

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Dinamica della sincronizzazione nel modello di Kuramoto

Relatore

Prof. Antonio Ponso

Laureando

Antonio Santo

Anno Accademico 2017/2018



Alla mia famiglia

Indice

1	Introduzione	5
2	Il modello	7
2.1	Le equazioni del moto	7
2.2	L'analisi di Kuramoto	8
3	I test sul modello	11
3.1	Il metodo di Eulero	11
3.2	Simulazioni numeriche	12
3.3	Ipotesi sulla dinamica	13
A	Drift	19
B	Il codice FORTRAN	21
	Riferimenti bibliografici	25

1 Introduzione

Quando si parla di *sincronizzazione spontanea* in campo scientifico di solito ci si riferisce al risultato di un'interazione fra diversi sistemi periodici, la quale produce un'evoluzione temporale all'unisono di tutti, o quasi tutti, gli enti coinvolti e tale da perdurare nel tempo. Fenomeni di questo tipo sono riscontrabili ovunque in natura e in campi disparati. Si pensi alle lucciole della Malesia, che radunatesi di notte iniziano a pulsare e poco a poco si sintonizzano a un ritmo comune, o ancora al canto delle cicale durante le giornate estive. Anche noi esseri umani siamo influenzati da tali processi, ne sono esempi il sincronizzarsi di gruppi di neuroni, come succede negli attacchi epilettici, le cellule pacemaker del cuore, la presenza delle onde cerebrali di tipo alfa oppure l'instaurarsi del ritmo circadiano. Naturalmente il mondo fisico non è da meno, citiamo gli esempi più usati in questo campo di studi: i pendoli di Huygens, le giunzioni Josephson, i laser, le sincronizzazioni di tipo gravitazionale che tengono al sicuro il nostro pianeta da grossi corpi celesti.

Nonostante questo elenco di processi metta assieme fenomeni all'apparenza scorrelati, in realtà sono tutti sistemi schematizzabili come un grosso numero di oscillatori accoppiati. L'ubiquità di tali modalità di dinamica, al di là delle caratteristiche particolari, fa sorgere la necessità di un modello generale che possa darne una valida descrizione e consenta di fare previsioni. Anche se l'argomento era già noto nel XVII secolo, soltanto a partire dalla metà del '900 si è iniziato uno studio sistematico su di esso.

Il primo a tentare un approccio matematico al fenomeno della sincronizzazione, purtroppo senza successo, fu Norbert Wiener durante il suo studio delle onde alfa del cervello, con un modello basato su integrali di Fourier [1]. Vi furono poi altre schematizzazioni di casi particolari, come nel caso di Peskin per le cellule pacemaker. Ma dal punto di vista generale il più proficuo fu Winfree, che formulò il problema in termini di una popolazione di N oscillatori di tipo ciclo-limite che interagiscono fra loro. In particolare si focalizzò sul caso di oscillatori quasi identici e accoppiamento debole, in questo modo è possibile una semplificazione distinguendo due diverse scale temporali: una veloce in cui gli oscillatori si rilassano al proprio moto periodico attrattivo, come è tipico dei cicli limite, e una lenta in cui si manifestano gli effetti dell'interazione e della differenza fra le varie frequenze naturali. Da tutto ciò discende che si può descrivere ogni membro della popolazione attraverso la sua fase.

Winfree semplificò ulteriormente, schematizzando il processo come

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left(\sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i) \quad i=1, \dots, N \quad (1.1)$$

dove ω_i è la frequenza naturale dell'oscillatore i -esimo. In questo modo ogni oscillatore influenza tutti gli altri attraverso una $X(\theta_j)$, detta appunto *funzione di influenza*, che dipende dalla sua fase relativa, mentre la risposta di ognuno viene modulata da una funzione, detta *sensibilità*, che anche qui è uguale per tutti e dipende dalla fase. In pratica il singolo oscillatore è accoppiato al ritmo generato dall'intera popolazione, o se si preferisce vi è un'interazione di tipo campo medio. Infatti questo tipo di dinamica rispecchia bene ciò che avviene in natura, ad esempio nel caso delle lucciole sopracitato si è osservato come non vi sia nel gruppo un "direttore d'orchestra" ma piuttosto un continuo influenzarsi a vicenda [2]. Chiaramente la realtà è un po' più complicata, rifacendoci sempre all'esempio delle lucciole, esse subiranno una minore influenza dalle compagne che si trovano oltre una certa distanza mentre saranno più ricettive nei confronti di quelle nelle loro vicinanze. Come si può intuire la scelta ricadde su questo tipo di topologia per motivi di semplicità. Dunque abbiamo che ogni membro della popolazione dà e riceve, per così dire, delle istruzioni: se la funzione di influenza è positiva dirà agli altri di aumentare la propria frequenza, altrimenti intimerà i compagni a rallentare o eventualmente non fare niente. Allo stesso modo a seconda del valore della $Z(\theta_i)$ farà quello o

il contrario di ciò che gli viene chiesto, oppure ignorerà gli stimoli che riceve.

Infine Winfree capì che se le frequenze seguono una distribuzione con dispersione abbastanza piccola è possibile avere una sorta di “transizione di fase” del sistema: se l'accoppiamento è troppo debole ogni oscillatore ruota con la propria frequenza naturale, ma superato un certo valore critico compaiono improvvisamente angoli in sincronia.

2 Il modello

2.1 Le equazioni del moto

Kuramoto, partendo dal lavoro di Winfree, cercò una riformulazione che permettesse di porre il modello su basi più rigorose, usando metodi perturbativi mostrò che la dinamica a lungo termine di una popolazione di cicli limite debolmente accoppiati è data in generale da

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad i=1, \dots, N \quad (2.1)$$

sostituendo dunque sensibilità e influenza con una funzione di interazione dipendente dalle differenze di fase. Anche lui scelse come topologia con cui connettere gli oscillatori quella del campo medio, ma si concentrò sul caso più semplice, che è proprio quello a cui ci si riferisce come *Modello di Kuramoto*:

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

Per cui le (2.1) diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad i=1, \dots, N \quad (2.2)$$

Dove il parametro $K \geq 0$ rappresenta l'intensità dell'interazione e il fattore $1/N$ assicura che il modello si comporti bene per $N \rightarrow \infty$. In particolare Kuramoto assunse che le ω_i siano distribuite secondo una densità di probabilità $g(\omega)$ unimodale e simmetrica rispetto alla sua frequenza media Ω , dove per unimodale si intende che in $[0, \infty)$ la funzione è decrescente.

Grazie alla simmetria sotto rotazioni del sistema è inoltre possibile passare nel sistema corotante attraverso il cambio $\theta_i \rightarrow \theta_i + \Omega t$, lasciando le (2.2) invariate e ottenendo il vantaggio di lavorare con una distribuzione delle frequenze a media nulla.

A questo punto Kuramoto definisce una quantità macroscopica che possa quantificare il ritmo collettivo della popolazione, cioè il *parametro d'ordine*:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (2.3)$$

Infatti egli visualizzò la dinamica immaginandosi le fasi come punti che scorrono lungo il cerchio unitario nel piano complesso (Figura 1).

In questo modo $r(t)$ dà una misura della *coerenza delle fasi*, mentre $\psi(t)$ rappresenta una fase media. Se tutti gli oscillatori si muovono in un unico blocco avremo $r \approx 1$, al contrario se la popolazione è spalmata lungo tutta la circonferenza non verrà prodotto nessun ritmo collettivo e si avrà $r \approx 0$.

Kuramoto inoltre notò di poter riscrivere le equazioni della dinamica moltiplicando ambo i lati dell'espressione del parametro d'ordine per $e^{-i\theta_i}$ e prendendone la parte immaginaria, ottenendo:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

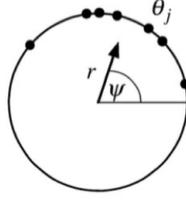


Figura 1: Interpretazione geometrica del parametro d'ordine. Immagine presa da [1].

A questo punto le (2.2) diventano:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i) \quad (2.4)$$

In tale forma risulta immediata la natura di campo medio del problema, ma non solo, anche il meccanismo sottostante alla sincronizzazione spontanea diventa più chiaro. Interagendo, la singola fase θ_i tende ad assumere un valore prossimo a ψ , nel frattempo aumentando la coerenza aumenta anche l'intensità dell'interazione, proporzionale a r . Si instaura così un loop: appena la coerenza della popolazione cresce, anche Kr cresce e di conseguenza l'efficacia dell'accoppiamento, aumentando la possibilità che altri oscillatori si sincronizzino. Il processo continua se il gruppo dei sincronizzati cresce, altrimenti $r(t)$ si stabilizza ad un certo $r_\infty < 1$, il quale, da simulazioni numeriche, sembra dipendere solo da K .

2.2 L'analisi di Kuramoto

Senza l'ausilio di alcuna simulazione, Kuramoto riuscì a intuire quale sarebbe stato il comportamento a lungo termine del modello per $N \rightarrow \infty$. Prese in considerazione le soluzioni in cui il loop tra coerenza e interazione si è saturato, in questo caso $r(t)$ è costante mentre $\psi(t)$ ruota con frequenza Ω . Per semplicità è possibile, passando nel sistema di riferimento corotante, sceglierne l'origine in modo da avere $\psi = 0$.

Si ha allora:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i) \quad i=1, \dots, N \quad (2.5)$$

Dove r diventa ora un parametro ed è quindi possibile considerare gli oscillatori come indipendenti nel risolvere le (2.5). Naturalmente tutto ciò vale a patto che le soluzioni rispettino la condizione di autoconsistenza data dalla definizione del parametro d'ordine.

La popolazione può essere divisa in due gruppi a seconda del valore di $|\omega_i|$. Se un oscillatore possiede $|\omega_i| \leq Kr$, allora nel lungo termine tenderà al punto di equilibrio stabile definito da:

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i$$

Infatti dalle (2.5) si vede facilmente che la condizione $\dot{\theta}_i = 0$ è soddisfatta da

$$\bar{\theta}_i = \arcsin(\omega_i/Kr) \quad \pi - \bar{\theta}_i$$

ma denotando con $f(\theta_i)$ l'espressione di $\dot{\theta}_i$ si ha che:

$$f'(\bar{\theta}_i) = -Kr \cos(\bar{\theta}_i) = -Kr \sqrt{1 - \frac{\omega_i^2}{K^2 r^2}} < 0$$

$$f'(\pi - \bar{\theta}_i) = Kr \sqrt{1 - \frac{\omega_i^2}{K^2 r^2}} > 0$$

E dunque solo $\bar{\theta}_i$ risulta essere stabile.

Chiaramente questo tipo di soluzione definisce il gruppo degli oscillatori sincronizzati, mentre il caso $|\omega_i| > Kr$ è quello dei desincronizzati, i quali corrono per la circonferenza unitaria con velocità variabile a seconda della fase. Come ci si aspetta i sincronizzati corrispondono alla zona centrale della $g(\omega)$ essendo più probabile per loro l'esistenza di $\bar{\theta}_i$, mentre i desincronizzati corrispondono alle code.

A questo punto la presenza di oscillatori che vagano non uniformemente sembrerebbe in contrasto con l'assunzione che r e ψ siano costanti. Kuramoto ovviò al problema richiedendo che i desincronizzati formino una distribuzione stazionaria lungo il cerchio. Questo significa che tali oscillatori si accumuleranno nei punti in cui sono più lenti e si diraderanno nelle zone in cui sono più veloci, e dunque devono possedere una densità inversamente proporzionale alla velocità:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|} \quad (2.6)$$

Dove C è una costante di normalizzazione dipendente da ω e determinata dalla ben nota condizione $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$, da cui si ricava:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}$$

Ora bisogna usare la condizione di autoconsistenza imponendo che venga rispettata la (2.3). Tenendo a mente che $\psi = 0$ e usando $\langle \cdot \rangle$ per denotare la media sulla popolazione si ha

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{sincr.}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{desinc.}}$$

Per gli oscillatori desincronizzati:

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{desinc.}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta$$

Dalla simmetria $\rho(\theta + \varphi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$ e $g(-\omega) = g(\omega)$ segue che questo integrale si annulla.

Nel caso dei sincronizzati avremo invece come già detto una stabilizzazione delle fasi su $\bar{\theta} = \arcsin(\omega/Kr)$. Quando $N \rightarrow \infty$ la popolazione delle fasi bloccate è simmetrica rispetto a $\theta = 0$ essendo $g(\omega)$ appunto simmetrica. Perciò si avrà $\langle \sin \theta \rangle_{\text{sincr.}} = 0$, mentre

$$\langle \cos \theta \rangle_{\text{sincr.}} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega$$

e cambiando variabile da ω a θ si ottiene

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta$$

Perciò la condizione di autoconsistenza si riduce a:

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (2.7)$$

Si vede immediatamente che quest'equazione possiede per ogni K la soluzione banale $r = 0$ e cioè la condizione di completa desincronizzazione in cui si ha $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ per ogni θ e ω . Mentre la condizione

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (2.8)$$

è soddisfatta solo quando sono presenti oscillatori sincronizzati. Questa serie di soluzioni emerge in maniera continua da $r = 0$ a un certo $K = K_C$ come predetto da Winfree, e infatti l'espressione precedente definisce implicitamente $r_\infty(K)$. Siamo dunque in presenza di una biforcazione. Prendendo la (2.8) e facendone il limite per $r \rightarrow 0^+$ Kuramoto ottenne la formula esatta:

$$K_C = \frac{2}{\pi g(0)}$$

Cercò inoltre di capire il comportamento sopra soglia di r per $Kr \ll 1$, cioè vicino al valore critico, e per farlo espanse in serie la densità di probabilità delle frequenze fermandosi al secondo ordine

$$g(Kr \sin \theta) \simeq g(0) + g'(0)Kr \sin \theta + \frac{1}{2}g''(0)K^2r^2 \sin^2 \theta$$

e sostituì lo sviluppo nella (2.8). Risolvendo l'integrale ottenne:

$$r \approx \sqrt{\frac{-16(K - K_C)}{\pi K_C^4 g''(0)}} \quad (2.9)$$

Infine ponendosi nel caso di densità Lorentziana

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \omega^2)}$$

egli poté integrare la (2.8) ottenendo

$$r = \sqrt{1 - \frac{K_C}{K}} \quad \text{per ogni } K \geq K_C$$

che trovò riscontro con le simulazioni numeriche.

3 I test sul modello

In questa sezione verranno discussi il metodo e i criteri utilizzati per integrare le equazioni del moto assieme ai risultati ottenuti.

3.1 Il metodo di Eulero

Abbiamo scelto di prendere in considerazione una popolazione di oscillatori con $N = 10000$, con valori iniziali distribuiti uniformemente nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e le cui frequenze seguono una distribuzione Gaussiana¹ con varianza $\sigma^2 = 1$ e media nulla (ci siamo dunque messi nel sistema corotante, ma senza porre $\psi = 0$), perciò dalla formula ricavata da Kuramoto discende

$$K_C = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

In particolare per le ω_i si è eliminato a mano il drift dovuto a N finito.² Come metodo di integrazione numerica invece è stato usato il *metodo di Eulero*, esso discende direttamente da

$$\dot{\theta}_i \approx \frac{\theta_i(t+h) - \theta_i(t)}{h} \quad 0 < h \ll 1$$

per cui tenendo a mente l'espressione esplicita di $\dot{\theta}_i$ si può porre:

$$\theta_i(t+h) = \theta_i(t) + h \left(\omega_i + Kr(t) \sin(\psi(t) - \theta_i(t)) \right) \quad (3.1)$$

In pratica partendo dal punto iniziale si calcola il coefficiente angolare della tangente alla soluzione dell'equazione differenziale in quel punto e ci si muove di un piccolo passo lungo tale retta tangente. Assumendo che il nuovo punto ottenuto si trovi ancora lungo la curva cercata si ripete l'operazione. Se il dominio di integrazione è finito e il passo h abbastanza piccolo la poligonale ottenuta non divergerà molto dalla soluzione vera.

Data la sua semplicità di solito si preferisce usare un algoritmo di integrazione più raffinato come ad esempio quello di Runge-Kutta, ma per i casi interessanti di questo modello, che sono naturalmente quelli per $K > K_C$, i tempi con cui $r(t)$ arriva alla stabilità sono abbastanza piccoli da rendere la differenza fra Eulero e Runge-Kutta del tutto trascurabile. Alla luce di ciò la scelta è ricaduta sul metodo più semplice per motivi di velocità di calcolo.

Andiamo ora a vedere meglio la dinamica di questo algoritmo. Per alleggerire la notazione ometteremo i pedici, abbiamo:

$$\hat{\theta} = \theta + hf(\theta)$$

I punti di equilibrio sono quelli per cui $\hat{\theta} = \bar{\theta}$, dati da $f(\bar{\theta}) = 0$, cioè $\bar{\theta} = \psi + \arcsin(\omega/Kr)$, gli stessi di (2.4). Per quanto riguarda la stabilità invece supponiamo di trovarci in $\theta = \bar{\theta} + \delta\theta$, allora

$$\hat{\theta} = \bar{\theta} + \delta\theta + hf(\bar{\theta} + \delta\theta) \simeq \bar{\theta} + \delta\theta(1 + hf'(\bar{\theta}))$$

¹ Nel programma usato per le simulazioni numeriche tale distribuzione è stata ricavata usando il metodo di Box-Muller, il quale sfrutta le proprietà sotto cambi di coordinate delle densità di probabilità [3].

² Si veda l'Appendice A.

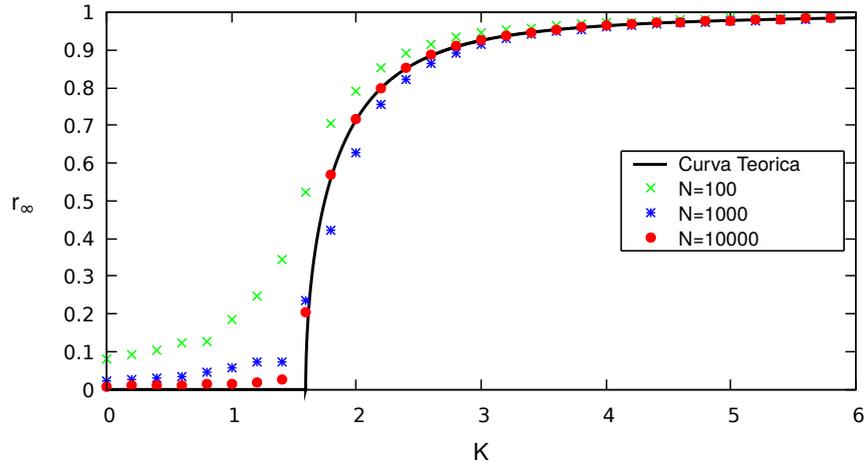


Figura 2: $r_\infty(K)$ per popolazioni di varia grandezza. All'aumentare di N le simulazioni tendono alla curva teorica.

dove nell'ultimo membro è stato fatto uno sviluppo in serie. L'attrattività può dunque essere garantita solo se:

$$|1 + hf'(\bar{\theta})| = \left| 1 - hKr \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{K^2 r^2}} \right| < 1$$

Tralasciando il caso $\omega \approx Kr^3$, poichè $r < 1$ e $\sqrt{1 - (\omega^2/K^2 r^2)} < 1$ la disuguaglianza è sicuramente soddisfatta se $hK < 2$, a meno che non ci si trovi nella situazione in cui K è prossimo (da destra) a K_C . In tal caso $r \sim 0$ e dunque ci aspettiamo che l'algoritmo si comporti male. L'amplificarsi delle fluttuazioni vicino al valore critico non è caratteristico del solo metodo di Eulero ma è stato osservato anche per altri metodi di integrazione [4].

3.2 Simulazioni numeriche

Le simulazioni sono state fatte sfruttando un programma scritto in Fortran⁴ integrando la (3.1) in $t \in [0, 100]$ e con un passo $h = 10^{-2}$.

La Figura 2 permette di visualizzare immediatamente quanto affidabile sia tale operazione, in essa troviamo in nero la curva teorica di $r_\infty(K)$ ricavata per integrazione numerica della (2.8) utilizzando il metodo di Newton-Rapshon, mentre come si può intuire dalla legenda i vari punti rappresentano i risultati delle simulazioni per diversi valori di N . È evidente come al crescere di quest'ultimo i risultati aderiscano sempre di più alla curva teorica, a conferma del fatto che l'analisi di Kuramoto valga per $N \rightarrow \infty$. Difatti nelle $r_\infty(K)$ numeriche sono sempre presenti fluttuazioni statistiche per $K < K_C$ che non rendono i risultati perfettamente uguali a zero, e così anche sopra soglia per K vicino al valore critico, per cui r si stabilizza su valori più alti di quelli previsti.

Mostriamo un esempio esplicativo con la Figura 3 in cui vengono rappresentate le due tipologie di dinamica del modello. Entrambe partono a $t = 0$ da un valore della coerenza quasi nullo dovuto al fatto che le

³ Questi oscillatori passano continuamente dal gruppo dei sincronizzati a quello dei desincronizzati, provocando delle fluttuazioni nel tempo sul valore di r .

⁴ Riportato in Appendice B

fasi iniziali sono distribuite uniformemente. Da una parte abbiamo $r(t)$ per un valore di K sotto soglia, la coerenza rimane vicina a zero per tutto il tempo, con le già citate fluttuazioni. Dall'altra vi è una soluzione nel ramo in cui è possibile parziale sincronizzazione, r ha un transiente dove cresce esponenzialmente fino a r_∞ . Anche qui troviamo accordo col modello: non è più possibile influenzare nuovi oscillatori e quindi sopraggiunge la stabilità. Aumentando l'intensità dell'interazione il comportamento è fondamentalmente lo stesso, ma si riduce il tempo impiegato per raggiungere la stabilità e l'equilibrio diviene via via più vicino a 1, oltre ad avere una maggiore qualità dell'immagine per via del minor numero di desincronizzati che fa ridurre le fluttuazioni.

La Figura 4 invece è formata da una serie di grafici in cui si ha uno scorcio sul processo di sincronizzazione descritto nella sezione 2.2.

Mentre nella Figura 4a non vi è un rapporto fra ω_i/Kr e $(\theta_i - \psi)$, per $K = 1.6$ (appena sopra soglia) compare il profilo dell'arcoseno, segno che alcuni oscillatori si sono stabilizzati. Si ricordi infatti l'espressione di $\bar{\theta}_i$, che è proprio l'inverso del seno.

Non a caso sono quelli centrali, infatti sebbene le frequenze naturali siano state pescate casualmente, la loro assegnazione ai vari oscillatori è avvenuta in ordine crescente proprio per poter visualizzare questo fenomeno (la stessa cosa però non vale per le fasi iniziali). Nelle'ultima figura infine viene mostrato come un numero sempre maggiore di angoli viene reclutato fra i sincronizzati al crescere dell'intensità dell'interazione.

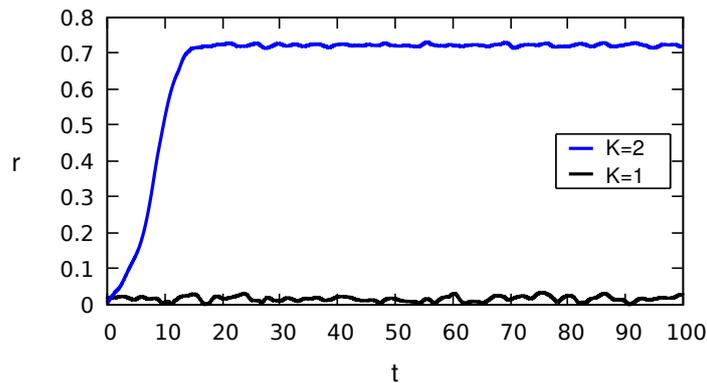


Figura 3: Un esempio di simulazioni numeriche: vengono riportati i casi $K = 1$ e $K = 2$, rispettivamente sotto e sopra soglia.

3.3 Ipotesi sulla dinamica

Oltre al voler verificare la bontà delle simulazioni numeriche in questo lavoro si è provato anche a comprendere più a fondo la dinamica del modello di Kuramoto nel limite $N \rightarrow \infty$. Per raggiungere questo obiettivo la strada più logica ci è sembrata quella di indagare l'espressione di \dot{r} , essendo la coerenza una variabile macroscopica e come tale portatrice di informazioni sull'intero sistema. Inoltre, almeno sul piano teorico, renderebbe possibile risolvere esplicitamente le equazioni del moto nella forma delle (2.4).

Come già detto più volte questo insieme di modelli formalizzati da Winfree possiede la possibilità di attraversare una vera e propria transizione di fase, viene perciò naturale supporre che a governare \dot{r} sia un'equazione differenziale non lineare dipendente da un parametro (che sarà chiaramente K) in modo da

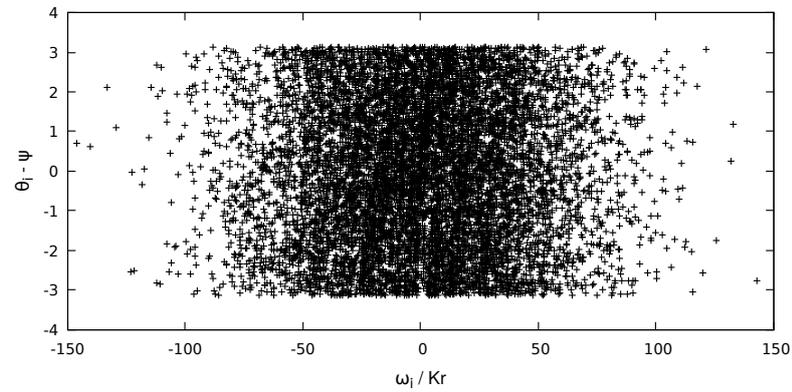
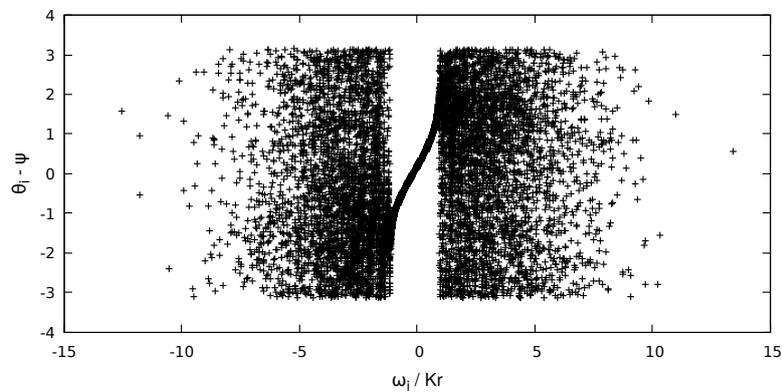
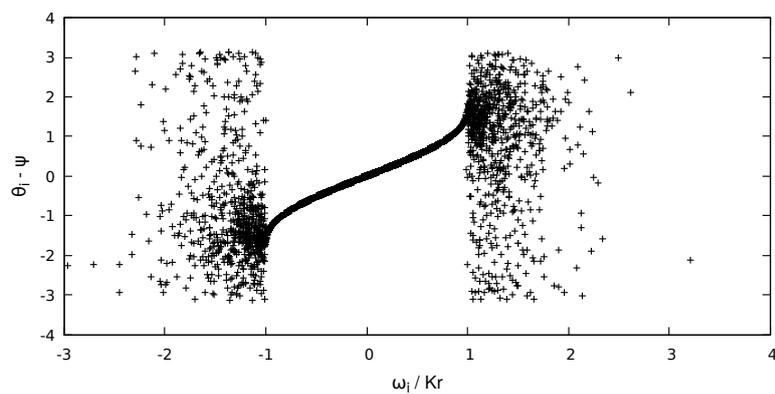
(a) $K=1$ (b) $K=1.6$ (c) $K=2$

Figura 4: Plot di $(\theta_i - \psi)$ in funzione di ω_i / Kr per diversi valori di K . Superato il valore critico per l'accoppiamento inizia a comparire una relazione ben visibile, in accordo con la presenza di $(\bar{\theta}_i - \psi) = \arcsin(\omega_i / Kr)$.

avere una biforcazione.

Prendiamo come variabile il parametro d'ordine Z :

$$Z = re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$$

Cerchiamo un'equazione tale che per $N \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$ si abbia $|Z| \rightarrow 0$ quando $K < K_C$, mentre $|Z| \rightarrow r_\infty(K)$ altrimenti. Ipotizziamo che sia della forma

$$\dot{Z} = aZ - b|Z|^2Z + O(Z^5)$$

dove a e b sono due funzioni dipendenti da K . Trascuriamo i termini di ordine superiore ed esplicitiamo il parametro d'ordine

$$\dot{r}e^{i\psi} + ir\dot{\psi}e^{i\psi} = (ar - br^3)e^{i\psi}$$

supponiamo poi che a e b siano fatte come segue:

$$a = a' + ia'' \quad b = b' + ib''$$

Sviluppando i conti e separando parte reale da parte immaginaria si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{r} = a'r - b'r^3 \\ \dot{\psi} = a'' - b''r^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideriamo la prima. Perchè sia una buona espressione per la derivata di r deve possedere proprietà coerenti con quello che è stato discusso finora. Dunque per $K > K_C$, oltre a $r = 0$, deve possedere un'ulteriore soluzione costante nell'intervallo $[0, 1]$, ed è necessario che si abbia $a' > 0$ e $b' > 0$ in modo che lo zero sia equilibrio repulsivo mentre l'altro attrattivo. Quest'altro equilibrio deve chiaramente essere $r = r_\infty(K)$ e perciò deve risultare che $a'(K)/b'(K) = r_\infty^2(K)$. Per $K < K_C$ invece è imprescindibile che $a' < 0$, invece b' può essere sia positivo che negativo, ma in quest'ultimo caso si richiede che $a'(K)/b'(K) > 1$ (infatti per definizione $r \in [0, 1]$ e perciò risulterebbe in entrambi i casi nell'esistenza di un unico equilibrio, attrattivo, coincidente con $r = 0$).

Detto ciò è possibile risolvere quest'equazione differenziale ottenendo

$$r(t) = \sqrt{\frac{a'}{b' + ce^{-2a't}}} \quad \text{con } c = \frac{a' - b'r_0^2}{r_0^2} \quad (3.3)$$

con r_0 dato iniziale. Vediamo che vi è presente un esponenziale in accordo con quel che emerge dalle simulazioni. Sperando di ricavarne informazioni utili, abbiamo testato questa formula andando innanzitutto a cercare una funzione che fittasse bene la curva teorica di r_∞ per $K > K_C$, per poterla poi scomporre in a' e b' . Trovata un'espressione, molto complicata, per tale funzione è emerso che per avere un'approssimazione dei tempi di sincronizzazione soddisfacente bisogna che sia $a' \propto (K - K_C)$.

A questo punto riconsideriamo l'espressione (2.7), che contiene l'equazione implicita per $r_\infty(K)$, essa è stata ricavata ponendosi nella situazione in cui il processo di sincronizzazione si è fermato, gli angoli che avevano la possibilità di sincronizzarsi sono fermi ($\Omega = 0$), mentre gli altri vagano seguendo una distribuzione stazionaria. Se indichiamo l'integrale a destra con

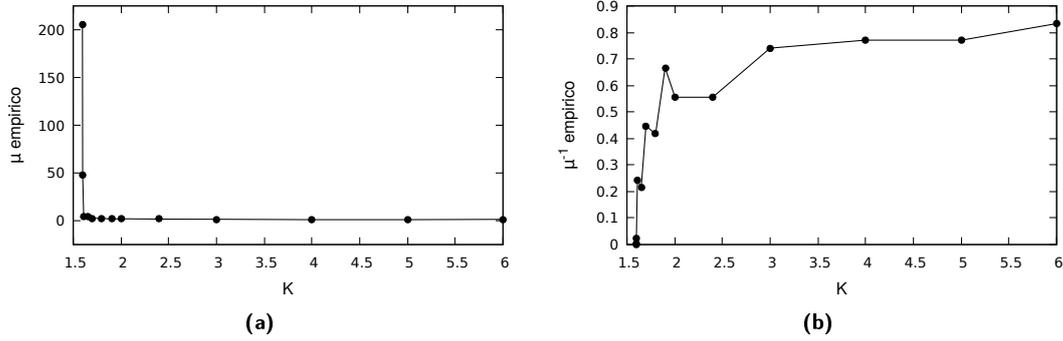


Figura 5: Andando a cercare il parametro da sostituire a $\mu(K)$ nella (3.4) si ha un'idea di come la funzione dovrebbe essere fatta. Come detto nel testo, nel primo grafico è stato omesso un punto molto vicino a K_C per motivi pratici.

$$F_{\text{Kuram.}} = Kr \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} g(Krx) dx$$

dove è stato effettuato il cambio $Krx = \omega$, nulla ci vieta di ipotizzare che l'espressione completa sia qualcosa del tipo

$$\dot{r} = \mu(K) (F_{\text{Kuram.}} - r) \quad (3.4)$$

con $\mu(K) > 0$ per $K \in [0, \infty)$. Essa infatti possiede le proprietà di stabilità che cerchiamo: chiaramente si annulla in r_∞ e in zero, inoltre

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (F_{\text{Kuram.}} - r) \right|_{r=r_\infty} = K^2 r_\infty \int_{-1}^1 x \sqrt{1-x^2} \frac{\partial g(Kr_\infty x)}{\partial r} dx < 0$$

perchè si ha x e la derivata di $g(\omega)$ entrambe funzioni dispari, si ricordi che è stata fatta l'ipotesi di distribuzione simmetrica e unimodale, e dunque l'integrale è non nullo, ma diviene negativo avendo esse segno opposto.

Per vedere che la nostra supposizione non è del tutto casuale, prendiamo l'espressione di $F_{\text{Kuram.}}$ e sviluppiamo $g(Krx)$ fino al quarto ordine per $Kr \rightarrow 0$ nel caso di distribuzione Gaussiana con media nulla e $\sigma = 1$. Risolvendo l'integrale e inserendolo nella (3.4) troviamo

$$\dot{r} = \mu(K) \left(\frac{(K - K_C)}{K_C} r - \frac{K^3}{8K_C} r^3 \right)$$

cioè un'equazione con la stessa forma della prima delle (3.2). Si noti inoltre che dalla (2.9) utilizzando il valore critico per la Gaussiana e approssimando $K^3 \sim K_C^3$ segue che la condizione $a'(K)/b'(K) = r_\infty^2(K)$ è soddisfatta.

Rimane però la funzione $\mu(K)$, di cui non conosciamo nulla. Per farci un'idea di come dovrebbe esser fatta si è usato ancora una volta il metodo di Eulero per integrare la (3.4) per diversi valori di K , cercando a mano il valore di $\mu(K)$ che rendesse $r(t)$ quanto più possibile simile alle simulazioni numeriche. Nella figura 5a sono mostrati i risultati di quest'operazione: avvicinandosi al valore critico abbiamo una forte crescita (si è dovuto omettere un punto molto vicino a K_C sia per motivi estetici che di chiarezza del grafico, infatti

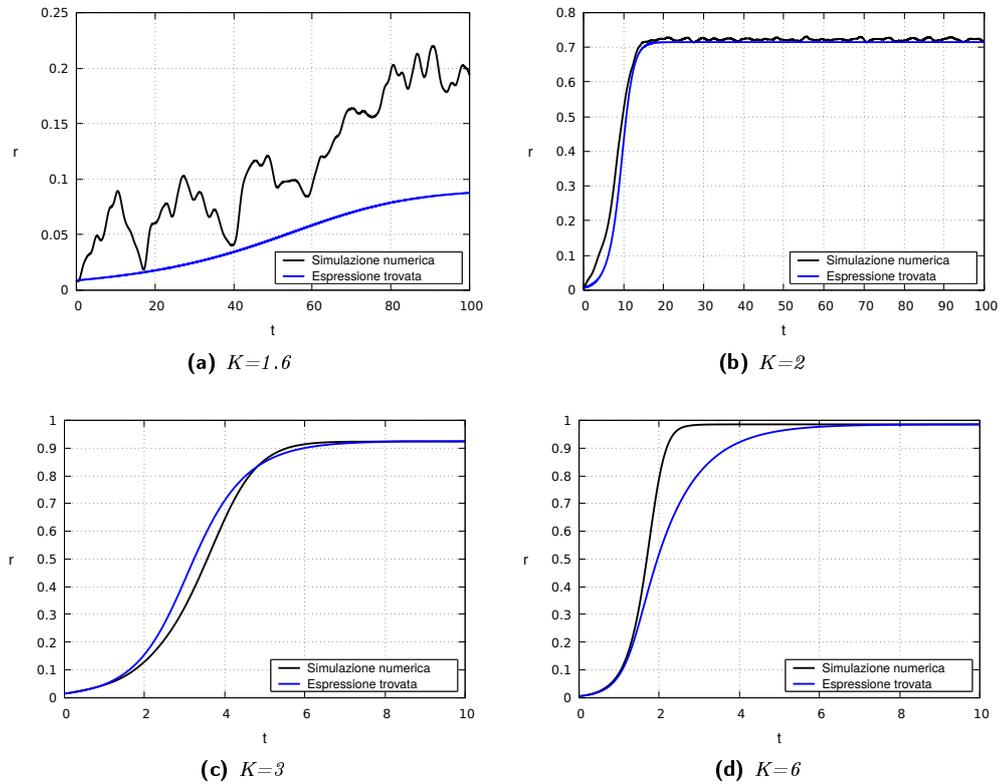


Figura 6: Risultati dell'integrazione di (3.5) rapportati con le simulazioni numeriche. È presente un buon accordo ma emerge anche una differenza nel comportamento in prossimità del raggiungimento dell'equilibrio.

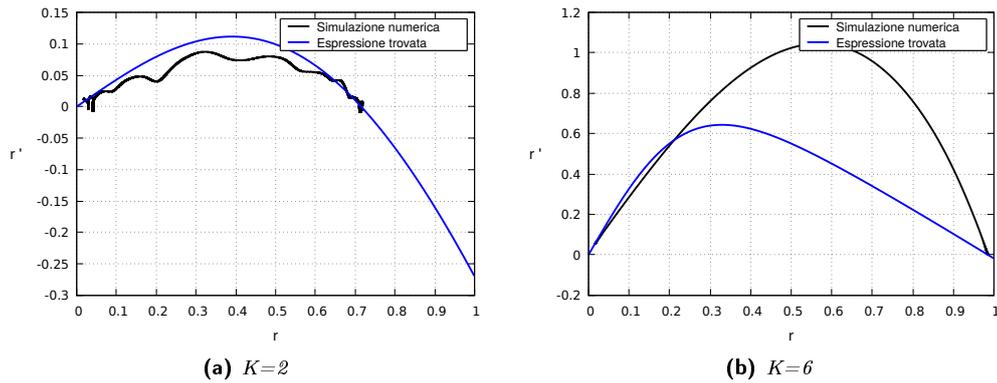


Figura 7: Due esempi di confronto fra i ritratti in fase. Si capisce come nonostante la rassomiglianza nel tratto iniziale l'espressione ipotizzata trascuri dei contributi che diventano importanti al crescere di r .

il valore qui trovato risulta essere dell'ordine di 10^4), mentre aumentando K si tende a 1^+ . Ma tale comportamento ci è familiare. Facendo il reciproco di ogni punto spunta fuori una grossolana approssimazione della curva teorica di $r_\infty(K)$ riscalata per un certo fattore, come mostrato in 5b. Con l'ausilio della funzione usata per testare la (3.3), è stato poi trovato attraverso un fit tale coefficiente che ci risulta essere $\alpha = 1.2406$.

Ci siamo finalmente ricavati

$$\dot{r} = \frac{\alpha}{r_\infty(K)} (F_{\text{Kuram.}} - r) \quad (3.5)$$

e ora possiamo vedere quanto risulti affidabile. Nel primo grafico in Figura 6 vediamo un confronto fra l'integrazione dell'espressione ipotizzata e una delle nostre simulazioni per $K = 1.6$, dove si è fatto in modo che le due curve abbiano stesso valore iniziale, come in tutte le figure che mostreremo da qui in poi. Il fatto che non si stabilizzino allo stesso valore si poteva già intuire dalla Figura 2, siamo infatti molto vicini al valore critico e dunque Eulero non funziona come dovrebbe. Tralasciando ciò, si noti che il tempo impiegato per raggiungere l'equilibrio appare molto simile. Stesso discorso, ma con visibili miglioramenti dovuti all'allontanamento da K_C , per la figura successiva.

Aumentando K bisogna restringersi a $[0, 10]$ per notare le differenze, che comunque ci sono. La nostra curva appropria troppo gradualmente l'equilibrio, mentre le simulazioni hanno un andamento simile ad una sigmoide. Manca ancora qualcosa, e ciò risulta evidente facendo un confronto dei ritratti in fase (Figura 7). Appare lampante come si abbia una differenza sostanziale per $r \rightarrow 1$, suggerendoci che la (3.5) potrebbe essere un termine di un'equazione più grande.

Abbiamo testato la (3.5) anche nel caso di distribuzione Lorentziana con parametro di scala $\gamma = 1^5$, e anche qui l'espressione sembra funzionare ma compaiono le medesime problematiche del caso gaussiano.

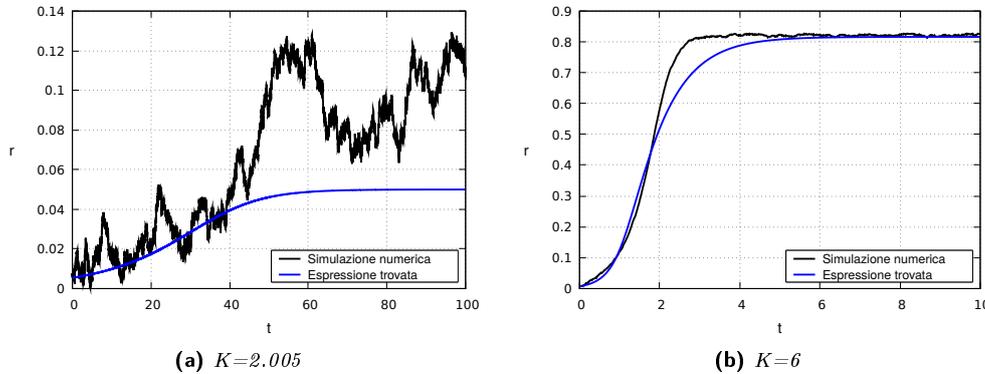


Figura 8: Applicazione della formula nel caso di distribuzione Lorentziana.

Si riscontra dunque una certa corrispondenza con le simulazioni, indipendentemente dalla $g(\omega)$, anche se chiaramente si tratta solo di un'approssimazione empirica. Non si è arrivati ad un risultato completamente soddisfacente a livello pratico e soprattutto a livello teorico. Ma probabilmente potrà essere utile esplorare quest'espressione più a fondo, o comunque si spera possa essere fonte di ispirazione per risultati più rigorosi. Forse scoprire le ragioni per cui l'equazione ha un parziale funzionamento potrebbe portare a una comprensione più profonda del modello di Kuramoto e del fenomeno stesso della sincronizzazione spontanea.

⁵ Che comporta $K_C = 2$

A Drift

Poichè N è sì molto grande ma comunque finito, nel pescare casualmente le frequenze si avrà una popolazione con media non esattamente nulla (si ricordi infatti che ci siamo posti nel sistema corotante). Questo causa la presenza di un drift nel moto degli oscillatori sincronizzati e della ψ .

Per vedere ciò definiamo:

$$\bar{\omega}_N = \frac{1}{N} \sum_i \dot{\theta}_i$$

Usando la (2.2) e la disparità del seno otteniamo

$$\bar{\omega}_N = \frac{1}{N} \sum_i \omega_i + \frac{K}{N^2} \sum_{i,j} \sin(\theta_j - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_i \omega_i$$

e quindi passando al valore di aspettazione

$$\langle \bar{\omega}_N \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle \omega_i \rangle = 0$$

dove si è usato il fatto che le ω_i seguono una distribuzione Gaussiana a media nulla. Calcoliamo adesso quanto vale lo scarto quadratico medio:

$$\langle (\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle)^2 \rangle = \langle \bar{\omega}_N^2 \rangle - \langle \bar{\omega}_N \rangle^2$$

Con lo stesso ragionamento di prima

$$\langle \bar{\omega}_N^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \langle \omega_i \omega_j \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_i \langle \omega_i^2 \rangle + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \langle \omega_i \omega_j \rangle$$

ma come è risaputo $\langle \omega_i^2 \rangle = \sigma^2$, mentre ω_i e ω_j sono indipendenti per cui $\langle \omega_i \omega_j \rangle = \langle \omega_i \rangle \langle \omega_j \rangle$ e dunque l'ultimo termine si annulla. Abbiamo quindi trovato che lo scarto quadratico medio corrisponde a $\langle \bar{\omega}_N^2 \rangle = \sigma^2/N$

La nostra distribuzione possiede $\sigma = 1$ e perciò nelle simulazioni ci aspetteremmo un drift

$$|\bar{\omega}_N| \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

ed è esattamente quello che succede. Per ovviare al problema si è di volta in volta calcolata la media delle frequenze estratte, per poi sottrarla a ciascuna delle ω_i .

In realtà si può dire di più dal punto di vista probabilistico sfruttando la *disuguaglianza di Čebyšëv*. Detta ε una quantità positiva arbitrariamente piccola, come è ben noto

$$\text{Prob}\left(|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle| > \varepsilon\right) = \int_{|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle| > \varepsilon} \rho(\omega_1, \dots, \omega_N) d\omega_1 \dots d\omega_N$$

dove $\rho(\omega_1 \dots \omega_N)$ è naturalmente una densità di probabilità. Ma poichè $|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle|/\varepsilon > 1$ nel dominio di integrazione possiamo sceglierne una qualunque potenza, ad esempio la seconda, e dare vita alla seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} \text{Prob}\left(|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle| > \varepsilon\right) &\leq \int_{|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle| > \varepsilon} \frac{|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle|^2}{\varepsilon^2} \rho(\omega_1, \dots, \omega_N) d\omega_1 \dots d\omega_N \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle|^2}{\varepsilon^2} \rho(\omega_1, \dots, \omega_N) d\omega_1 \dots d\omega_N = \frac{1}{\varepsilon^2} \langle (\bar{\omega}_N - \langle \bar{\omega}_N \rangle)^2 \rangle \end{aligned}$$

e in definitiva, dai calcoli svolti in precedenza, otteniamo il risultato:

$$\text{Prob}\left(|\bar{\omega}_N| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 N} = \frac{1}{\varepsilon^2 N}$$

Scegliendo ad esempio $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-2}$ si ha (con $N = 10000$ come nelle simulazioni svolte) una probabilità minore o uguale al 6.25%.

B Il codice FORTRAN

```
1 Program Kuramoto
2
3 implicit none
4 integer i,j,l,m,o,x,d
5 integer, parameter :: n = 10000
6 double precision, parameter :: pi = acos(-1.0)
7 double precision width
8 double precision t,h,tmax
9 double precision r,psi,k
10 double precision summ,kmax,dk
11 double precision drift,dphase
12 double precision, dimension(n):: theta0(n), omega(n), etha(n)
13 double precision, dimension(:), allocatable:: coherence
14 double precision, dimension(:,:), allocatable:: theta
15 character(len=10) nme
16 character(len=11) nme1
17
18
19 open(7,file='r(K).dat')
20 k=0
21 kmax=6
22 dk=0.2
23 d=100/h
24 t=0
25 tmax=200
26 h=0.01
27 m=tmax/h
28 allocate (coherence(m))
29 allocate (theta(n,m))
30
31 ! Si pescano le frequenze da una Gaussiana
32 width = 1
33 call gauss_distrib(omega,width,n)
34
35 ! Prendo i valori inizia fra -pi e pi
36 do i=1,n
37     call random_number(theta0(i))
38     theta0(i) = -theta0(i)*2*pi + pi
39 end do
40
41 drift=0
42
43 ! Imposto dati iniziali e calcolo il drift
44 do i=1,n
45     theta(i,1) = theta0(i)
46     drift=drift+omega(i)
47 end do
48
49 drift=drift/n
50
```

```

51 !Avvio il ciclo per diversi valori di k in modo da poter stampare
52 !la curva dei valori asintotici di r
53 do while (k.le.kmax)
54     t=0
55
56 !Creo i file necessari a immagazzinare i dati per ogni k considerato
57     o=k*10
58     write(nme1,100) o
59     100 format('oscil',I2,'.dat')
60     open(8,file=nme1)
61     write(nme,200) o
62     200 format('r(t)',I2,'.dat')
63     open(9,file=nme)
64
65 !Calcolo l'evoluzione delle theta e parametro d'ordine
66 !usando il metodo di Eulero
67     do l=1,m-1
68         do j=1,n
69             etha(j) = theta(j,l)
70         end do
71
72         call order_param(etha,r,psi,n)
73
74         do i=1,n
75             theta(i,l+1) = theta(i,l) + h*(omega(i)-drift
76             theta(i,l+1) = theta(i,l+1) + (k*r*sin(psi-theta(i,l)))
77
78 !Ci si assicura che gli angoli risiedano in [-pi,pi]
79         x=nint(theta(i,l+1)/(2*pi))
80         theta(i,l+1) = theta(i,l+1) -(2*pi*x)
81         if ((theta(i,l+1).gt.pi).and.(theta(i,l+1).le.(2*pi))) then
82             theta(i,l+1) = theta(i,l+1) -(2*pi)
83         end if
84     end do
85
86     write(9,*) t, '┘',r
87     coherence(l)=r
88
89     t=t+h
90 end do
91
92 !Stampo (theta-psi) in funzione di (omega/kr)
93     do j=1,n
94         etha(j) = theta(j,m)
95     end do
96
97     call order_param(etha,r,psi,n)
98     write(9,*) t, '┘',r
99     coherence(m)=r
100
101     do i=1,n
102         dphase=(etha(i)-psi)
103         x=nint(dphase/(2*pi))

```

```

104         dphase = dphase -(2*pi*x)
105         if ((dphase.gt.pi).and.(dphase.le.(2*pi))) then
106             dphase = dphase -(2*pi)
107         end if
108         write(8,*) ((omega(i)-drift)/(k*r)), '␣', dphase
109     end do
110
111 !Calcolo r asintotico come media nell'intervallo temporale [100,200]
112 !dove sono sicuro di avere una soluzione stabile
113     summ = 0
114     do i=m-d,m
115         summ = summ + coherence(i)
116     end do
117
118     summ=summ/d
119
120     write(7,*) k, '␣', summ
121     close(8)
122     close(9)
123
124     k=k+dk
125 end do
126
127 close(7)
128
129 stop
130 end program Kuramoto
131
132
133 subroutine order_param(theta,r,psi,n)
134
135 implicit none
136 integer n,i
137 double precision, parameter :: pi = acos(-1.0)
138 double precision, dimension(n)::theta
139 double precision r,psi,real_sum,imag_sum
140
141
142 real_sum=0
143 imag_sum=0
144
145 do i=1,n
146     real_sum=real_sum + cos(theta(i))
147     imag_sum=imag_sum + sin(theta(i))
148 end do
149
150 real_sum=real_sum/n
151 imag_sum=imag_sum/n
152 r=sqrt((real_sum)**2 + (imag_sum)**2)
153 psi=atan(imag_sum/real_sum)
154
155 if((imag_sum.ge.0).and.(real_sum.le.0)) then
156     psi=psi+pi

```

```
157 end if
158
159 if((imag_sum.le.0).and.(real_sum.le.0)) then
160     psi=psi-pi
161 end if
162
163 return
164 end subroutine order_param
165
166
167 subroutine gauss_distrib(omega,width,n)
168
169 implicit none
170 integer i,n,j
171 double precision, parameter:: pi=acos(-1.)
172 double precision v1,x2,width
173 double precision x1,v2,temp
174 logical has
175 double precision, dimension(n):: omega(n)
176
177
178 do i=1,n
179     if (has) then
180         has=.FALSE.
181         omega(i)=v2
182     else
183         call random_number(omega(i))
184         x1=omega(i)
185         call random_number(omega(i))
186         x2=omega(i)
187
188         v1=sqrt(-2*log(x1))*cos(2*pi*x2)
189         v2=sqrt(-2*log(x1))*sin(2*pi*x2)
190         v1=v1*width
191         v2=v2*width
192         has =.TRUE.
193         omega(i)=v1
194     end if
195 end do
196
197 do j=1,n
198     do i=1,n-1
199         if (omega(i).gt.omega(i+1)) then
200             temp=omega(i)
201             omega(i)=omega(i+1)
202             omega(i+1)=temp
203         end if
204     end do
205 end do
206
207 return
208 end subroutine gauss_distrib
```

Riferimenti bibliografici

- [1] S. H. Strogatz. *From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 143, No.1-4, pp. 1-20, 2000.
- [2] S. H. Strogatz. *Synch: the emerging science of spontaneous order*. Penguin Books, 2003.
- [3] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. *Numerical recipes in FORTRAN (2nd ed.): the art of scientific computing*. Cambridge University Press New York, 1992.
- [4] H. Daido. *Scaling behaviour at the onset of mutual entrainment in a population of interacting oscillators*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 20, L629, 1987.