INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DO SUPREMO

ANA LETÍCIA DE OLIVEIRA

Foz do Iguaçu
2023

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DO SUPREMO

ANA LETÍCIA DE OLIVEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
Co-orientador: Prof. Dr. Rodrigo Bloot

Foz do Iguaçu
2023

ANA LETÍCIA DE OLIVEIRA

EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DO SUPREMO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Victor Martinez

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
(UNILA)

Rodrigo Bloot

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Bloot
(UNILA)

Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 16 de junho de 2023.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Ana Letícia de Oliveira

Curso: Matemática – Licenciatura

Tipo de Documento

(X) graduação (.....) artigo

(.....) especialização (X) trabalho de conclusão de curso

(.....) mestrado (.....) monografia

(.....) doutorado (.....) dissertação

(.....) tese

(.....) CD/DVD – obras audiovisuais

(.....) ____

Título do trabalho acadêmico: Equivalências do Axioma do Supremo

Nome do orientador(a): Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 16/06/2023

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported.**

Foz do Iguaçu, 19 de junho de 2023.

Ana Letícia de Oliveira

Ana Letícia de Oliveira

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida e iluminar o meu caminho durante esta caminhada e a todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Quero agradecer a todos os professores que se fizeram presentes durante a jornada da graduação, aos professores da banca, ao Coorientador Prof. Dr. Rodrigo Bloot, mas, especialmente, agradeço ao meu orientador de TCC, Prof. Dr. Víctor León. Obrigado mestre por me exigir mais do que eu acreditava que seria capaz de realizar. Declaro aqui minha eterna gratidão pelo compartilhamento de seu conhecimento e tempo, bem como sua amizade.

Aos meus pais, Margarete Model e Sadi Prestes, que influenciaram diretamente em meu desenvolvimento pessoal estando presentes na minha vida.

Sou grata ao meu namorado Gabriel que nunca me recusou amor, apoio e incentivo. Obrigada, todo o amor do meu coração, por compartilhar os inúmeros momentos de ansiedade e estresse.

Aos meus queridos amigos, quero agradecer pelo apoio, força, amor e assistência inabalável.

À Universidade Federal da Integração Latino-Americana, pelo acolhimento e oportunidade de vivenciar essa rica e inesquecível experiência. E aos professores da banca, deixo aqui meus mais sinceros agradecimentos.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigada.

Só se pode alcançar um grande êxito quando nos mantemos fiéis a nós mesmos.
Friedrich Nietzsche

RESUMO

Neste trabalho, estudamos as propriedades que os números reais satisfazem. Dentro dessas propriedades, destaca-se o chamado axioma do supremo. O axioma do supremo afirma que todo subconjunto não vazio limitado superiormente dos números reais admite um menor limite superior (chamado de supremo). Tendo em vista que os números racionais possuem lacunas, ou seja, não são completos, assumimos a existência do conjunto dos números reais a fim de examinar o axioma do supremo. Mostramos com detalhes que o axioma do supremo é equivalente às seguintes afirmações: $\mathbb{R}$ é arquimediano (o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$) e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$; não existe uma partição de $\mathbb{R}$ em dois subconjuntos A e B disjuntos e não vazios tal que todos os elementos de A sejam menores que todos os elementos de B e, que A tem o elemento máximo em $\mathbb{R}$ ou B tem o elemento mínimo em $\mathbb{R}$ (não há lacunas em $\mathbb{R}$); todo subconjunto não vazio limitado inferiormente dos números reais possui um maior limite inferior (axioma do ínfimo); todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$ que é coberto por uma família de intervalos abertos admite uma subcobertura finita; todo subconjunto infinito e ilimitado de $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ é arquimediano e toda sequência decrescente de intervalos fechados e limitados em $\mathbb{R}$ tem, pelo menos, um ponto em comum (propriedade dos intervalos encaixantes). Posto isso, foi possível comprovar que esse axioma é a resposta para compreender muitos dos conceitos fundamentais do cálculo.

Palavras-chaves: axioma do supremo; propriedade arquimediana; intervalos encaixantes; lacunas; sequências de Cauchy.

RESUMEN

En este trabajo, estudiamos las propiedades que los números reales satisfacen. Dentro de estas propiedades, se destaca el llamado axioma del supremo. El axioma del supremo afirma que todo subconjunto no vacío acotado superiormente de los números reales tiene un menor límite superior (llamado de supremo). Teniendo en vista que los números racionales poseen lagunas, osea, no son completos, asumiremos la existencia del conjunto de los números reales a fin de examinar el axioma del supremo. Mostraremos en detalles que el axioma del supremo es equivalente a las siguientes afirmaciones: $\mathbb{R}$ es arquimediano (el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$) y toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$; no existe una partición de $\mathbb{R}$ en dos subconjuntos disjuntos y no vacíos A y B tales que todos los elementos de A son menores que todos los elementos de B y, que A tiene el elemento máximo en $\mathbb{R}$ o B tiene el elemento mínimo en $\mathbb{R}$ (no hay lagunas en $\mathbb{R}$); todo subconjunto no vacío acotado inferiormente de los números reales tiene un mayor límite inferior (axioma del infimo); todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ que está cubierto por una familia de intervalos abiertos tiene una subcobertura finita; todo subconjunto infinito e ilimitado de $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ es arquimediano y toda suseción decreciente de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ tiene, al menos, un punto en común (propiedad de los intervalos encajantes). Dicho esto, fue posible comprobar que este axioma es la respuesta para comprender muchos de los conceptos fundamentales del cálculo.

Palabras clave: axioma del supremo; propiedad de arquimediana; intervalos encajantes; lagunas; sucesiones de Cauchy.

ABSTRACT

In this work, we study the properties that the real numbers satisfy. Within these properties, the so-called supreme axiom stands out. The supremum axiom states that every upper bound non-empty subset of the real numbers has a least upper bound (called the supremum). Considering that the rational numbers have gaps, that is, they are not complete, we will assume the existence of the set of real numbers in order to examine the supremum axiom. We will show in detail that the supremum axiom is equivalent to the following statements: $\mathbb{R}$ is Archimedean (the set of natural numbers is not bounded above in $\mathbb{R}$) and every Cauchy sequence in $\mathbb{R}$ converges in $\mathbb{R}$; there is no partition of $\mathbb{R}$ into two disjoint and non-empty subsets A and B such that all elements of A are less than all elements of B and, that A has the maximum element in $\mathbb{R}$ or B has minimum element in $\mathbb{R}$ (no gaps in $\mathbb{R}$); every lower bound non-empty subset of the real numbers has a greater lower bound (infimum axiom); every closed and bounded subset of $\mathbb{R}$ that is covered by a family of open intervals has a finite subcover; every infinite and unbounded subset of $\mathbb{R}$ has an accumulation point in $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ is Archimedean and every decreasing sequence of closed and bounded intervals in $\mathbb{R}$ has at least one point in common (property of enclosing intervals). That said, it was possible to prove that this axiom is the answer to understand many of the fundamental concepts of calculus.

Keywords: supremum axiom; Archimedean property; enclosing intervals; gaps; Cauchy sequences.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Alunos de licenciatura em matemática apresentam, em geral, dificuldades para entender o conceito de número real dentro do contexto de análise e, mais especificamente, cálculo. A chave para entender muitos conceitos fundamentais do cálculo, como limites, continuidade e integração, é a propriedade do menor limite superior (chamado *axioma do supremo*) do sistema de números reais $\mathbb{R}$.

Segundo a doutrina da Escola Pitagórica, tudo podia ser explicado através dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e números racionais $\mathbb{Q}$. Porém, segundo Moreira e Cabral (2021), acredita-se que, por volta de 500 a.C., o filósofo matemático Hipaso de Metaponto, membro da escola pitagórica, descobriu e revelou que o conjuntos dos números racionais não era capaz de explicar tudo. Desta forma, ele mostrou que o sistema de números racionais contém lacunas. Um exemplo disso é que não existe um número racional r tal que $r^2 = 2$. Encontrou-se essa equação considerando um quadrado de lado 1 e tomando r como o comprimento do segmento determinado pela sua diagonal. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $r^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. O argumento padrão usado para provar que a equação $r^2 = 2$ não tem solução nos números racionais pode ser visto no Lema 3.2. Sendo assim, os números racionais são insuficientes para representar todos os segmentos, o que os tornam inadequados para qualquer discussão significativa dos conceitos acima citados.

No que refere-se a perspectiva histórica, essa questão foi resolvida relativamente tarde pois, os matemáticos gregos dessa época já haviam notado que a linha reta contém muito mais pontos do que os números racionais. No entanto, foi somente no século XIX, quando os matemáticos se preocuparam em colocar o cálculo em bases matemáticas firmes, que o desenvolvimento do sistema de números reais foi realizado.

Foi o matemático alemão, Richard Dedekind (1831-1916), que fez a primeira apresentação rigorosa do conceito de número real em seu livro *Continuidade e Números Irracionais*, publicado em 1872 (FIGUEIREDO, 1996). O objetivo de Dedekind era a construção de um sistema numérico, com a mesma completitude da reta real, usando apenas os postulados básicos dos inteiros e os princípios da teoria dos conjuntos. No mesmo ano, Georg Cantor (1845-1917) publicou outra forma de construir os números reais, através das chamadas séries de Cauchy (STOLL, 2021).

Posto isso, em vez de construir os números reais, assumimos sua existência e examinamos o axioma do supremo. Vemos, assim como esse axioma é imprescindível para muitos fatos básicos sobre os números reais.

Os alunos de licenciatura em matemática apresentam, em geral, dificuldades para entender o conceito de número real dentro do contexto de análise e, mais especificamente, cálculo. A propriedade do menor limite superior do sistema dos números reais é uma das formas de se entender a completeza do conjunto dos reais, é ela que dá a base para vários teoremas do cálculo. Mais especificamente, podemos demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 9 da Seção 3 do Capítulo IX em (LIMA, 2009)) usando o Teorema do Valor Médio (Teorema 7 da Seção 2 do Capítulo VII em (LIMA, 2009)), que se utiliza do Teorema de Weierstrass (Corolário do Teorema 14 da Seção 4 do Capítulo VII em (LIMA, 2009)), que baseia-se no Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolário do Teorema 4 em (LIMA, 2014)) para sequências e, que por fim, fundamenta-se no fato de que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente dos números reais possuir menor limite superior. Em outras palavras, o Teorema Fundamental do Cálculo é uma consequência de uma cadeia de implicações lógicas cuja hipótese inicial é o axioma do supremo, o qual o conjunto dos números reais é portador.

Nesse sentido, o objetivo geral desse trabalho é identificar e apresentar algumas equivalências do axioma do supremo. De forma específica, buscou-se revisitar o estudo dos números reais supondo sua existência e, examinar a propriedade do axioma do supremo comprovando que essa propriedade é fundamental para vários resultados importantes dos números reais que, muitas vezes, são assumidas como certas no estudo do cálculo.

A metodologia que utilizamos nesse trabalho é a bibliográfica seguindo principalmente (LIMA, 2009; LIMA, 2014; COHEN; EHRLICH, 1963). A sua fundamentação se refere à análise e leitura de livros que abordam o tema da construção dos números reais por meio do axioma do supremo e suas equivalências.

No segundo capítulo, são apresentados alguns conceitos e propriedades iniciais que nos serão úteis ao longo do desenvolvimento da monografia. Este capítulo é dividido em quatro seções. Na primeira, apresentamos a construção dos números naturais $\mathbb{N}$ por meio dos Axiomas de Peano e, também, alguns teoremas e propriedades importantes, como, por exemplo, o Princípio da Boa Ordenação (Teorema 2.6). Na segunda seção e na terceira seção, definimos, respectivamente, conjuntos finitos e infinitos, apresentando demonstrações de teoremas bastante relevantes. Já na quarta seção, definimos conjuntos enumeráveis, demonstramos em um teorema que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é enumerável (Teorema 2.10) e apresentamos alguns exemplos importantes, dentre eles, o *método da diagonal de Cantor* (Exemplo 2.8).

O terceiro capítulo, intitulado Números Reais, é dividido em três seções. Na primeira delas, aceitamos a existência do conjunto dos números reais com operações de soma e multiplicação definidas dentro desse conjunto $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Na segunda seção, discorremos sobre o corpo ordenado dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$. E, por fim, na última seção desse capítulo, introduzimos o axioma do supremo bem como as demonstrações de teoremas de suma importância para nossa pesquisa, tais como, a propriedade arquimediana (Teorema 3.8), o princípio dos intervalos encaixantes (Teorema 3.9), dentre outros. Ainda nessa seção, é apresentado um importante exemplo que mostra a distinção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (Exemplo 3.12).

No quarto capítulo, dividido em duas seções, definimos, respectivamente, limites de sequências de números reais e sequências de Cauchy. Também, apresentamos demonstrações de teoremas de grande relevância para nosso estudo, tais como, o Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.5) e que Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$ (Teorema 4.9).

O quinto capítulo aborda a definição e exemplos de corte, lacuna, ponto de acumulação, conjunto fechado e cobertura, respectivamente. Conceitos que são importantes na compreensão do teorema principal. Também, damos um importante exemplo que mostra que existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$ (Teorema 5.2).

Já, no sexto capítulo, apresentamos e demonstramos as seis afirmações do corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ que provamos ser equivalentes ao axioma do supremo. Mais, especificamente:

Teorema Principal. [Teorema 6.1] No corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, as seguintes sentenças são equivalentes:

1. $\mathbb{R}$ é Arquimediano e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$.

2. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um menor limite superior em $\mathbb{R}$ (axioma do supremo).

3. Não há lacunas em $\mathbb{R}$.

4. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado inferiormente tem um maior limite inferior em $\mathbb{R}$ (axioma do ínfimo).

5. Se X é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$ e T uma cobertura de X formada por intervalos abertos, então T tem uma subcobertura finita S de X.

6. Todo subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$.

7. $\mathbb{R}$ é Arquimediano e, se para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n é um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$ e $J_{n+1} \subseteq J_n$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

No sétimo capítulo, são apresentadas nossas conclusões.

2 PRELIMINARES

Nos próximos capítulos assumiremos a existência de $\mathbb{R}$. Ele vai ser introduzido como uma entidade não enumerável (um infinito "maior"). Antes de começar o estudo sobre a propriedade do menor limite superior do sistema de números reais, precisamos relembrar alguns conceitos que antecedem o assunto. Desta forma, vamos repassar um pouco sobre os números naturais, números reais e sequências de números reais, seguindo principalmente as referências (LIMA, 2009; LIMA, 2014; COHEN; EHRLICH, 1963). O capítulo também possui o propósito de detalhar ideias como infinito e enumerabilidade.

2.1 Números naturais

Os Números Naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12...\}$ são números inteiros positivos que se agrupam em um conjunto chamado de $\mathbb{N}$, composto de um número ilimitado de elementos. Se um número é inteiro e positivo, podemos dizer que é um número natural. Aceitaremos a existência de uma função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfaz as 3 condições seguintes: (Axiomas de Peano[1])

(P1) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva.

(P2) $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ é um conjunto unitário. Seu único elemento é chamado *um* e denotado pelo símbolo "1".

(P3) Se $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ e $S(X) \subseteq X$ então $X = \mathbb{N}$.

Observação 2.1.

1. Os elementos de $\mathbb{N}$ são chamados *números naturais*.
2. Como $\mathbb{N} - S(\mathbb{N}) = \{1\}$ então $S(n) \neq 1,$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ então $S(n) \in S(\mathbb{N})$ e como $1 \notin S(\mathbb{N})$ temos que $S(n) \neq 1$.
3. Se $n \in \mathbb{N}$ então $S(n)$ é chamado *sucessor* de n.

[1] Giuseppe Peano foi um matemático e glottologista nascido em uma fazenda em Spinetta na Itália. Também foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos.

4. Ao sucessor de 1 chamamos de *dois* e o denotamos pelo símbolo "2" (isto é $S(1) = 2$). Ao sucessor de 2 chamamos de *três* e o denotamos pelo símbolo "3" (isto é $S(2) = 3$)....etc.

5. O axioma (P3) é chamado de *princípio de indução*. Uma maneira equivalente de enunciá-lo é:

   Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ que satisfaz

   (i) $1 \in X$.

   (ii) $n \in X \Rightarrow S(n) \in X$.

   Então $X = \mathbb{N}$.

6. Qualquer demonstração que utilize o axioma (P3) é chamado *demonstração por indução*.

Exemplo 2.1. Mostre usando o principio de indução: $S(n) \neq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
De fato, definamos

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ S(n) \neq n\}.$$

Pelo Axioma (P2) temos que $S(1) \neq 1$ logo $1 \in X$. Suponha que $n \in X$ então $S(n) \neq n$ e como, pelo Axioma (P1), S é injetiva temos que

$$S(S(n)) \neq S(n)$$

daí, $S(n) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$.

Todo número natural possui um sucessor. Considerando $m, n \in \mathbb{N}$ definiremos a soma e multiplicação de números naturais através de seus sucessores.

Definição 2.1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definimos a *soma* de m e n, denotado por $m + n$, da seguinte maneira:

$$m + 1 = S(m) \quad \text{e} \quad m + S(n) = S(m + n).$$

A definição acima é um resultado na qual prova-se, usando o principio de indução, que existe uma única operação binaria que satisfaz as propriedades acima. A prova pode ser encontrada no Teorema 1.3$^+$ em (COHEN; EHRLICH, 1963). Também pode ser encontrado no Teorema 1.2.5 em (BLOCH, 2011).

Teorema 2.1.

1. Fechadura: se $m, n \in \mathbb{N}$ então $m + n \in \mathbb{N}$.
2. Associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p),$ para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.
3. Comutatividade: $m + n = n + m,$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.
4. Monotonicidade: se $m = n$ então $m + p = n + p,$ para todo $p \in \mathbb{N}$.
5. Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ uma, e só uma, das três alternativas seguintes se satisfaz:
   (a) $m = n$.
   (b) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.
   (c) Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = m$.
6. Cancelamento: se $m + p = n + p,$ para todo $p \in \mathbb{N}$ então $m = n$.

Demonstração.

1. Seja $m \in \mathbb{N}$, definamos
$$X = \{n \in \mathbb{N};\ m + n \in \mathbb{N}\}.$$
Como $m + 1 = S(m) \in \mathbb{N}$ então $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$, então
$$m + S(n) = S(m + n) \in \mathbb{N}$$
assim $S(n) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$.

2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, definamos
$$X = \{p \in \mathbb{N};\ (m + n) + p = m + (n + p)\}.$$
Note que,
$$(m + n) + 1 = S(m + n) = m + S(n) = m + (n + 1)$$
logo $1 \in X$. Suponhamos que $p \in X$, então
$$\begin{aligned}(m + n) + S(p) &= S((m + n) + p) = S(m + (n + p)) \\ &= m + S(n + p) = m + (n + S(p))\end{aligned}$$
assim $S(p) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$.

3. Primeiro vamos mostrar que $m+1=1+m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

   De fato, seja

$$Y=\{m \in \mathbb{N};\ m+1=1+m\}.$$

   Desde que $1+1=1+1$ tem-se que $1 \in Y$. Suponha que $m \in Y$, então

$$S(m)+1=(m+1)+1=(1+m)+1=1+(m+1)=1+S(m)$$

   daí, $S(m) \in Y$. Portanto, pelo principio de indução, $Y=\mathbb{N}$.

   Seja agora $m \in \mathbb{N}$ e definamos,

$$X=\{n \in \mathbb{N};\ m+n=n+m\}.$$

   Como já vimos $m+1=1+m$ logo, $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$

$$\begin{aligned} m+S(n) &= S(m+n)=S(n+m) \\ &= n+S(m)=n+(m+1) \\ &= n+(1+m)=(n+1)+m \\ &= S(n)+m \end{aligned}$$

   daí, $S(n) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X=\mathbb{N}$.

4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que, $m=n$. Definamos

$$X=\{p \in \mathbb{N};\ m+p=n+p\}.$$

   Como $m=n$ então,

$$m+1=S(m)=S(n)=n+1$$

   logo, $1 \in X$. Suponha agora que $p \in X$ então,

$$m+S(p)=S(m+p)=S(n+p)=n+S(p)$$

   assim, $S(p) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X=\mathbb{N}$.

5. Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere

$$X=\{n \in \mathbb{N};\ \text{uma das afirmações (a), (b) ou (c) é verdadeira}\}.$$

   Como $m \in \mathbb{N}$, segue-se do Axioma (P2) que $m=1$ ou $m=S(q)=q+1=1+q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Portanto, $1 \in X$. Suponha que $n \in X$. Assim, m e n satisfazem uma das afirmações (a), (b) e (c):

- (a): Se $n = m$ então, $S(n) = S(m) = m + 1$. Logo, $S(n) \in X$.
- (b): Se $n = m + p$ para algum $p \in \mathbb{N}$ então, $S(n) = S(m + p) = m + S(p)$. Daí, $S(n) \in X$.
- (c): Se $m = n + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Aqui como $q \in \mathbb{N}$ então, pelo Axioma (P2), $q = 1$ ou $q = S(q_0)$ para algum $q_0 \in \mathbb{N}$. Daí,
  - se $q = 1$ temos $m = n + 1 = S(n)$. Logo, $S(n) \in X$;
  - se $q = S(q_0)$ tem-se $m = n + S(q_0) = S(n + q_0) = S(q_0 + n) = q_0 + S(n)$. Assim, $S(n) \in X$.

Em qualquer caso, mostramos que $S(n)$ satisfaz uma das afirmações (a), (b) ou (c). Desta forma, $S(n) \in X$. Logo, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$. Portanto, temos mostrado que se $m, n \in \mathbb{N}$ então, $n \in X$ e, pelo menos uma das afirmações (a), (b) e (c) é verdadeira.

Resta mostrar que para $m, n \in \mathbb{N}$ não mais do que uma das afirmações (a), (b) e (c) é verdadeira. Para isso, primeiro mostremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.1. $n + p \neq n$ para todo $n, p \in \mathbb{N}$.

De fato, sejam $p \in \mathbb{N}$, definamos

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ n + p \neq n\}.$$

Como pelo Axioma (P2), $1 + p = S(p) \neq 1$ temos que $1 \in X$. Suponha que $n \in X$, então $n + p \neq n$. Como S é injetiva temos

$$S(n) + p = p + S(n) = S(p + n) = S(n + p) \neq S(n)$$

daí, $S(n) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$.

Voltando no que vamos mostrar, temos:

- Se $n = m$ e $n = m + p$ para algum $p \in \mathbb{N}$ então, $m = m + p$ o que contradiz a Afirmação 2.1.
- Se $n = m$ e $m = n + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$ então, $n = n + q$ o que também contradiz a Afirmação 2.1.

- Se $n = m + p$ e $m = n + q$ para alguns $p, q \in \mathbb{N}$. Daí temos,

$$m + (p + q) = (m + p) + q = n + q = m$$

o que novamente contradiz a Afirmação 2.1.

Portanto, não mais do que uma das afirmações (a), (b) e (c) é verdadeira para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que, $m + p = n + p$. Agora, pela tricotomia, ou $m = n$, ou $m = n + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$ ou $n = m + \ell$ para algum $\ell \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $m \neq n$, assim temos:

- se $m = n + q$ então,

$$(n + q) + p = n + p \Rightarrow (n + p) + q = n + p$$

o que contradiz a Afirmação 2.1.

- se $n = m + \ell$ então,

$$m + p = n + p = (m + \ell) + p \Rightarrow m + p = (m + p) + \ell$$

o que também contradiz a Afirmação 2.1.

Portanto, $m = n$. ■

Alguns itens do Teorema 2.1 são deixado como exercício em (LIMA, 2009; LIMA, 2014). Os itens 2, 3, 5 encontram-se provados, respectivamente, no Teorema 1.4, Teorema 1.5 e Teorema 1.13 em (COHEN; EHRLICH, 1963).

Definição 2.2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que m é *menor que* n, o que denotamos $m < n$ se, e só se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.

Observação 2.2. $n < S(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, desde que $S(n) = n + 1$ temos que $n < S(n)$. Desta maneira podemos obter $1 < S(1) = 2 < S(2) = 3 < S(3) = 4 < \cdots$.

Teorema 2.2.

1. Transitividade: se $m < n$ e $n < p$ então, $m < p$.
2. Monotonia: se $m < n$ então, $m + p < n + p$ para todo $p \in \mathbb{N}$.
3. Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ uma, e só uma, das três alternativas seguintes se satisfaz:

(a) $m = n$, (b) $m < n$, (c) $n < m$.

Demonstração.

1. Por hipótese temos que $m < n$ e $n < p$. Logo, existem $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tais que $m + p_1 = n$ e $n + p_2 = p$. Daí obtemos,
$$m + (p_1 + p_2) = (m + p_1) + p_2 = n + p_2 = p.$$
Logo, $m < p$.

2. Como $m < n$ então, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m + q = n$. Logo,
$$(m + p) + q = (m + q) + p = n + p.$$
Daí, $m + p < n + p$.

3. Pelo item 5 do Teorema 2.1 temos que, ou $m = n$, ou $m + p = n$ para algum $p \in \mathbb{N}$ ou $n + q = m$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Logo, ou $m = n$, ou $m < n$ ou $n < m$. ■

Definição 2.3. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Dizemos que m é *menor que ou igual* a n, o que denotamos $m \leq n$, se, e só se, $m < n$ ou $m = n$.

(ii) Dizemos que m é *maior que* n, o que denotamos $m > n$ se, e só se, $n < m$.

(iii) Dizemos que m é *maior que ou igual* a n, o que denotamos $m \geq n$ se, e só se, $m > n$ ou $m = n$.

Proposição 2.1.

1. Se $m \leq n$ e $n \leq p$ então, $m \leq p$.

2. Se $m \geq n$ e $n \geq p$ então, $m \geq p$.

3. Se $m > n$ e $n > p$ então, $m > p$.

4. Se $m \leq n$ e $n < p$ então, $m < p$.

5. Se $m < n$ e $n \leq p$ então, $m < p$.

Demonstração.

1. Temos quatro possibilidades:

   (a) Se $m = n$ e $n = p$ então, $m = p \Rightarrow m \leq p$.

   (b) Se $m = n$ e $n < p$ então, $m < p \Rightarrow m \leq p$.

   (c) Se $m < n$ e $n = p$ então, $m < p \Rightarrow m \leq p$.

   (d) Se $m < n$ e $n < p$, pelo item 1 do Teorema 2.2, temos que $m < p \Rightarrow m \leq p$.

2. Como $m \geq n$ e $n \geq p$ então, $p \leq n$ e $n \leq m$. Logo, pelo item 1, temos $p \leq m$ e, equivalentemente, $m \geq p$.

3. Como $m > n$ e $n > p$ então, $p < n$ e $n < m$. Logo, pelo item 1(d), temos $p < m$ e, equivalentemente, $m > p$.

4. Aqui temos duas possibilidades:

   (a) Se $m = n$ e $n < p$ então, $m < p$.

   (b) Se $m < n$ e $n < p$ então, pelo item 1(d), tem-se $m < p$.

5. Aqui temos também duas possibilidades:

   (a) Se $m < n$ e $n = p$ então, $m < p$.

   (b) Se $m < n$ e $n < p$ então, pelo item 1(d), tem-se $m < p$. ■

Definição 2.4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definimos o *produto* de m e n, denotado por $m \cdot n$, da seguinte maneira:

$$m \cdot 1 = m \quad \text{e} \quad m \cdot S(n) = m \cdot n + m.$$

Essa definição acima é um resultado onde prova-se, usando o princípio de indução, que existe uma única operação binaria satisfazendo as propriedades acima. A prova pode ser encontrada no Teorema 1.6 em (COHEN; EHRLICH, 1963) e, também, no Teorema 1.2.6 em (BLOCH, 2011).

Teorema 2.3.

1. Fechadura: Se $m, n \in \mathbb{N}$ então, $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

2. Distributividade à esquerda: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p,$ para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.

3. Associatividade: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p),$ para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.

4. Distributividade à direita: $(m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p,$ para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.

5. Comutatividade: $m\cdot n = n\cdot m,$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Monotonicidade: Para $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m = n$ então, $m\cdot p = n\cdot p$.

7. Monotonicidade: Para $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m < n$ então, $m\cdot p < n\cdot p$.

8. Cancelação: Para $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m\cdot p = n\cdot p$ então, $m = n$.

Demonstração.

1. Seja $m \in \mathbb{N}$. Definamos:

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ m\cdot n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $m\cdot 1 = m \in \mathbb{N}$ então, $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$, então

$$m\cdot S(n) = m\cdot n + m \in \mathbb{N}$$

assim, $S(n) \in X$. Portanto, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definamos:

$$X = \{p \in \mathbb{N};\ m\cdot(n+p) = m\cdot n + m\cdot p\}.$$

Note que,

$$m\cdot(n+1) = m\cdot S(n) = m\cdot n + m = m\cdot n + m\cdot 1.$$

Logo, $1 \in X$. Suponhamos que $p \in X$, então

$$\begin{aligned} m\cdot(n+S(p)) &= m\cdot S(n+p) = m\cdot(n+p) + m \\ &= (m\cdot n + m\cdot p) + m = m\cdot n + (m\cdot p + m) \\ &= m\cdot n + m\cdot S(p) \end{aligned}$$

assim, $S(p) \in X$. Portanto, pelo principio de indução, $X = \mathbb{N}$.

3. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definamos:

$$X = \{p \in \mathbb{N};\ (m\cdot n)\cdot p = m\cdot(n\cdot p)\}.$$

Note que,

$$(m\cdot n)\cdot 1 = m\cdot n = m\cdot(n\cdot 1).$$

Logo, $1 \in X$. Suponhamos que $p \in X$, então

$$\begin{aligned}(m \cdot n) \cdot S(p) &= (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n \\ &= m \cdot (n \cdot p + n) = m \cdot (n \cdot S(p))\end{aligned}$$

assim, $S(p) \in X$. Portanto, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

4. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Definamos:

$$X = \{p \in \mathbb{N};\ (m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p\}.$$

Note que,

$$(m + n) \cdot 1 = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1.$$

Logo, $1 \in X$. Suponhamos que $p \in X$, então

$$\begin{aligned}(m + n) \cdot S(p) &= (m + n) \cdot p + (m + n) = (m \cdot p + n \cdot p) + (m + n) \\ &= (m \cdot p + m) + (n \cdot p + n) = m \cdot S(p) + n \cdot S(p)\end{aligned}$$

assim, $S(p) \in X$. Portanto, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

5. Primeiro vamos mostrar que $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

De fato, seja

$$Y = \{m \in \mathbb{N};\ m \cdot 1 = 1 \cdot m\}.$$

Desde que $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ tem-se que $1 \in Y$. Suponha que $m \in Y$, então

$$1 \cdot S(m) = 1 \cdot m + 1 = m \cdot 1 + 1 = m + 1 = S(m)$$

e, pela definição de multiplicação, $S(m) \cdot 1 = S(m)$. Daí, $S(m) \in Y$. Portanto, pelo princípio de indução, $Y = \mathbb{N}$. Seja agora $m \in \mathbb{N}$ e definamos,

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ m \cdot n = n \cdot m\}.$$

Como já vimos $m \cdot 1 = 1 \cdot m$ logo, $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$, assim

$$\begin{aligned}m \cdot S(n) &= m \cdot n + m = n \cdot m + 1 \cdot m \\ &= (n + 1) \cdot m = S(n) \cdot m.\end{aligned}$$

Daí, $S(n) \in X$. Portanto, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

6. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que, $m = n$. Definamos,

$$X = \{p \in \mathbb{N};\ m \cdot p = n \cdot p\}.$$

Como $m = n$ então, $m \cdot 1 = m = n = n \cdot 1$. Logo, $1 \in X$. Suponha agora que $p \in X$, então

$$m \cdot S(p) = m \cdot p + m = n \cdot p + n = n \cdot S(p).$$

Assim, $S(p) \in X$. Portanto, pelo princípio de indução, $X = \mathbb{N}$.

7. Como $m < n$ então, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m + q = n$. Logo,

$$m \cdot p + q \cdot p = (m + q) \cdot p = n \cdot p.$$

Daí, $m \cdot p < n \cdot p$.

8. Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que $m \cdot p = n \cdot p$. Agora, pela tricotomia, ou $m = n$, ou $m = n + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$ ou $n = m + \ell$ para algum $\ell \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $m \neq n$, assim temos:

   - se $m = n + q$ então,

   $$(n + q) \cdot p = n \cdot p \Rightarrow n \cdot p + q \cdot p = n \cdot p$$

   o que contradiz a Afirmação 2.1.

   - se $n = m + \ell$ então,

   $$m \cdot p = (m + \ell) \cdot p \Rightarrow m \cdot p = m \cdot p + \ell \cdot p$$

   o que também contradiz a Afirmação 2.1.

Portanto, $m = n$. ■

Alguns itens do Teorema 2.1 são deixados como exercício em (LIMA, 2009; LIMA, 2014). Os itens 2, 3, 4 e 5 encontram-se provados, respectivamente, no Teorema 1.7, Teorema 1.8, Teorema 1.9 e Teorema 1.10 em (COHEN; EHRLICH, 1963).

Definição 2.5. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e existe $p \in A$ tal que $p \leq a$, para todo $a \in A$, então, p é chamado de *o menor elemento* de A.

Observação 2.3. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e p e q são menores elementos de A, então $p = q$.
De fato, como $p \in A$ é menor elemento de A tem-se que,

$$p \leq a, \text{ para todo } a \in A. \tag{2.1}$$

Também como q é menor elemento de A, temos que

$$q \leq a, \text{ para todo } a \in A. \tag{2.2}$$

Agora como $q \in A$, de (2.1), temos

$$p \leq q \tag{2.3}$$

e como $p \in A$, de (2.2), tem-se

$$q \leq p. \tag{2.4}$$

Portanto, de (2.3) e (2.4), obtemos $p = q$. Assim, se A tem um menor elemento, ele é único. Chamamos de *menor elemento* de A.

Teorema 2.4. 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$ (isto é, $1 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Demonstração. Definamos:

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ 1 \leq n\}.$$

Como $1 = 1 \Rightarrow [1 = 1 \vee 1 < 1] \Rightarrow 1 \leq 1$, logo $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$ e, como $S(n) = n + 1$ então,

$$[n < S(n) \wedge 1 \leq n] \Rightarrow 1 < S(n) \Rightarrow [1 = S(n) \vee 1 < S(n)] \Rightarrow 1 \leq S(n).$$

Assim, $S(n) \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.5. Se $n \in \mathbb{N}$, então $X = \{m \in \mathbb{N};\ n < m < S(n)\}$ é vazio.

Demonstração. Suponhamos que $X \neq \emptyset$, logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in X$. Daí temos que,

$$n < m < S(n).$$

Como $n < m$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Pelo Axioma (P2), $p = 1$ ou $p = S(q)$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Assim, temos:

- Se $p = 1$ então, $m = n + 1 = S(n)$ o que contradiz a tricotomia do Teorema 2.1.

- Se $p = S(q)$ então,

$$m = n + p = n + S(q) = n + (q + 1) = (n + 1) + q = S(n) + q.$$

Logo, $S(n) < m$ o que contradiz a tricotomia do Teorema 2.1.

Portanto, $X = \emptyset$. ■

Observação 2.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$I_n = \{m \in \mathbb{N};\ m \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pelo Teorema 2.5, temos que

$$I_{n+1} = I_n \cup \{n + 1\}.$$

Veremos a seguir o chamado *Princípio da boa ordenação* ou *princípio da boa ordem* que afirma que todo subconjunto não vazio formado por números naturais, possui um menor elemento.

Teorema 2.6. [Princípio da boa ordenação] Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ então, existe um único $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq a,$ para todo $a \in A$.

Demonstração.
Existência: Se $1 \in A$. Pelo Teorema 2.4, temos que $1 \leq n,$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $1 \leq a,$ para todo $a \in A$. Neste caso, não há nada que mostrar. Agora se $1 \notin A$, consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ I_n \subseteq \mathbb{N} - A\}.$$

Como $A \neq \emptyset$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in A$. Note que,

$$I_m = \{1, 2, \ldots, m\} \nsubseteq \mathbb{N} - A.$$

Logo, $m \notin X$. Portanto $X \neq \mathbb{N}$.
Por outro lado, $1 \in X$ (pois $1 \notin A$, isto é $I_1 = \{1\} \subseteq \mathbb{N} - A$) e desde que $X \neq \emptyset$, pela contra-recíproca do princípio de indução, obtemos que $S(X) \nsubseteq X$, isto é, existe $n \in X$ tal que $S(n) \notin X$. Denotando $n_0 = S(n) = n + 1$.

Afirmação 2.2. $n_0 \in A$.

De fato, como $n \in X$ e $n+1 \notin X$ temos que,

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N} - A \text{ e } I_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\} \nsubseteq \mathbb{N} - A.$$

Logo, $n+1 \in A$ então, $n_0 \in A$. Isto mostra a afirmação.

Afirmação 2.3. $n_0 \leq a$ para todo $a \in A$.

De fato, suponhamos por absurdo que existe $a \in A$ tal que $a < n_0 = n+1$. Logo, $a \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N} - A$ então, $a \in \mathbb{N} - A$ o que é absurdo.
Portanto, $n_0 \leq a$ para todo $a \in A$. A unicidade já foi provada na Observação 2.3. ■

Outras demonstrações do Teorema 2.6 podem ser encontradas no Teorema 1 do Capítulo 2 em (LIMA, 2009) e, no Teorema 1.18 em (COHEN; EHRLICH, 1963).

2.2 Conjuntos finitos

Definição 2.6. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que X é *finito* se, e só se, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção $f : I_n \to X$.

Observação 2.5. Dizer que X é finito, é equivalente a dizer que podemos enumerar seus elementos. Ou seja,

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

onde $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2, \ldots,\ f(n) = x_n$.

Lema 2.1. [Lema do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Seja $f : X \to Y$ bijeção, $a \in X$ e $b \in Y$. Então, existe $g : X \to Y$ bijeção tal que $g(a) = b$.

Demonstração. Se $f(a) = b$ não há nada que mostrar. Estudemos o caso $f(a) \neq b$. Sejam a' e b' tais que $f(a) = b'$ e $f(a') = b$. Claramente temos que $a \neq a'$ e $b \neq b'$.
Definamos:

$$\begin{array}{rccl} g: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & g(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ b' & \text{se } x = a' \\ f(x) & \text{se } x \neq a, a'. \end{cases} \end{array}$$

Vejamos agora que g é uma bijeção. Injetiva: suponhamos por absurdo que existam $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$ tais que $g(x_1) = g(x_2)$.

- Se $x_1 = a,\ x_2 = a'$ então,

$$b = g(a) = g(x_1) = g(x_2) = g(a') = b'$$

o que contradiz $b \neq b'$.

- Se $x_1 = a$, $x_2 \neq a, a'$ então,

$$f(a') = b = g(a) = g(x_1) = g(x_2) = f(x_2)$$

e como f é injetiva, temos que $x_2 = a'$ o que contradiz $x_2 \neq a'$.

- Se $x_1 \neq a, a'$, $x_2 = a'$ então,

$$f(x_1) = g(x_1) = g(x_2) = g(a') = b' = f(a')$$

e como f é injetiva, temos que $x_1 = a'$ o que contradiz $x_1 \neq a'$.

- Se $x_1, x_2 \neq a, a'$ então,

$$f(x_1) = g(x_1) = g(x_2) = f(x_2)$$

e como f é injetiva, temos que $x_1 = x_2$ o que contradiz que $x_1 \neq x_2$.

Portanto, g é injetiva.
Sobrejetiva: seja $y \in Y$. Temos as seguintes possibilidades:

- Se $y = b$ então, $y = g(a)$.
- Se $y = b'$ então, $y = g(a')$.
- Se $y \neq b, b'$, como f é bijetiva, existe $x \in X$ com $x \neq a, a'$ tal que $y = f(x) = g(x)$.

Em qualquer caso, existe $x \in X$ tal que $y = g(x)$. Portanto, g é sobrejetiva. ■

Teorema 2.7. [Teorema 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Dado $n \in \mathbb{N}$, não pode existir nenhuma bijeção entre I_n e um subconjunto próprio de I_n.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que existe uma bijeção entre I_m e um subconjunto próprio de I_m (hipótese auxiliar). Definimos o conjunto,

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ \text{existe } A \subset I_n \ \text{ e } \ f : A \to I_n \text{ bijeção}\}.$$

Pela hipótese auxiliar, $X \neq \emptyset$. Logo, pelo Teorema 2.6, deve existir um único $n_0 \in X$ tal que $n_0 \leq n,$ para todo $n \in X$. Como $n_0 \in X$, existe $A \subset I_{n_0}$ e $f : A \to I_{n_0}$ bijeção. Consideremos dois casos:

Caso 1. Se $n_0 \in A$.

Pelo Lema 2.1, existe $g : A \to I_{n_0}$ bijeção tal que $g(n_0) = n_0$. Logo, $A - \{n_0\} \subset I_{n_0} - \{n_0\} = I_{n_0-1}$ e $g|_{A-\{n_0\}} : A - \{n_0\} \to I_{n_0-1}$ bijeção. Portanto, $n_0 - 1 \in X$ o que contradiz a minimalidade de X.

Caso 2. Se $n_0 \notin A$.

Como $n_0 \in I_{n_0}$ e $f : A \to I_{n_0}$ sobrejetiva então, existe um único $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$. Temos que,

$$A - \{a\} \subset A = A - \{n_0\} \subset I_{n_0} - \{n_0\} = I_{n_0-1} \text{ e } f|_{A-\{a\}} : A - \{a\} \to I_{n_0-1} \text{ bijeção.}$$

Consequentemente, $n_0 - 1 \in X$ o que contradiz novamente a minimalidade de X. ■

Corolário 2.1. [Corolário 1 do Teorema 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijetivas então, $m = n$.

Demonstração. Suponhamos que $m \neq n$. Pela tricotomia, temos que ou $m < n$ ou $n < m$.

- Se $m < n$ então, $I_m \subset I_n$ e $g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$ bijeção. O que contradiz o Teorema 2.7.
- Se $n < m$ então, $I_n \subset I_m$ e $f^{-1} \circ g : I_n \to I_m$ bijeção. O que, novamente, contradiz o Teorema 2.7. ■

Observação 2.6.

1. Se X é finito então, por definição, existem $n \in \mathbb{N}$ e $f : I_n \to X$ bijeção. O Corolário 2.1 nós diz que n é único. Logo, a cada conjunto finito podemos associar um único número natural n chamado *cardinal* de X e denotado por card(X). Em símbolos:

$$\text{card}(X) = n \Leftrightarrow \text{ existe bijeção } f : I_n \to X.$$

2. Se $X = \emptyset$, por convenção, X é finito e card$(X) = 0$.

Corolário 2.2. [Corolário 2 do Teorema 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Seja X um conjunto finito e $f : X \to X$. São equivalentes:

(i) f é injetiva. (ii) f é sobrejetiva.

Demonstração. Em primeiro lugar consideremos o caso em que $X = I_n$.
(i)⇒(ii): f é injetiva. Suponhamos por absurdo que $f(I_n) \subset I_n$. Logo, $f : I_n \to f(I_n)$ é uma bijeção, o que contradiz o Teorema 2.7. Portanto, $f(I_n) = I_n$, isto é, f é sobrejetiva.
(ii)⇒(i): f é sobrejetiva. Para $y \in I_n$, existe $x_y \in I_n$ tal que $f(x_y) = y$. Definimos $g : I_n \to I_n$ dada por $g(y) = x_y$.

Afirmação 2.4. g é injetiva.

De fato, sejam $y_1, y_2 \in I_n$ tal que $g(y_1) = g(y_2)$. Logo, temos

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2.$$

Isso mostra a afirmação. Como já mostramos que (i)⇒(ii) concluímos que g é sobrejetiva. Desta maneira, g é uma bijeção.

Afirmação 2.5. f é injetiva.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in I_n$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Como $x_1, x_2 \in I_n$ e g é sobrejetiva então, existem $z_1, z_2 \in I_n$ tal que $x_1 = g(z_1)$ e $x_2 = g(z_2)$. Assim, temos

$$z_1 = f(g(z_1)) = f(g(z_2)) = z_2.$$

Logo, $x_1 = g(z_1) = g(z_2) = x_2$. Isso mostra a afirmação.
Consideremos agora o caso geral. Como X é finito, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi : I_n \to X$ bijeção. Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X \\ I_n \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi"] & I_n \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f \text{ é injetiva} &\Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \text{ é injetiva} \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \text{ é sobrejetiva} \\ &\Leftrightarrow f \text{ é sobrejetiva.} \end{aligned}$$

Portanto, f é injetiva se, e só se, f é sobrejetiva. ■

Corolário 2.3. [Corolário 3 do Teorema 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Não pode existir uma bijeção entre um subconjunto finito e uma parte própria sua.

Demonstração. Seja X finito e $Y \subset X$ uma parte própria. Como X é finito, existe $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Então, $A := f^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n. Consideremos $f_A : A \to Y$ a bijeção obtida por restrição de f a A e, suponhamos que existe uma bijeção $g : Y \to X$. Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{f^{-1}\circ g\circ f_A} & I_n \end{array}$$

Logo, $h = f^{-1} \circ g \circ f_A : A \to I_n$ é uma bijeção, contrariando o Teorema 2.7. ∎

Teorema 2.8. [Teorema 2 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Demonstração. Primeiramente provaremos o seguinte:

Afirmação 2.6. Se A é finito e $a \in A$ então, $A - \{a\}$ é finito e card$(A - \{a\}) =$ card$(A) - 1$.

De fato, se A é finito então, existe $m \in \mathbb{N}$ e $f : I_m \to X$ bijeção. Se $m = 1$ então, $A - \{a\} = \emptyset$. Logo, $A = \{a\}$ é finito e card$(A - \{a\}) = 0 =$ card$(A) - 1$. Se $m > 1$ então, pelo Lema 2.1, existe $g : I_m \to A$ bijeção tal que $g(m) = a$. Logo, $g|_{I_{m-1}} : I_{m-1} \to A - \{a\}$ é bijeção. Consequentemente, $A - \{a\}$ é finito e card$(A - \{a\}) = m - 1 =$ card$(A) - 1$.

Seja

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ \text{card}(A) = n \ \wedge \ B \subseteq A \Rightarrow B \text{ é finito}\}.$$

Vamos mostrar que $X = \mathbb{N}$. Se card$(A) = 1$ e $B \subseteq A$ então, $B = \emptyset$ ou $B = A$. Logo, B é finito. Portanto, $1 \in X$. Suponhamos $n \in X$ (hipótese indutiva).

Seja A um conjunto finito tal que card$(A) = n + 1$ e $B \subseteq A$. Aqui temos duas situações:

- Se $B = A$ então, B é finito.
- Se $B \subset A$ então, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Logo, $B = B - \{a\} \subseteq A - \{a\}$ e card$(A - \{a\}) = n$. Agora, pela hipótese indutiva, temos que B é finito.

Em qualquer caso, B é finito. Assim, $n + 1 \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$. ∎

Corolário 2.4. [Corolário 1 do Teorema 2 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Seja $f : X \to Y$.

1. Se Y é finito e f é injetiva então, X é finito.

2. Se X é finito e f é sobrejetiva então, Y é finito.

Demonstração.

1. Temos que $f : X \to f(X)$ é bijeção. Então, $f^{-1} : f(X) \to X$ é, também, bijeção. Como $f(X) \subseteq Y$ e Y é finito temos, pelo Teorema 2.8, que $f(X)$ é finito. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi : I_n \to f(X)$ bijeção. Logo, $f^{-1} \circ \varphi : I_n \to X$ é uma bijeção. Portanto, X é finito.

2. Como f é sobrejetiva, para cada $y \in Y$ existe $x = x_y$ tal que $f(x_y) = y$. Consideremos $g : Y \to X$ dada por $g(y) = x_y$. Sabemos que g é injetiva e, pelo item 1, Y é finito. ■

Definição 2.7. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Dizemos que A é *limitado* se, e só se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq p,$ para todo $a \in A$.

Corolário 2.5. [Corolário 2 do Teorema 2 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Então, A é finito se, e só se, A é limitado.

Demonstração. Suponhamos que A é finito então, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$. Definimos

$$p = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $a_i \leq p$ para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, A é limitado.

Reciprocamente, se A é limitado então, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq p$, para todo $a \in A$. Logo, $A \subseteq I_p$ e como I_p é finito então, pelo Teorema 2.8, A é finito. ■

2.3 Conjuntos infinitos

Na teoria dos conjuntos, um conjunto é infinito se possui uma correspondência biunívoca com um dos seus subconjuntos próprios. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não. Segue sua definição.

Definição 2.8. Dizemos que A é um *conjunto infinito* se, e só se, A não é finito.

Teorema 2.9. [Teorema 3 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Se A é um conjunto infinito então, existe $f : \mathbb{N} \to A$ função injetiva.

Demonstração. Para demonstrar este resultado usaremos o *axioma da escolha* que afirma: “O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos é não vazio”. Em particular, “Se $X \neq \emptyset$ então podemos escolher um elemento x de X”. Para maior compreensão desse axioma recomendamos a leitura da Seção 15 em (HALMOS, 1974). Definimos indutivamente da seguinte maneira:
Como A é infinito temos que $A \neq \emptyset$. Logo, podemos escolher $a_1 \in A$. Se $A - \{a_1\} = \emptyset$ então, A é finito o que é absurdo. Logo, $A - \{a_1\} \neq \emptyset$. Assim, podemos escolher $a_2 \in A - \{a_1\}$. Se $A - \{a_1, a_2\} = \emptyset$ então, A é finito o que é absurdo. Logo, $A - \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$. Daí, podemos escolher $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$. Do mesmo modo, pelo axioma da escolha, podemos eleger $a_{n+1} \in A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
Agora, definamos $f : \mathbb{N} \to A$ dada por $f(n) = a_n$.

Afirmação 2.7. f é injetiva.

De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $n < m$. Assim, temos que $f(n) = a_n \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$ logo, $f(n) \notin A - \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. E, como $f(m) = a_m \in A - \{a_1, a_2 \ldots, a_m\}$ tem-se que, $f(n) \neq f(m)$. Portanto, f é injetiva ■

Corolário 2.6. [Corolário do Teorema 3 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Um conjunto A é infinito se, e só se, existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A.

Demonstração. Suponhamos que A é infinito. Pelo Teorema 2.9, existe $f : \mathbb{N} \to A$ injetiva. Tomando $B = A - \{f(1)\}$, claramente $B \subset A$.
Definamos

$$\begin{array}{rcl} g: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & g(x) = \begin{cases} f(n+1) & \text{se } x = f(n) \\ x & \text{se } x \notin f(\mathbb{N}). \end{cases} \end{array}$$

Resta mostrar que g é injetiva. De fato, suponhamos por absurdo que existam $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ tais que $g(x_1) = g(x_2)$.

- Se $x_1 = f(n_1)$, $x_2 = f(n_2)$ então,

$$f(n_1 + 1) = g(x_1) = g(x_2) = f(n_1 + 1)$$

  e, como f é injetiva, temos que $n_1 = n_2$ o que contradiz que $x_1 \neq x_2$.

- Se $x_1, x_2 \notin f(\mathbb{N})$ então,

$$x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$$

o que contradiz $x_1 \neq x_2$.

Reciprocamente, se existe uma bijeção entre A e algum subconjunto próprio de A, pelo Corolário 2.3, A não pode ser finito. Logo, A é infinito. ■

Exemplo 2.2. $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

De fato, consideremos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n^2$. Claramente f é injetiva, mas não é sobrejetiva. Logo, pelo Corolário 2.2, $\mathbb{N}$ não pode ser finito.

Exemplo 2.3. Dado $p \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathbb{N}_p = \{p+1, p+2, \ldots\}$. Claramente $\mathbb{N}_p$ é uma parte própria de $\mathbb{N}$ e $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$ dada por $\varphi_p(n) = p + n$, é uma bijeção. Logo, pelo Corolário 2.6, $\mathbb{N}_p$ é infinito. Exemplos desse tipo já tinham sido observados por Galileu[2] que foi o primeiro a observar que "há tantos números pares quanto números naturais". De fato, se denotamos $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ o conjunto dos números pares então, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi(n) = 2n$, é uma bijeção. Claramente, se $I = \{1, 3, 5, \ldots\}$ é o conjunto do números ímpares então, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\psi(n) = 2n - 1$, também é uma bijeção. Observe que $\mathbb{N} - I = P$ e $\mathbb{N} - P = I$ são infinitos, enquanto $\mathbb{N} - \mathbb{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$ é finito.

2.4 Conjuntos enumeráveis

Definição 2.9. Dizemos que A é um *conjunto enumerável* se, e só se, A é finito ou existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$. Neste caso, f chama-se uma *enumeração* dos elementos de X. Escrevendo $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ \ldots,\ f(n) = x_n, \ldots$ tem-se então, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Exemplo 2.4. $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito enumerável. Basta considerar a função identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a qual claramente é uma bijeção.

Teorema 2.10. [Teorema 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é enumerável.

2 Galileu Galilei foi um astrônomo, físico e engenheiro nascido em Pisa na Itália em 1564.

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Se A é finito então, A é enumerável. Consideremos A infinito. Como $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.6, existe um único $a_1 \in A$ tal que $a_1 \leq a$ para todo $a \in A$. Logo, $a_1 < a$ para todo $a \in A_2 = A - \{a_1\}$. Também, como $A_2 \neq \emptyset$ e $A_2 \subseteq \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.6, existe um único $a_2 \in A_2$ tal que $a_2 \leq a$ para todo $a \in A_2$. Daí, $a_2 < a$ para todo $a \in A_3 = A - \{a_1, a_2\}$. Supondo que temos construído $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ com $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, consideremos $A_{n+1} = A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \neq \emptyset$. E, como $A_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.6, existe um único $a_{n+1} \in A_{n+1}$ tal que $a_{n+1} \leq a$ para todo $a \in A_{n+1}$. Assim, $a_{n+1} < a$ para todo $A_{n+2} = A - \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Definamos $f : \mathbb{N} \to A$ dada por $f(n) = a_n$. Claramente f é injetiva. Resta mostrar que f é sobrejetiva procedendo por contradição. Suponhamos que f não é sobrejetiva, isto é, $f(\mathbb{N}) \subset A$ então, existe $a \in A$ tal que $a \notin f(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Logo, $a_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $f(\mathbb{N})$ é limitado. Então, pelo Corolário 2.5, $f(\mathbb{N})$ é finito. Agora, como $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é bijeção, pelo Corolário 2.4, temos que $\mathbb{N}$ é finito o que é absurdo. ■

Corolário 2.7. [Corolário 1 do Teorema 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Seja $f : X \to Y$.

1. Se Y é enumerável e f é injetiva então, X é enumerável.
2. Se X é enumerável e f é sobrejetiva então, Y é enumerável.

Demonstração.

1. Se X é finito então, X enumerável (nada a provar). Suponhamos que X é infinito. Pelo Corolário 2.4, Y é infinito enumerável. Logo, existe $\varphi : \mathbb{N} \to Y$ bijeção e, como $f : X \to Y$ é injetiva, temos que $\varphi^{-1} \circ f : X \to \mathbb{N}$ é injetiva. Daí, $(\varphi^{-1} \circ f)(X) \subseteq \mathbb{N}$ e $\varphi^{-1} \circ f : X \to (\varphi^{-1} \circ f)(X)$ é bijetiva. Pelo Corolário 2.4 e pelo Teorema 2.10 temos que, $(\varphi^{-1} \circ f)(X)$ é infinito enumerável. Logo, existe $\psi : \mathbb{N} \to (\varphi^{-1} \circ f)(X)$ bijeção. Assim, temos que $(\varphi^{-1} \circ f)^{-1} \circ \psi : \mathbb{N} \to X$ é bijetiva. Portanto, X é infinito enumerável.

2. Como f é sobrejetiva então, existe $g : Y \to X$ injetiva. E, como X é enumerável, pelo item 1, temos que Y é enumerável. ■

Exemplo 2.5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De fato, basta considerar $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\psi(n, m) = 2^n \cdot 3^m$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética[3] (ver Teorema 1.16 em (MARTINEZ et al., 2013)), temos que ψ é injetiva. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, pelo Corolário 2.7, tem-se que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Corolário 2.8. [Corolário 2 do Teorema 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] A é enumerável se, e só se, existe $f : \mathbb{N} \to A$ sobrejetiva.

Demonstração. Suponhamos que A é enumerável.

- Se A é finito então, existe $n \in \mathbb{N}$ e $g : I_n \to A$ bijeção. Definimos

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & A \\ & m & \mapsto & f(m) = \begin{cases} g(m) & \text{se } 1 \leq m \leq n \\ g(n) & \text{se } m > n. \end{cases} \end{array}$$

  Claramente f é sobrejetiva.

- Se A é infinito enumerável então, existe $f : \mathbb{N} \to A$ bijeção. Em particular, f é sobrejetiva.

Reciprocamente, se existe $f : \mathbb{N} \to A$ sobrejetiva então, existe $g : A \to \mathbb{N}$ injetiva. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, pelo Corolário 2.7, temos que A é enumerável. ■

Corolário 2.9. [Corolário 3 do Teorema 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Se X e Y são enumeráveis então, $X \times Y$ é enumerável.

Demonstração. Como X e Y são enumeráveis, pelo Corolário 2.8, existem $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$ sobrejetivas. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & X \times Y \\ & (m, n) & \mapsto & \Phi(m, n) = (f(m), g(n)). \end{array}$$

Afirmação 2.8. Φ é sobrejetiva. De fato, seja $(x, y) \in X \times Y$ então, $x \in X$ e $y \in Y$. Como f e g são sobrejetivas, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $x = f(m)$ e $y = g(n)$. Logo,

$$\Phi(m, n) = (f(m), g(n)) = (x, y).$$

Portanto, Φ é sobrejetiva.

[3] Todo número natural maior que 1 pode ser decomposto num produto de números primos, sendo esta decomposição única a menos de permutações dos fatores.

Agora, como Φ é sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pelo Corolário 2.7, $X \times Y$ é enumerável. ■

Corolário 2.10. [Corolário 4 do Teorema 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ uma família enumerável de conjuntos enumeráveis.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é enumerável. Logo, pelo Corolário 2.8, existe $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ sobrejetiva. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \\ & (m,n) & \mapsto & \Phi(m,n) = f_n(m). \end{array}$$

Afirmação 2.9. Φ é sobrejetiva. De fato, seja $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_n$. Como f_n é sobrejetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_n(m)$. Logo,

$$\Phi(m,n) = f_n(m) = x.$$

Portanto, Φ é sobrejetiva.

Finalmente, como Φ é sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pelo Corolário 2.7, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. ■

Exemplo 2.6. [Exemplo 1 da Seção 4 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dos números *inteiros* é enumerável. Basta considerar

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & f(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \\ -\dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \end{array}$$

Vejamos agora que f é uma bijeção.

Injetiva: suponhamos por absurdo que existam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_1 \neq n_2$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Como $\mathbb{N} = I \cup P$ (união disjunta) temos duas possibilidades:

- Se $n_1, n_2 \in P$ então, $n_1 = 2k_1$ e $n_2 = 2k_2$ para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Logo,

$$-k_1 = -\frac{2k_1}{2} = -\frac{n_1}{2} = f(n_1) = f(n_2) = -\frac{n_2}{2} = -\frac{2k_2}{2} = -k_2$$

  o que contradiz que $n_1 \neq n_2$.

- Se $n_1, n_2 \in I$ então, $n_1 = 2k_1 - 1$ e $n_2 = 2k_2 - 1$ para alguns $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Logo,
$$k_1 - 1 = \frac{2k_1 - 2}{2} = \frac{n_1 - 1}{2} = f(n_1) = f(n_2) = \frac{n_2 - 1}{2} = -\frac{2k_2 - 1}{2} = k_2 - 1$$
daí, $k_1 = k_2$ o que contradiz que $n_1 \neq n_2$.

Portanto, f é injetiva.

Sobrejetiva: seja $m \in \mathbb{Z}$. Temos as seguintes possibilidades:

- Se $m = 0$ temos que,
$$f(1) = \frac{1-1}{2} = 0 = m.$$
- Se $m \in \mathbb{N}$ temos que,
$$f(2m+1) = \frac{(2m+1)-1}{2} = m.$$
- Se $m \in (-\mathbb{N})$ temos que,
$$f(-2m) = -\frac{-2m}{2} = m.$$

Portanto, f é sobrejetiva.

Exemplo 2.7. O conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ dos números *racionais* é enumerável.

De fato, escrevendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos definir uma função sobrejetiva
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Q} \\ & (m,n) & \mapsto & f(m,n) = \dfrac{m}{n} \end{array}$$
e como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, pelo Corolário 2.7, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Exemplo 2.8. Seja S o conjunto das sequências de 0 e 1, isto é, $S = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ (conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$). Por exemplo, $s = (1,0,1,0,1,\ldots) \in S$ e $s' = (0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,\ldots) \in S$. Suponhamos que S é enumerável . Então, existe $f : \mathbb{N} \to S$ bijeção. Escrevemos $S = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$. Logo,
$$\begin{gathered} f(1) = s_1 = (s_{11}, s_{12}, s_{13}, \ldots, s_{1n}, \ldots) \\ f(2) = s_2 = (s_{21}, s_{22}, s_{23}, \ldots, s_{2n}, \ldots) \\ f(3) = s_3 = (s_{31}, s_{32}, s_{33}, \ldots, s_{3n}, \ldots) \\ \vdots \\ f(n) = s_n = (s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}, \ldots, s_{nn}, \ldots) \\ \vdots \end{gathered}$$

Consideremos

$$\begin{array}{rccl} s^*: & \mathbb{N} & \to & \{0,1\} \\ & n & \mapsto & s^*(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_{nn} = 0 \\ 0 & \text{se } s_{nn} = 1. \end{cases} \end{array}$$

Note que, $s^* \neq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, $s^* \in S$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s^* = f(m) = s_m$ o que é absurdo. Portanto, S não é enumerável. Este argumento deve-se a Cantor[4] e é conhecido como "*método da diagonal de Cantor*".

Em resumo, neste capítulo temos estudado propriedades importantes dos números naturais, tais como os axiomas de Peano, o principio da boa ordenação, conceitos de finitude e enumerabilidade. Tais propriedades/conceitos serão fundamentais na compreensão do estudo obtido ao assumir a existência do conjunto dos números reais.

[4] Georg Cantor foi um matemático alemão nascido no Império Russo em 1845. Ele é conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos.

3 NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais aparecem na necessidade de cobrir "lacunas" que se encontram no conjunto dos números racionais. Por exemplo, veremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional mas sim um número real, mais especificamente, um número irracional. As principais referências utilizadas neste capítulo são (LIMA, 2009; LIMA, 2014; BARTLE, 1976; RUDIN, 1976).

3.1 O corpo dos números reais

Para construir o corpo dos reais admitiremos a existência de um conjunto não vazio, denotado por $\mathbb{R}$ e chamado *conjunto dos números reais*, no qual definem-se duas operações chamadas de *soma* (+) e *multiplicação* ($\cdot$) que satisfazem: Fechadura, Associatividade, Comutatividade, Elemento neutro, Elemento inverso e Distributividade.

(A1) Fechadura da adição: Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, $x + y \in \mathbb{R}$.

(A2) Associatividade da adição: $(x + y) + z = x + (y + z),$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(A3) Comutatividade da adição: $x + y = y + x,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(A4) Elemento neutro aditivo: Existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $x + e = x,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(A5) Elemento inverso aditivo: Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = e$.

(M1) Fechadura da multiplicação: Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

(M2) Associatividade da multiplicação: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(M3) Comutatividade da multiplicação: $x \cdot y = y \cdot x,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(M4) Elemento neutro multiplicativo: Existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \mu = x,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(M5) Elemento inverso multiplicativo: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq e$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot z = \mu$.

(D) Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Observação 3.1.

1. Denotaremos xy em vez de $x \cdot y$.

2. Os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados *números reais*.

3. Um conjunto não vazio F com duas operações de soma e multiplicação que verificam as propriedades (A), (M) e (D) é chamado de *corpo*.

Veremos, na sequência, algunas exemplos de corpos além do $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1. [Exemplo 1 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ dotado das operações de soma e multiplicação usuais. Dados $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ com $n, n' \neq 0$ temos definidos,

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'}$$

e

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$$

verifica as propriedades (A), (M) e (D). Portanto, $\mathbb{Q}$ é um corpo.

Exemplo 3.2. [Exemplo 2 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ formado apenas de dois elementos distintos 0 e 1, com as operações

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

é um corpo.

Exemplo 3.3. [Exemplo 3 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O conjunto $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são os pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais com as seguintes operações assim definidas:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{e} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy'),$$

é um corpo.

O zero é o elemento $(0, 0)$ e a unidade é o elemento $(1, 0)$. Escrevendo x para representar o par $(x, 0)$ e usando a notação $i = (0, 1)$, observamos que cada elemento $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ pode escrever-se como $z = x + iy$ e que as operações acima foram definidas de modo que os “números complexos” da forma

$z = x + iy$ somem-se e multipliquem-se da maneira usual, com o cuidado de notar que $i^2 = -1$.

O corpo $\mathbb{Q}(i)$ é chamado *corpo dos números complexos racionais*.

Exemplo 3.4. [Exemplo 4 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O conjunto $\mathbb{Q}(t)$, das funções racionais $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, onde p e q são polinômios com coeficientes racionais e q não identicamente nulo, com as operações usuais:

$$\frac{p_1(t)}{q_1(t)} + \frac{p_2(t)}{q_2(t)} = \frac{p_1(t)q_2(t) + q_1(t)p_2(t)}{q_1(t)q_2(t)}$$

e

$$\frac{p_1(t)}{q_1(t)} \cdot \frac{p_2(t)}{q_2(t)} = \frac{p_1(t)p_2(t)}{q_1(t)q_2(t)}$$

é um corpo.

Teorema 3.1. Em $\mathbb{R}$ e qualquer corpo. Verifica-se:

1. O elemento neutro aditivo é único.
2. O elemento inverso aditivo é único.
3. O elemento neutro multiplicativo é único.
4. O elemento inverso multiplicativo é único.

Demonstração.

1. Suponhamos que exista $e' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + e' = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

   Temos

$$e' \underbrace{=}_{(A4)} e' + e \underbrace{=}_{(A3)} e + e' \underbrace{=}_{(3.1)} e.$$

   Logo, $e' = e$.

2. Suponhamos que exista $y' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + y' = e. \tag{3.2}$$

Temos

$$\begin{aligned} y' &\underbrace{=}_{(A4)} y' + e \underbrace{=}_{(A5)} y' + (x+y) \\ &\underbrace{=}_{(A2)} (y'+x) + y \underbrace{=}_{(A3)} (x+y') + y \\ &\underbrace{=}_{(3.2)} e + y \underbrace{=}_{(A3)} y + e \underbrace{=}_{(A4)} y. \end{aligned}$$

Logo, $y' = y$.

3. Suponhamos que exista $\mu' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot \mu' = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Temos

$$\mu' \underbrace{=}_{(M4)} \mu' \cdot \mu \underbrace{=}_{(M3)} \mu \cdot \mu' \underbrace{=}_{(3.3)} \mu.$$

Logo, $\mu' = \mu$.

4. Suponhamos que exista $z' \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot z' = \mu. \tag{3.4}$$

Temos

$$\begin{aligned} z' &\underbrace{=}_{(M4)} z' \cdot \mu \underbrace{=}_{(M5)} z' \cdot (x \cdot z) \\ &\underbrace{=}_{(M2)} (z' \cdot x) \cdot \mu \underbrace{=}_{(M3)} (x \cdot z') \cdot z \\ &\underbrace{=}_{(3.4)} \mu \cdot z \underbrace{=}_{(M3)} z \cdot \mu \underbrace{=}_{(M4)} z. \end{aligned}$$

Logo, $z' = z$. ■

O item 1 e item 3 do Teorema 3.1, encontra-se no Teorema 4.2 em (BARTLE, 1976). Enquanto o item 2 e item 4 do Teorema 3.1, encontra-se no Teorema 4.3 em (BARTLE, 1976).

Observação 3.2.

1. Pelo Teorema 3.1, o neutro aditivo é chamado *zero* e denota-se por "0". O inverso aditivo de x é denotado por $-x$. O neutro multiplicativo é chamado de *um* e denota-se por "1". O inverso multiplicativo de x, $x \neq 0$, é denotado por x^{-1}.

2. Denotaremos a soma $x + (-y)$ por $x - y$, a qual chamaremos de *diferença* entre x e y.

3. Se $y \neq 0$, o produto xy^{-1} será denotado por $\dfrac{x}{y}$ e chamaremos de *quociente* de x por y.

4. As operações
$$(x, y) \mapsto x - y \quad \text{e} \quad (x, y) \to \frac{x}{y}$$
chamam-se, respectivamente, *substração* e *divisão*. Claramente, a divisão de x por y só faz sentido quando $y \neq 0$ pois, o número 0 não possui inverso multiplicativo.

5. Dado $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n-\text{vezes}}$. Em particular, $x^2 = x \cdot x$ e $x^3 = x^2 \cdot x$.

O próximo teorema é demonstrado com o propósito de explicitar o uso correto dos axiomas de um corpo.

Teorema 3.2. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, verifica-se:

1. Se $x + y = x + z$ então, $y = z$.
2. $-(-x) = x$.
3. Se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então, $y = z$.
4. Se $x \neq 0$ então, $(x^{-1})^{-1} = x$.
5. $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.
6. Se $xy = 0$ então, $x = 0$ ou $y = 0$.
7. $-x = (-1)x$.
8. $x(-y) = -(xy) = (-x)y$.
9. $(-x)(-y) = xy$.
10. Se $x^2 = y^2$ então, $x = \pm y$.

Demonstração.

1. Por hipótese, temos que

$$x + y = x + z. \tag{3.5}$$

Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned} y &\underbrace{=}_{(A4)} y + 0 \underbrace{=}_{(A5)} y + (x + (-x)) \\ &\underbrace{=}_{(A2)} (y + x) + (-x) \underbrace{=}_{(A3)} (x + y) + (-x) \\ &\underbrace{=}_{(3.5)} (x + z) + (-x) \underbrace{=}_{(A3)} (z + x) + (-x) \\ &\underbrace{=}_{(A2)} z + (x + (-x)) \underbrace{=}_{(A5)} z + 0 \underbrace{=}_{(A4)} z. \end{aligned}$$

2. Segue do item 2 do Teorema 3.1 que

$$(-x) + x \underbrace{=}_{(A3)} x + (-x) \underbrace{=}_{(A4)} 0$$

daí, pela unicidade do elemento inverso aditivo, temos que $-(-x) = x$.

3. Por hipótese, temos que $x \neq 0$ e

$$x \cdot y = x \cdot z. \tag{3.6}$$

Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned} y &\underbrace{=}_{(M4)} y \cdot 1 \underbrace{=}_{(M5)} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \\ &\underbrace{=}_{(M2)} (y \cdot x) \cdot x^{-1} \underbrace{=}_{(M3)} (x \cdot y) \cdot x^{-1} \\ &\underbrace{=}_{(3.6)} (x \cdot z) \cdot x^{-1} \underbrace{=}_{(M3)} (z \cdot x) \cdot x^{-1} \\ &\underbrace{=}_{(M2)} z \cdot (x \cdot x^{-1}) \underbrace{=}_{(M5)} z \cdot 1 \underbrace{=}_{(M4)} z. \end{aligned}$$

4. Segue do item 4 do Teorema 3.1 que

$$x^{-1} \cdot x \underbrace{=}_{(M3)} x \cdot x^{-1} \underbrace{=}_{(M4)} 1$$

daí, pela unicidade do elemento inverso multiplicativo, temos que $(x^{-1})^{-1} = x$.

5. Temos

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\underbrace{=}_{(A4)} x \cdot 0 + 0 \underbrace{=}_{(A5)} x \cdot 0 + (x + (-x)) \\ &\underbrace{=}_{(A2)} (x \cdot 0 + x) + (-x) \underbrace{=}_{(M4)} (x \cdot 0 + x \cdot 1) + (-x) \\ &\underbrace{=}_{(D)} x \cdot (0 + 1) + (-x) \underbrace{=}_{(A4)} x \cdot 1 + (-x) \\ &\underbrace{=}_{(M4)} x + (-x) \underbrace{=}_{(A5)} 0 \end{aligned}$$

e, por (M3), temos $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

6. Por hipótese, temos que

$$xy = 0. \tag{3.7}$$

Assim, se $x = 0$ não há nada a mostrar. Por outro lado, se $x \neq 0$ tem-se

$$y \underbrace{=}_{(M4)} y \cdot 1 \underbrace{=}_{(M5)} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \underbrace{=}_{(M2)} (y \cdot x) \cdot x^{-1} \underbrace{=}_{\text{(3.7)}} 0 \cdot x^{-1} \underbrace{=}_{\text{item } 5} 0.$$

7. Segue do item 2 do Teorema 3.1 que

$$\begin{aligned} x + (-1)x &\underbrace{=}_{(M3)} x + x(-1) \underbrace{=}_{(M4)} x \cdot 1 + x(-1) \\ &\underbrace{=}_{(D)} x(1 + (-1)) \underbrace{=}_{(A5)} x \cdot 0 \underbrace{=}_{\text{item } 5} 0 \end{aligned}$$

daí, pela unicidade do elemento inverso aditivo, temos que $(-1)x = -x$.

8. Segue do item 2 do Teorema 3.1 que

$$xy + x(-y) \underbrace{=}_{(D)} x(y + (-y)) \underbrace{=}_{(A5)} x \cdot 0 \underbrace{=}_{\text{item } 5} 0$$

daí, pela unicidade do elemento inverso aditivo, temos que $x(-y) = -(xy)$. Analogamente,

$$xy + (-x)y \underbrace{=}_{(M3)} yx + y(-x) \underbrace{=}_{(D)} y(x + (-x)) \underbrace{=}_{(A5)} y \cdot 0 \underbrace{=}_{\text{item } 5} 0.$$

Desta forma, pela unicidade do elemento inverso aditivo, temos que

$$(-x)y = -(xy).$$

9. Pelo item 8 e item 2, temos que

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = (-(-(xy))) = xy.$$

10. Por hipótese, temos

$$x^2 = y^2. \tag{3.8}$$

Assim, tem-se

$$(x-y)(x+y) \underbrace{=}_{(D)} x^2 - xy + xy - y^2 \underbrace{=}_{(A5)} x^2 - y^2 \underbrace{=}_{(3.8)} 0.$$

Logo, pelo item 6, temos que $x = \pm y$. ■

Os itens 2, 5 e 7 do Teorema 3.2, encontram-se no Teorema 4.5 em (BARTLE, 1976). Já os itens 4, 6 e 9 do Teorema 3.2, encontram-se no Teorema 4.6 em (BARTLE, 1976).

3.2 O corpo ordenado dos números reais

Em $\mathbb{R}$, consideremos o conjunto $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ chamado *conjunto dos números reais positivos*, que satisfazem as duas propriedades seguintes:

(F1) $x,\ y \in \mathbb{R}^+$ então, $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $xy \in \mathbb{R}^+$.

(F2) (Tricotomia) Se $x \in \mathbb{R}$ então, uma, e só uma, das três seguintes condições são satisfeitas:

(a) $x = 0$; (b) $x \in \mathbb{R}^+$; (c) $-x \in \mathbb{R}^+$.

Observação 3.3. Um corpo F, no qual se destaca um subconjunto $P \subseteq F$ que satisfaz as propriedades (F1) e (F2), é chamado *corpo ordenado*. Portanto, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.

Exemplo 3.5. [Exemplo 5 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado no qual o conjunto

$$P = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q};\ pq \in \mathbb{N} \right\}$$

satisfaz as propriedades (F1) e (F2). De fato, se $x, y \in P$ então,

$$x = \frac{p_1}{q_1} \text{ e } y = \frac{p_2}{q_2} \in P$$

com $p_1q_1, p_2q_2 \in \mathbb{N}$. Desta forma, como

$$x + y = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + q_1p_2}{q_1q_2}$$

então,

$$(p_1q_2 + q_1p_2)(q_1q_2) = (p_1q_1)q_2^2 + q_1^2(p_2q_2) \in \mathbb{N}$$

assim, $x + y \in P$. Também, como

$$xy = \frac{p_1}{q_1}\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$$

então,

$$(p_1p_2)(q_1q_2) = (p_1q_1)(p_2q_2) \in \mathbb{N}.$$

Daí, $xy \in P$.

Finalmente, dado qualquer $x \in \mathbb{Q}$ então, $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ para alguns $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$. Agora temos a seguintes possibilidades:

- Se $p = 0$ então, $x = \frac{p}{q} = 0$.
- Se $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$ então, $pq \in \mathbb{N}$. Logo, $x = \frac{p}{q} \in P$.
- Se $p \in \mathbb{N}$ e $-q \in \mathbb{N}$ então, $(-p)q = p(-q) \in \mathbb{N}$. Logo, $-x = -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} \in P$.
- Se $-p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$ então, $(-p)q \in \mathbb{N}$. Logo, $-x = -\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} \in P$.
- Se $-p \in \mathbb{N}$ e $-q \in \mathbb{N}$ então, $pq = (-p)(-q) \in \mathbb{N}$. Logo, $x = \frac{p}{q} \in P$.

Portanto, temos mostrado que se $x \in \mathbb{Q}$ então, pelo menos uma das afirmações (a), (b) e (c) é satisfeita.

Resta mostrar que para $x \in \mathbb{Q}$ não mais do que uma das afirmações (a), (b) e (c) é verdadeira.

- Se $x = 0$ e $x = \frac{p}{q}$ com $pq \in \mathbb{N}$ então, $p = 0$ o que contradiz $0 = pq \in \mathbb{N}$.
- Se $x = 0$ e $x = -\frac{p}{q}$ com $pq \in \mathbb{N}$ então, $p = 0$ o que contradiz $0 = pq \in \mathbb{N}$.
- Se $x = \frac{p_1}{q_1}$ e $x = -\frac{p_2}{q_2}$ então, $p_1q_2 = -p_2q_1$. Logo,

  $$-p_2^2q_1^2 = (-p_2q_1)(p_2q_1) = (p_1q_2)(p_2q_1) = (p_1q_1)(p_2q_2) \in \mathbb{N}$$

  o que é uma contradição.

Portanto, não mais do que uma das afirmações (a), (b) e (c) é verdadeira para quaisquer $x \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.6. [Exemplo 6 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado da seguinte maneira: uma fração $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ é dita *positiva* quando, no polinômio pq, o coeficiente do termo de mais alto grau for positivo. O conjunto P das frações positivas segundo esta definição cumpre as condições (F1) e (F2).

Se denotamos por $\mathbb{R}^-$ ao conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que $-x \in \mathbb{R}^+$, por (F2), temos que

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$$

e esta união é disjunta dois a dois. Os elementos de $\mathbb{R}^-$ são chamados *números reais negativos*.

Observação 3.4. Se $x \neq 0$ então, $x^2 \in \mathbb{R}^+$. De fato, como $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$ então, $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x \in \mathbb{R}^-$.

- Se $x \in \mathbb{R}^+$ então, por (F1), temos que $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$.
- Se $x \in \mathbb{R}^-$ então, $-x \in \mathbb{R}^+$. Logo, por (F1), temos $x^2 = (-x)(-x) \in \mathbb{R}^+$.

Em particular, $1 \in \mathbb{R}^+$ pois, $1 = 1^2$.

Exemplo 3.7. [Exemplo 7 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O corpo $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado pois, $1 + 1 = 0$ enquanto em um corpo ordenado 1 deve ser positivo e a soma de dois elementos positivos deveria ainda ser positiva. Também o corpo $\mathbb{Q}(i)$ não possui uma ordenação compatível com suas operações pois, $i^2 = -1$. Em um corpo ordenado, nenhum quadrado pode ser negativo e -1 sempre é negativo (ver Observação 3.4).

Definição 3.1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que:

1. x é *menor que* y, o que denotamos $x < y$ se, e só se, $y - x \in \mathbb{R}^+$.
2. x é *menor ou igual* a y, o que denotamos $x \leq y$ se, e só se, $x < y$ ou $x = y$.
3. x é *maior que* y, o que denotamos $x > y$ se, e só se, $y < x$.
4. x é *maior ou igual* a y, o que denotamos $x \geq y$ se, e só se, $y \leq x$.

Em particular, $x > 0$ quer dizer que $x \in \mathbb{R}^+$. Enquanto $x < 0$ significa $-x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 3.3. São satisfeitas as seguintes propriedades:

1. (Transitividade) Se $x < y$ e $y < z$ então, $x < z$.

2. (Tricotomia) Se $x, y \in \mathbb{R}$ então, uma e só uma das seguintes três condições são satisfeitas:

   (a) $x = y$; (b) $x < y$; (c) $x > y$.

3. (Monotocidade da adição) Se $x < y$ então, $x + z < y + z,$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

4. (Monotocidade da multiplicação) Se $x < y$ e $z > 0$ então, $xz < yz$. Também, se $x < y$ e $z < 0$ então, $xz > yz$.

Demonstração.

1. Como $x < y$ e $y < z$, temos que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Por (F1), tem-se

   $$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+.$$

   Daí, $x < z$.

2. Como $x - y \in \mathbb{R}$, por (F2), uma, e só uma, das seguintes três condições são satisfeitas:

   $$x - y = 0; \qquad x - y \in \mathbb{R}^+; \qquad y - x = -(x - y) \in \mathbb{R}^+.$$

   Equivalentemente, uma, e só uma, das seguintes três condições são satisfeitas:

   $$x = y; \qquad y < x; \qquad x < y.$$

3. Como $x < y$, temos que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Assim, tem-se

   $$(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+.$$

4. Se $x < y$ e $z > 0$, temos que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z = z - 0 \in \mathbb{R}^+$. Por (F1), obtemos

   $$yz - xz = (y - x)z \in \mathbb{R}^+.$$

   Daí, tem-se $xz < yz$. Por outro lado, se $x < y$ e $z < 0$ então, $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$. Logo, por (F1) e pelo item 8 do Teorema 4.2,

   $$xz - yz = -[yz - xz] = -[(y - x)z] = (y - x)(-z) \in \mathbb{R}^+.$$

   Assim, $yz < xz$, equivalentemente, $xz > yz$. ■

O item 1 e item 2 do Teorema 3.3, encontra-se no Teorema 5.4 em (BARTLE, 1976). Enquanto, o item 3 e item 4 do Teorema 3.3, encontra-se no Teorema 5.6 em (BARTLE, 1976).

Teorema 3.4. Dados $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, verifica-se:

1. Se $x < y$ e $x' < y'$ então, $x + x' < y + y'$.

2. Se $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$ então, $xx' < yy'$.

3. Se $0 < x < y$ então, $y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração.

1. Pelo item 1 e item 3 do Teorema 4.3, temos que

$$x + x' < y + x' \underbrace{=}_{(A3)} x' + y < y' + y \underbrace{=}_{(A3)} y + y'.$$

   Daí, $x + x' < y + y'$.

2. Pelo item 1 e item 4 do Teorema 4.3, desde que $0 < x$ e $y' > 0$, obtemos

$$xx' \underbrace{=}_{(M3)} x'x < y'x \underbrace{=}_{(M3)} xy' < yy'.$$

   Assim, $xx' < yy'$.

3. Primeiro mostremos o seguinte:

   Afirmação 3.1. Se $z > 0$ então, $z^{-1} > 0$.

   De fato, suponhamos que $z^{-1} \geq 0$. Se $z^{-1} = 0$ então, $0 = 0 \cdot z = z^{-1}z = 1$ o que é um absurdo. Se $z^{-1} < 0$, como $z > 0$, pelo item 4 do Teorema 4.3, temos

$$1 = z^{-1}z < 0 \cdot z = 0$$

   o que claramente é um absurdo.

   Assim, como $x > 0$ e $y > 0$, da Afirmação 3.1, temos que $x^{-1} > 0$ e $y^{-1} > 0$ Logo, por (F1), $y^{-1}x^{-1} > 0$. Agora, pelo item 4 do Teorema 4.3, temos

$$y^{-1} = y^{-1} \cdot 1 = y^{-1}(xx^{-1}) = x(y^{-1}x^{-1}) < y(y^{-1}x^{-1}) = (yy^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}. \blacksquare$$

O item 1 e item 3 do Teorema 3.8, encontra-se, respectivamente, no Teorema 5.6 em (BARTLE, 1976) e na Proposição 1.18 em (RUDIN, 1976).

Observação 3.5. Como $1 > 0$, segue-se $1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots$. Podemos então considerar $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Note também que, se $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ e, como $0 \in \mathbb{R}$, então, $-n \in \mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Além disso, se $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$ então,

$$\frac{m}{n} = mn^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Isso nos permite considerar que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 3.8. [Desigualdade de Bernoulli, Exemplo 1 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014)] Se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$ então,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

De fato, dado $x \geq -1$, consideremos:

$$X = \{n \in \mathbb{N};\ (1+x)^n \geq 1 + nx\}.$$

Note que,

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x \Rightarrow 1 \in X.$$

Supondo que $n \in X$, temos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \ \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&\geq 1 + x + nx \\
&= 1 + (n+1)x.
\end{aligned}$$

Daí, $n+1 \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$.

O exemplo anterior será utilizado no próximo capítulo.

Definição 3.2. Seja $x \in \mathbb{R}$. O *valor absoluto* (ou *módulo*) de x, denotado por $|x|$, define-se por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Em outra palavras, $|x| = \max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Teorema 3.5. Verifica-se:

1. $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $|x|^2 = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. $|xy| = |x| \cdot |y|,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
6. $-|x| \leq x \leq |x|,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
7. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|,$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
8. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.
9. $|x - a| < \alpha$ se, e só se, $a - \alpha < x < a + \alpha$.

Demonstração.

1. Se $x \geq 0$ então, $|x| = x \geq 0$. Se $x < 0$ então, $|x| = -x > 0$. Em qualquer caso, $|x| \geq 0$.

2. Se $x = 0$ então, $|x| = 0$. Reciprocamente, se $|x| = 0$. Logo, pela tricotomia, $x = 0$, $x > 0$ ou $x < 0$. Suponha que $x \neq 0$ então,

   - se $x > 0$ então, $0 = |x| = x > 0$ o que é uma contradição.
   - se $x < 0$ então, $0 = |x| = -x > 0$ o que, também, é uma contradição.

   Portanto, $x = 0$.

3. Se $x \geq 0$, temos $|x|^2 = x^2$. Se $x < 0$ então, $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. Em qualquer caso, $|x|^2 = x^2$.

4. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo item 3, temos

   $$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$$

   e, pelo item 10 do Teorema 3.2, temos $|xy| = |x| \cdot |y|$.

5. Se $x + y \geq 0$, temos que $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$. Se $x + y < 0$, tem-se $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$. Em qualquer caso, temos $|x+y| \leq |x|+|y|$.

6. Como $x, -x \leq |x|$, temos que $-|x| \leq x \leq |x|$.

7. Pelo item 4, temos que

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Analogamente, pelo item 4, tem-se

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x|+|y| \Rightarrow |y|-|x| \leq |y-x|.$$

Agora, pelo item 3, temos $|y-x| = |(-1)(x-y)| = |-1| \cdot |x-y| = |x-y|$. Assim, obtemos

$$-(|x|-|y|), |x|-|y| \leq |x-y|.$$

Daí, $\Big||x|-|y|\Big| \leq |x-y|$.

8. Basta observar que $x - z = (x-y)+(y-z)$ e, usando o item 4, temos

$$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z|.$$

9. Se $|x-a| < \alpha$ então, $x - a < \alpha$ e $-(x-a) < \alpha$. Daí, $a - \alpha < x < a + \alpha$. Reciprocamente, se $a - \alpha < x < a + \alpha$ então, $x - a < \alpha$ e $-(x-a) < \alpha$. Logo, $|x-a| < \alpha$. ■

Os itens 4, 5, 7 e 8 do Teorema 3.5, encontram-se provados no Teorema 2 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009). O item 9, encontra-se demonstrado no Teorema 2 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014).

Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, os *intervalos* são subconjuntos dos números reais, definidos por:

(i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$.

(ii) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.

(iii) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$.

(iv) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

(v) $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$.

(vi) $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$.

(vii) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$.

(viii) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$.

(ix) $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

Observação 3.6.

1. Os intervalos (i), (ii), (iii) e (iv) são *limitados* de extremos a e b: (i) é um intervalo *fechado*, (ii) é *aberto*, (iii) é *fechado à esquerda* e (iv) é *fechado à direita*.

2. Os intervalos (v), (vi), (vii), (viii) e (ix) são *ilimitados*: (v) é *a semirreta esquerda fechada* de origem b, (vi) é *a semirreta esquerda aberta* de origem b, (vii) é *a semirreta direita fechada* de origem a, (viii) é *a semirreta direita aberta* de origem a e (ix) é a *reta dos números reais*.

3. Quando $a = b$, o intervalo fechado $[a, b]$ se reduz a um único elemento e chama-se um *intervalo degenerado*.

4. Usaremos a notação $I_r(a) =]a-r, a+r[$ e $I_r[a] = [a-r, a+r]$.

3.3 O axioma do supremo

Nesta seção, introduziremos o axioma do supremo que será de grande relevância na compreensão do Teorema 6.1.

Definição 3.3. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Dizemos que X é *limitado superiormente* se, e só se, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b,$ para todo $x \in X$. O número b é chamado *cota superior* de X.

(ii) Dizemos que X é *limitado inferiormente* se, e só se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x,$ para todo $x \in X$. O número a é chamado *cota inferior* de X.

(iii) Dizemos X é *limitado* se, e só se, X é limitado superior e inferiormente.

Teorema 3.6. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. X é limitado.

2. X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$.

3. Existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k,$ para todo $x \in X$.

Demonstração.
$(1) \Rightarrow (2)$: Se X é limitado então, X é limitado superior e inferiormente. Logo, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$, para todo $x \in X$. Daí, $X \subseteq [a, b]$.
$(2) \Rightarrow (3)$: Se $X \subseteq [a, b]$, considerando $k = \max\{|a|, |b|, 1\} > 0$, temos que se $x \in X$ então,

$$-k \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq k.$$

Daí, $|x| \leq k$ para todo $x \in X$.
$(3) \Rightarrow (1)$: Se existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para todo $x \in X$, então $-k \leq x \leq k$ para todo $x \in X$. Assim, X é limitado inferior e superiormente. Portanto, X é limitado. ■

Exemplo 3.9. [Exemplo 9 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$ pois, $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$. Mas, não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$. De fato, dado qualquer $x \in \mathbb{Q}$, temos $x = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ Daí, $|p| + 1 \in \mathbb{N}$ e $|q| \geq 1$. Assim, temos

$$x = \frac{p}{q} \leq \left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|} \leq |p| < |p| + 1.$$

Do anterior, podemos concluir que o conjunto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ não é limitado superiormente nem inferiormente. Existem corpos ordenados nos quais o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Por exemplo, o corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais, com a ordem introduzida no Exemplo 3.6. O polinômio $p(t) = t \in \mathbb{Q}(t)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente do termo de mais alto grau de $t - n$ é positivo (grau 1), logo $t - n \in P$. Logo, temos $n < t$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p(t) = t$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}(t)$. Portanto, o conjunto $\mathbb{N}$ é limitado em $\mathbb{Q}(t)$ com ordem introduzido no Exemplo 3.6.

Definição 3.4. Seja $X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset$ limitado superiormente. Um número $b \in \mathbb{R}$ é chamado *supremo* de X, o qual denotaremos por $b = \sup(X)$ se, e só se,

(S1) $x \leq b,$ para todo $x \in X$. Isto é, b é cota superior de X.

(S2) Se $b' < b$ então, existe $x \in X$ tal que $b' < x$. Isto é, b é a menor cota superior.

Observação 3.7. Se o supremo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ existe, ele é único.

Definição 3.5. Seja $X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset$ limitado inferiormente. Um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado *ínfimo* de X, o qual denotaremos por $a = \inf(X)$ se, e só se, (I1) $a \leq x,$ para todo $x \in X$. Isto é, a é cota inferior de X.

(I2) Se $a' > a$ então, existe $x \in X$ tal que $x < a'$. Isto é, a é a maior cota inferior.

Observação 3.8. Se o ínfimo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ existe, ele é único.

Exemplo 3.10. Consideremos o intervalo $I = [0, 1[$. Logo, $\sup(I) = 1 \notin I$ e $\inf(I) = 0 \in I$.

Definição 3.6.

1. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ limitado superiormente. Um número $b \in \mathbb{R}$ é chamado *máximo* de X, o qual denotamos por $b = \max(X)$ se, e só se, $b = \sup(X)$ e $b \in X$.

2. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ limitado inferiormente. Um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado *mínimo* de X, o qual denotamos por $a = \min(X)$ se, e só se, $a = \inf(X)$ e $a \in X$.

Exemplo 3.11. b é o elemento máximo do intervalo fechado $[a, b]$ mas, o intervalo $[a, b[$ não possui elemento máximo.

Vamos aceitar que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade.
Axioma do Supremo: Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de números reais, possui um supremo.

Um corpo ordenado F é *completo* se verifica o axioma do supremo. Assim $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo*.

Teorema 3.7. [Teorema 3 do Capítulo 1 em (LIMA, 2014)] Verifica-se:

1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ não é limitado superiormente.

2. Se $X = \left\{ \dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ então, $\inf(X) = 0$.

3. Se $a, b \in \mathbb{R}^+$ então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Demonstração.

1. Procedendo por contradição, suponha que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Pelo axioma do supremo, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup(\mathbb{N})$. Como $b - 1 < b$, por (S2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - 1 < n_0$. Logo, $b < n_0 + 1$. O que é absurdo pois, $b = \sup(\mathbb{N})$ e $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$.

2. Claramente temos $0 \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $a' > 0$ então, $\frac{1}{a'} > 0$. Agora, como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a'} < n_0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < a'$. Assim, por (I1) e (I2), temos que $0 = \inf(X)$.

3. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos que $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}^+$. Como $0 = \inf(X)$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{a}{b}$. Portanto, $b < n_0 a$. ■

Num corpo ordenado F, como $1 > 0$, temos $1 < 1+1 < 1+1+1 < \ldots$ e o subconjunto de F formado por estes elementos é, portanto, infinito. Mais precisamente, vamos mostrar que se pode considerar o conjunto $\mathbb{N}$ naturalmente imerso em F. Denotemos 1_F ao único elemento neutro multiplicativo do corpo ordenado F. Definamos uma função $f : \mathbb{N} \to F$ pondo $f(1) = 1_F$, $f(2) = 1_F + 1_F$, etc. A forma correta de definir f é por indução fazendo $f(1) = 1_F$ e $f(n+1) = f(n) + 1_F$. Por indução verifica-se que $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e que (como todos os valores $f(n)$ são positivos) $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$. Assim, a função $f : \mathbb{N} \to F$ define uma bijeção do conjunto $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$, formado pelos elementos 1_F, $1_F + 1_F$, $1_F + 1_F + 1_F$, etc. Costuma-se identificar $\mathbb{N}'$ com $\mathbb{N}$ e considerar os números naturais contidos em F. Assim, temos $\mathbb{N} \subseteq F$ e voltamos a escrever 1, em vez de 1_F.

A seguir, mostraremos que o itens do Teorema 3.7 são equivalentes em qualquer corpo ordenado.

Teorema 3.8. [Teorema 3 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] Seja F um corpo ordenado (não necessariamente completo), as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\mathbb{N} \subseteq F$ não é limitado superiormente.

2. Se $a, b \in F$ com $a > 0$ então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

3. Dado qualquer $a > 0$ em F, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$ em F.

Demonstração.
$(1) \Rightarrow (2)$: Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$. Logo, $b < na$.
$(2) \Rightarrow (3)$: Dado $a > 0$, por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < na$. Daí, $0 < \frac{1}{n} < a$. Logo, $\inf X = 0$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Dado $b > 0$, temos que $\dfrac{1}{b} > 0$. Por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{b}$ então, $b < n$. Desta maneira, nenhum elemento positivo em F pode ser cota superior. Logo, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. ■

Um corpo ordenado F chama-se *Arquimediano* quando nele é válida qualquer das três condições citadas no Teorema 3.8. Assim, pelo Exemplo 3.9, o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é Arquimediano. Entretanto, o corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais, com a ordem introduzida no Exemplo 3.6, é não Arquimediano. Também, pelo Teorema 3.7, temos que $\mathbb{R}$ é Arquimediano.

Teorema 3.9. [Princípio dos intervalos encaixantes. Teorema 4 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014)] Seja $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de subintervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$ tal que,

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots \quad \text{(propriedade de encaixe)}.$$

Então, existe pelo menos um número real c tal que, $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como $I_n \supseteq I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, A é limitado superiormente. Pelo axioma do supremo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup(A)$. Daí, temos

$$a_n \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Por outro lado, qualquer b_n é cota superior de A. Logo, tem-se

$$c \leq b_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Assim, de (3.9) e (3.10), obtemos

$$a_n \leq c \leq b_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.10. [Teorema 5 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014)] $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R}$ é enumerável. Logo, existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijetiva. Vamos construir indutivamente uma família numerável de intervalos fechados e limitados I_n tal que,

1. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$.

2. $f(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, como $f(1) \in \mathbb{R}$, existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) < a_1$. Tomando $b_1 = a_1 + 1$, temos que $f(1) \notin [a_1, b_1] =: I_1$. Suponha que temos construído intervalos fechados e limitados $I_1, I_2, \cdots, I_n$ satisfazendo $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n$, com $f(1) \notin I_1,\ f(2) \notin I_2, \ldots,\ f(n) \notin I_n$. Vamos construir o intervalo I_{n+1}. Sabemos que, $f(n+1) \in \mathbb{R}$. Logo, existem duas possibilidades:

(i) Se $f(n+1) \notin I_n$ então, consideramos $I_{n+1} := I_n$.

(ii) Se $f(n+1) \in I_n = [a_n, b_n]$, temos três casos:

(a) Se $f(n+1) = a_n$, consideremos

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = b_n.$$

Segue que, $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] := I_{n+1}$.

(b) Se $f(n+1) = b_n$, consideremos

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{e} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Segue que, $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] := I_{n+1}$.

(c) Se $a_n < f(n+1) < b_n$, consideremos

$$a_{n+1} = \frac{f(n+1) + b_n}{2} \quad \text{e} \quad b_{n+1} = b_n.$$

Segue que, $f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] := I_{n+1}$.

Desta maneira, temos construído a família enumerável de intervalos fechados e limitados com a propriedade de encaixe. Pelo Teorema 3.9, temos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n,$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c = f(n_0)$. Note que $c = f(n_0) \in I_{n_0}$, o que contradiz a construção realizada. Portanto, $\mathbb{R}$ é não enumerável. ■

Um número real chama-se *irracional* quando não é racional. Denotaremos por $\mathbb{I}$ ao conjunto dos números irracionais. Agora, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável, temos que, pelo Teorema 3.10, $\mathbb{I}$ é não enumerável. Então poderiamos dizer que, existem "mais" números irracionais que racionais.

Denotemos $\tilde{P} = \{2m;\ m \in \mathbb{Z}\}$ o conjunto dos números pares inteiros e $\tilde{I} = \{2m-1;\ m \in \mathbb{Z}\}$ o conjunto dos números ímpares inteiros. Claramente $\mathbb{Z} = \tilde{P} \cup \tilde{I}$ e esta união é disjunta.

A seguir, mostremos o seguinte lema que nos será útil.

Lema 3.1. Dado $p \in \mathbb{Z}$ verifica-se:

(i) Se $p \in \tilde{I}$ então, $p^2 \in \tilde{I}$.

(ii) Se $p^2 \in \tilde{P}$ então, $p \in \tilde{P}$.

Demonstração.

(i) Como $p \in \tilde{I}$ então, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2m - 1$. Logo,

$$p^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m + 1) - 1$$

e, como $2m^2 - 2m + 1 \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 \in \tilde{I}$.

(ii) Suponhamos que $p \notin \tilde{P}$ então, $p \in \tilde{I}$. Por (i), temos que $p^2 \in \tilde{I}$. O que é absurdo pois, $p^2 \in \tilde{P}$. ■

Lema 3.2. [Lema do Capítulo 3 em (LIMA, 2009)] Não existe $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$.

Demonstração. Suponha que exista $d \in \mathbb{Q}$ tal que $d^2 = 2$. Como $d \in \mathbb{Q}$, existem $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tal que $d = \dfrac{p}{q}$ é uma fração irredutível (isto é, p e q não tem fatores comuns). Assim, como $d^2 = 2$, pelo Lema 3.1, temos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \in \tilde{P} \Rightarrow p \in \tilde{P}.$$

Agora, como $p \in \tilde{P}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Logo, temos

$$4n^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2 \in \tilde{P} \Rightarrow q \in \tilde{P}.$$

Daí, p e q são pares. O que é absurdo pois, p e q não tem fatores comuns. ■

Portanto, pelo Lema 3.2, o número $d \in \mathbb{R}$ que satisfaz $d^2 = 2$ deve ser irracional.

Exemplo 3.12. [Distinção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, Exemplo 9 do Capítulo 3 em (LIMA, 2009) e Teorema 6.8 em (BARTLE, 1976)] Sejam $A = \{p \in \mathbb{Q}^+;\ p^2 < 2\}$ e $B = \{p \in \mathbb{Q}^+;\ 2 < p^2\}$.

Notemos primeiramente que, se $x > 2$ então, $x^2 > 4$. Logo, $x \notin A$. Daí, $A \subseteq [0, 2]$. Portanto, A é um subconjunto limitado em $\mathbb{Q}$. Por outro lado, como $B \subset]0, +\infty[$, temos que B só é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$. Mostraremos que não existem $\sup A$ nem $\inf B$ em $\mathbb{Q}$. Para isso, utilizaremos as seguintes afirmações:

Afirmação 3.2. A não possui elemento máximo e B não possui elemento mínimo.

De fato, para cada $p \in A$, podemos encontrar um $q \in A$ tal que $p < q$. E, para cada $p \in B$, podemos encontrar um $q \in B$ tal que $q < p$. Para fazer isso, associamos a cada $p \in \mathbb{Q}^+$ o número

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{3.11}$$

Então,

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{3.12}$$

- Se $p \in A$ então, $p^2 < 2$. Por (3.11), temos que $q > p$ e, (3.12) mostra que $q^2 < 2$. Isso mostra que $q \in A$.

- Se $p \in B$ então, $2 < p^2$. Por (3.11), temos que $0 < q < p$ e, (3.12) mostra que $2 < q^2$. Logo, $q \in B$.

Afirmação 3.3. Se $p \in A$ e $q \in B$ então, $p < q$.

De fato, como $p^2 < 2 < q^2$, temos que $p^2 < q^2$. Ou seja, $(p - q)(p + q) = p^2 - q^2 < 0$. E, como $p + q > 0$, obtemos que $p < q$.
Agora, usando as afirmações anteriores, mostraremos que não existem $\sup A$ nem $\sup B$.
Suponhamos que exista $a = \sup A$. Daí, necessariamente, $a > 0$ e temos as seguintes possibilidades:

- Se $a^2 < 2$ então, $a \in A$. Como $a = \sup A$, a seria o elemento máximo de A, o que contradiz a Afirmação 3.2.

- Se $a^2 > 2$ então, $a \in B$. Pela Afirmação 3.2, B não possui elemento mínimo então, existe $b \in B$ com $b < a$. Agora, pela Afirmação 3.3, temos que $p < b < a$ para todo $p \in A$, o que contradiz que $a = \sup A$.

- Se $a^2 = 2$, pelo Lema 3.2, não existe número racional com esta propriedade.

Consequentemente, o subconjunto A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

Analogamente, suponhamos que exista $b = \inf B$. Daí, necessariamente, $b > 0$ e temos as seguintes possibilidades:

- Se $2 < b^2$ então, $b \in B$. Como $b = \inf B$, b seria o elemento mínimo de B, o que contradiz a Afirmação 3.2.

- Se $b^2 < 2$ então, $b \in A$. Pela Afirmação 3.2, A não possui elemento máximo então, existe $a \in A$ com $a < b$. Agora, pela Afirmação 3.3, temos que $a < b < p$ para todo $p \in B$, o que contradiz que $b = \inf B$.

- Se $b^2 = 2$, pelo Lema 3.2, não existe número racional com esta propriedade.

Portanto, o subconjunto B não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Finalmente, mostremos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = 2$. De fato, consideremos o conjunto $S = \{a \in \mathbb{R}^+;\ a^2 < 2\}$. O conjunto S é limitado superiormente (pois, $S \subset [0,4]$) e, claramente não vazio (pois $1 \in S$). Pelo Axioma do supremo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sup X$. Claramente $x > 0$. Vamos mostrar que $x^2 = 2$. Caso contrário, $x^2 \neq 2$. Assim, temos duas possibilidades:

- Se $x^2 < 2$, como $\dfrac{2-x^2}{2x+1} > 0$, pelo Teorema 3.7, temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2-x^2}{2x+1}$. Nesse caso, temos

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2.$$

  Daí, $x + \dfrac{1}{n} \in S$, o que contradiz o fato de $x = \sup S$.

- Se $x^2 > 2$, como $\dfrac{x^2-2}{2x} > 0$, pelo Teorema 3.7, temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m} < \dfrac{x^2-2}{2x}$. Desde que $x = \sup S$, existe $s_0 \in S$ tal que $x - \dfrac{1}{m} < s_0$. Assim, obtemos

$$2 < x^2 - \frac{2x}{m} < x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 < s_0^2.$$

  Daí, $s_0^2 > 2$, o que contradiz o fato de $s_0 \in S$.

Desde que excluímos as possibilidades que $x^2 < 2$ e $x^2 > 2$, mostramos que $x^2 = 2$. O número x escreve-se $x = \sqrt{2}$.

Corolário 3.1. [Corolário do Teorema 5 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014)] Todo intervalo não degenerado é não enumerável.

Demonstração. Observe que todo intervalo não degenerado contém um intervalo aberto $]a, b[$. Consideremos a função $f :]-1, 1[\to]a, b[$ dada por,

$$f(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right) x + \frac{a+b}{2}.$$

Como toda função linear não constante é uma bijeção, temos que f é uma bijeção. Assim, basta mostrar que o intervalo aberto $]-1, 1[$ é não enumerável. Agora, a função $\varphi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, dada por

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

é uma bijeção, cuja inversa é $\psi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, definida por

$$\psi(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

De fato,

$$\varphi(\psi(y)) = \varphi\left(\frac{y}{1-|y|}\right) = \frac{\dfrac{y}{1-|y|}}{1+\dfrac{|y|}{1-|y|}} = y, \text{ para todo } y \in]-1, 1[$$

e

$$\psi(\varphi(x)) = \psi\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = \frac{\dfrac{x}{1+|x|}}{1-\dfrac{|x|}{1+|x|}} = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Teorema 3.10, segue-se que $]-1, 1[$ é não enumerável. ■

Teorema 3.11. [Teorema 6 do Capítulo 2 em (LIMA, 2014)] Todo intervalo não degenerado I contém números racionais e irracionais.

Demonstração. Note que, pelo Corolário 3.1, I contém números irracionais caso contrário, seria enumerável. Para mostrar que I contém números racionais, consideramos $[a, b] \subseteq I$ com $a < b$ podendo ser supostos irracionais. Como $b - a \in \mathbb{R}^+$, e, pela parte 3 do Teorema 3.7, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - a > \frac{1}{n_0}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, não é difícil provar que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n_0}, \frac{m+1}{n_0}\right].$$

Agora, como $a \in \mathbb{R}$ então existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{m_0}{n_0} \leq a \leq \frac{m_0+1}{n_0}. \tag{3.14}$$

Por (3.13) e (3.14), temos que

$$\frac{m_0+1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + (b-a) = b. \tag{3.15}$$

Finalmente, por (3.14) e (3.15), tem-se $\frac{m_0+1}{n_0} \in]a, b[\subseteq I$. ■

Neste capítulo, foi introduzido o conceito de corpo Arquimediano e a importante propriedade dos intervalos encaixantes. Esses são parte da listagem das equivalências ao axioma do supremo.

Também, o corpo dos reais (ordenado) foi caracterizado com um atributo intrínseco que o diferencia do $\mathbb{Q}$. Este atributo de "completeza" em relação ao corpo $\mathbb{Q}$ é possível graças ao axioma do supremo. Esta distinção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ foi apresentada no Exemplo 3.12 e ficou claro que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não possui a estrutura de completeza que $\mathbb{R}$ possui.

No entanto, apesar de formalmente elegante, esta caracterização de $\mathbb{R}$ possui um aspecto abstrato de difícil compreensão para estudantes de licenciatura em geral.

Muito mais intuitivo é o conceito de sequências. No resultado principal de particular interesse são sequências de Cauchy. Uma revisão sobre este tema é apresentada no capítulo seguinte.

4 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, introduziremos o conceito de sequências de números reais, noção de limite de sequências e o importante conceito de sequência de Cauchy. Este último conceito será de grande destaque no entendimento do resultado principal dessa monografia. As referências bases deste capítulo são (LIMA, 2009; LIMA, 2014).

4.1 Limite de uma sequência

O limite de uma sequência é um dos tópicos mais antigos de análise matemática, a qual formaliza rigorosamente o conceito de sequência convergente.

Definição 4.1. Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real $x_n := x(n)$, x_n é chamado n-*ésimo termo* da sequência. Denotaremos por "(x_n)" está sequência de números reais. Outras notações são: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Não se deve confundir a sequência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos. Para este conjunto, usaremos a notação $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Definição 4.2.

1. Dizemos que (x_n) é *limitado superiormente* se, e só se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c;$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Dizemos que (x_n) é *limitado inferiormente* se, e só se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x_n;$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Dizemos que (x_n) é *limitado* se, e só se, é limitado superior e inferiormente. Ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que, $\alpha \leq x_n \leq \beta;$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 4.1. Considerando $X = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, pelo Teorema 3.6, (x_n) é limitado se, e só se, existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.1. Seja $a > 1$. Considere $x_n = a^n$, como $a > 1$ então, $a^2 > a$ e, também, $a^3 > a^2$. Por indução prova-se

$$a < a^2 < a^3 < a^4 < \ldots$$

segue-se que, (a^n) é limitado inferiormente.

Afirmação 4.1. (a^n) não é limitado superiormente.

De fato, suponhamos que (a^n) é limitado superiormente. Logo, existe $c > 0$ tal que

$$a^n \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Seja $d = a - 1 > 0$ então, $a = 1 + d$. Pela desigualdade de Bernoulli (Exemplo 3.8), temos que

$$a^n = (1+d)^n \geq 1 + nd, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Pelo Teorema 3.7, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 d > c. \tag{4.3}$$

Logo, de (4.2) e usando (4.3), tem-se

$$a^{n_0} = (1+d)^{n_0} \geq 1 + n_0 d > 1 + c > c.$$

O que contradiz (4.1).

Definição 4.3.

1. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o *limite* de (x_n) se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Este $a \in \mathbb{R}$ será denotado $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

2. Uma sequência que tem limite é chamada *convergente*.

3. As sequências que não são convergentes são chamadas *divergentes*.

Teorema 4.1. [Teorema 1 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] O limite de uma sequência convergente é única.

Demonstração. Seja (x_n) convergente então, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{4.4}$$

Suponhamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b, \tag{4.5}$$

com $b \neq a$. Como $\varepsilon = |a - b| > 0$, por (4.4), temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}. \tag{4.6}$$

Analogamente, por (4.5), temos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \;\Rightarrow\; |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2}. \tag{4.7}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, de (4.6) e (4.7), temos

$$n \geq n_0 \Rightarrow |b - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

o que é uma contradição. Portanto, o limite é único. ∎

Definição 4.4. Sejam $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma sequência estritamente crescente (isto é, se $n_1 < n_2 \Rightarrow k(n_1) < k(n_2)$), e (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_{k_n}), onde $k_n = k(n)$, é uma *subsequencia* de (x_n), o que denotamos por $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$.

Exemplo 4.2. Seja $x_n = (-1)^n$, podemos considerar as subsequências $x_{2n} = 1$ e $x_{2n-1} = -1$.

Lema 4.1. Se $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente então, $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Consideremos $X = \{n \in \mathbb{N};\; k_n \geq n\}$. Como $k_1 \in \mathbb{N}$, então $k_1 \geq 1$. Logo, $1 \in X$. Suponhamos que $n \in X$. Assim, temos que $k_{n+1} > k_n \geq n$, ou seja, $k_{n+1} > n$. Logo, $k_{n+1} \geq n + 1$ e, consequentemente, $n + 1 \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$. ∎

Teorema 4.2. [Teorema 2 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] Seja (x_n) uma sequência que converge para a, então toda subsequência de (x_n) converge para a.

Demonstração. Seja $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Seja $n \geq n_0$. Como k é estritamente crescente, pelo Lema 4.1 e por (4.8), temos que

$$k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_{k_n} - a| < \varepsilon,$$

Assim, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. ∎

Teorema 4.3. [Teorema 3 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) convergente, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < 1, \tag{4.9}$$

daí, para $n \geq n_0$, por (4.9), temos

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Logo, para $n \geq n_0$ obtemos

$$|x_n| < 1 + |a|. \tag{4.10}$$

Tomemos $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |a|\} > 0$. Assim, por (4.10), tem-se $|x_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Observação 4.2.

1. Uma sequência que não é limitada, não pode ser convergente.

2. A recíproca do Teorema 4.3 não é verdade. De fato, considere $x_n = (-1)^n$. Claramente, $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, (x_n) é limitada. Suponhamos que (x_n) é convergente. Tomemos $x_{2n} = 1$ e $x_{2n-1} = -1$ então,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$$

o que contradiz o Teorema 4.2. Portanto, (x_n) é limitada e não é convergente.

Definição 4.5. Seja (x_n) uma sequência.

1. Dizemos que (x_n) é *monótona crescente* se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Dizemos que (x_n) é *monótona decrescente* se $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Dizemos que (x_n) é *monótona* se (x_n) é monótona crescente, ou monótona decrescente.

Observação 4.3.

1. Toda sequência monótona crescente é limitada inferiormente. De fato, seja (x_n) monótona crescente então,

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots.$$

Logo, $x_1 \leq x_n,$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitado inferiormente.

2. Seja (x_n) sequência monótona crescente e suponha que existe $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ subsequência limitada então, (x_n) é limitada. De fato, como (x_{k_n}) é limitada, existe $C > 0$ tal que
$$|x_{k_n}| \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$
Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 4.1 e por (4.11), tem-se que
$$x_n \leq x_{k_n} \leq |x_{k_n}| \leq C.$$
Portanto, $x_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, (x_n) é limitada.

3. Toda sequência monótona decrescente é limitado superiormente. De fato, seja (x_n) monótona decrescente então,
$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots .$$
Logo, $x_1 \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitado superiormente.

4. Seja (x_n) sequência monótona decrescente e suponha que existe $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ subsequência limitada então, (x_n) é limitada. De fato, como (x_{k_n}) é limitada existe $C > 0$ tal que
$$|x_{k_n}| \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$
Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 4.1 e por (4.12), tem-se que
$$x_n \geq x_{k_n} \geq -|x_{k_n}| \geq -C,$$
Portanto, $x_n \geq -C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, (x_n) é limitada.

Teorema 4.4. [Teorema 4 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) monótona crescente e limitada. Logo, existe $C > 0$ tal que $|x_n| \leq C,$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo axioma do supremo, existe $a = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Afirmação 4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que $a - \varepsilon < a$ Logo, $a - \varepsilon$ não é cota superior então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a, \tag{4.13}$$

e como (x_n) é monótona crescente, tem-se

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n. \tag{4.14}$$

De (4.13) e (4.14), obtemos

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon,$$

daí,

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon,$$

ou equivalentemente, $|x_n - a| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. ∎

Teorema 4.5. [Teorema de Bolzano-Weierstrass, Corolário do Teorema 4 em (LIMA, 2014)] Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Pelo Teorema 4.4, basta mostrar que a sequência limitada (x_n) admite uma subsequência monótona. Consideremos

$$X = \{n \in \mathbb{N};\; x_n \geq x_k, \text{ para todo } k > n\}.$$

Claramente, $X \subseteq \mathbb{N}$. Agora, temos dois casos:

Caso 1: X é finito. Seja $n_0 = \max X$ (Se $X = \emptyset$ considere $n_0 = 0$). Tomando $k_1 = n_0 + 1$, temos que $k_1 \notin X$. Logo, existe $k_2 > k_1$ tal que $x_{k_1} < x_{k_2}$. Como $k_2 > n_0$, então $k_2 \notin X$. Daí, existe $k_3 > k_2$ tal que $x_{k_2} < x_{k_3}$. Procedendo por indução, temos que

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \quad \text{e} \quad x_{k_1} < x_{k_2} < x_{k_3} < \cdots$$

então, $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ é monótona crescente.

Caso 2: X é infinito (numerável). Podemos considerar $X = \{k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots\}$. Como $k_1 \in X$ e $k_2 > k_1$, então $x_{k_1} \geq x_{k_2}$ Também, como $k_2 \in X$ e $k_3 > k_2$, então $x_{k_2} \geq x_{k_3}$. Procedendo por indução, obtemos que

$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq x_{k_3} \geq \cdots$$

então, $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ é monótona decrescente. ∎

Exemplo 4.3. Seja $x_n = \dfrac{1}{n}$. Como

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

temos que (x_n) é monótona decrescente. Além disso, é limitada. Pelo Teorema 4.4, (x_n) é convergente. Daí, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \inf\left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Exemplo 4.4. Consideremos $x_n = a^n$, com $0 < a < 1$. Assim,

$$0 < \cdots < a^{n+1} < a^n < \cdots < a^2 < a < 1.$$

Logo, (x_n) é limitada e monótona decrescente. Pelo Teorema 4.4, (x_n) é convergente.

Afirmação 4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que $\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$. Como $\dfrac{1}{a} > 1$, temos, pelo Exemplo 4.1, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{a^{n_0}} > \dfrac{1}{\varepsilon}$ Logo, $a^{n_0} < \varepsilon$. Daí,

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a^n \leq a^{n_0} < \varepsilon,$$

equivalentemente, $|a^n - 0| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$.

Teorema 4.6. [Teorema 7 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ e (y_n) é limitada. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Demonstração. Como (y_n) é limitada, existe $C > 0$ tal que

$$|y_n| \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16), temos

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq C|x_n| < \varepsilon.$$

Daí, $|x_n y_n| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. ■

Observação 4.4.

1. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ ou (y_n) não é limitada, então $(x_n y_n)$ pode ser divergente (por exemplo, $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$) ou pode convergir a qualquer número real c (por exemplo, $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = cn$).

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0.$

Teorema 4.7. [Teorema 8 do Capítulo 3 em (LIMA, 2014)] Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Então,

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.
3. Se $y_n \neq 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$ então, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Demonstração.

1. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que
$$n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.17}$$
e
$$n \geq n_2 \;\Rightarrow\; |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.18}$$
Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e, usando (4.17), (4.18) e o item 8 do Teorema 3.5, temos que
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. Observe que
$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$
Por outro lado, como (x_n) é convergente, pelo Teorema 4.3, temos que (x_n) é limitada. Também, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} (y_n - b) = 0$. Daí, pelo item 1 e o Teorema 4.6, obtemos
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n - ab) = \lim_{n\to\infty} [x_n(y_n - b)] + \lim_{n\to\infty} [(x_n - a)b] = 0.$$
Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

3. Observe que
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n}{y_n} - \frac{ay_n}{by_n} = \frac{1}{y_n}\left(x_n - \frac{a}{b}y_n\right). \tag{4.19}$$
Pelo item 1 e 2, temos que
$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{a}{b}y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}y_n\right) = a - \frac{a}{b}\cdot b = a - a = 0.$$
Vejamos agora que $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ é limitada. De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ e $b \neq 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$
Daí, pelo item 7 do Teorema 3.5, tem-se
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \Big||y_n| - |b|\Big| \leq |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$
Assim, obtemos
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; -\frac{|b|}{2} < |y_n| - |b| < \frac{|b|}{2},$$
consequentemente,
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{|b|}{2} < |y_n| < \frac{3|b|}{2}.$$
Logo,
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}. \tag{4.20}$$
Seja $C = \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \cdots, \frac{1}{|y_{n_0-1}|}, \frac{2}{|b|}\right\} > 0$, daí por (4.20), temos que
$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = \frac{1}{|y_n|} \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
Portanto, $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ é limitada. Pelo Teorema 4.6 e por (4.19), temos que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0,$$
onde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ■

4.2 Sequências de Cauchy

Definição 4.6. Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Teorema 4.8. [Teorema 12 do Capítulo 4 em (LIMA, 2009)] Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.21}$$

Assim, para $m, n \geq n_0$, por (4.21), temos que

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Lema 4.2. [Lema 1 do Capítulo 4 em (LIMA, 2009)] Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } m, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_m - x_n| < 1. \tag{4.22}$$

Em particular, para $n \geq n_0$, de (4.22), temos que

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|. \tag{4.23}$$

Seja $c = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\} > 0$ e, por (4.23), temos

$$|x_n| \leq c, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

O que, pela observação 4.1, mostra que (x_n) é limitada. ■

Lema 4.3. [Lema 2 do Capítulo 4 em (LIMA, 2009)] Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demonstração. Como (x_n) é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } m, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.24}$$

Por outro lado, por hipótese, existe $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ convergindo para a, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a$. Assim, por definição de limite, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.25}$$

Seja $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Agora, para $n \geq n_2$, de (4.24), (4.25) e o fato que $k_{n_2} \geq n_2$, temos que

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{k_{n_2}}| + |x_{k_{n_2}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que mostra que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. ■

Teorema 4.9. [Teorema 13 do Capítulo 4 em (LIMA, 2009)] Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) um sequência de Cauchy. Pelo Lema 4.2, (x_n) é limitada. Agora, pelo Teorema 4.5, (x_n) possui uma subsequência convergente. Assim, segue do Lema 4.3, que (x_n) converge. ■

Neste capítulo, foram apresentados resultados importantes como o Teorema 4.4 e o Teorema 4.5. Tais teoremas são demonstrados aceitando o axioma do supremo. Destaca-se que o Teorema 4.9, que afirma que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$, é consequência, também, do axioma do supremo. Portanto, cabe formular a seguinte questão: sem o axioma do supremo ainda é possível mostrar que toda sequência de Cauchy num corpo ordenado F é convergente em F? No próximo capítulo, veremos que existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$.

5 NOÇÕES DE CORTE, LACUNA, PONTO DE ACUMULAÇÃO, CONJUNTO FECHADO E COBERTURA

Neste capítulo, são introduzidos conceitos importantes que estão diretamente ligados às equivalências do axioma do supremo. Tais como, lacunas, ponto de acumulação e coberturas abertas. A principal referência deste capítulo é (COHEN; EHRLICH, 1963).

Definição 5.1. Seja F um corpo ordenado. Um par ordenado (X, Y) é chamado *corte* em F se X e Y são subconjuntos não vazios de F tais que

(i) $X \cap Y = \emptyset$,

(ii) $X \cup Y = F$,

(iii) se $x \in X$ e $y \in Y$ então, $x < y$.

Os conjuntos X e Y são chamados, respectivamente, de *classe inferior* e *classe superior* do corte.

Definição 5.2. Um corte é uma *lacuna* se sua classe inferior não tiver o elemento máximo, e sua classe superior não tiver o elemento mínimo em F.

Exemplo 5.1. Considere $X = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0$ ou $x^2 < 2\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0$ e $x^2 > 2\}$. Vejamos que (X, Y) é uma lacuna em $\mathbb{Q}$.

1. X e Y são subconjuntos não vazios, pois $1 \in X$ e $2 \in Y$.

2. Também, $X \cap Y = \emptyset$, desde que se $X \cap Y \neq \emptyset$ temos que existe $x \in X \cap Y$ logo $x \in X$ e $x \in Y$. Daí, como $x \in Y$ tem-se que $x > 0$ e $x^2 > 2$. Agora, desde que $x > 0$ e $x \in X$ tem-se que $x^2 < 2$. Assim, obtemos que $x^2 > 2$ e $x^2 < 2$ o que contradiz a Tricotomia.

3. Mostremos que $X \cup Y = \mathbb{Q}$. De fato, $X \cup Y \subseteq \mathbb{Q}$. Suponha que $X \cup Y \subset \mathbb{Q}$, isto é, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \notin X \cup Y$. Daí, $x \notin X$ e $x \notin Y$. Como $x \notin X$, temos que $x \geq 0$ e $x^2 \geq 2$. Também, como $x \notin Y$, tem-se que $x \leq 0$ ou $x^2 \leq 2$. Note que,

   - se $x \leq 0$, temos que $x = 0$. Logo, $0^2 \geq 2$ o que é uma contradição.
   - se $x^2 \leq 2$, temos que $x^2 = 2$ com $x \in \mathbb{Q}$, o que contradiz o Lema 3.2.

Em qualquer caso, obtemos uma contradição. Portanto, $X \cup Y = \mathbb{Q}$.

4. Se $x \in X$ e $y \in Y$ então, como $x \in X$, $x < 0$ ou $x^2 < 2$. Assim, temos

    - Se $x < 0$, como $y \in Y$, então $y > 0$. Logo, $x < y$.
    - Se $x \geq 0$, como $x \in X$, temos que $x^2 < 2$. E, como $y \in Y$, então $y^2 > 2$. Daí, $x^2 < y^2$, ou seja, $(x - y)(x + y) < 0$. Como $x + y > 0$, então $x - y < 0$. Desta forma, segue que $x < y$.

    Em qualquer caso, $x < y$.

5. Vamos mostrar que o corte (X, Y) é uma lacuna, isto é, X não possui elemento máximo e Y não possui elemento mínimo.

    - Suponha que X possua elemento máximo. Assim, existe $p \in X$ tal que $p = \max X$. Note que $p > 0$ (pois, se $p \leq 0$ então $p < 1$ com $1 \in X$ o que contradiz a maximalidade de p). Agora, procedendo como na Afirmação 3.2, definindo
    $$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} > 0,$$
    e, usando que $p^2 < 2$, temos que $p < q$ e
    $$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} < 0.$$
    Logo, $q^2 < 2$ com $q > 0$. Então, $q \in X$ o que contradiz a maximalidade de p.
    - Y não possui elemento mínimo: De fato, suponha que Y possua elemento mínimo. Assim, existe $p \in Y$ tal que $p = \min Y$. Como $p \in Y$, temos que $p > 0$. Agora, procedendo como na Afirmação 3.2, definindo
    $$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} > 0,$$
    e, usando que $p^2 > 2$, temos que $q < p$ e
    $$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} > 0.$$
    Logo, $q^2 > 2$ com $q > 0$. Então $q \in Y$ o que contradiz a minimalidade de p.

Teorema 5.1. [Teorema 3.18 em (COHEN; EHRLICH, 1963)] Se (X, Y) é uma lacuna em $\mathbb{Q}$ então, existem sequências (x_n) e (y_n) em $\mathbb{Q}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $y_n - x_n = \frac{1}{n}$ e

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n}, \ |y_m - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } m \geq n. \tag{5.1}$$

Demonstração. Como (X, Y) é um corte então, X e Y são não vazios. Segue que, existem $x \in X$ e $y \in Y$. Daí, pela Definição 5.1 parte (iii), $x < y$ em $\mathbb{Q}$. Assim, $y - x > 0$ em $\mathbb{Q}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\frac{1}{n(y-x)} > 0$ em $\mathbb{Q}$, como $\mathbb{Q}$ é um corpo Arquimediano, pela parte (3) do Teorema 3.8, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n(y-x)} > \frac{1}{k}$ em $\mathbb{Q}$. Daí, obtemos $\frac{k}{n} > y - x$ em $\mathbb{Q}$. Como $y \in Y$ e

$$x + \frac{k}{n} > y, \tag{5.2}$$

temos que $x + \frac{k}{n} \in Y$.

De fato, se $x + \frac{k}{n} \notin, Y$ pela Definição 5.1 parte (ii), $x + \frac{k}{n} \in X$ e, pela Definição 5.1 parte (iii), temos que $x + \frac{k}{n} < y$ o que contradiz (5.2). Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$M_n = \left\{ m \in \mathbb{N};\ x + \frac{m}{n} \in Y \right\}$$

é um subconjunto de $\mathbb{N}$ não vazio (pois $x + \frac{k}{n} \in Y$). Pelo Teorema 2.6, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n = \min M_n$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_n = x + \frac{m_n - 1}{n} \in X, \quad y_n = x + \frac{m_n}{n} \in Y \quad \text{e} \quad y_n - x_n = \frac{1}{n}.$$

Pela Definição 5.1, $x_n < y_m$ em $\mathbb{Q}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$x_n < y_m = x_m + \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad x_m < y_n = x_n + \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $m \geq n$, tem-se

$$|x_m - x_n| = \max\{x_m - x_n, x_n - x_m\} < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{n}$$

e

$$|y_m - y_n| = \max\{y_m - y_n, y_n - y_m\} < \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$$

em $\mathbb{Q}$. ■

Teorema 5.2. [Teorema 3.24 em (COHEN; EHRLICH, 1963)] Existem sequências de Cauchy que não convergem em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Seja (X, Y) a lacuna do Exemplo 5.1 e, seja $(x_n), (y_n)$ definidos como no Teorema 5.1 para a lacuna (X, Y). Como $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pela Definição 5.1 parte (iii), $x_n < y$ em $\mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in Y$. Logo,

$$y_n = x_n + \frac{1}{n} < y + 1 \text{ em } \mathbb{Q} \tag{5.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y \in Y$.

Afirmação 5.1. (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ em $\mathbb{Q}$ (pois, $\mathbb{Q}$ é Arquimediano) então, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Daí, para $m \geq n \geq n_0$, por (5.1), temos

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

Afirmação 5.2. (x_n) não converge em $\mathbb{Q}$.

Suponha que (x_n) seja convergente em $\mathbb{Q}$, isto é, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ em $\mathbb{Q}$. Pelo Teorema 4.7, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = z^2$. Observe que, como $x_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $x_n^2 < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (basta tomar $x > 0$ em $\mathbb{Q}$ no Teorema 5.2, por exemplo $x = 1$). Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, por (5.3), temos

$$0 < 2 - x_n^2 < y_n^2 - x_n^2 = (y_n + x_n)(y_n - x_n) < \frac{2y_n}{n} < \frac{2(y+1)}{n}. \tag{5.4}$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ em $\mathbb{Q}$, dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2(y+1)}, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{5.5}$$

Daí, por (5.4) e (5.5), para $n \geq n_0$ obtemos

$$|x^2 - 2| = 2 - x^2 < \frac{2(y+1)}{n}\varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 2$ em $\mathbb{Q}$. Daí, pelo Teorema 4.1, $z^2 = 2$ para $z \in \mathbb{Q}$. Mas, isto é impossível pelo Lema 3.2. ■

Definição 5.3. Seja F um corpo ordenado e seja $X \subseteq F$. Um elemento $p \in F$ é chamado *ponto de acumulação* de X se $X \cap \Big( ]a, b[- \{p\} \Big) \neq \emptyset$ para todo intervalo aberto $]a, b[$ contendo p.

Lema 5.1. Seja F um corpo ordenado. O elemento $p \in F$ é um ponto de acumulação de $X \subseteq F$ se, e só se, $X \cap]a, b[$ é um conjunto infinito para todos os intervalos abertos $]a, b[$ contendo p.

Demonstração. Seja p é um ponto de acumulação de X. Suponha por contradição que existe um intervalo aberto $]a, b[$ $(a < b)$ contendo p tal que $X \cap]a, b[$ é um conjunto finito. Assim podemos considerar que $X \cap \Big( ]a, b[- \{p\} \Big) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \min\{|x_1 - p|, |x_2 - p|, \cdots, |x_n - p|, p - a, b - p\}$. Como p é ponto de acumulação de X temos que

$$X \cap \Big( ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\} \Big) \neq \emptyset. \tag{5.6}$$

Note, também, que

$$X \cap \Big( ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\} \Big) \subset X \cap]a, b[= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \tag{5.7}$$

pois, se $x \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\}$ então

$$a = p + (a - p) < p - \varepsilon < x < p + \varepsilon < p + (b - p) = b.$$

Daí, $x \in X \cap]a, b[$. Mas, por (5.6) e (5.7), existe x_i para algum $i = 1, 2, \cdots, n$ tal que $x_i \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[- \{p\}$. Assim,

$$0 < |x_i - p| < \varepsilon < |x_i - p|$$

o que é um absurdo.

Reciprocamente, dado qualquer intervalo aberto $]a, b[$ contendo p, por hipótese, temos que $X \cap]a, b[$ é um conjunto infinito. Logo, $X \cap \Big( ]a, b[- \{p\} \Big) \neq \emptyset$ segue que p é um ponto de acumulação de X. ■

Exemplo 5.2. O subconjunto $X = \left\{ 1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}$ de $\mathbb{R}$ tem 1 como único ponto de acumulação. De fato, primeiro mostremos que 1 é um ponto de acumulação de X. Para isso, consideremos qualquer intervalo aberto $]a, b[$ contendo 1. Devemos mostrar que existe um elemento $X \cap \Big(]a, b[-\{1\}\Big)$. Como $1 - a > 0$ e $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < 1 - a$. Temos que $1 - \dfrac{1}{n} \in X$ e

$$a = 1 + (a - 1) < 1 - \frac{1}{n} < 1 < b \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \in]a, b[.$$

Portanto, $X \cap \Big(]a, b[-\{1\}\Big) \neq \emptyset$, o que significa que 1 é um ponto de acumulação de X. Agora vejamos que não existem outros pontos de acumulação em X além de 1. Suponha, por contradição, que exista um ponto $p \neq 1$ que seja um ponto de acumulação de X. Temos três situações:

- Se $p < 0$, como $p \in]2p, 0[$, temos que $X \cap \Big(]2p, 0[-\{p\}\Big) = \emptyset$ o que contradiz o fato de p ser ponto de acumulação.

- Se $0 \leq p < 1$, como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - p > \dfrac{1}{n_0}$. Logo, $1 - \dfrac{1}{n_0} > p$. Definindo $Z = \left\{n \in \mathbb{N}; 1 - \dfrac{1}{n} \geq p\right\}$, vemos que $Z \neq \emptyset$ (pois $n_0 \in Z$) e, pelo Teorema 2.6, existe $m = \min Z$. Assim temos,

  $$1 - \frac{1}{m-1} < p \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

  Se $p = 1 - \dfrac{1}{m}$, então $X \cap \left(\left]1 - \dfrac{1}{m-1}, 1 - \dfrac{1}{m+1}\right[- \{p\}\right) = \emptyset$, o que é absurdo desde que p é ponto de acumulação. Caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq m$ tal que

  $$1 - \frac{1}{m-1} < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m+1} \Rightarrow m - 1 < n < m + 1.$$

  Assim, $n = m$ o que contradiz $n \neq m$.

  Se $p < 1 - \dfrac{1}{m}$, então $X \cap \left(\left]1 - \dfrac{1}{m-1}, 1 - \dfrac{1}{m}\right[- \{p\}\right) = \emptyset$, o que é absurdo desde que p é ponto de acumulação. De fato, caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

  $$1 - \frac{1}{m-1} < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow m - 1 < n < m.$$

  o que contradiz o Teorema 2.5.

- Se $p > 1$ então, claramente, $X \cap \Big(]1, p^2[-\{p\}\Big) = \emptyset$ e isso contradiz que p é ponto de acumulação de X.

Portanto, concluímos que 1 é o único ponto de acumulação em X.

Observação 5.1. Um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto.

Exemplo 5.3. Para $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, o conjunto $X = \{na;\ n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto infinito que não tem pontos de acumulação.

De fato, suponha que existe $p \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de X. Pelo Lema 5.1, temos que

$$X \cap \left]p - \frac{|a|}{2}, p + \frac{|a|}{2}\right[\text{ é um conjunto infinito.}$$

Logo, existem $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ tais que

$$na, ma \in X \cap \left]p - \frac{|a|}{2}, p + \frac{|a|}{2}\right[.$$

Daí, temos que

$$|m - n||a| = |ma - na| \leq |ma - p| + |na - p| < \frac{|a|}{2} + \frac{|a|}{2} = |a|,$$

o que implica que $0 < |m - n| < 1$ e sendo $m, n \in \mathbb{N}$, temos um absurdo.

Definição 5.4. Um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é *fechado* se todo ponto de acumulação de X pertencer a X.

Exemplo 5.4. O subconjunto $X = \left\{x;\ x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\mathbb{R}$ é fechado. De fato, primeiro vejamos que 0 é ponto de acumulação de X. Seja $]a, b[$ qualquer intervalo aberto contendo 0. Como $b > 0$ e $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < b$. Logo, $X \cap \Big(]a, b[- \{0\}\Big) \neq \emptyset$. Assim, 0 é ponto de acumulação de X.

Agora vejamos que não existem outros pontos de acumulação em X além de 0. Suponha, por contradição, que exista um ponto $p \neq 0$ que seja um ponto de acumulação de X. Assim, temos as seguintes situações:

- Se $p < 0$, como $p \in]2p, 0[$, temos que $X \cap \Big(]2p, 0[- \{p\}\Big) = \emptyset$, o que contradiz o fato de p ser ponto de acumulação.

- Se $0 < p \leq \dfrac{1}{2}$, como $\mathbb{R}$ é Arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p > \dfrac{1}{n_0}$. Definindo $Z = \left\{n \in \mathbb{N};\ p > \dfrac{1}{n}\right\}$, vemos que $Z \neq \emptyset$ (pois $n_0 \in Z$), e, pelo Teorema 2.6, existe $m = \min Z$. Assim, temos
$$\frac{1}{m} < p \leq \frac{1}{m - 1}.$$

Se $p = \dfrac{1}{m-1}$, então $X \cap \left(\left] \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m-2} \right[- \{p\} \right) = \emptyset$, o que é absurdo desde que p é ponto de acumulação. Caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n \neq m-1$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m-2} \Rightarrow m-2 < n < m.$$

Assim, $n = m-1$ o que contradiz $n \neq m-1$.

Se $p < \dfrac{1}{m-1}$ então, $X \cap \left(\left] \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m-1} \right[- \{p\} \right) = \emptyset$ o que é absurdo desde que p é ponto de acumulação. Caso contrário, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m-1} \Rightarrow m-1 < n < m.$$

o que contradiz o Teorema 2.5.

- Se $\dfrac{1}{2} < p < 1$ então, claramente, $X \cap \Big( ]p^2, 1[- \{p\} \Big) = \emptyset$ mas, isso contradiz que p é ponto de acumulação de X.

- Se $p = 1$ então, claramente, $X \cap \left(\left] \dfrac{1}{2}, 2 \right[- \{p\} \right) = \emptyset$ o que contradiz que p é ponto de acumulação de X.

- Se $p > 1$ então, claramente, $X \cap \Big( ]1, p^2[- \{p\} \Big) = \emptyset$ mas, isso contradiz que p é ponto de acumulação de X.

Portanto, concluímos que 0 é o único ponto de acumulação de X e, como $0 \in X$, temos que X é um conjunto fechado.

Definição 5.5. Uma *cobertura* de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é uma família $\mathcal{C} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (onde Λ é um conjunto de índices) de subconjuntos A_λ de $\mathbb{R}$, tais que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Isto é, para todo $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$. Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tais que ainda se tem $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$.

Exemplo 5.5. Se para $a \in \mathbb{R}$, $X_a = \{a\}$ então, $\{X_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ é uma cobertura de $\mathbb{R}$. De fato, basta ver que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \{a\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} X_a.$$

Exemplo 5.6. Se $X = [0, 1[\subseteq \mathbb{R}$ e

$$Y = \left\{ \left] x-1, \frac{x+1}{2} \right[\right\}_{x \in X},$$

então, Y é uma cobertura de X. De fato, dado $x \in [0,1[$, então, $x < 1$.

Logo,

$$x - 1 < 0 \leq x < \frac{x+1}{2}.$$

Assim, temos que $x \in \left]x-1, \frac{x+1}{2}\right[$ Daí,

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \left]x-1, \frac{x+1}{2}\right[.$$

Em resumo, temos visto os conceitos de corte e lacuna, apresentamos o Exemplo 5.1, que mostra que existem lacunas em $\mathbb{Q}$. Veremos no próximo capítulo que isso não acontece no corpo dos números reais supondo que seja válido o axioma do supremo. Também, vimos, no Teorema 5.2, que existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$. Além disso, veremos no próximo capítulo, que isso não acontece no corpos dos números reais satisfazendo o axioma do supremo.

Há outro resultado importante que será utilizado no teorema principal, o Lema 5.1, na verdade o Exemplo 5.3, no qual se mostra a existência de um subconjunto infinito dos números reais que não tem pontos de acumulação. A prova do Lema 5.1 geralmente é demonstrada utilizando a propriedade Arquimediana, nós apresentamos uma prova sem utilizar esse fato.

6 EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DO SUPREMO

Até o momento foi possível observar que supondo a existência do corpo ordenado dos números reais satisfazendo o axioma do supremo, são demonstrados importantes resultados como que $\mathbb{R}$ é Arquimediano, toda sequência limitada de números reais admite uma subsequência convergente em $\mathbb{R}$, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ possui a propriedade dos intervalos encaixantes e $\mathbb{R}$ é não enumerável. A seguir, veremos que algumas destas implicações, sob certas condições, podem ser recíprocas.

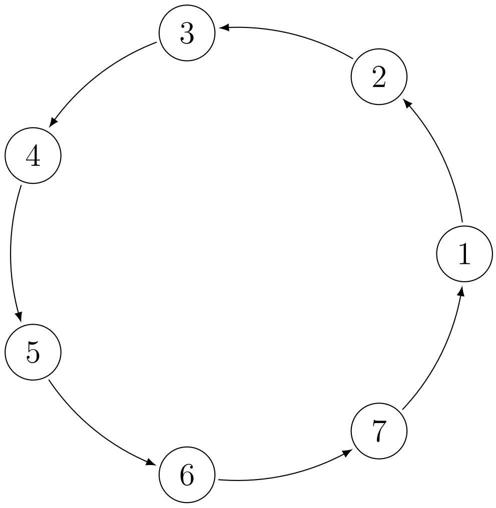
Listaremos agora seis afirmações referentes ao corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ que provaremos ser equivalentes ao Axioma do supremo, no sentido de que, para o corpo ordenado $\mathbb{R}$, todas as afirmações são verdadeiras se alguma delas for verdadeira.

A demonstração que apresentaremos a seguir, pode ser encontrada no Teorema 5.1 de (COHEN; EHRLICH, 1963). Cabe ressaltar que a prova desse teorema é feita sobre qualquer corpo ordenado. Nós adaptamos esta demonstração a nosso contexto e explicamos em detalhes cada passagem que são apresentadas em cada implicação.

Teorema 6.1. No corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, as seguintes sentenças são equivalentes:

1. $\mathbb{R}$ é Arquimediano e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$.
2. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente tem um menor limite superior em $\mathbb{R}$ (axioma do supremo).
3. Não há lacunas em $\mathbb{R}$.
4. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado inferiormente tem um maior limite inferior em $\mathbb{R}$ (axioma do ínfimo).
5. Se X é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$ e, T uma cobertura de X formada por intervalos abertos, então, T tem um subcobertura finita S de X.
6. Todo subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$.
7. $\mathbb{R}$ é Arquimediano e, se para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n é um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$ e $J_{n+1} \subseteq J_n$, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$.

Provaremos a equivalência estabelecendo o seguinte ciclo de implicações:



Demonstração do Teorema 6.1.

(1) $\Rightarrow$ (2): Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Assim, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$x < b, \text{ para todo } x \in X. \tag{6.1}$$

Como $X \neq \emptyset$, existe $\overline{x} \in X$ e, por (6.1), temos que $\overline{x} < b$. Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos que $\dfrac{1}{n(b-\overline{x})} > 0$. Agora, desde que $\mathbb{R}$ é Arquimediano, obtemos que existe $\overline{p}_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\overline{p}_n} < \frac{1}{n(b-\overline{x})},$$

ou equivalentemente,

$$b < \overline{x} + \frac{\overline{p}_n}{n}. \tag{6.2}$$

Assim, por (6.2), $\overline{x} + \dfrac{\overline{p}_n}{n}$ é cota superior de X. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$B_n = \{p \in \mathbb{N};\ \overline{x} + \frac{p}{n} \text{ é uma cota superior de } X\}$$

é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ (pois $\bar{p}_n \in B_n$) e, pelo Principio da boa ordenação (Teorema 2.6), existe $p_n = \min B_n$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$y_n = \overline{x} + \frac{p_n}{n} \text{ é cota superior de } X \tag{6.3}$$

e

$$x_n = y_n - \frac{1}{n} = \overline{x} + \frac{p_n - 1}{n} \leq x \text{ para algum } x \in X. \tag{6.4}$$

Daí, por (6.4), temos que

$$x_m < y_n, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_m - x_n < y_n - \left(y_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

$$x_n - x_m < y_m - \left(y_m - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}.$$

Portanto, para $m, n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$|x_m - x_n| = \max\{x_m - x_n, x_n - x_m\} \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}. \tag{6.5}$$

Agora, como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (devido a que $\mathbb{R}$ é Arquimediano), tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{6.6}$$

Agora, para $m, n \geq n_0$, de (6.5) e (6.6) temos:

- se $m \geq n \geq n_0$ então,
$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$
- se $n > m \geq n_0$ então,
$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Em qualquer caso, obtemos

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ para todo } m, n \geq n_0$$

o que, por definição, nos diz que (x_n) é uma sequência de Cauchy e, por hipótese, (x_n) é convergente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Afirmação 6.1. a é uma cota superior de X.

De fato, caso contrário, existe $x \in X$ tal que $a < x$. Agora, como $\frac{x-a}{2} > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|x_n - a| < \frac{x-a}{2}, \text{ para todo } n \geq n_1, \tag{6.7}$$

e

$$\frac{1}{n} < \frac{x-a}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2. \tag{6.8}$$

Logo, para $n_3 = n_1 + n_2$, em (6.7) e (6.8), obtemos

$$x_{n_3} - a \leq |x_{n_3} - a| < \frac{x-a}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n_3} < \frac{x-a}{2}. \tag{6.9}$$

Então, por (6.4) e (6.9), temos

$$y_{n_3} = x_{n_3} + \frac{1}{n_3} < \left(a + \frac{x-a}{2}\right) + \frac{x-a}{2} = x.$$

O que contradiz (6.3), desde que $x \in X$.

Afirmação 6.2. a é a menor das cotas superiores.

De fato, caso contrário, existe c uma cota superior de X tal que $c < a$. Agora, como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $a - c > 0$, existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - x_{n_4} \leq |x_{n_4} - a| < a - c.$$

Daí, temos que $c < x_{n_4}$ e, por (6.4), $c < x_{n_4} \leq x$ para algum $x \in X$. Isso contradiz o fato de c ser uma cota superior de X. Portanto, da Afirmação 6.1 e Afirmação 6.2, temos que $a = \sup X$.

(2) ⇒ (3): Suponha que (X, Y) seja um corte em $\mathbb{R}$. Então, X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e todo elemento do conjunto não vazio Y é uma cota superior para X (Definição 5.1). Pela hipótese, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \sup X$.

Afirmação 6.3. $a = \max X$ ou $a = \min Y$.

De fato, como (X, Y) é um corte em $\mathbb{R}$, $a \in X$ ou $a \in Y$.

- Se $a \in X$ então, $\sup X = a = \max X$.
- Se $a \in Y$ então, já que cada elemento de Y é uma cota superior para X, $\sup X = a = \min Y$.

Portanto, pela Afirmação 6.3, não há lacunas em $\mathbb{R}$.

(3) ⇒ (4): Seja B um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado inferiormente. Definimos $X = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b, \text{ para todo } b \in B\}$ e $Y = \mathbb{R} - X$.

Afirmação 6.4. (X, Y) é um corte em $\mathbb{R}$.

De fato, verifiquemos cada item da Definição 5.1:

- Como B é limitado inferiormente, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $p \in X$. Portanto, $X \neq \emptyset$.

- Como B é não vazio, existe $b_0 \in B$. Logo, $b_0 + 1 \in Y$. Daí, temos $Y \neq \emptyset$.

- Por definição de X e Y, claramente, temos $X \cup Y = \mathbb{R}$ e $X \cap Y = \emptyset$.

- Se $x \in X$ e $y \in Y$ então, $x < y$. Caso contrário, $y \leq x \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $y \in X$ o que contradiz que $X \cap Y = \emptyset$.

Agora temos duas possibilidades:

- Se $b_0 \in X$ para algum $b_0 \in B$ então, $b_0 = \max X = \inf B$. De fato, se $x \in X$ então, $x \leq b$ para todo $b \in B$. Em particular, $x \leq b_0$. Logo, $b_0 = \max X$.

- Se $b \in Y$ para todo $b \in B$ então, existe $\inf B$. De fato, suponha que existe $y_0 = \min Y$. Logo, $y_0 \notin X$ (pois $y_0 \in Y$). Daí, existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 < y_0$. Mas, como $b_0 \notin Y$ (pois $b_0 \in B$), isso contradiz a minimalidade de y_0. Portanto, não existe $\min Y$. Agora, como por hipótese, o corte (X, Y) não é uma lacuna, pela Definição 5.2, existe $x_0 = \max X$. Claramente, x_0 é cota inferior de B. Agora, se x_1 é outra cota inferior de B, temos que $x_1 \leq b$ para todo $b \in B$. Logo, $x_1 \in X$ e, como $x_0 = \max X$, temos que $x_1 \leq x_0$ o que mostra que existe $x_0 = \inf B$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Seja X um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e seja $T = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de intervalos abertos que cobre X. Desde que X é limitado, existem $u, v \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [u, v]$. Por outro lado, para todo $y \in [u, v] - X$, desde que X é fechado y não é ponto de acumulação de X. Daí, existe J_y intervalo aberto contendo y tal que $X \cap J_y = \emptyset$. Assim, temos que

$$[u, v] = X \cup ([u, v] - X) \subseteq \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right) \cup \left(\bigcup_{y \in [u,v]-X} J_y \right).$$

Seja agora

$$L = \{x \in [u, v];\ [x, v] \text{ é coberto por um subconjunto finito de } M\},$$

onde $M = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{J_y\}_{y \in [u,v]-X}$.

Afirmação 6.5. $L \neq \emptyset$ e limitado inferiormente.

De fato, desde que $[v, v]$ é coberto por algum intervalo I_λ se $v \in X$, ou por J_v se $v \notin X$, segue que $v \in L$. Portanto, $L \neq \emptyset$. Também, desde que $u \leq x$, para todo $x \in L$ temos que L é limitado inferiormente.

Agora, pela Afirmação 6.5 e pela hipótese, temos que existe $x_0 = \inf(L)$.

Afirmação 6.6. $x_0 \in L$.

De fato, como $x_0 \in [u, v]$, existe um intervalo aberto T_0 em M tal que $x_0 \in T_0$. Seja $T_0 =]a, b[$ então, $a < x_0 < b$. Agora, como $x_0 = \inf L$, temos que existe $z_0 \in L$ tal que $x_0 < z_0 < b$. Desde que $z_0 \in L$, existe um conjunto finito $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ que cobrem $[z_0, v]$. Daí o conjunto finito

$$\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$$

cobre $[x_0, v]$.

Afirmação 6.7. $x_0 = u$.

De fato, se $x_0 \neq u$ então, $u < x_0$. Pela Afirmação 6.6, temos que $a < x_0$ então, $\max\{u, a\} < x_0$. Agora, tomando $z_1 = \dfrac{\max\{u, a\} + x_0}{2}$, temos que

$$u, a \leq \max\{u, a\} < z_1 < x_0 < b \leq v.$$

Daí, $z_1 \in [u, v]$ e $[z_1, v]$ é coberto por $\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\}$. Portanto, $z_i \in L$ e $z_1 < x_0$ o que contradiz que $x_0 = \inf L$.

Finalmente, pela Afirmação 6.7 e Afirmação 6.6, $[u, v]$, e portanto o subconjunto X de $[u, v]$, é coberto por $\{T_0, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$. Aqui, como $T_0 \in M$, temos duas possibilidades:

- Se $T_0 = I_{\lambda_0}$ então, X é coberto por $\{I_{\lambda_0}, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ e, desde que os intervalos J_y não contem pontos de X, temos que X é coberto por $\{I_{\lambda_0}, I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}\}$.

- Se $T_0 = J_{y_0}$ então, X é coberto por $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}, J_{y_0}, J_{y_1}, \ldots, J_{y_m}\} \subseteq M$ e, desde que os intervalos J_y não contém pontos de X, temos que X é coberto por $\{I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}\}$.

Em qualquer caso, X é coberto por um conjunto finito de T.

(5) $\Rightarrow$ (6) : Seja X um subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}$ e suponha que X não tenha pontos de acumulação. Então X é fechado. Note que, dado $x \in X$, como x não é um ponto de acumulação de X, existe um intervalo aberto J_x tal que $X \cap J_x = \{x\}$. Logo, o conjunto $T = \{J_x\}_{x \in X}$ cobre X. Como X é fechado e limitado, por hipótese, existe um subconjunto finito $\{J_{x_1}, \ldots, J_{x_n}\}$ de T que cobre X, isto é, $X \subseteq J_{x_1} \cup J_{x_2} \cup \ldots \cup J_{x_n}$. Daí, para todo $x \in X$, existe algum $1 \leq k \leq n$ tal que $x \in J_{x_k}$. Assim, $x \in X \cap J_{x_k} = \{x_k\}$ e, portanto, $x = x_k$. Mas, então, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que é um conjunto finito, contradizendo a hipótese.

(6) $\Rightarrow$ (7): Suponhamos que $\mathbb{R}$ não é Arquimediano. Logo, existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$ tal que $a \leq na < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o conjunto $X = \{na;\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado e infinito, e não tem ponto de acumulação (pelo Exemplo 5.3), contrariando a hipótese. Assim, $\mathbb{R}$ é Arquimediano. Suponha que $J_n = [a_n, b_n]$ e $J_{n+1} \subseteq J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ para cada n. Seja $X = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Desde que $a_1 \leq a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, X é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $a_m = a_{n_0}$ para todo $m \geq n_0$ então, $a_n \leq a_{n_0} \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, $a_{n_0} \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > a_n$. Desta forma, o conjunto X não tem maior elemento e é, portanto, um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$. Pela hipótese, o conjunto infinito limitado X tem um ponto de acumulação $x \in \mathbb{R}$. Se $a_{n_0} > x$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então, $a_m \geq a_{n_0} > x$ para todo $m \geq n_0$. Assim, se $0 < \varepsilon < a_{n_0} - x$, o intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém apenas um número finito de pontos de X, contrariando o Lema 5.1. Portanto, $a_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b_{n_0} < x$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então, $a_m \leq b_{n_0} < x$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, se $0 < \varepsilon < x - b_{n_0}$, o intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ não contém pontos de X, contrariando o Lema 5.1. Portanto, $x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, então, $a_n \leq x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente, $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

(7) $\Rightarrow$ (1): Por hipótese já temos que $\mathbb{R}$ é Arquimediano.

Suponha que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Por definição, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{k}, \text{ se } m, n \geq n_k. \tag{6.10}$$

Logo, por (6.10), temos

$$x_{n_k} - \frac{1}{k} < x_n < x_{n_k} + \frac{1}{k}, \text{ se } n \geq n_k. \tag{6.11}$$

Agora, para $m \in \mathbb{N}$, note que existem

$$p_m = \max\{n_k;\ k \leq m\} \in \mathbb{N}, \tag{6.12}$$

$$a_m = \max\left\{x_{n_k} - \frac{1}{k};\ k \leq m\right\} \in \mathbb{R}, \tag{6.13}$$

$$b_m = \min\left\{x_{n_k} + \frac{1}{k};\ k \leq m\right\} \in \mathbb{R}. \tag{6.14}$$

Então, por (6.12), (6.13) e (6.14), temos que

$$a_m \leq a_{m+1} < x_n < b_{m+1} \leq b_m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ e } \text{ para todo } n \geq p_{m+1}. \tag{6.15}$$

Seja agora $J_m = [a_m, b_m]$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, por (6.15), $J_{m+1} \subseteq J_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Daí, por hipótese, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_m. \tag{6.16}$$

Vejamos a seguir que (x_n) é convergente.

Afirmação 6.8. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

De fato, por (6.13), (6.14) e (6.16),

$$x_{n_m} - \frac{1}{m} \leq a_m \leq a \leq b_m \leq x_{n_m} + \frac{1}{m}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{6.17}$$

Por (6.11),

$$x_{n_m} - \frac{1}{m} < x_n < x_{n_m} + \frac{1}{m}, \text{ para todo } n \geq n_m. \tag{6.18}$$

Daí, por (6.17) e (6.18), temos

$$|x_n - a| = \max\{x_n - a, a - x_n\} \leq \frac{2}{m}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ e para todo } n \geq n_m. \tag{6.19}$$

Dado $\epsilon > 0$ e pelo fato de $\mathbb{R}$ ser Arquimediano, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_0 \varepsilon > 2. \tag{6.20}$$

Portanto, por (6.19) e (6.20), tem-se

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_{m_0}.$$

O que mostra a Afirmação 6.8. ■

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho examinou a propriedade do menor limite superior do conjunto dos números reais, assumindo a existência desse conjunto como um corpo ordenado, a fim de identificar e apresentar algumas das equivalências dessa propriedade que, frequentemente, são assumidas como básicas no estudo do cálculo. Cabe destacar que, é possível construir o conjunto dos números reais gozando dessa propriedade do menor limite superior, através dos chamados cortes de Dedekind (MOREIRA; CABRAL, 2021) e, também, pode ser construído por classes de equivalências de sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ (COHEN; EHRLICH, 1963) onde se verifica que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$. Mas, esse não foi nosso objetivo.

Para uma compreensão satisfatória do axioma do supremo, fez-se necessário estudar a construção dos números naturais, definir conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis, revisar o estudo do sistema de números reais verificando que esse conjunto é um corpo ordenado completo, definir limites de uma sequência e sequências de Cauchy, além de, fundamentar ideias de corte, lacunas, ponto de acumulação, conjunto fechado e cobertura.

Essa, minuciosa, análise nos permitiu concluir que o axioma do supremo é equivalente às seguintes afirmações: $\mathbb{R}$ é arquimediano (o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$) e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$; não existe uma partição de $\mathbb{R}$ em dois subconjuntos A e B disjuntos e não vazios tal que todos os elementos de A sejam menores que todos os elementos de B e, que A tem o elemento máximo em $\mathbb{R}$ ou B tem o elemento mínimo em $\mathbb{R}$ (não há lacunas em $\mathbb{R}$); todo subconjunto não vazio limitado inferiormente dos números reais possui um maior limite inferior (axioma do ínfimo); todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}$ que é coberto por uma família de intervalos abertos admite uma subcobertura finita; todo subconjunto infinito e ilimitado de $\mathbb{R}$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ é arquimediano e toda sequência decrescente de intervalos fechados e limitados em $\mathbb{R}$ tem, pelo menos, um ponto em comum (propriedade dos intervalos encaixantes).

Além disso, o estudo nos permitiu averiguar a distinção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ no Exemplo (3.12), onde nos mostra que, mesmo $\mathbb{Q}$ sendo Arquimediano, não existe supremo nesse conjunto. Outra contribuição importante, é verificada no Teorema (5.2), onde é demonstrado que sendo (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$, (x_n) pode não convergir em $\mathbb{Q}$. Ou seja, existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem em $\mathbb{Q}$.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. ***The Elements of Real Analysis.*** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1976.

BLOCH, E. D. ***The Real Numbers and Real Analysis***. New York: Springer-Verlag, 2011.

COHEN, L. W.; EHRLICH, G. ***The Structure of the Real Number System***. 1. ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1963.

FIGUEIREDO, D. G. d. ***Análise I.*** 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

HALMOS, P. R. ***Naive set theory***. New York: Springer-Verlag, 1974.

LIMA, E. L. ***Curso de Análise***. 12. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2009.

LIMA, E. L. ***Análise Real***. 12. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2014.

MARTINEZ, F. E. B. et al. ***Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro***. 3. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2013.

MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. A. P. ***Curso de Análise Real***. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Instituto de Matemática, 2021.

RUDIN, W. ***Principles of Mathematical Analysis.*** 3. ed. New York: McGraw-hill, 1976.

STOLL, M. ***Introduction to Real Analysis.*** 3. ed. New York: CRC Press, 2021.