. Aichtziger. "On simultaneous optimization of truss geometry and topology". *Struct Multidisc Optim* 33:285-305. 2007
- [34] L. F. Fadel Miguel and L. F. Fadel Miguel. "Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms" *Expert Systems with Applications* 39 (2012) 9458-9467. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.02.113>
- [35] M. Farshchin, C. V. Camp and M. Maniat. "Optimal design of truss structures for size and shape with frequency constraints using a collaborative optimization strategy". *Expert Systems with Applications* 66 (2016) 203-218. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.09.012>
- [36] Q. X. Liu, D. T. T. Do and J. Lee. "An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints". *Computers and Structures* 195 (2018) 99-112. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.016>
- [37] S. Nguyen-Van, K. T. Nguyen, V. H. Luong, S. Lee and Q. X. Lieu. "A novel hybrid differential evolution and symbiotic organisms search algorithm for size and shape optimization of truss structures under multiple frequency constraints". *Expert Systems with Applications* 184 (2021) 115534. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115534>
- [38] M. Azizi, U. Aickelin, H. A. Khorshidi and M. B. Shishehgarkhaneh. "Shape and size optimization of truss structures by Chaos game optimization considering frequency constraints". *Journal of Advanced Research* (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jare.2022.01.002>
- [39] R. Frans and Y. Arfiadi. "Sizing, shape and topology optimization of roof trusses using hybrid genetic algorithms". *Procedia Engineering* 95 (2014) 185-195. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.178>

- [40] W. Dillen, G. Lombaert and M. Schevenels "A hybrid gradient-based/metaheuristic method for Eurocode-complaint size, shape and topology optimization of steel structures". *Engineering Structures* 239 (2021) 112137. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112137>
- [41] S. O. Degertekin, L. Lamberti and I. B. Ugur "Discrete sizing/layout/topology optimization of truss structures with an advanced Jaya algorithm". *Applied Soft Computing Journal* 79 (2019) 363-390. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.03.058>
- [42] N. Noilublao and S. Bureerat "Simultaneous topology, shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective evolutionary algorithms". *Computers and Structures* 89 (2011) 2531-2538. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.08.010>
- [43] F. Fernandez, A. T. Barker, J. Kudo, J. P. Lewicki, K. Swartz, D. A. Tortorelli, S. Watts, D. A. White and J. Wong. "Simultaneous material, shape and topology optimization" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 371 (2020) 113321. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113321>
- [44] K. D. Dang, S. Nguyen-Van, S. Thai, S. Lee, V. H. Luong and Q. X. Lieu. "A single step optimization method for topology, size and shape of trusses using hybrid differential evolution and symbiotic organisms search". *Computers and Structures* 270 (2022) 106846. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106946>
- [45] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. "Generating optimal topologies In structural design using a homogenization method". *Comput Methods Appl Mech Eng*, 71, 197-224. 1988.
- [46] P. Liu, Y. Yan, X. Zhang and Y. Luo. "A MATLAB code for the material-fields series expansion topology optimization method" *Front. Mech. Eng.* 2021, 16(3): 607-622. <https://doi.org/10.1007/s11465-021-0637-3>
- [47] W. S. Dorn, R. E. Gomory and H. J. Greenberg HJ "Automatic design of optimal structures". *J Mech* 3(1):25, 1964.



- [48] Y. Han, B. Xu and Y. Liu. "An efficient 137-line MATLAB code for geometrically nonlinear topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method" *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2021) 63:2571-2588. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02816-9>
- [49] O. Sigmund. "A 99 line topology optimization code written In Matlab" *Struct Multidisc Optim* 21, 120-127 (2001). <https://doi.org/10.1007/s001580050176>
- [50] F. Ferrari and O. Sigmund. "A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D" *Struct Multidiscip Optim* (2020) 62(4): 2211-2228. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02629-w>
- [51] G. H. Paulino and T. Zegard. "GRAND - Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB" *Struct Multidisc Optim* (2014) 50: 861-882. <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1085-2>
- [52] G. H. Paulino and T. Zegard. "GRAND3 - Ground structure based topology optimization for arbitrary 3D domains using MATLAB" *Struct Multidisc Optim* (2015) 52: 1161-1184. <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1284-2>
- [53] L. Xia, Q. Xia, X. Huang and Y. M. Xie. "Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review." *Arch Comput Methods Eng* (2018) 25: 437-478. <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9203-2>
- [54] Y. Liang and G. Cheng. "Further elaborations on topology optimization via sequential integer programming and canonical relaxation algorithm and 128-line MATLAB code". *Struct Multidiscip Optim* (2020) 61(1): 411-431. <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02396-3>
- [55] M. Yaghmaei, A. Ghoddosian and M. M. Khatibi. "A filter-based level set topology optimization method using a 62-line Matlab code". *Struct Multidiscip Optim* (2020) 62: 1001-1018. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02540-4>

- [56] R. Picelli, R. Sivapura and Y.M. Xie. "A 101-line MATLAB code for topology optimization using binary variables and integer programming". *Struct Multidiscip Optim* (2020). <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02719-9>
- [57] Z. Kang and S. Bai. "On robust design optimization of truss structures with bounded uncertainties," *Struct Multidiscip Optim* 47 (2013) 699–714. DOI: 10.1007/s00158-012-0868-3
- [58] G. I. Schueller and H. A. Jensen. "Computational methods in optimization considering uncertainties - an overview". *Comput Methods Appl Mech Eng* 198(1) (2008) 2-13. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.05.004>
- [59] A. T. Beck and W. J. de Santana Gomes. "On Structural Design Optimization under Uncertainty and Risk". *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 10 (2010) 012193. doi:10.1088/1757-899X/10/1/012193
- [60] M. Papadrakakis, N. D. Lagaros and V. Plevris. "Design optimization of steel structures considering uncertainties". *Engineering Structures* 27 (2005) 1408-1418. doi:10.1016/j.eng-struct.2005.04.002
- [61] A. Asadpoure, M. Tootkaboni and J. K. Guest. "Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness - Application to truss structures". *Computers and Structures* 89 (2011) 1131-1141. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.11.004>
- [62] O. Sigmund. "Manufacturing tolerant topology optimization". *Acta Mechanica Sinica* 25(2) (2009) 227-239. DOI: 10.1007/s10409-009-0240-z
- [63] C. P. Pantelides and S. Ganzerli. "Design of trusses under uncertain loads using convex models". *J Struct Eng* 124(3) (1998) 318-329
- [64] M. Lombardi and R. T. Haftka. "Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties". *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering* 157 (1998) 19-31. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00148-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00148-5)

- [65] S. Ganzerli and C. P. Pantelides. "Optimum structural design via convex model superposition". *Comput Struct* 74(6) (2000) 639-647
- [66] Y. Kanno and I. Takewaki. "Sequential Semidefinite Program for Maximum Robustness Design of Structures under Load Uncertainty". *Journal of Optimization Theory and Applications* 130(2) (2006) 265-287. DOI: 10.1007/s10957-006-9102-z
- [67] A. Takezawa, S. Nii, M. Kitamura and N. Kogiso. "Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system". *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011) 2268-2281. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.03.008>
- [68] G. Taguchi. "Systems of experimental design (Vols. I, II)". Kraus International, 1987, New York.
- [69] M. S. Phadke. "Quality Engineering Using Robust Design". Prentice Hall, 1989, Englewood Cliffs.
- [70] H. G. Beyer and B. Sendhoff. "Robust optimization - A comprehensive survey". *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007) 3190-3218. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.003>
- [71] J. Arora. "Introduction to Optimum Design". Third Edition, 2011
- [72] J. M. Lourenço. The NOVAthesis LATEX Template User's Manual. NOVA University Lisbon. 2021. url: [https://github.com/joaomlourenco/novathesis\\_word/raw/master/novathesis\\_word-FINAL-EN.pdf](https://github.com/joaomlourenco/novathesis_word/raw/master/novathesis_word-FINAL-EN.pdf).



## A.1 : Ficheiro trelica\_72\_barras3D\_no12.inp - Estrutura 72

### Barras 3D Nó 12

```

1 #
2 # Programa PROAES
3 #
4 # Exemplo treliça 3D
5 # Optimização de topologia
6 #
7 # Definição dos nós
8 #
9 n, 1, 0.0, 0.0, 0.0
10 n, 2, 0.0, 0.0, 0.5
11 n, 3, 0.0, 0.0, 1.0
12 n, 4, 0.0, 0.0, 1.5
13 n, 5, 0.0, 0.5, 0.0
14 n, 6, 0.0, 0.5, 0.5
15 n, 7, 0.0, 0.5, 1.0
16 n, 8, 0.0, 0.5, 1.5
17 n, 9, 0.5, 0.0, 0.0
18 n, 10, 0.5, 0.0, 0.5
19 n, 11, 0.5, 0.0, 1.0
20 n, 12, 0.5, 0.0, 1.5
21 n, 13, 0.5, 0.5, 0.0
22 n, 14, 0.5, 0.5, 0.5
23 n, 15, 0.5, 0.5, 1.0
24 n, 16, 0.5, 0.5, 1.5
25 #
26 # Elementos
27 #
28 e, 1, 2, 1, 1, 1, 2
29 e, 2, 2, 1, 2, 1, 5

```

```

30 e, 3, 2, 1, 3, 1, 6
31 e, 4, 2, 1, 4, 1, 9
32 e, 5, 2, 1, 5, 1, 10
33 e, 6, 2, 1, 6, 1, 13
34 e, 7, 2, 1, 7, 1, 14
35 e, 8, 2, 1, 8, 2, 3
36 e, 9, 2, 1, 9, 2, 5
37 e, 10, 2, 1, 10, 2, 6
38 e, 11, 2, 1, 11, 2, 7
39 e, 12, 2, 1, 12, 2, 9
40 e, 13, 2, 1, 13, 2, 10
41 e, 14, 2, 1, 14, 2, 11
42 e, 15, 2, 1, 15, 2, 13
43 e, 16, 2, 1, 16, 2, 14
44 e, 17, 2, 1, 17, 2, 15
45 e, 18, 2, 1, 18, 3, 4
46 e, 19, 2, 1, 19, 3, 6
47 e, 20, 2, 1, 20, 3, 7
48 e, 21, 2, 1, 21, 3, 8
49 e, 22, 2, 1, 22, 3, 10
50 e, 23, 2, 1, 23, 3, 11
51 e, 24, 2, 1, 24, 3, 12
52 e, 25, 2, 1, 25, 3, 14
53 e, 26, 2, 1, 26, 3, 15
54 e, 27, 2, 1, 27, 3, 16
55 e, 28, 2, 1, 28, 4, 7
56 e, 29, 2, 1, 29, 4, 8
57 e, 30, 2, 1, 30, 4, 11
58 e, 31, 2, 1, 31, 4, 12

```

```

59 e, 32, 2, 1, 32, 4, 15
60 e, 33, 2, 1, 33, 4, 16
61 e, 34, 2, 1, 34, 5, 6
62 e, 35, 2, 1, 35, 5, 9
63 e, 36, 2, 1, 36, 5, 10
64 e, 37, 2, 1, 37, 5, 13
65 e, 38, 2, 1, 38, 5, 14
66 e, 39, 2, 1, 39, 6, 7
67 e, 40, 2, 1, 40, 6, 9
68 e, 41, 2, 1, 41, 6, 10
69 e, 42, 2, 1, 42, 6, 11
70 e, 43, 2, 1, 43, 6, 13
71 e, 44, 2, 1, 44, 6, 14
72 e, 45, 2, 1, 45, 6, 15
73 e, 46, 2, 1, 46, 7, 8
74 e, 47, 2, 1, 47, 7, 10
75 e, 48, 2, 1, 48, 7, 11
76 e, 49, 2, 1, 49, 7, 12
77 e, 50, 2, 1, 50, 7, 14
78 e, 51, 2, 1, 51, 7, 15
79 e, 52, 2, 1, 52, 7, 16
80 e, 53, 2, 1, 53, 8, 11
81 e, 54, 2, 1, 54, 8, 12
82 e, 55, 2, 1, 55, 8, 15
83 e, 56, 2, 1, 56, 8, 16
84 e, 57, 2, 1, 57, 9, 10
85 e, 58, 2, 1, 58, 9, 13
86 e, 59, 2, 1, 59, 9, 14
87 e, 60, 2, 1, 60, 10, 11

```

```

88 e, 61, 2, 1, 61, 10, 13
89 e, 62, 2, 1, 62, 10, 14
90 e, 63, 2, 1, 63, 10, 15
91 e, 64, 2, 1, 64, 11, 12
92 e, 65, 2, 1, 65, 11, 14
93 e, 66, 2, 1, 66, 11, 15
94 e, 67, 2, 1, 67, 11, 16
95 e, 68, 2, 1, 68, 12, 15
96 e, 69, 2, 1, 69, 12, 16
97 e, 70, 2, 1, 70, 13, 14
98 e, 71, 2, 1, 71, 14, 15
99 e, 72, 2, 1, 72, 15, 16
100 #
101 # Material
102 #
103 m, 1, 210e9
104 #
105 # Características da secção
106 #
107 s, 1, 1.0e-2
108 s, 2, 1.0e-2
109 s, 3, 1.0e-2
110 s, 4, 1.0e-2
111 s, 5, 1.0e-2
112 s, 6, 1.0e-2
113 s, 7, 1.0e-2
114 s, 8, 1.0e-2
115 s, 9, 1.0e-2
116 s, 10, 1.0e-2

```

```

117 s, 11, 1.0e-2
118 s, 12, 1.0e-2
119 s, 13, 1.0e-2
120 s, 14, 1.0e-2
121 s, 15, 1.0e-2
122 s, 16, 1.0e-2
123 s, 17, 1.0e-2
124 s, 18, 1.0e-2
125 s, 19, 1.0e-2
126 s, 20, 1.0e-2
127 s, 21, 1.0e-2
128 s, 22, 1.0e-2
129 s, 23, 1.0e-2
130 s, 24, 1.0e-2
131 s, 25, 1.0e-2
132 s, 26, 1.0e-2
133 s, 27, 1.0e-2
134 s, 28, 1.0e-2
135 s, 29, 1.0e-2
136 s, 30, 1.0e-2
137 s, 31, 1.0e-2
138 s, 32, 1.0e-2
139 s, 33, 1.0e-2
140 s, 34, 1.0e-2
141 s, 35, 1.0e-2
142 s, 36, 1.0e-2
143 s, 37, 1.0e-2
144 s, 38, 1.0e-2
145 s, 39, 1.0e-2

```

```

146 s, 40, 1.0e-2
147 s, 41, 1.0e-2
148 s, 42, 1.0e-2
149 s, 43, 1.0e-2
150 s, 44, 1.0e-2
151 s, 45, 1.0e-2
152 s, 46, 1.0e-2
153 s, 47, 1.0e-2
154 s, 48, 1.0e-2
155 s, 49, 1.0e-2
156 s, 50, 1.0e-2
157 s, 51, 1.0e-2
158 s, 52, 1.0e-2
159 s, 53, 1.0e-2
160 s, 54, 1.0e-2
161 s, 55, 1.0e-2
162 s, 56, 1.0e-2
163 s, 57, 1.0e-2
164 s, 58, 1.0e-2
165 s, 59, 1.0e-2
166 s, 60, 1.0e-2
167 s, 61, 1.0e-2
168 s, 62, 1.0e-2
169 s, 63, 1.0e-2
170 s, 64, 1.0e-2
171 s, 65, 1.0e-2
172 s, 66, 1.0e-2
173 s, 67, 1.0e-2
174 s, 68, 1.0e-2

```

```

175 s, 69, 1.0e-2
176 s, 70, 1.0e-2
177 s, 71, 1.0e-2
178 s, 72, 1.0e-2
179 #
180 # Forças
181 f, 12, 1, 20000
182 f, 12, 2, -20000
183 #
184 #
185 # Apoios
186 #
187 a, 1, 1, 0
188 a, 1, 2, 0
189 a, 1, 3, 0
190 a, 5, 1, 0
191 a, 5, 2, 0
192 a, 5, 3, 0
193 a, 9, 1, 0
194 a, 9, 2, 0
195 a, 9, 3, 0
196 a, 13, 1, 0
197 a, 13, 2, 0
198 a, 13, 3, 0
199 #
200 # Variáveis de projecto
201 #
202 v, 1, 4, 1
203 v, 2, 4, 2

```

204	v, 3, 4, 3	233	v, 32, 4, 32	262	v, 61, 4, 61
205	v, 4, 4, 4	234	v, 33, 4, 33	263	v, 62, 4, 62
206	v, 5, 4, 5	235	v, 34, 4, 34	264	v, 63, 4, 63
207	v, 6, 4, 6	236	v, 35, 4, 35	265	v, 64, 4, 64
208	v, 7, 4, 7	237	v, 36, 4, 36	266	v, 65, 4, 65
209	v, 8, 4, 8	238	v, 37, 4, 37	267	v, 66, 4, 66
210	v, 9, 4, 9	239	v, 38, 4, 38	268	v, 67, 4, 67
211	v, 10, 4, 10	240	v, 39, 4, 39	269	v, 68, 4, 68
212	v, 11, 4, 11	241	v, 40, 4, 40	270	v, 69, 4, 69
213	v, 12, 4, 12	242	v, 41, 4, 41	271	v, 70, 4, 70
214	v, 13, 4, 13	243	v, 42, 4, 42	272	v, 71, 4, 71
215	v, 14, 4, 14	244	v, 43, 4, 43	273	v, 72, 4, 72
216	v, 15, 4, 15	245	v, 44, 4, 44	274	#
217	v, 16, 4, 16	246	v, 45, 4, 45	275	# Coordenadas dos nos
218	v, 17, 4, 17	247	v, 46, 4, 46	276	#
219	v, 18, 4, 18	248	v, 47, 4, 47	277	v, 73, 1, 2, 1
220	v, 19, 4, 19	249	v, 48, 4, 48	278	v, 74, 1, 2, 2
221	v, 20, 4, 20	250	v, 49, 4, 49	279	v, 75, 1, 2, 3
222	v, 21, 4, 21	251	v, 50, 4, 50	280	v, 76, 1, 3, 1
223	v, 22, 4, 22	252	v, 51, 4, 51	281	v, 77, 1, 3, 2
224	v, 23, 4, 23	253	v, 52, 4, 52	282	v, 78, 1, 3, 3
225	v, 24, 4, 24	254	v, 53, 4, 53	283	v, 79, 1, 4, 1
226	v, 25, 4, 25	255	v, 54, 4, 54	284	v, 80, 1, 4, 2
227	v, 26, 4, 26	256	v, 55, 4, 55	285	v, 81, 1, 4, 3
228	v, 27, 4, 27	257	v, 56, 4, 56	286	v, 82, 1, 6, 1
229	v, 28, 4, 28	258	v, 57, 4, 57	287	v, 83, 1, 6, 2
230	v, 29, 4, 29	259	v, 58, 4, 58	288	v, 84, 1, 6, 3
231	v, 30, 4, 30	260	v, 59, 4, 59	289	v, 85, 1, 7, 1
232	v, 31, 4, 31	261	v, 60, 4, 60	290	v, 86, 1, 7, 2

291	v, 87, 1, 7, 3
292	v, 88, 1, 8, 1
293	v, 89, 1, 8, 2
294	v, 90, 1, 8, 3
295	v, 91, 1, 10, 1
296	v, 92, 1, 10, 2
297	v, 93, 1, 10, 3
298	v, 94, 1, 11, 1
299	v, 95, 1, 11, 2
300	v, 96, 1, 11, 3
301	v, 97, 1, 14, 1
302	v, 98, 1, 14, 2
303	v, 99, 1, 14, 3
304	v, 100, 1, 15, 1
305	v, 101, 1, 15, 2
306	v, 102, 1, 15, 3
307	v, 103, 1, 16, 1
308	v, 104, 1, 16, 2
309	v, 105, 1, 16, 3
310	# Performances
311	#
312	p, 1, 2, 12, 1
313	p, 2, 2, 12, 2
314	p, 3, 1
315	#
316	# (fim do ficheiro)

## A.2 : Ficheiros obj\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m e grad\_obj\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12

Ficheiro obj\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %
3 %     Calcula a funcao objetivo do Problema 3D - Trelica 72 barras
4 %
5 %     Problema de minimização do Deslocamento no nó 12
6 %     com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7 %
8 %     Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
9 %     06/2022
10 %
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 function f = obj_OT_trelica_72_barras_nol2(x)
13 %
14 % Escreve o ficheiro opt2ef
15 %
16 [N,M]= size(x);
17 fout= fopen('opt2ef','w');
18 fprintf(fout,'1\n'); % Quer calcular a performance
19 fprintf(fout,'%d\n',N);
20 for i=1:N
21     fprintf(fout,'%d, %18.12e\n', i, x(i));
22 end
23 fprintf(fout,'2\n'); % Necessita de duas performances
24 fprintf(fout,'1\n'); % O deslocamento X do nó 12 é a performance 1 para este problema
25 fprintf(fout,'2\n'); % O deslocamento Y do nó 12 é a performance 2 para este problema
26 fclose(fout);
27 %
28 % Chama o PROAES
29 resultado= PROAES('trelica_72_barras3D_nol2','o');
```



```

30 %
31 % Lê o ficheiro ef2opt
32 fid= fopen('ef2opt','r');
33 tline = fgets(fid);      % Lê o tipo de análise
34 tline = fgets(fid);      % Lê o número de funções
35 tline = fgets(fid);
36 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
37 if count == 2
38     %
39     % Lê o valor do deslocamento X
40     f= data(2);
41 else
42     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
43 end
44 tline = fgets(fid);
45 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
46 if count == 2
47     %
48     % Lê o valor do deslocamento Y
49     f= f - data(2);
50 else
51     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
52 end
53 fclose(fid);
54 %
55 fprintf(' obj= %18.12f\n', f);
56 %
57 end % of function

```

Ficheiro grad\_obj\_OT\_trelca\_72\_barras\_no12.m

```

1 function grad = grad_obj_OT_trelca_72_barras_no12(x)
2 %
3 %     Calcula as derivadas da funcao objetivo do Problema 3D - Trelca 72 barras
4 %
5 %     Problema de minimização do Deslocamento no nó 12
6 %     com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7 %
8 %     Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
9 %     06/2022
10 %
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 %
13 % Escreve o ficheiro opt2ef
14 %
15 [N,M]= size(x);
16 fout= fopen('opt2ef','w');
17 fprintf(fout,'3\n'); % Quer calcular a performance e as derivadas
18 fprintf(fout,'%d\n',N);
19 for i=1:N
20     fprintf(fout,'%d, %18.12e\n', i, x(i));
21 end
22 fprintf(fout,'2\n'); % Necessita de duas performances
23 fprintf(fout,'1\n'); % O deslocamento X do nó 12 é a performance 1 para este problema
24 fprintf(fout,'2\n'); % O deslocamento Y do nó 12 é a performance 2 para este problema
25 fclose(fout);
26 %
27 % Chama o PROAES
28 resultado= PROAES('trelca_72_barras3D_no12','o');
29 %
30 % Lê o ficheiro ef2opt
31 fid= fopen('ef2opt','r');
32 tline = fgets(fid); % Lê o tipo de análise
33 tline = fgets(fid); % Lê o número de funções
34 tline = fgets(fid);
35 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
36 if count == 2
37     %
38     % Lê o valor do deslocamento X
39     f= data(2);
40 else
41     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
42 end
43 tline = fgets(fid);
44 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
45 if count == 2
46     %
47     % Lê o valor do deslocamento Y
48     f= f - data(2);
49 else
50     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
51 end
52 %
53 % Lê as derivadas
54 tline = fgets(fid); % Lê o número de variáveis
55 [data,count]= sscanf(tline,'%d',inf);
56 if count == 1

```

```

57     NV= data(1);
58 end
59 if N ~= NV
60     fprintf('Erro na leitura de ef2opt (numero de variáveis != N)\n');
61 end
62 grad= zeros(N,1);
63 for i= 1:N
64     tline = fgets(fid);
65     [data,count]= sscanf(tline,'%d, %d, %f',inf);
66     if count == 3
67         grad(i)= data(3);
68     end
69 end
70 for i= 1:N
71     tline = fgets(fid);
72     [data,count]= sscanf(tline,'%d, %d, %f',inf);
73     if count == 3
74         grad(i)= grad(i) - data(3);
75     end
76 end
77 fclose(fid);
78 %
79 end % of function
80 %
81

```

### A.3 : Ficheiros con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m e grad\_con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m - Estrutura 72 Barras 3D Nó 12

Ficheiro con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m

```
1 function c = con_OT_trelica_72_barras_nol2(x)
2 %
3 %   Define e calcula os constrangimentos do Problema 3D - Trelica 72 barras
4 %
5 %   Problema de minimização do Deslocamento no nó 12
6 %   com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7 %
8 %   Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
9 %   06/2022
10 %
11 % O constrangimento é imposto no volume total da treliça
12 % Para todas as áreas no limite superior, Vol= 0.4701972184338 m3
13 CONST= 0.4701972184338;
14 %
15 % O constrangimento é definido como uma percentagem deste valor
16 %
17 FRA_VOL= 0.10; % Percentagem do volume inicial
18 %
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20 %
21 [N,M]= size(x);
22 %
23 % Escreve o ficheiro opt2form
24 fout= fopen('opt2ef','w');
25 fprintf(fout,'1\n');
26 fprintf(fout,'%d\n',N);
27 for i=1:N
28     fprintf(fout,'%d, %18.12e\n', i, x(i));
29 end
30 fprintf(fout,'1\n'); % Só necessita de uma performance
31 fprintf(fout,'3\n'); %
32 fclose(fout);
33 %
34 % Chama o PROAES
35 resultado= PROAES('trelica_72_barras3D_nol2','o');
36 %
37 % Lê o ficheiro ef2opt
38 fid= fopen('ef2opt','r');
39 tline = fgets(fid); % Lê o tipo de análise
40 tline = fgets(fid); % Lê o número de funções
41 tline = fgets(fid);
42 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
43 if count == 2
44     %
45     % Lê o valor do volume e define o constrangimento na forma c(x) <= 0
46     c= 1 - data(2) / ( FRA_VOL * CONST ) ;
47 else
48     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
49 end
50 fprintf('c= %f\n',c);
51 fclose(fid);
52 %
53 fprintf('                con= %18.12f\n', c);
54 %
55 end % of function
56 %
```

## Ficheiro grad\_con\_OT\_trelica\_72\_barras\_no12.m

```

1 function gradc = grad_con_OT_trelica_72_barras_no12(x)
2 %
3 %   Define e calcula as derivadas dos constrangimentos do Problema 3D - Trelica 72 barras
4 %
5 %   Problema de minimização do Deslocamento no nó 12
6 %   com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7 %
8 %   Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
9 %   06/2022
10 %
11 % O constrangimento é imposto no volume total da trelica
12 % Para todas as áreas no limite superior, Vol= 0.4701972184338 m3
13 CONST= 0.4701972184338;
14 %
15 % O constrangimento é definido como uma percentagem deste valor
16 %
17 FRA_VOL= 0.10; % Percentagem do volume inicial
18 %
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20 %
21 [N,M]= size(x);
22 gradc= zeros(1,N);
23 %
24 % Escreve o ficheiro opt2form
25 fout= fopen('opt2ef','w');
26 fprintf(fout,'3\n');
27 fprintf(fout,'%d\n',N);
28 for i=1:N
29     fprintf(fout,'%d, %18.12e\n', i, x(i));
30 end
31 fprintf(fout,'1\n'); % Só necessita de uma performance
32 fprintf(fout,'3\n'); %
33 fclose(fout);
34 %
35 % Chama o PROAES
36 resultado= PROAES('trelica_72_barras3D_no12','o');
37 %
38 % Lê o ficheiro ef2opt
39 fid= fopen('ef2opt','r');
40 tline = fgets(fid); % Lê o tipo de análise
41 tline = fgets(fid); % Lê o número de funções
42 tline = fgets(fid);
43 [data,count]= sscanf(tline,'%d, %f',inf);
44 if count == 2
45     %
46     % Lê o valor do volume e define o constrangimento na forma c(x) <= 0
47     c= 1 - data(2) / ( FRA_VOL * CONST) ;
48 else
49     fprintf('Erro na leitura de ef2opt\n');
50 end
51 %
52 % Lê as derivadas do volume
53 tline = fgets(fid);
54 [data,count]= sscanf(tline,'%d',inf);
55 if count == 1
56     NV= data(1);
57 end
58 if N ~= NV
59     fprintf('***** Erro na leitura de form2opt (numero de variáveis != %d)\n',NV);
60 end
61 for i= 1:N
62     tline = fgets(fid);
63     [data,count]= sscanf(tline,'%d, %d, %f',inf);
64     if count == 3
65         gradc(i)= (-1) * data(3) / ( FRA_VOL * CONST) ;
66     end
67 end
68 fclose(fid);
69 %
70 end % of function
71 %

```

## A.4 : Ficheiros inicializacao\_OT\_Trelica\_72\_barras\_no12.m e grafico\_topologia\_optima3D\_com\_configuracao.m - Estrutura 72 Barras 3D N6 12

Ficheiro inicializacao\_OT\_Trelica\_72\_barras\_no12.m

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %
3  %   Ficheiro de inicialização do Problema 3D - Trelica 72 barras
4  %
5  %   Problema de minimização do Deslocamento no nó 12
6  %   com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7  %
8  %   Executa a optimizacao da trelica 72 barras com o SQP
9  %
10 %   Necessita dos 4 ficheiros:  obj_OT_trelica_72_barras_no12
11 %                               grad_obj_OT_trelica_72_barras_no12
12 %                               con_OT_trelica_72_barras_no12
13 %                               grad_con_OT_trelica_72_barras_no12
14 %
15 %   Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
16 %   06/2022
17 %
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 clc
20 clear all
21 ti=time;
22 %
23 % GRAD= 0/1, SQP calcula o gradiente/ é fornecido
24 GRAD= 1;
25 %
26 display('72 bar truss optimization');
27 % Valores iniciais das variaveis na iteração = 0
28 x0 = [0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
29 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
30 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
31 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
32 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
33 0.01, 0.01, 0.01, 0.0, 0.0, 0.5, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.5, 0.0, 0.5, 0.5, 0.0,
34 0.5, 1.0, 0.0, 0.5, 1.5, 0.5, 0.0, 0.5, 0.5, 0.0, 1.0, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5,
35 1.0, 0.5, 0.5, 1.5]';
36 for i=1:72
37     x0(i)= x0(i)*0.1;
38 end
39 %
40 %
41 if GRAD
42     ObjectiveFunction = cell(2,1);
43     % Função objetivo
44     ObjectiveFunction(1)= @obj_OT_trelica_72_barras_no12;
45     % Gradiente da função objetivo
46     ObjectiveFunction(2)= @grad_obj_OT_trelica_72_barras_no12;
47     %
48     IneqConsFunction = cell(2,1);
49     % Função constrangimento
50     IneqConsFunction(1)= @con_OT_trelica_72_barras_no12;
51     % Gradiente da função constrangimento
52     IneqConsFunction(2)= @grad_con_OT_trelica_72_barras_no12;
53 else
54     % Função objetivo
55     ObjectiveFunction= @obj_OT_trelica_72_barras_no12;
56     % Lembrete 1: a função do constrangimento deve devolver um vetor coluna, i.e.,

```

```

57     % c = [ ; ... ; ]
58     % Lembrete 2: o formato do constrangimento de desigualdade é g >= 0, i.e.,
59     % constrangimento do tipo "maior ou igual" a
60     IneqConsFunction= @con_OT_trelica_72_barras_nol2;
61 end
62 % Lower and upper bounds - Limite superior e inferior das variaveis
63 LB= [1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
64 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
65 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
66 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
67 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
68 1e-8, 1e-8, 1e-8, 0.0, 0.0, 0.3, 0.0, 0.0, 0.8, 0.0, 0.0, 1.3, 0.0, 0.3, 0.3, 0.0,
69 0.3, 0.8, 0.0, 0.3, 1.3, 0.3, 0.0, 0.3, 0.3, 0.0, 0.8, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3,
70 0.8, 0.3, 0.3, 1.3]';
71
72 UB= [0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
73 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
74 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
75 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
76 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
77 0.01, 0.01, 0.01, 0.2, 0.2, 0.7, 0.2, 0.2, 1.2, 0.2, 0.2, 1.7, 0.2, 0.7, 0.7, 0.2,
78 0.7, 1.2, 0.2, 0.7, 1.7, 0.7, 0.2, 0.7, 0.7, 0.2, 1.2, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7,
79 1.2, 0.7, 0.7, 1.7]';
80
81 % Numero máximo de iterações; use [] para um valor padrão
82 maxiter= 1500;
83 % Tolerância à convergência; use [] para um valor padrão
84 tol= 1e-12;
85
86 % lanca 'sqp' do Octave:
87 [x,obj,info,iter,nf,lambda]=sqp(x0,ObjectiveFunction,[],IneqConsFunction,LB,UB,maxiter,tol)
88 %
89 tf=time;
90 t=tf-ti;
91 fprintf('t= %.3f s\n',t);
92 % Fim do ficheiro

```

## Ficheiro grafico\_topologia\_optima3D\_com\_configuracao.m

```

1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %
3 %   Ficheiro de Grafico da solucao com topologia optima do Problema 3D - Trelica 72 barras
4 %
5 %   Problema de minimizacao do Deslocamento no no 12
6 %   com constrangimentos de Volume associado a otimizacao de configuracao
7 %
8 %   Executa a otimizacao da trelica 72 barras com o SQP
9 %
10 %   Necessita dos 4 ficheiros:  obj_OT_trelica_72_barras_no12
11 %                               grad_obj_OT_trelica_72_barras_no12
12 %                               con_OT_trelica_72_barras_no12
13 %                               grad_con_OT_trelica_72_barras_no12
14 %
15 %   Dissertacao de Mestrado de Nuno Filipe
16 %   06/2022
17 %
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 %
20 function a = grafico_topologia_optima3D_com_configuracao(x)
21 %
22 AMIN= 1.0e-5;
23 %
24
25
26 xmin= [1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
27 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
28 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
29 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
30 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8, 1e-8,
31 1e-8, 1e-8, 1e-8, 0.0, 0.0, 0.3, 0.0, 0.0, 0.8, 0.0, 0.3, 0.3, 0.0, 0.3, 0.8, 0.0,
32 0.3, 1.3, 0.3, 0.0, 0.3, 0.3, 0.0, 0.8, 0.3, 0.0, 1.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.8, 0.3, 0.3, 1.3];
33
34 xmax= [0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
35 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
36 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
37 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
38 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01,
39 0.01, 0.01, 0.2, 0.2, 0.7, 0.2, 0.2, 1.2, 0.2, 0.7, 0.7, 0.2, 0.7, 1.2, 0.2, 0.7,
40 1.7, 0.7, 0.2, 0.7, 0.7, 0.2, 1.2, 0.7, 0.2, 1.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 1.2, 0.7, 0.7, 1.7];
41 %
42 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
43 MAX= max(x(1:72));
44 MIN= min(x(1:72));
45 delta= (MAX-MIN)/10;
46 %
47 for i=1:10;
48     fprintf('i= %d\n',i);
49     for j=1:72;
50         if (MAX-(i-1)*delta) >= x(j) && x(j) > (MAX-(i*delta));
51             fprintf('j= %3d , x(j)= %e\n',j,x(j));
52         end
53     end
54 end
55 %%
56 % Desenha o grafico

```



```

57 %
58 % Áreas dos elementos
59 aa= x(1:72);
60 %
61 % Coordenadas dos nós
62 xx= [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50];
63 yy= [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50];
64 zz= [0.00, 0.50, 1.00, 1.50, 0.00, 0.50, 1.00, 1.50, 0.00, 0.50, 1.00, 1.50, 0.00, 0.50, 1.00, 1.50];
65 %
66 % Alteração das coordenadas dos nos
67 %
68 xx(2)= x(73);
69 yy(2)= x(74);
70 zz(2)= x(75);
71 xx(3)= x(76);
72 yy(3)= x(77);
73 zz(3)= x(78);
74 xx(4)= x(79);
75 yy(4)= x(80);
76 zz(4)= x(81);
77 %
78 xx(6)= x(82);
79 yy(6)= x(83);
80 zz(6)= x(84);
81 xx(7)= x(85);
82 yy(7)= x(86);
83 zz(7)= x(87);
84 xx(8)= x(88);
85 yy(8)= x(89);
86 zz(8)= x(90);
87 %
88 xx(10)= x(91);
89 yy(10)= x(92);
90 zz(10)= x(93);
91 xx(11)= x(94);
92 yy(11)= x(95);
93 zz(11)= x(96);
94 %
95 xx(14)= x(97);
96 yy(14)= x(98);
97 zz(14)= x(99);
98 xx(15)= x(100);
99 yy(15)= x(101);
100 zz(15)= x(102);
101 xx(16)= x(103);
102 yy(16)= x(104);
103 zz(16)= x(105);
104 %
105 % Topologia dos elementos
106 e=[ 1, 2;...
107     1, 5;...
108     1, 6;...
109     1, 9;...
110     1, 10;...
111     1, 13;...
112     1, 14;...
113     2, 3;...
114     2, 5;...
115     2, 6;...
116     2, 7;...
117     2, 9;...
118     2, 10;...
119     2, 11;...
120     2, 13;...
121     2, 14;...
122     2, 15;...
123     3, 4;...
124     3, 6;...
125     3, 7;...
126     3, 8;...
127     3, 10;...
128     3, 11;...
129     3, 12;...
130     3, 14;...
131     3, 15;...
132     3, 16;...
133     4, 7;...
134     4, 8;...
135     4, 11;...
136     4, 12;...
137     4, 15;...
138     4, 16;...
139     5, 6;...
140     5, 9;...
141     5, 10;...
142     5, 13;...
143     5, 14;...
144     6, 7;...
145     6, 9;...
146     6, 10;...
147     6, 11;...
148     6, 13;...
149     6, 14;...
150     6, 15;...
151     7, 8;...
152     7, 10;...
153     7, 11;...
154     7, 12;...
155     7, 14;...
156     7, 15;...
157     7, 16;...
158     8, 11;...
159     8, 12;...
160     8, 15;...
161     8, 16;...
162     9, 10;...
163     9, 13;...
164     9, 14;...
165     10, 11;...
166     10, 13;...
167     10, 14;...
168     10, 15;...
169     11, 12;...
170     11, 14;...
171     11, 15;...
172     11, 16;...
173     12, 15;...
174     12, 16;...
175     13, 14;...
176     14, 15;...
177     15, 16];

```

```

178 %
179 % Desenha os elementos
180 xxx= zeros(2,72);
181 yyy= zeros(2,72);
182 zzz= zeros(2,72);
183 xxx0= zeros(2,72);
184 yyy0= zeros(2,72);
185 zzz0= zeros(2,72);
186
187 for i=1:72;
188     if aa(i) > AMIN
189         xxx(1,i)= xx(e(i,1));
190         yyy(1,i)= yy(e(i,1));
191         zzz(1,i)= zz(e(i,1));
192         xxx(2,i)= xx(e(i,2));
193         yyy(2,i)= yy(e(i,2));
194         zzz(2,i)= zz(e(i,2));
195     end
196 end
197
198 for i=1:72;
199     if aa(i) > 2.0e-4 && aa(i) < 2.5e-3 ;
200         xxx0(1,i)= xx(e(i,1));
201         yyy0(1,i)= yy(e(i,1));
202         zzz0(1,i)= zz(e(i,1));
203         xxx0(2,i)= xx(e(i,2));
204         yyy0(2,i)= yy(e(i,2));
205         zzz0(2,i)= zz(e(i,2));
206     end
207 end
208 %
209 figure;
210 plot3(zzz,xxx,yyy,'k','LineWidth',6); hold on;
211 plot3(zzz0,xxx0,yyy0,'k','LineWidth',3);
212 axis equal;
213 a=1;
214 end % function
215 %
216 %

```





2022

NUÑO FILIPE

OTIMIZAÇÃO DE CONFIGURAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS