

MEMÓRIAS  
DA  
ACADEMIA DAS CIÊNCIAS  
DE  
LISBOA

CLASSE DE CIÊNCIAS

TOMO XLIX

---

**Problemas de fractura em modo misto**

PAULO M. S. T. DE CASTRO E SÉRGIO M. O. TAVARES

---



ACADEMIA DAS CIÊNCIAS  
DE LISBOA

LISBOA • 2023





## Problemas de fractura em modo misto

PAULO M. S. T. DE CASTRO<sup>1,2</sup> E SÉRGIO M. O. TAVARES<sup>2</sup>

### RESUMO

A fadiga e fractura em modo misto I-II será brevemente revista nesta comunicação, que destacará conceitos fundamentais e identificará alguns desafios existentes.

Um grande desafio diz respeito à determinação do factor de intensidade de tensão equivalente ( $K_{eq}$ ) em situações de modo misto. Diversas abordagens foram comparadas através da determinação de  $K_{eq} / K_I$  numa ampla gama de valores de  $K_I / K_{II}$  ou  $K_{II} / K_I$ . Para ilustrar a importância da definição de  $K_{eq}$ , foram feitas medições da velocidade de crescimento de fendas por fadiga e da trajetória da fendas. Utilizando diferentes critérios de  $K_{eq}$ , foram encontradas diferenças nas constantes da lei de Paris, levando a diferentes estimativas de vida em fadiga, facto que justifica a continuação do interesse na procura de um critério “universal” para a definição de  $K_{eq}$ .

A fractura em modo misto tem sido objecto de estudos experimentais e modelação numérica, frequentemente pelo método dos elementos finitos. As dificuldades decorrentes de refazer a malha de elementos finitos após cada incremento de comprimento de fenda em propagação de fendas por fadiga

<sup>1</sup> Academia das Ciências de Lisboa (ACL).

<sup>2</sup> Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (FEUP).

são ilustradas com o caso de painéis aeronáuticos reforçados. O desenvolvimento de novas ferramentas numéricas, como o XFEM, tornou mais acessível a análise da propagação de fendas em modo misto. A generalização da implementação do XFEM em *software* do MEF permite simular com fidelidade as trajectórias de fissuras em modo misto, como ilustrado com vários exemplos apresentados.

## ABSTRACT

Mixed mode I-II fatigue and fracture will be briefly reviewed. The presentation intends to highlight fundamental concepts and identify challenges still to be overcome in the study of mixed mode situations.

One major challenge concerns the determination of equivalent stress intensity factor ( $K_{eq}$ ) in mixed mode situations. Several approaches were compared through the determination of  $K_{eq}/K_I$  over a wide range of values of  $K_I/K_{II}$  or  $K_{II}/K_I$ . To illustrate the importance of the definition of  $K_{eq}$ , measurements of fatigue crack growth rate (FCG) and of crack path were made. Using different  $K_{eq}$  criteria, differences in the Paris law constants were found, leading to different fatigue life estimations, a fact that calls for further work on the definition of a 'universal'  $K_{eq}$  criterion.

Mixed mode fracture has been the subject of experimental studies and numerical modeling, often using the finite element method. The difficulties arising from remeshing after each increment of crack length in fatigue crack propagation are illustrated with the case of reinforced aeronautical panels. The development of new numerical tools, such as XFEM, has made the analysis of crack propagation in mixed mode more accessible. The generalization of the XFEM implementation in MEF software allows to accurately simulate the crack paths in mixed mode, as illustrated with several examples presented.

## INTRODUÇÃO

O comportamento mecânico de materiais tem sido objecto de intensa investigação e está sumarizado em vasta bibliografia de que Dowling *et al.* [1] é um bom exemplo. Dentro do comportamento mecânico de materiais são especialmente relevantes para estudos de durabilidade de componentes e de estruturas os tópicos da fadiga e fractura. Uma história da evolução do conhecimento da fadiga até finais do século XX foi elaborada por Schütz, [2], que discute e lista mais de quinhentas referências.

Conceitos básicos de fadiga incluem as curvas SN (*stress, number of cycles*), também chamadas curvas de Wöhler<sup>3</sup>, descrevendo a relação entre a amplitude de uma solitação cíclica e o número de ciclos até à ruptura do provete ou componente em que ela está aplicada. Para muitas ligas metálicas a relação é aproximadamente linear em coordenadas logarítmicas, Figura 1, ocasionalmente designada lei de Basquin.

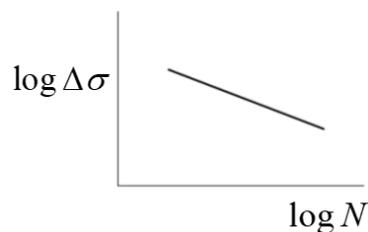


Figura 1  
Curva SN, lei de Basquin.

<sup>3</sup> Por concisão optou-se por não fazer referência às fontes primárias (artigos originais) relativas aos aspectos básicos seguidamente referidos; as refs. 1 e 2 darão toda a informação relevante.

Wöhler – que aparentemente nunca chegou a publicar gráficos, mas apenas tabelas -, tem o seu nome associado a este tipo de curvas, que são os alicerces básicos dos estudos de fadiga. Da consideração de carregamentos nominalmente elásticos, passou-se seguidamente à consideração de solicitações incluindo uma componente plástica cíclica, envolvendo em resultado vidas (*i.e.*, números de ciclos até à ruptura) mais curtas e abrindo um campo de estudos designado por fadiga de baixo número de ciclos (*low cycle fatigue, fatigue oligocyclique*), por contraste com situações nominalmente elásticas, envolvendo alto número de ciclos (*high cycle fatigue*). Nomes associados aos desenvolvimentos iniciais desta área incluem Coffin, Manson, e Neuber, entre muitos outros. Efeitos na vida à fadiga causados por tensão média eventualmente diferente de zero, efeitos de geometrias causando concentração de tensões, de acabamento superficial, de solicitações que em vez de serem de características estáveis (*i.e.*, tensão média e amplitude de tensão constantes) são pelo contrário aleatórias, ocuparam boa parte do século XX. Para lidar com solicitações de características não permanentes, Miner propôs modelos de dano acumulado.

O processo de fadiga, em materiais virgens não danificados, envolve um estágio inicial em que uma ou mais fendas são criadas, e a sua propagação até à rotura final. Naturalmente que abordagens envolvendo a consideração de fendas pressupõe modelos da mecânica dos sólidos para descrever a distribuição de tensões em corpos fissurados, conhecimento que foi estabilizado em meados do século XX com trabalhos de Irwin apoiado em trabalhos anteriores de Westergaard, Griffith e outros. O conceito básico é a caracterização do campo de tensões singular na extremidade de uma fenda em função dos factores de intensidade de tensão,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  correspondentes aos três modos básicos de deformação da região fendida de um sólido, [3].

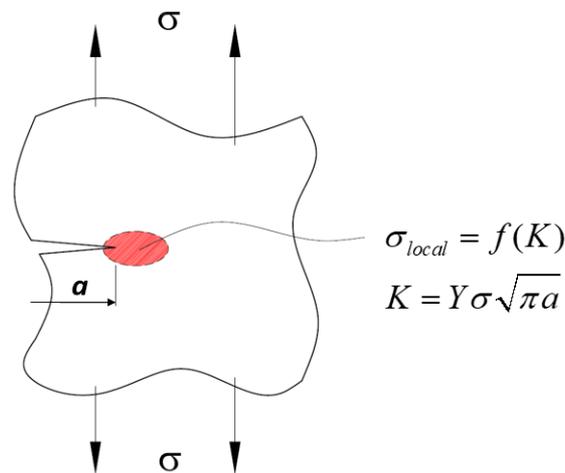


Figura 2  
Esboço esquemático da relação entre tensão local  $\sigma_{local}$  e tensão remota aplicada  $\sigma$ , mediada pelo factor de intensidade de tensão  $K$ .

O conceito de factor de intensidade de tensão é derivado considerando elasticidade, o que envolve um pressuposto dos estudos iniciais da mecânica da fractura (Mecânica da Fractura Linear Elástica): a sua aplicabilidade supõe que a extensão da região plástica na frente da fenda é muito pequena por comparação com as dimensões do corpo, desde logo o comprimento da fenda. Paul Paris fez a ligação entre a caracterização do campo de tensões no corpo fendido e o processo de fadiga, tendo verificado

experimentalmente que numa região significativa de valores de  $\Delta K$  a relação entre a velocidade de propagação de fendas (*fatigue crack growth* - FCG) e a gama do factor de intensidade de tensão  $\Delta K$  é aproximadamente linear quando usadas coordenadas logarítmicas, ver Figura 3.

Em Portugal, refere-se o papel pioneiro de Carlos Moura Branco, primeiro doutorado Português na área (Imperial College 1976, [4]), e de outros que defenderam teses de doutoramento um pouco mais tarde, em que entre outros se contam Manuel de Freitas, António Augusto Fernandes e o primeiro autor desta comunicação. Desde essa altura até hoje o interesse em Portugal pelo assunto ganhou significativa expressão, como sugerido pela produção de artigos e livros, e pelas conferências sobretudo as organizadas pelo Grupo Português de Fractura no quadro da Sociedade Portuguesa de Materiais – SPM, de que a XVI foi organizada pela Universidade da Beira Interior em 2018.

Reflectindo as tendências internacionais, o foco tradicional dos trabalhos em Portugal é nas ligas metálicas, como exemplificado pelo livro de Moura Branco *et al.* [5], ou pelo recente trabalho relativo a estruturas metálicas de aviões por Tavares e de Castro [6]. A progressiva substituição do alumínio por polímeros reforçados com fibra de carbono, em aeronáutica, é apenas uma das razões do fortíssimo e crescente interesse pelos materiais compósitos na comunidade técnico-científica nacional, exemplificado pelos livros sobre compósitos de Camanho e Hallet, [7], Camanho *et al.*, [8], Camanho e Tong, [9], entre outros. O recente livro *Wood Fracture Characterisation* por de Moura e Dourado, [10], trabalhos de da Silva na área de adesivos estruturais, crescentemente usados em ligações estruturais e cujo estudo envolve considerações avançadas de Mecânica da Fractura [11], ou o trabalho de Guerra Rosa sobre cerâmicos [12], testemunham a diversidade de temas tratados, que não elimina o continuado interesse pelas ligas metálicas. No tema da fractura e fadiga convergem interesses de diversas áreas da ciência e da engenharia; o livro de Fernandes *et al.* sobre *ultra low cycle fatigue* de *pipelines*, mostra uma aplicação orientada para a segurança na presença de sismos, [13]. Além das conferências organizadas no quadro da SPM acima referidas, outras iniciativas tem surgido, de que é exemplo o livro editado por Correia *et al.*, [14], contendo as actas do XIX International Colloquium on Mechanical Fatigue of Metals.

As comunicações à Academia das Ciências de Lisboa em 2007-6-14, [15], 2012-7-5, [16] e 2018-10-4, [3], abordaram alguns aspectos desta temática. Em 2007 e 2018 o foco foram estruturas de ligas de Al para aeronáutica, enquanto que em 2012 foram tratadas problemas de estruturas de aço soldadas.

A presente comunicação enfatiza o comportamento multi-modo, referindo investigações de natureza mais fundamental, e aplicações.

Entre muitos outros trabalhos em Portugal nesta área, refere-se o estudo do comportamento à fadiga da ponte ferroviária de Alcácer do Sal <sup>4</sup> sobre o rio Sado (da REFER, agora Infraestruturas de Portugal SA), caso de estudo na tese de doutoramento de Carlos Albuquerque na FEUP em 2015, [17]. A solução estrutural é do tipo *bowstring* com tabuleiro misto com solução em caixão metálico e laje de betão. A

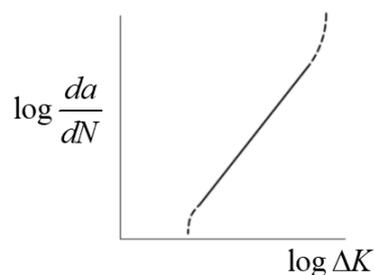


Figura 3  
Relação entre a velocidade de propagação  $da/dN$  e a gama do factor de intensidade de tensão  $\Delta K$ , mostrando a região de aplicabilidade da lei de Paris (recta representada a cheio contínuo).

<sup>4</sup> Concepção e desenvolvimento do projecto desta ponte são da responsabilidade do Professor António Reis.

Figura 4 mostra um detalhe crítico numa das ligações soldadas da ponte. O modelo de elemento finitos simulou uma fenda nas diagonais, nascendo nos pontos 'A' indicados na Figura 4b. O resultado destas análises reveste a forma da Figura 5, indicando a relação comprimento da fenda *versus* tempo, para diversos cenários de tráfego.

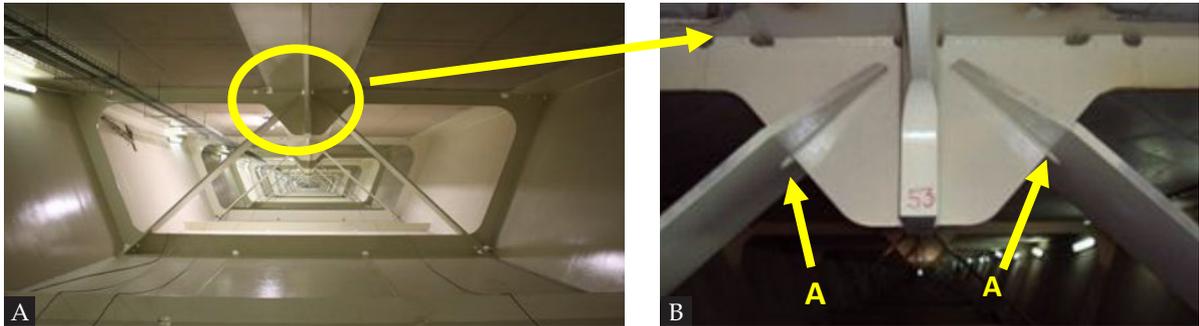


Figura 4  
a) Interior do caixão metálico mostrando os diafragmas do caixão metálico da ponte ferroviária de Alcácer do Sal; b), ampliação mostrando diagonais e respectivo detalhe crítico 'A'; [17] p.173, p.262; [18].

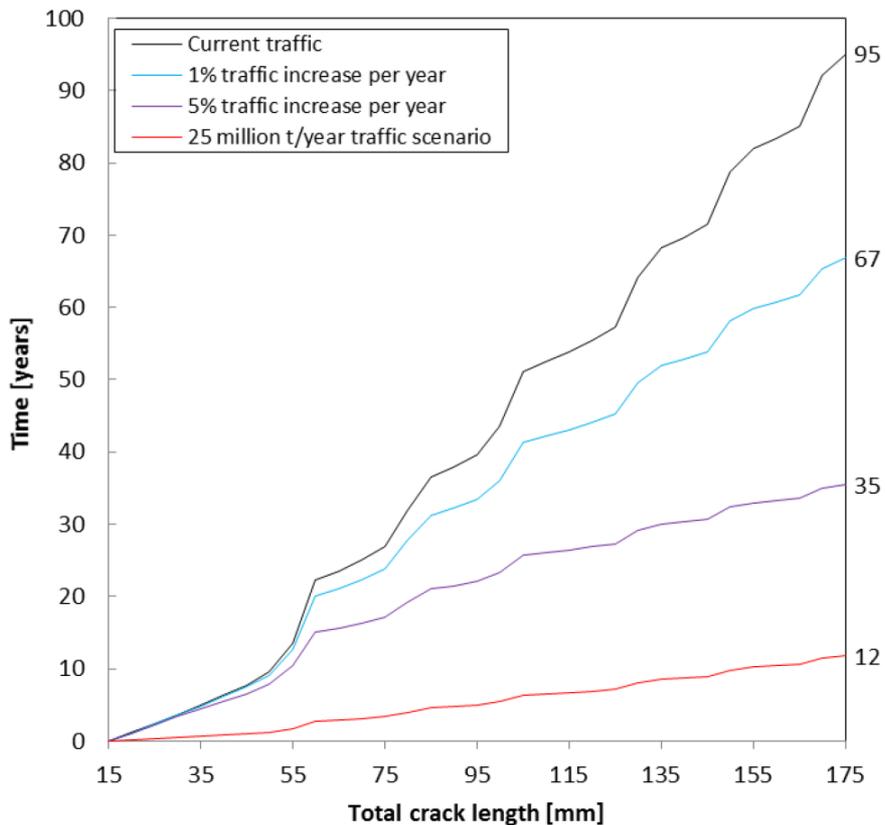


Figura 5  
Cenários de propagação da fenda em função do tráfego, [17] p.269.

A redundância estrutural, *i.e.* a existência de vários caminhos possíveis e simultâneos de transmissão de esforços, proporciona alguma protecção, como é o caso da viga (*plate girder*) quase completamente

fissurada do tabuleiro da ponte I-95 sobre o rio Brandywine representada na Figura 6 e discutida em [19, 20]. Neste exemplo a redundância resulta da presença de 6 vigas em cada direção de tráfico.



Figura 6

Ponte I-95 sobre o rio Brandywine, Delaware: a) vista geral, mostrando operação de reparação; b) viga fissurada, [19, 20]; (reprodução autorizada pelo Prof. S. Quiel, Lehigh University).

As fuselagens de aviões são um problema estrutural diferente, mas que envolve também os critérios da Mecânica da Fractura e o conhecimento da fadiga de materiais. São pressurizadas de cada vez que o avião levanta voo criando-se um estado de tensão biaxial na pele (*skin*) da fuselagem, o que origina uma situação de fadiga em que cada ciclo é um voo. Uma aplicação típica de conceitos de fadiga e fractura em estados de tensão complexos são também as juntas rebitadas usadas em fuselagem metálica, um tema de investigação na Universidade do Porto de que resultou entre outros *outcomes* o livro [6].

No exemplo da ponte fissurada a redundância estrutural assegurou funcionalidade mesmo na presença da danificação referida. No incidente ilustrado na Figura 7, (Southwest Airlines flight 812 [21]), o desenvolvimento em voo da súbita fissuração causou despressurização, mas aqui os *frames* da fuselagem

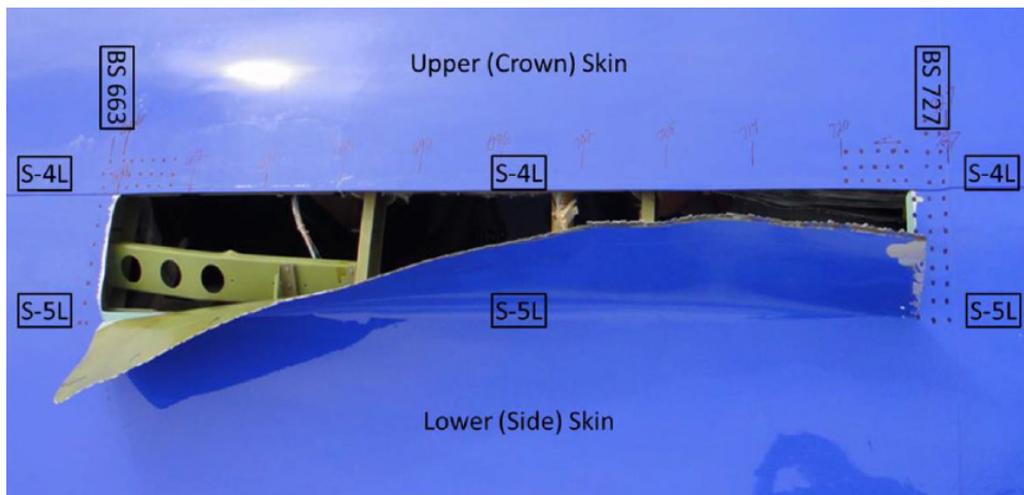


Figura 7

Rotura de fuselagem em voo, [21].

actuaram como *crack arresters* forçando a uma mudança de direcção da fenda, de longitudinal para circunferencial, contendo a propagação e evitando uma situação catastrófica como a ocorrida anos antes com o voo Aloha Airlines flight 243 (brevemente apresentado por ex. em [6]).

### ALGUMAS EQUAÇÕES DE FRACTURA EM MODO MISTO

A equação inicial relativa à direcção de propagação foi obtida por Erdogan e Sih, [22], e resulta de assumir que a propagação se dá numa direcção perpendicular à tensão principal máxima na região da extremidade da fenda (*maximum tangential stress criterion* – MTS). Num sistema de coordenadas polares  $r, \psi$  centrado na extremidade da fenda, sendo  $K_I$  e  $K_{II}$  os factores de intensidade de tensão em modo I e II respectivamente, e sendo  $\psi = 0$  o plano da fenda, a direcção de propagação é obtida impondo que a tensão de corte é nula  $\tau_{r,\psi} = 0$ :

$$\tau_{r,\psi} = 0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \sin \frac{\psi}{2} (1 + \cos \psi) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2} (1 - 3 \cos \psi) \quad (1)$$

o que conduz a

$$K_I \sin \psi + K_{II} (3 \cos \psi - 1) = 0 \quad (2)$$

Uma abordagem alternativa foi proposta por Sih, baseada na consideração do valor mínimo da densidade de energia de deformação, (*strain energy density criterion* - SED), [23]. A direcção da propagação resulta da equação

$$\begin{aligned} & [2 \cos \psi - (\kappa - 1)] \sin \psi \frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 2 [2 \cos 2\psi - (\kappa - 1) \cos \psi] \frac{K_I}{K_{II}} + \\ & + [(\kappa - 1 - 6 \cos \psi) \sin \psi] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\kappa$  depende da consideração de estado plano de deformação ou de estado plano de tensão, sendo  $\kappa = 3 - 4\nu$  no primeiro caso e  $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$  no segundo. A Figura 8 compara os dois critérios referidos.

Quanto à caracterização da propagação da fenda pre-existente, o critério MTS conduz à equação

$$K_I \left( 3 \cos \frac{\psi_c}{2} + \cos \frac{3\psi_c}{2} \right) - 3K_{II} \left( \sin \frac{\psi_c}{2} + \sin \frac{3\psi_c}{2} \right) = 4K_{Ic} \quad (4)$$

onde  $\psi_c$  é a solução da equação 2 para a combinação  $K_I, K_{II}$  de interesse e  $K_{Ic}$  é a tenacidade do material. Quanto ao critério SED, usando  $m = K_I/K_{II}$  e

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 + \cos \psi) (\kappa - \cos \psi) \\ a_{12} &= \sin \psi (2 \cos \psi - \kappa + 1) \\ a_{22} &= (\kappa + 1) (1 - \cos \psi) + (1 + \cos \psi) (3 \cos \psi - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

teremos na propagação,

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 = \frac{2(\kappa - 1)m^2}{a_{11}m^2 + a_{12}m + a_{22}} \quad (6)$$

$$\left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2 = \frac{2(\kappa - 1)}{a_{11}m^2 + a_{12}m + a_{22}}$$

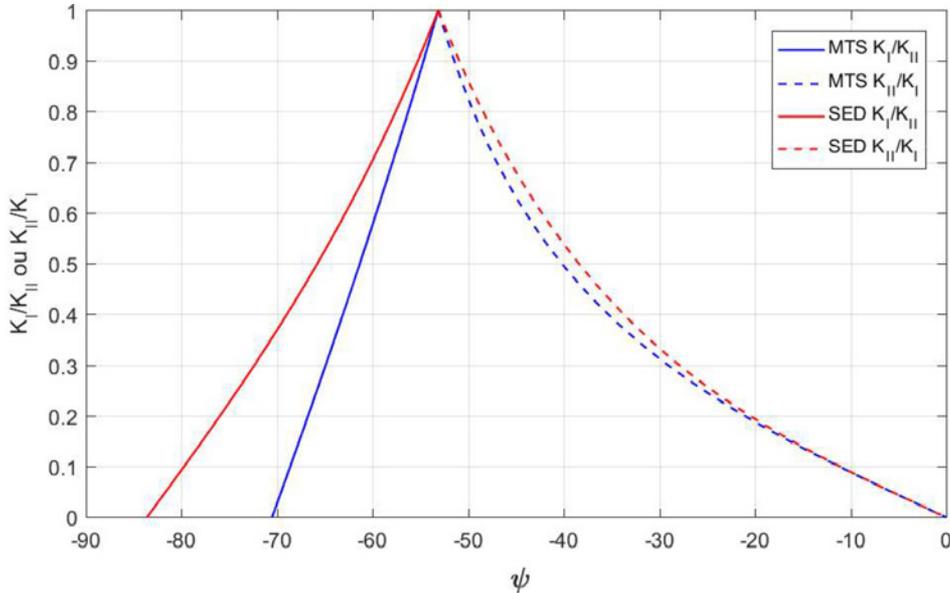


Figura 8

Relação entre a direcção de propagação  $\psi$  (em graus) e  $K_I, K_{II}$ . À esquerda de  $\psi = -53.13^\circ$ :  $K_I/K_{II}$ ; à direita:  $K_{II}/K_I$ . MTS: critério *max. tangential stress*; SED: critério *strain energy density*.

Por concisão não se apresentam mais detalhes, que poderão ser encontrados por exemplo em Pereira [24] e Pereira *et al.* [25].

A aplicação de métodos numéricos à Mecânica da Fractura tem sido objecto de intenso estudo. Uma síntese de desenvolvimentos iniciais é apresentada por Fawkes e Owen, [26], enquanto Kuna lista e discute em [27] desenvolvimentos mais recentes. A previsão da direcção de propagação de fendas pode ser feita incorporando os critérios acima referidos em modelos de elementos finitos. Peixoto, por exemplo, mostra a boa concordância experimental / numérica em trabalho relativo a fadiga de rodas de comboios de alta velocidade usando provetes CTS, [28]. O dispositivo experimental usado para o efeito é mostrado na Figura 9, onde se podem ver as amarras que permitem rodar o provete relativamente à direcção de aplicação de carga, inicialmente desenvolvidas por Richard, [29].

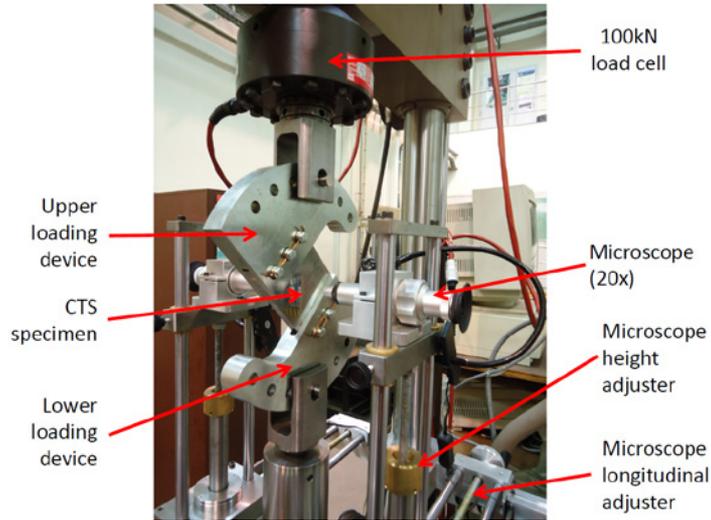


Figura 9  
Ensaio de propagação de fendas de fadiga usando provetes CTS; Peixoto, [28].

## APLICAÇÕES

Um procedimento básico no projecto convencional consiste em considerar um valor de tensão equivalente ao estado de tensão, eventualmente triaxial, no ponto crítico de interesse. Os critérios comuns para este efeito devem-se a Tresca,

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (7)$$

e a von Mises,

$$2\sigma_{eq}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \quad (8)$$

Nas equações anteriores  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são as tensões principais. O dimensionamento em Engenharia frequentemente consiste em fazer  $\sigma_{eq} = \sigma_{ced}/FS$ , onde  $\sigma_{ced}$  é a tensão de cedência do material e FS o factor de segurança utilizado.

Esta recordatória de considerações básicas (equações 7 e 8) destina-se a enquadrar a necessidade de, em Mecânica da Fractura, se estabelecer um valor equivalente de factor de intensidade de tensão ( $K_{eq}$ ) para qualquer combinação de  $K_I, K_{II}$  e  $K_{III}$ . Por exemplo a lei de Paris, relação básica para estudos de propagação de fendas de fadiga,

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (9)$$

onde  $C$  e  $m$  são constantes características do material em estudo,  $a$  é comprimento de fenda e  $N$  número de ciclos, foi estabelecida para modo I, mas tem sido aplicada a modos mistos, usando  $K_{eq}$ . Tavares *et al.* [30] discute alguns critérios que têm sido propostos, entre eles o critério da energia, [31],

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (10)$$

o critério de Richard / Henn, [32],

$$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 6K_{II}^2} \quad (11)$$

o critério de Chen e Keer, [33],

$$K_{eq} = \left[ (K_I^2 + 3K_{II}^2)^3 (K_I^2 + K_{II}^2) \right]^{1/8} \quad (12)$$

e o critério de Tanaka, [34],

$$K_{eq} = (K_I^4 + 8K_{II}^4)^{1/4} \quad (13)$$

Tavares *et al.*, [30], não pretende inventariar exaustivamente as abordagens existentes para  $K_{eq}$ ; pretende sim alertar para as diferenças existentes no valor de  $K_{eq}$  para uma qualquer situação de modo misto, tópico inesperadamente pouco abordado e que conduz a gráficos como a Figura 10.

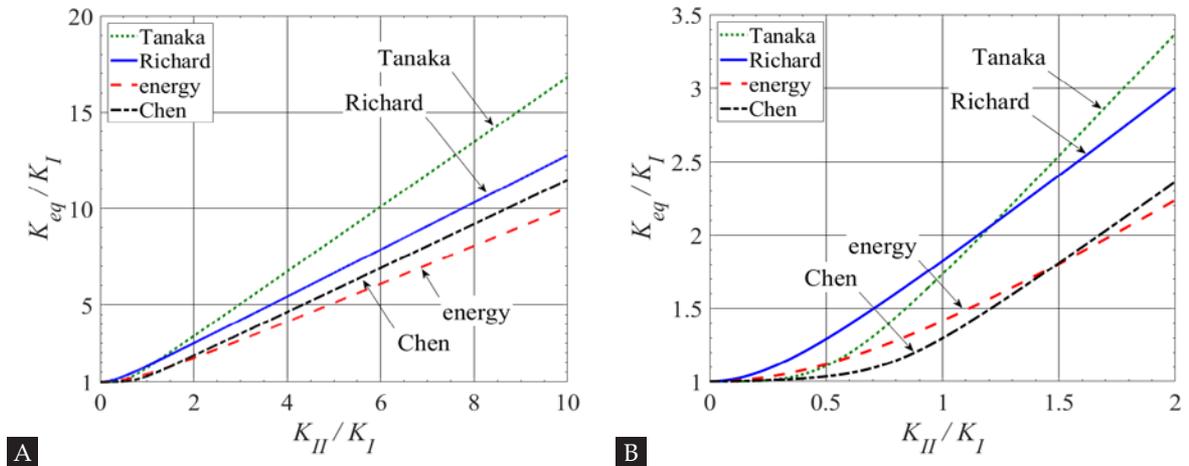


Figura 10

a)  $K_{eq}/K_I$  como função de  $K_{II}/K_I$ ; b) detalhe próximo da origem (região  $0 < K_{II}/K_I < 2$ ), [30].

Tavares *et al.* [30] mostram o impacto desta situação em ensaios de propagação de fendas de fadiga em provetes de liga de Al, levados a cabo por Baganha Marques *et al.*, [35]. Utilizando diferentes critérios de  $K_{eq}$ , foram encontradas diferenças nas constantes da lei de Paris, levando a diferentes estimativas de vida em fadiga. Este facto ilustra a importância de aprofundar o conceito de factor de intensidade de tensão equivalente.

Outra questão muito relevante é a modelação da propagação de fendas. Usando o método dos elementos finitos e formulações do tipo das concisamente referidas, essa modelação é possível, mas depara

com uma dificuldade, que é a necessidade de refazer a malha de elementos finitos após cada extensão elementar do comprimento da fenda.

Os métodos numéricos serão concisamente referidos seguidamente.

## MÉTODOS NUMÉRICOS, VALIDAÇÕES EXPERIMENTAIS

Trabalhos muito iniciais de uso do método dos elementos finitos em Mecânica da Fractura incluíram o uso da *compliance*  $C$  para a determinação do factor de intensidade de tensão  $K$  de um provete com comprimento de fenda  $a$ , através das relações básicas entre taxa de libertação de energia  $G$  e  $K$ , e da relação de  $G$  e  $C$ :

$$G = \frac{P^2}{2B} \cdot \frac{\partial C}{\partial a} \quad (14)$$

Um tal caso, nos anos iniciais do interesse pela Mecânica da Fractura em Portugal, é apresentado por de Castro *et al.* em [36]; consistiu no estudo recorrendo ao método dos elementos finitos do provete CDCB (*contoured double cantilever beam*), Figura 11. Para além de determinações de tenacidade, e estudos de fissuração em corrosão sob tensão, este tipo de provetes é usado em estudos de propagação de fendas de fadiga, em que, para  $\Delta P$  constante,  $\Delta K$  também é constante e independente do comprimento de fenda  $a$ . Foram usados simples elementos CST (*constant strain triangles*) para obter a calibração de  $K$ .

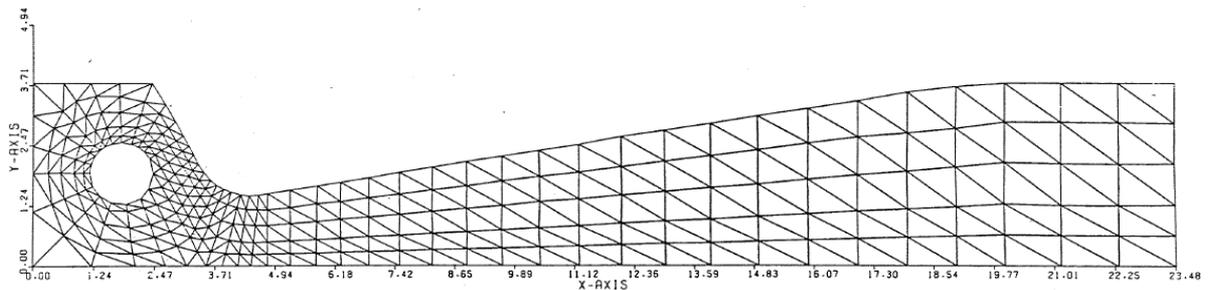


Figura 11

Modelação pelo método dos elementos finitos de provete CDCB, (metade do provete); [36].

Os métodos numéricos em Mecânica da Fractura são objecto de extensa literatura. Uma compilação e exemplos calculados usando os mais comuns – extrapolação para  $r=0$  de valores de  $K$  inferidos a partir dos deslocamentos, integral  $J$  e *virtual crack closure technique* VCCT, são apresentados por Arteiro e de Castro em [37]. Nota-se aqui a tese de Monteiro [38], que iniciou o interesse pelo assunto na FEUP.

Azevedo apresenta a situação de um painel reforçado contendo uma fenda inclinada relativamente ao carregamento, Figura 12a. A modelação da propagação está esquematicamente representada na Figura 12b, onde  $\beta$  é o ângulo do plano da fenda com a direcção de carga e  $\psi$  é a direcção de propagação.

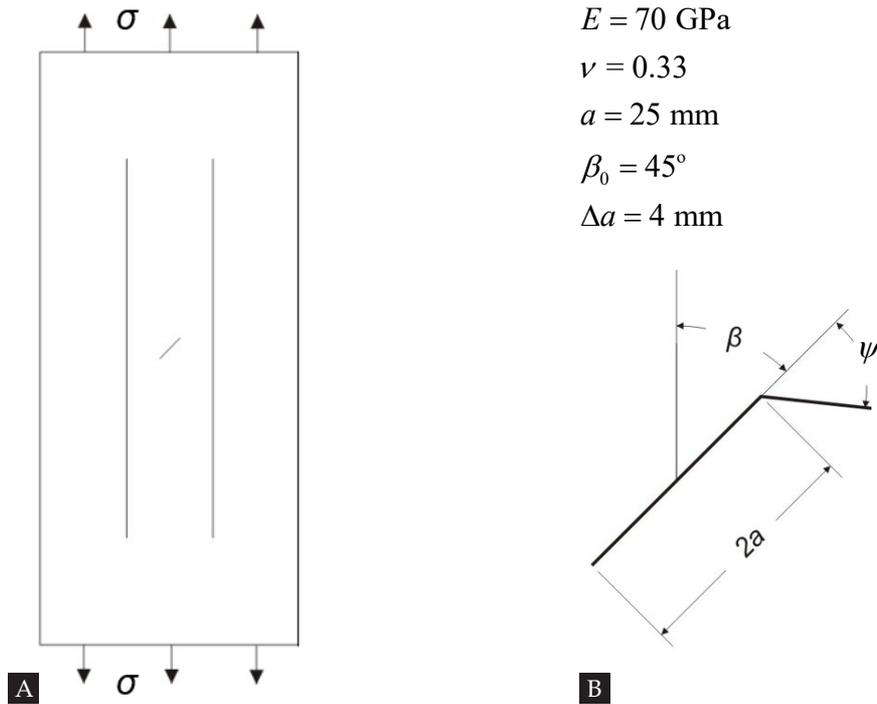


Figura 12

- a) Representação esquemática de painel reforçado contendo uma fenda central inclinada;  
 b) Representação esquemática da propagação da fenda de comprimento inicial  $2a=50 \text{ mm}$  (mostra-se apenas a propagação a partir de uma das extremidades). Azevedo, [39].

A Figura 13 mostra a modelação pelo método dos elementos finitos da situação inicial (canto superior esquerdo), e a modelação da propagação.

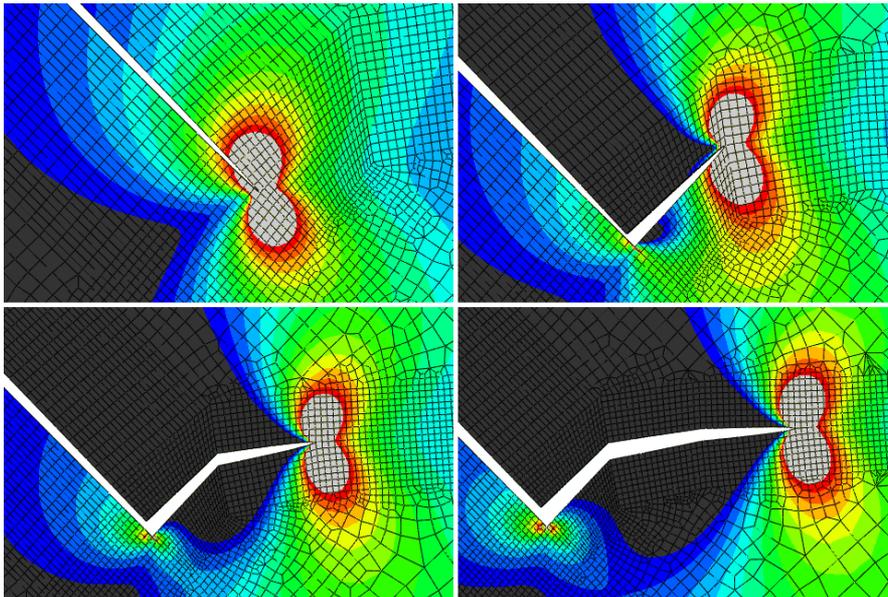


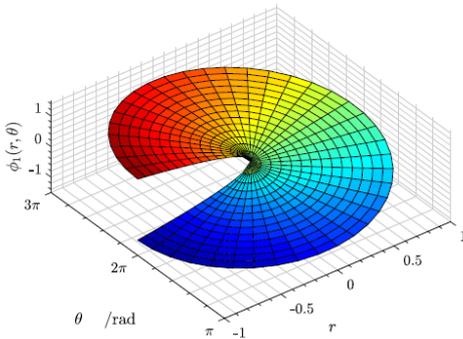
Figura 13

Modelação por elementos finitos da propagação de uma fenda; Azevedo [39].

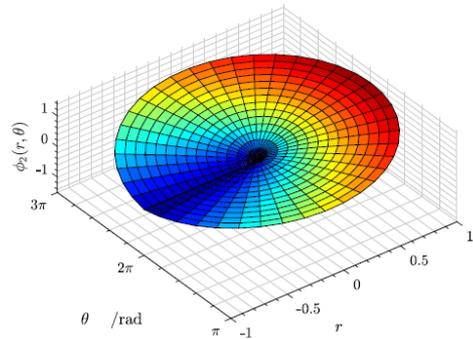
A necessidade de refazer a malha de elementos finitos após cada iteração, processo demorado e enfadonho, é um obstáculo ao uso deste procedimento.

O avanço relativamente à dificuldade resultante da reformulação de malhas comentada em parágrafos anteriores, foi o desenvolvimento do chamado *extended finite element method* XFEM, apresentado em detalhe por Mohammadi, [40], ou Pommier *et al.*, [41]. Uma muito concisa apresentação do método encontra-se em Fries, [42]. Entre trabalhos seminais relativos ao XFEM contam-se contribuições de Areias, *e.g.* Areias e Belytschko, [43]. A ideia é enriquecer elementos que são atravessados pela fenda ou que contem uma extremidade de fenda. O processo de enriquecimento local utilizando a função Heaviside não permite simular fissuras cuja extremidade não é localizada num lado de um elemento. Para simular essa situação, o processo de enriquecimento tem que ser modificado e funções assintóticas de extremidade de fenda devem ser consideradas. Como indicado por Häusler, [44], as funções assintóticas de extremidade da fenda foram originalmente estabelecidas para representação do campo de tensões na extremidade de uma fenda no método de Galerkin ‘livre de elementos’. Essas funções são definidas nas coordenadas polares locais  $r$  e  $\theta$ , equação (15), e são representados na Figura 14 reproduzida da tese de Ferreira, [45].

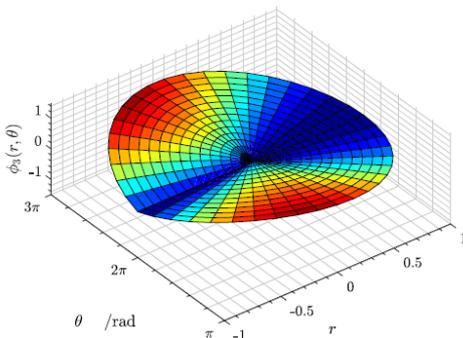
$$\Phi_i(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta, \sqrt{r} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \right\} \quad (15)$$



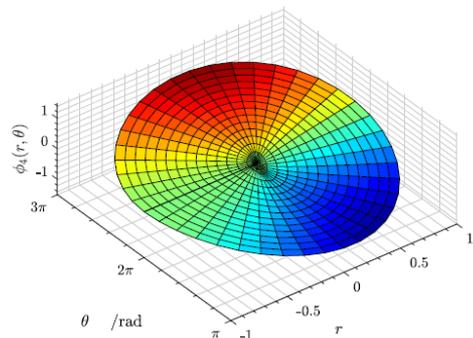
(a)  $\Phi_1(r, \theta)$



(b)  $\Phi_2(r, \theta)$



(c)  $\Phi_3(r, \theta)$



(d)  $\Phi_4(r, \theta)$

Figura 14  
Representação das funções assintóticas de extremidade de fenda; Ferreira, [45].

Hermosilla aplicou o XFEM à modelação de propagação de fendas em provetes CT modificados para criar situações de modo misto, [46, 47]; a Figura 15 mostra a previsão de trajectória sequencialmente de a) a e).

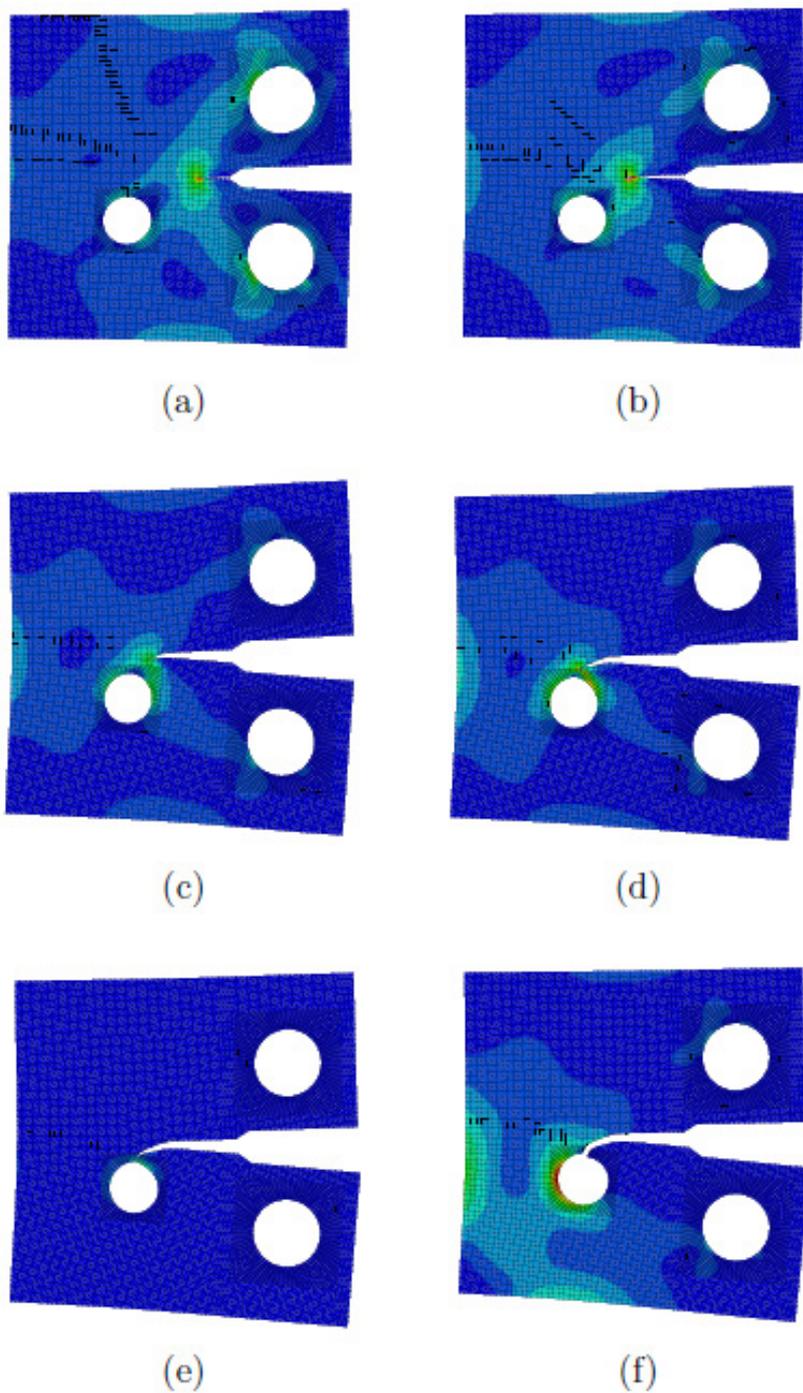


Figura 15  
Previsão de trajectória de propagação de fenda em provete CT modificado, usando XFEM, [46].

A Figura 16 mostra um provete ensaiado por Ferreira, [45], em estudo numérico experimental que mostrou boa concordância experimental / numérica.

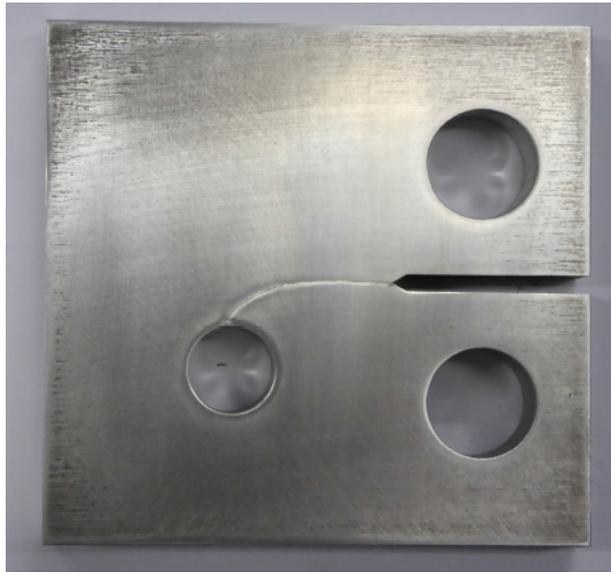


Figura 16  
Propagação de fenda de fadiga em provete CT ensaiado por Ferreira, [45].

O XFEM tem sido objecto de atenção das universidades Portuguesas, *e.g.* [45, 46, 48, 49]. As aplicações encontram-se em campos muito diversos; Medinas, por exemplo, usa o XFEM no quadro da Engenharia de Petróleos, [49]. A fracturação hidráulica é utilizada para maximizar o potencial económico, exploração e produção de reservatórios de argilitos laminados. Tratando-se de operações muito dispendiosas, importa prever o comportamento usando a modelação numérica de fracturas induzidas hidraulicamente, em particular o XFEM no caso citado.

A *T-stress* é um termo não singular do estado de tensão na extremidade de fendas, independente de  $r$ , ver por ex. Gupta *et al.* [50]. A tese de Pereira, [24], apresenta uma discussão da influência do parâmetro *T-stress* na propagação de fendas. O XFEM foi usado para modelar a trajectória de propagação de uma fenda em provetes de flexão em 3 e em 4 pontos.

O trabalho experimental envolveu ensaios em provetes de flexão em 3 ou em 4 pontos de PMMA, em que a pré-fenda foi obtida pelo impacto de uma lâmina num entalhe maquinado. Os ensaios de flexão em 4 pontos foram realizados numa configuração assimétrica; variando a localização dos suportes e pontos de carga relativamente ao plano da fenda, é possível criar situações de modo puro II ou de modo misto I-II, [25].

A Figura 17 mostra, para o caso da placa contendo uma fenda central de comprimento  $2a$ , inclinada de  $\beta$  relativamente à direcção de aplicação do carregamento remoto  $\sigma$ , os valores de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$  normalizados; mostra ainda  $K_{eq}$  calculado de acordo com a equação 10. A normalização de valores de factor de intensidade de tensão (I, II e eq.) é feita dividindo os valores calculados por  $\sigma \sqrt{\pi a}$ , e a de  $T$  dividindo por  $\sigma$ . A modelação por elementos finitos e a solução analítica para este problema revelaram-se quase coincidentes, Pereira *et al.*, [25].

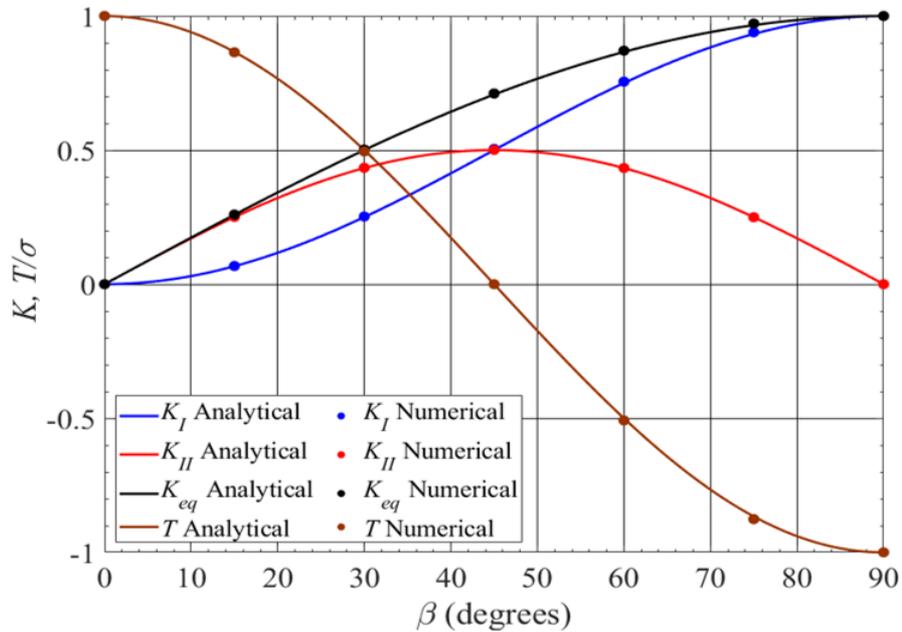


Figura 17

$K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$  normalizados para o caso da placa contendo uma fenda central de comprimento  $2a$ , inclinada de  $\beta$  relativamente à direcção do carregamento  $\sigma$ .  $K_{eq}$  baseado na eq. 10; [25].

Os resultados experimentais de Pereira [24, 25] relativos à caracterização da propagação em ensaios em flexão de provetes de PMMA são apresentados na Figura 18. A figura mostra as curvas do critério MTS – *max. tangential stress*, eq. 4, e critério SED – *strain energy density*, eqs. 6.

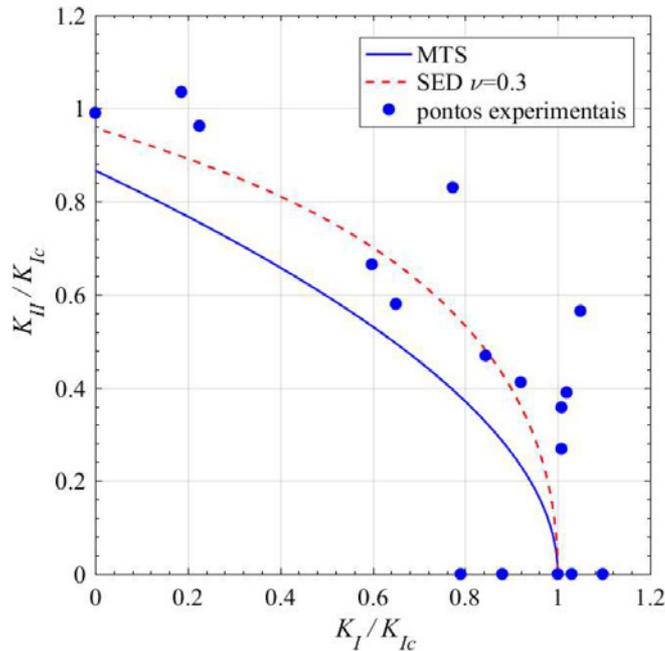


Figura 18

Fractura de PMMA em modo misto; curva MTS: critério *max. tangential stress*; curva SED: critério *strain energy density*.

Todos os pontos experimentais da Figura 18 de fractura estão acima dos valores teóricos MTS, um resultado semelhante aos primeiros testes de Erdogan e Sih em seus ensaios clássicos de placas planas de PMMA com fendas inclinadas, [22]. Ao contrário de outros trabalhos, como por ex. Smith *et al.* [51], os resultados experimentais de Pereira [24, 25] usando provetes de flexão não evidenciam influência do sinal da  $T$ -stress nos resultados, o que justifica que a influência da  $T$ -stress deve merecer mais investigação.

## OBSERVAÇÕES FINAIS

Os problemas de modo misto em Mecânica da Fractura foram concisamente abordados, e em particular foi referida a diversidade de abordagens para definição de um valor equivalente do factor de intensidade de tensão  $K_{eq}$ . O papel da gama de valores  $\Delta K_{eq}$  na caracterização da propagação de fendas de fadiga leva a enfatizar a importância de futura investigação na definição do factor de intensidade de tensão equivalente.

A modelação da propagação de fendas pelo método dos elementos finitos envolveu a necessidade de refazer a malha após cada incremento de propagação, o que tornava o processo muito demorado e fastidioso. Essa dificuldade foi ultrapassada pelo XFEM, de que se apresentaram diversas aplicações.

A importância do parâmetro  $T$ -stress na fractura tem sido referida na literatura, e foi agora re-examinada estudando a propagação instável de fendas sob condições de modo puro I ou II, e modo misto I-II. A possível influência da  $T$ -stress na propagação de fendas em modo misto é um assunto requerendo mais investigação.

(COMUNICAÇÃO APRESENTADA À CLASSE DE CIÊNCIAS  
NA SESSÃO DE 29 DE OUTUBRO DE 2020)

## REFERENCES

1. Dowling, N.E., S.L. Kampe, and M.V. Kral, *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. 5 ed. 2019: Pearson.
2. Schütz, W., *A history of fatigue*. Engineering Fracture Mechanics, 1996. 54(2): p. 263-300.
3. de Castro, P.M.S.T. and S.M.O. Tavares, *Fadiga de materiais e de estruturas – com enfoque na aeronáutica*. Memórias da Academia das Ciências. Classe de Ciências, 2020. vol. 2 (Tomo XLVII): p.313-324.
4. Branco, C.A.M., *A fracture mechanics approach to environmental and elastic-plastic fatigue crack propagation*. PhD thesis. 1976, Imperial College, University of London.
5. Branco, C.A.M., A.A. Fernandes, and P.M.S.T. de Castro, *Fadiga de Estruturas Soldadas*. 2 ed. 1999: Fundação Calouste Gulbenkian.
6. Tavares, S.M.O. and P.M.S.T. de Castro, *Damage Tolerance of Metallic Aircraft Structures*. 2019: Springer.
7. Camanho, P.P. and S.R. Hallett, eds. *Numerical Modelling of Failure in Advanced Composite Materials*. 2015, Woodhead Publishing.
8. Camanho, P.P., et al., eds. *Mechanical Response of Composites*. 2008, Springer.
9. Camanho, P.P. and L. Tong, eds. *Composite Joints and Connections. Principles, Modelling and Testing*. 2011, Woodhead Publishing.
10. de Moura, M.F.S.F. and N. Dourado, *Wood Fracture Characterisation*. 2018: CRC Press.
11. da Silva, L.F.M., A. Öchsner, and R.D. Adams, eds. *Handbook of Adhesion Technology*. 2 ed. 2018, Springer.
12. Guerra-Rosa, L., *Caracterização mecânica de cerâmicos*. 2017: <https://www.researchgate.net/publication/320058555>.
13. Fernandes, A.A., A.M.P. de Jesus, and R.M. Natal-Jorge, eds. *Monotonic and Ultra-Low-Cycle Fatigue Behaviour of Pipeline Steels: Experimental and Numerical Approaches*. 2018, Springer.
14. Correia, J.A.F.O., et al., eds. *Mechanical Fatigue of Metals: Experimental and Simulation Perspectives*. 2019, Springer.

15. de Castro, P.M.S.T., et al., *Problemas de fractura e fadiga em estruturas de aviões fabricadas em Alumínio*. Memórias da Academia das Ciências. Classe de Ciências, 2006 - 2007. I(Tomo XLIII): p. 417-444.
16. de Castro, P.M.S.T., *Fadiga e fractura de um aço usado em estruturas soldadas*. Memórias da Academia das Ciências. Classe de Ciências, 2018(Tomo XLV): p. 341-348.
17. Albuquerque, C.M.C., *Advanced methodologies for the assessment of the fatigue behaviour of railway bridges*. Doctoral thesis. 2015, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/82468>.
18. Albuquerque, C.M.C., et al., *An efficient methodology for fatigue damage assessment of bridge details using modal superposition of stress intensity factors*. International Journal of Fatigue, 2015. **81**: p. 61–77.
19. Quiel, S., *Forensic analysis of the steel girder fracture in the I-95 Brandywine river bridge*. 2003, University of Notre Dame.
20. Chajes, M., et al., *Steel girder fracture on Delaware's I-95 bridge over the Brandywine river in Structures Congress 2005: Metropolis and Beyond*. 2005, ASCE: New York, New York.
21. NTSB, *Accident Number: DCA11MA039; Operator/Flight Number: Southwest Airlines, Flight 812; April 1, 2011*. 2013, National Transportation Safety Board: Washington, D.C. 20594.
22. Erdogan, F. and G.C. Sih, *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear* Journal of Basic Engineering, 1963: p. 519-525.
23. Sih, G.C., *Mechanics of Fracture Initiation and Propagation*. 1991: Springer Science+Business Media.
24. Pereira, S.A.G., *Mecânica da fratura em modo misto: Modelação numérica e validação experimental*. Master thesis. 2018, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto.
25. Pereira, S.A.G., S.M.O. Tavares, and P.M.S.T. de Castro, *Mixed mode fracture: numerical evaluation and experimental validation using PMMA specimens*. Frattura ed Integrità Strutturale, 2019. **13**(49): p. 412-428.
26. Owen, D.R.J. and A.J. Fawkes, *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. 1983, Swansea: Pineridge Press.
27. Kuna, M., *Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory - Numerics - Applications*. 2013: Springer.
28. Peixoto, D.F.C., *Wheel/rail materials fatigue crack propagation behaviour*. Doctoral thesis. 2013, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto.
29. Richard, H.-A., *Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen*. VDI Forschungsheft, 1985(631).
30. Tavares, S.M.O., et al., *Mixed mode fatigue and fracture in planar geometries: Observations on Keq and crack path modelling*. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 2019. **42**(11): p. 2411-2608.
31. Irwin, G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Journal of Applied Mechanics, 1957. **E24**: p. 361-364.
32. Richard, H.A., *Grundlagen und Anwendungen der Bruchmechanik*. Technische Mechanik, 1990. **11**(2): p. 69-80.
33. Chen, W.R. and L.M. Keer, *Fatigue crack growth in mixed mode loading*. Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, 1991. **113**(2): p. 222-227.
34. Tanaka, K., *Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis*. Engineering Fracture Mechanics, 1974. **6**(3): p. 493-507.
35. Baganha-Marques, J., S.M.O. Tavares, and P.M.S.T. de Castro, *Analysis of mode II and mixed mode I-II in fracture and fatigue: a numerical and experimental study*, in *Materials Design and Applications II*, L.F.M. da Silva, Editor. 2018, Springer. p. 403-423.
36. de Castro, P.M.S.T., J.C. Radon, and L.E. Culver, *Análise linear elástica pelo método dos elementos finitos do provete DCB usado em mecânica da fractura*. Técnica, 1980. **XLI**(457): p. 245-250.
37. Arteiro, A.J.C. and P.M.S.T. de Castro, *Mecânica da Fratura e Fadiga. Exemplos de cálculo e aplicação*. 2014, Porto: FEUP Edições.
38. Monteiro, J.M.T., *Determinação de factores de intensidade de tensão usando o método dos elementos finitos*. Master thesis. 1984, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto.
39. Azevedo, P.C.M., *A numerical and experimental analysis of fatigue and fracture mechanics problems*. Master thesis. 2008, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto.
40. Mohammadi, S., *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*. 2008: Blackwell.
41. Pommier, S., et al., *Extended Finite Element Method for Crack Propagation*. 2011: ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
42. Fries, T.-P., *Extended finite element methods (XFEM) in Encyclopedia of Continuum Mechanics*, H. Altenbach and A. Öchsner, Editors. 2020, Springer. p. 868-877.
43. Areias, P.M.A. and T. Belytschko, *Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **63**: p. 760–788.
44. Häusler, S.M., *Damage tolerance investigations of innovative metallic airframe structures*. Doctoral thesis. 2011, Technische Universität Braunschweig.

45. Ferreira, M.A.C., *Mixed mode crack propagation: numerical and experimental study. Master thesis.*, in *Mechanical Engineering*. 2017, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto.
46. Hermosilla, M.J.M., *Stress intensity factor calculation using conventional and extended finite element method*, in *Erasmus Programme, Master in Industrial Engineering*. 2016, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia: Porto, Portugal.
47. Hermosilla, M., S.M.O. Tavares, and P.M.S.T. de Castro, *Stress intensity factor calculation using conventional and extended finite element method* in *Proceedings of the CEM2016 Mechanical Engineering Conference. Porto, Portugal, 1-2 June 2016*, A.A. Fernandes, J. Seabra, and R.M. Natal-Jorge, Editors. 2016: Porto.
48. Ferreira, J.G.G.C., *Numerical modelling of fatigue crack growth using XFEM. Master thesis*. 2014, Universidade de Aveiro: Aveiro.
49. Medinas, M.T.L.F., *An extended finite element method (XFEM) approach to hydraulic fractures: Modelling of oriented perforations. Master thesis.*, in *Petroleum Engineering*. 2015, IST: Lisbon.
50. Gupta, M., R.C. Alderliesten, and R. Benedictus, *A review of T-stress and its effects in fracture mechanics*. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015. **134**: p. 218-241.
51. Smith, D.J., M.R. Ayatollahi, and M.J. Pavier, *The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading*. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2001. **24**: p. 137-150.

