Università degli Studi di Padova

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea **A.A. 2003-2004**

Una generalizzazione dei gruppi quasi hamiltoniani

Relatore: Prof. Federico Menegazzo

Controrelatore: Prof. Franco Napolitani

Laureanda: Eleonora Crestani

Indice

Introduzione **v**

1 Gruppi non nilpotenti **1**

2 Gruppi nilpotenti **3**

2.1 Gruppi appartenenti a S(p) con $p \geq 3$ 3

2.2 Gruppi appartenenti a S(p) con p=2 5

2.3 p-gruppi appartenenti a S(p^i) con i≥2 e p>3 10

2.4 3-gruppi appartenenti a S(3^i) con $i \geq 2$ 12

2.5 2-gruppi appartenenti a S(4) 16

2.6 2-gruppi in S(2^n) con n $>$ 2 27

2.7 Conclusioni 37

3 Classi di coniugio dei sottogruppi non permutabili **39**

Bibliografia **43**

Introduzione

La struttura dei gruppi aventi tutti i sottogruppi normali (gruppi hamiltoniani) è stata completamente determinata da Dedekind nel caso finito e da Baer nel caso generale.
Ci sono state successivamente molte generalizzazioni di questo risultato e ne menziono in particolare due.

Una prima generalizzazione studia gruppi che soddisfano condizioni sul numero dei sottogruppi non normali.
Nel lavoro [1] del 1995 Brandl classifica i gruppi finiti i cui sottogruppi non normali appartengono tutti alla stessa classe di coniugio:

Teorema 0.0.1.
Sia G un gruppo finito. Allora sono equivalenti:

1. *G ha una sola classe di coniugio di sottogruppi non normali;*
2. *$G = N \rtimes P$ è estensione spezzante non abeliana dove N è di ordine primo q, P è ciclico di ordine potenza di primo p con $p \neq q$ e $[N, \Phi(P)] = 1$ o $G \cong \left\langle a, b : a^{p^n} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^{n-1}} \right\rangle$ dove p è un primo e $n \geq 2$ se $p \geq 3$, e $n \geq 3$ se $p = 2$.*

Un'ulteriore generalizzazione del risultato di Brandl è stata data da G.Zappa negli articoli [2] e [3]. In questi lavori vengono classificati i gruppi finiti i cui sottogruppi non normali hanno tutti lo stesso ordine.Oltre a quelli visti da Brandl , si trovano solo p-gruppi che sono descritti dal:

Teorema 0.0.2.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. *G è un p-gruppo finito, non hamiltoniano ne abeliano, i cui sottogruppi non normali hanno tutti ordine p^n;*
2. *G è uno dei seguenti:*

(a) $G = \left\langle a, b : a^{p^n} = b^{p^m} = 1, b^a = b^{1+p^{m-1}} \right\rangle$ (*p qualunque,* $n \geq 1$, $m \geq 2, n \leq m$);

(b) $G = \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1} \rangle$ (*p=2,n=2*);

(c) $G = \langle a, b, c : a^p = b^p = c^p = 1, a^b = ac, ac = ca, bc = cb \rangle$ ($p > 2$, $n = 1$);

(d) $G = \left\langle a, b, c : a^p = b^p = c^{p^m} = 1, a^b = ac^{p^{m-1}}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$ ($p > 2, n = 1, m > 1$);

(e) $G = \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$ ($p = 2$, *n=1*,$m > 1$);

(f) $G = \langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b \rangle$ ($p = 2$, $n = 2$)

(g) $G = \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2 \rangle$ ($p = 2, n = 2$);

(h) $G = \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$ (*p=2,n=1*);

(i) $G = \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, \\ & c^b = ca^2, b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = cb^2 \end{array} \right\rangle$ ($p = 2, n = 2$).

Una seconda generalizzazione studia gruppi in cui i sottogruppi hanno proprietà simili ma più deboli della normalità.
Se N è sottogruppo normale del gruppo G allora preso H sottogruppo arbitrario di G si ha $HN = NH$.
Un sottogruppo K del gruppo G si dice permutabile se per ogni H sottogruppo di G si ha $HK = KH$. I sottogruppi permutabili vengono detti anche quasi normali.
Mentre ogni gruppo normale è permutabile si costruiscono facilmenti esempi di gruppi permutabili non normali.
Uno dei motivi di interesse dei sottogruppi permutabili è che le proiettività tra gruppi finiti non conservano la normalità ma, tranne poche eccezioni ben studiate, conservano la permutabilità.
I gruppi finiti con tutti i sottogruppi permutabili sono detti quasi hamiltoniani e sono stati determinati da Iwasawa(ved. [4]).
Si tratta di gruppi nilpotenti e quindi sono prodotti diretti di p-gruppi di Sylow. I p-gruppi finiti quasi hamiltoniani sono esattamente quelli con il reticolo dei sottogruppi modulare. Quelli non abeliani sono classificati dal seguente:

Teorema 0.0.3 (di Iwasawa)**.**
Un p-gruppo finito ha reticolo modulare se e solo se:

1. *G è prodotto diretto di un gruppo dei quaternioni Q_8 di ordine 8 con un 2-gruppo abeliano elementare o,*

2. *G contiene un sottogruppo A abeliano normale con G/A ciclico;inoltre esiste $b \in G$ con $G = A\langle b \rangle$ e un intero positivo s tale che $b^{-1}ab = a^{1+p^s}$ per ogni $a \in A$, con $s \geq 2$ nel caso p=2.*

Lo scopo di questa tesi è studiare gruppi finiti che soddisfano condizioni sul numero di sottogruppi non permutabili.
In analogia al lavoro di Zappa si vogliono classificare i gruppi finiti i cui sottogruppi non permutabili hanno lo stesso ordine.Tra questi poi, in analogia con il lavoro di Brandl, si classificano quelli in cui i sottogruppi non permutabili appartengono alla stessa classe di coniugio.
Raccolgo i risultati ottenuti nel seguente:

Teorema 0.0.4.
G è gruppo finito i cui sottogruppi non permutabili hanno tutti lo stesso ordine se e solo se

1. *$G = N \rtimes P$ estensione spezzante di un sottogruppo $N \trianglelefteq G$ di ordine primo q tramite un p-gruppo ciclico P con $p \neq q$, $[N, P] \neq 1$, $[N, \Phi(P)] = 1$ o G è un $p-$gruppo e*

2. $G = \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1} \rangle$;

3. $G = \langle a, b, c : a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1 \rangle$ *con* $p \geq 3$;

4. $G = \left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^m} = 1, [a, b] = d^{p^{m-1}}, [a, d] = 1, [b, d] = 1 \right\rangle$ *con* $p \geq 3$, $m > 1$;

5. $G = \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3} \rangle$;

6. $G = \left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1} \right\rangle$

7. $G = \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$ *con* $i > 1$;

8. $G = \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, ac = ca, \\ & bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$;

9. $G = \langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b \rangle$;

10. $G = \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2 \rangle$;

11. $G = \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, c^b = ca^2, \\ & b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = cb^2 \end{array} \right\rangle$;

12. $G = \left\langle a, b : a^4 = b^{2^n} = 1, a^b = a^3 \right\rangle$ *con* $n \geq 2$;

13. $G = \left\langle a, b : a^8 = 1, a^4 = b^{2^{n-1}}, a^b = a^7 \right\rangle$ *con* $n \geq 3$.

Inoltre il gruppo 1 ha una sola classe di coniugio di sottogruppi non permutabili mentre nei $p-$*gruppi sopra elencati le classi di coniugio di sottogruppi non permutabili sono almeno due. Infatti:*

nei gruppi 3, 4, 5, 9 ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente p coniugati e le classi di coniugio sono p+1;

nei gruppi 2, 6, 7, 12,13 ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente 2 coniugati e le classi di coniugio sono 2;

nel gruppo 8 ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente 2 coniugati e le classi di coniugio sono 5;

nel gruppo 10 ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente 2 coniugati e le classi di coniugio sono 7;

nel gruppo 11 ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente 2 coniugati e le classi di coniugio sono 15;

Capitolo 1

Gruppi non nilpotenti

Teorema 1.0.5.
G è gruppo finito non nilpotente i cui sottogruppi non permutabili hanno tutti lo stesso ordine se e solo se $G = N \rtimes P$ estensione spezzante di un sottogruppo $N \trianglelefteq G$ di ordine primo q tramite un p-gruppo ciclico P con $p \neq q$.
Inoltre:

- $[N, P] \neq 1$;
- $[N, \Phi(P)] = 1$;

Dimostrazione.

G è gruppo finito non nilpotente quindi esiste P p-Sylow non normale e quindi non permutabile.

P è ciclico altrimenti sarebbe prodotto di permutabili.

P è massimale.
Certamente esiste M massimale non normale e quindi non permutabile.
Poichè tutti i non permutabili hanno lo stesso ordine $|M| = |P|$ cioè M è p-Sylow, è coniugato a P e P è massimale.

Sia N il sottogruppo generato dai q-Sylow per $q \neq p$. Questi q-sottogruppi, avendo ordine diverso da $|P|$ sono permutabili , quindi normali.
Sia $g \in N$. Allora $\langle g \rangle$ permuta con P e per la massimalità di P dovrà essere $P \langle g \rangle = G$, $N = \langle g \rangle$ e N di ordine primo.

$\Phi(P) \trianglelefteq P$ ed essendo permutabile è normalizzato da g; Quindi $\Phi(P) \trianglelefteq G$ e $[N, \Phi(P)] \subseteq N \cap \Phi(P) = 1$.

Infine P e N non commutano e quindi $[N, P] \neq 1$.

Per quanto provato nel teorema 0.0.1 il gruppo $G = N \rtimes P$ ha una sola classe di coniugio di sottogruppi non normali ed è la classe di coniugio di P che è p-Sylow massimale non normale e quindi non permutabile. $\square$

Capitolo 2

Gruppi nilpotenti

Osservazione 1.
Se G è gruppo nilpotente avente tutti i sottogruppi permutabili tranne quelli di ordine fissato allora è un $p-$gruppo.
Infatti se G non è $p-$gruppo allora $G = A \times B$ dove A e B sono sottogruppi di Hall $\neq 1$ ed inoltre ogni sottogruppo di G ha forma $H \times K$ con $H \leq A$ e $K \leq B$.
Siano quindi $H_1 \times K_1, H_2 \times K_2$ sottogruppi di G che non permutano.Allora $H_1H_2 \times K_1K_2 \neq H_2H_1 \times K_2K_1$ da cui $H_1H_2 \neq H_2H_1$ o $K_1K_2 \neq K_2K_1$.
Si può supporre $H_1H_2 \neq H_2H_1$ e tutti i sottogruppi non permutabili dovrebbero avere l'ordine di H_1 ma $H_1 \times B$ e $H_2 \times B$ non permutano e hanno ordine strettamente maggiore di H_1.

Quindi posso supporre G un $p-$gruppo.

Indicheremo con $S(p^n)$ la classe dei p-gruppi finiti i cui tutti i sottogruppi non permutabili hanno ordine p^n.

2.1 Gruppi appartenenti a S(p) con $p \geq 3$

Siano A_1 e A_2 sottogruppi di G tali che $|A_i| = p$, $A_i = \langle a_i \rangle$ per i=1,2 e $A_1A_2 \neq A_2A_1$.
Sia $N \trianglelefteq G, |N| = p$ e $N = \langle n \rangle$.
$A_1N \leq G$ ed essendo $|A_1N| = p^2$, A_1N è permutabile in G. In particolare quindi A_1NA_2 è sottogruppo di G e $|A_1NA_2| = p^3$ da cui $A_1NA_2 = \langle A_1, A_2 \rangle = H$.
Poichè H ha ordine p^3 e contiene sottogruppi non permutabili deve essere isomorfo a $E(p^3)$ cioè

$H = \langle a_1, a_2 : a_1^p = 1 = a_2^p, [a_1, a_2] = n \in Z(H), n^p = 1\rangle$. In particolare N è l'unico sottogruppo di G di ordine p permutabile sia con A_1 che con A_2.

Proposizione 2.1.1.
Se $C \leq G$ e $|C| = p$ allora $C \leq H$.
Quindi $H = \Omega_1(G)$.

Dimostrazione.
Possiamo supporre $C \neq A_1, C \neq A_2$. Distinguiamo allora i seguenti casi:

1. $A_1C = CA_1$
   $A_1C \leq G$ ed essendo $|A_1C| = p^2$, A_1C è quasi normale in G.
   In particolare quindi A_1CA_2 è sottogruppo di G e $|A_1CA_2| = p^3$ da cui $A_1CA_2 = \langle A_1, A_2\rangle = H$ da cui $C \leq H$.
   Inoltre $A_1C \triangleleft H$ e quindi contiene tutti i coniugati di A_1 in H . Analogamente $A_1N \triangleleft H$ e quindi contiene tutti i coniugati di A_1 in H per cui $A_1C = A_1N$ e dunque $C \leq A_1N$.

2. $A_2C = CA_2$
   Con gli stessi argomenti del punto (1) si conclude $C \leq H$ ed anzi $C \leq A_2N$.

3. $A_1C \neq CA_1, A_2C \neq CA_2, C \not\leq \langle A_1, A_2\rangle$.
   Posto $C = \langle a_3\rangle$ e ripetendo i calcoli di sopra ottengo:
   $$\langle A_1, C\rangle = A_1NC = \langle a_1, a_3 : \quad a_1^p = 1, a_3^p = 1, \; [a_1, a_3] = n_{1,3} \in Z(\langle A_1, C\rangle), n_{1,3}^p = 1\big\rangle .$$
   $$\langle A_2, C\rangle = A_2NC = \langle a_3, a_2 : \quad a_2^p = 1, a_3^p = 1, \; [a_3, a_2] = n_{3,2} \in Z(\langle A_2, C\rangle), n_{3,2}^p = 1\big\rangle .$$
   Quindi:
   $$K = \langle A_1, A_2, C\rangle = \langle A_1, A_2\rangle C = \langle a_1, a_2, a_3 : a_i^p = 1 \text{ per } i = 1, 2, 3, \quad [a_i, a_j] = n_{i,j}, \text{ con } i \neq j, \; n_{i,j} \in Z(K) \text{ e } n_{i,j}^p = 1\big\rangle .$$

   K/N è abeliano elementare e quindi $N = K' = \Phi(K)$.
   $N = K' \subseteq Z(K)$ e quindi K ha classe 2 e $\forall x, y \in K$ di ordine p
   $(xy)^p = x^p y^p [x, y]^{\binom{p}{2}} = 1$ da cui $\exp(K)=p$.
   Se $x \in Z(K)$ e ha ordine p allora x commuta sia con a_1 che con a_2 e per quanto provato ai punti 1 e 2 $\langle x\rangle \subseteq A_1N \cap A_2N = N$ cioè $Z(K) = N$.
   Quindi $K' = Z(K) = \Phi(K)$ da cui K è extraspeciale ma
   $|K| = \frac{|\langle A_1, A_2\rangle|\cdot|C|}{|\langle A_1, A_2\rangle \cap C|} = p^4$ assurdo.

□

Teorema 2.1.2.
Sia p un primo $p \geq 2$ e G un p-gruppo finito.Allora $G \in S(p)$ se e solo se G ha la seguente presentazione:
$G = \left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^i} = 1, [a,b] = d^{p^{i-1}}, [a,d] = 1, [b,d] = 1 \right\rangle$

Dimostrazione.
Osserviamo che $\forall x \in G, A_1^x \subseteq A_1N$
Se $x \in H$ essendo $A_1N \trianglelefteq H$ ottengo che $A_1^x \subseteq A_1N$.
Se $x \notin H$ allora l'ordine di x è maggiore di p e quindi $\langle x \rangle$ è permutabile in G e $\langle a_1 \rangle \langle x \rangle \leq G$.
Posto $\langle y \rangle = \Omega_1(\langle x \rangle)$ ottengo $\langle a_1 \rangle \langle y \rangle = \langle y \rangle \langle a_1 \rangle$.
Analogamente $\langle a_2 \rangle \langle y \rangle = \langle y \rangle \langle a_2 \rangle$ da cui $\langle y \rangle = N$.
$A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 \langle y \rangle = A_1N$ ed essendo $H \trianglelefteq G$ si ottiene $A_1N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$ da cui $A_1^x \subseteq A_1N$.
Quindi posso concludere $A_1N \trianglelefteq G$. Analogamente $A_2N \trianglelefteq G$ e quindi A_1 e A_2 hanno p coniugati in G.
$C_G(\langle A_1, A_2 \rangle) = C_G(A_1) \cap C_G(A_2)$.
$[G : C_G(A_i)] = p$ con i=1,2 e $[G : C_G(A_1) \cap C_G(A_2)] = p^2$.
$H \cap (C_G(A_1) \cap C_G(A_2)) = Z(H) = N$ e dunque $G = H * C_G(H)$.
Inoltre se $K \leq C_G(H), |K| = p$ si ha $K \leq H$ e K permuta sia con A_1 che con A_2. Quindi $K = N$ e $C_G(H)$ è ciclico.
Infine il gruppo $\left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^i} = 1, [a,b] = d^{p^{i-1}}, [a,d] = 1, [b,d] = 1 \right\rangle$ ha i sottogruppi $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ che non permutano e hanno ordine p.Tutti gli altri sottogruppi sono normali come prova il teorema 0.0.2 □

2.2 Gruppi appartenenti a S(p) con p=2

Siano A_1 e A_2 sottogruppi di G tali che $|A_i| = 2$, $A_i = \langle a_i \rangle$ per i=1,2 e $A_1A_2 \neq A_2A_1$.
Sia $N \trianglelefteq G, |N| = 2$ e $N = \langle n \rangle$.
$A_1N \leq G$ ed essendo $|A_1N| = 2^2$, A_1N è permutabile in G.
In particolare quindi A_1NA_2 è sottogruppo di G e $|A_1NA_2| = 2^3$ da cui $A_1NA_2 = \langle A_1, A_2 \rangle = H$.
Poichè H ha ordine 2^3 e contiene sottogruppi non permutabili deve essere isomorfo a D_8 cioè:
$H = \langle a_1, a_2 : a_1^2 = a_2^2 = 1, [a_1, a_2] = n \in Z(H), n^2 = 1 \rangle$.

Osservazione 2.
Se $C \in G, |C| = 2$ e $A_1C = CA_1$ o $A_2C = CA_2$ allora $C \subseteq H$.
Infatti supponendo ad esempio $C \neq A_1$ e $A_1C = CA_1$ allora $A_1C \leq G$ e

avendo ordine 2^2 è permutabile in G. In particolare permuta con A_2, quindi A_1CA_2 è sottogruppo di G di ordine 2^3 e contenete sia A_1 che A_2 da cui $A_1CA_2 = A_1NA_2$.Inoltre A_1C e A_1N sono normali in H e quindi entrambi contengono tutti i coniugati di A_1 in H da cui $A_1C = A_1N$.

Proposizione 2.2.1.
$\Omega_1(G)$ è di uno dei seguenti tipi:

- D_8.
- $D_8 * A$ *con* $|A| = 4$, A *è ciclico e* $A \cap D_8 = Z(D_8)$.
- $D_8 * Q_8$.

Dimostrazione.
Proviamo dapprima che $\nexists A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in G, |A_i| = 2$ e $A_i = \langle a_i \rangle$ con la proprietà che $\forall i \neq j\ A_iA_j \neq A_jA_i$ e $A_j \not\subseteq \langle A_i : i < j \rangle$ $(*)$. In particolare $|\Omega_1(G)| \leq 32$. Se $A_iA_j \neq A_jA_i$ allora ripetendo i calcoli precedenti $\langle A_i, A_j \rangle = \left\langle a_i, a_j : a_i^2 = a_j^2 = 1, [a_i, a_j] = n, n^2 = 1, [a_i, n] = 1, [a_j, n] = 1 \right\rangle$. Quindi il sottogruppo generato da $\langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle$ è:

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ &: a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = a_5^2 = 1, [a_i, a_j] = n \text{ con } i \neq j, \\ &n^2 = 1, [a_1, n] = [a_2, n] = [a_3, n] = [a_4, n] = [a_5, n] = 1 \rangle . \end{aligned}$$

L'elemento $a_1a_2a_3a_4a_5$ ha ordine 2 e commuta con a_1 e con a_2. Per l'osservazione precedente $\langle a_1a_2a_3a_4a_5 \rangle \subseteq A_1N \cap A_2N = N$ da cui $a_1a_2a_3a_4a_5 \in \langle A_1, A_2 \rangle$. Quindi $a_5 \in \langle A_i : i = 1, 2, 3, 4 \rangle$ contro l'ipotesi iniziale.
Inoltre (teorema 4.12 da [6]) essendo $\Omega_1(G)/N$ abeliano elementare si ha $\Omega_1(G) \cong E * A$ con E extraspeciale e A abeliano. Ho le seguenti possibilità:

1. se $|\Omega(G)| = 8$ allora $\Omega(G) \cong D_8$.
2. se $|\Omega(G)| = 16$ allora $\Omega(G) \cong D_8 * A$ con $|A| = 4$ e $A \cap D_8 = Z(D_8)$.
3. se $|\Omega(G)| = 32$ allora $\Omega(G) \cong D_8 * Q_8$.

Inoltre se sono nel caso 2 A deve essere ciclico perchè se $C \leq A$ e $|C| = 2$ allora C commuta con i sottogruppi di ordine 2 di D_8 e per l'osservazione ottengo $C = Z(D_8)$ e quindi A deve essere ciclico. □

Proposizione 2.2.2.
Con le notazioni iniziali:
$A_1N \trianglelefteq G$.

Dimostrazione.
Distinguiamo i casi:

1. $\Omega(G) \cong D_8 = \langle A_1, A_2 \rangle$.
   Se $x \in \langle A_1, A_2 \rangle$ allora $A_1^x \subseteq A_1N$.
   Se $x \notin \langle A_1, A_2 \rangle$ allora $o(x) \geq 4$.Sia $\langle y \rangle = \Omega(\langle x \rangle)$.
   Essendo $A_1 \langle x \rangle = \langle x \rangle A_1$ si ha $A_1 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_1$.
   Analogamente si ha $A_2 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_2$ e dunque $\langle y \rangle = N$.
   Distinguiamo i due casi:

   - Se $\langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle = \langle y \rangle$ allora
     $A_1 \langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle = A_1(\langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle) = A_1N$ ed essendo $\Omega(G) \trianglelefteq G$ ottengo $A_1N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$ da cui $A_1^x \subseteq A_1N$.
   - Se $|\langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle| = 4$ ottengo una contraddizione.
     Infatti deve essere $\langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle = \langle a_1 a_2 \rangle$ e ottengo
     $A_1 \langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle = A_1(\langle x \rangle \cap \langle A_1, A_2 \rangle) = A_1 \langle a_1 a_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$.
     Quindi $\langle A_1, A_2 \rangle \subseteq A_1 \langle x \rangle$.
     $A_1 \langle x \rangle$ è gruppo con massimale ciclico e dunque
     $A_1 \langle x \rangle \cong M(2^n), D_{2^n}, Q_{2^n}, S(2^n)$ dove $|A_1 \langle x \rangle| = 2^n$ con $n \leq 4$.
     $M(2^n)$ per $n \geq 4$ è un gruppo quasi hamiltoniano e non contiene sottogruppi isomorfi a D_8.
     D_{2^n} ha sottogruppi di ordine 4 non permutabili .
     Q_{2^n} se $n \geq 4$ ha sottogruppi di ordine 4 non permutabili .
     S_{2^n} ha sottogruppi di ordine 4 non permutabili .

2. $H = \Omega(G) \cong D_8 * A$
   In questo caso:
   $H = \langle a_1, a_2, a : a_1^2 = a_2^2 = a^4 = 1, [a_1, a_2] = a^2, [a_1, a] = 1, [a_2, a] = 1 \rangle$.
   Se $x \in H \Rightarrow A_1^x \subseteq A_1N \trianglelefteq H$
   Se $x \notin H$ allora $o(x) \geq 4$.Sia $\langle y \rangle = \Omega(\langle x \rangle)$.
   Essendo $A_1 \langle x \rangle = \langle x \rangle A_1$ si ha $A_1 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_1$.
   Analogamente si ha $A_2 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_2$ e dunque $\langle y \rangle = N$.
   Distinguiamo i due casi:

   - Se $\langle x \rangle \cap H = N$ allora $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1N$ ed essendo $H \trianglelefteq G$ ottengo $A_1N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$ da cui $A_1^x \subseteq A_1N$.
   - Se $|\langle x \rangle \cap H| = 4$ allora ho le seguenti possibilità:
     - $\langle x \rangle \cap H = \langle t \rangle$ dove $t = a_1 a_2, a a_2$.
       $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 \langle t \rangle \cong D_8$.
       Quindi $D_8 \cong \langle A_1, t \rangle \subseteq A_1 \langle x \rangle$ ma come si è visto ciò non è possibile.
     - $\langle x \rangle \cap H = \langle t \rangle$ dove $t = a, a a_1$.
       $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 \langle t \rangle = \langle a_1, a \rangle$ da cui $A_1 \langle a \rangle \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$.Essendo $A_1N = \Omega_1(A_1 \langle a \rangle)\mathrm{char}\ \langle A_1 \langle a \rangle \rangle$ si ha $A_1N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$.

3. $H = \Omega(G) \cong D_8 * Q_8$. In questo caso:
$$\begin{aligned} H = \langle a_1, a_2, w, z : \ & a_1^2 = a_2^2 = w^4 = 1, w^z = w^{-1}, [a_1, a_2] = w^2 = z^2, \\ & [a_1, w] = 1, [a_2, w] = 1, [a_1, z] = 1, [a_2, z] = 1 \rangle . \end{aligned}$$

Se $x \in H \Rightarrow A_1^x \subseteq A_1 N \trianglelefteq H$
Se $x \notin H$ allora $o(x) \geq 4$.Sia $\langle y \rangle = \Omega(\langle x \rangle)$.
Essendo $A_1 \langle x \rangle = \langle x \rangle A_1$ si ha $A_1 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_1$.
Analogamente si ha $A_2 \langle y \rangle = \langle y \rangle A_2$ e dunque $\langle y \rangle = N$.
Distinguiamo i due casi:

- Se $\langle x \rangle \cap H = N$ allora $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 N$ ed essendo $H \triangleleft G$ ottengo $A_1 N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle \Rightarrow A_1^x \subseteq A_1 N$.
- Se $|\langle x \rangle \cap H| = 4$ allora ho le seguenti possibilità:
  - $\langle x \rangle \cap H = \langle t \rangle$ dove $t = a_1 a_2, a_2 w, a_2 z, a_2 wz$. In questo caso $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 \langle t \rangle \cong D_8$ e come si è visto non è possibibile.
  - $\langle x \rangle \cap H = \langle t \rangle$ dove $t = w, z, wz, a_1 w, a_1 z, a_1 wz$.In questo caso $A_1 \langle x \rangle \cap H = A_1(\langle x \rangle \cap H) = A_1 \langle t \rangle \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$.
    Essendo $A_1 \langle t \rangle$ abeliano, $A_1 N = \Omega_1(A_1 \langle t \rangle)$ char $A_1 \langle t \rangle$ si ha $A_1 N \trianglelefteq A_1 \langle x \rangle$.

□

Teorema 2.2.3.
Sia $p = 2$ e sia G un 2-gruppo finito.Allora $G \in S(2)$ se e solo se G ha la seguente presentazione:

1. $G \cong \left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1} \right\rangle$.
2. $G \cong \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$.
3. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$.

Dimostrazione.
Come si è visto $A_1 N \trianglelefteq G$ e analogamente anche $A_2 N \trianglelefteq G$ e dunque $\langle A_1, A_2 \rangle \trianglelefteq G$.
$C_G(\langle A_1, A_2 \rangle) = C_G(A_1) \cap C_G(A_2)$
$[G : C_G(A_i)] = 2$ con i=1,2 e $[G : C_G(A_1) \cap C_G(A_2)] = 2^2$.
$H \cap (C_G(A_1) \cap C_G(A_2)) = Z(H) = N$ e dunque $G = H * C_G(H)$.
Inoltre se $K \leq C_G(H), |K| = 2$ allora $K \leq H$ e permuta sia con A_1 che con A_2 da cui $K = N$. Quindi $C_G(H)$ è ciclico o è il gruppo dei quaternioni. Poichè se $n \geq 4$ Q_{2^n} contiene sottogruppi non permutabili di ordine 4 si

conclude.
Il gruppo $\left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1} \right\rangle$ chiaramente è in $S(2)$.
Il gruppo $\left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$ appartiene a $S(2)$. Infatti i sottogruppi $\langle ab \rangle, \langle b \rangle$ non permutano e hanno ordine 2. Gli altri sottogruppi sono normali come prova il teorema 0.0.2.
Il gruppo $\left\langle \begin{array}{cc} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$ appartiene a $S(2)$. Infatti i sottogruppi $\langle ab \rangle, \langle b \rangle$ non permutano e hanno ordine 2. Gli altri sottogruppi sono normali come prova il teorema 0.0.2.

□

2.3 p-gruppi appartenenti a S(p^i) con i$\geq$2 e p$>$3

In tutto il capitolo G indica un gruppo come nel titolo.

Proposizione 2.3.1.
Se A e B sono sottogruppi di G di ordine p^i tali che $AB \neq BA$ allora A e B sono ciclici e se $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ allora $A \cap B = \langle a^p \rangle = \langle b^p \rangle$.

Dimostrazione.
A e B sono ciclici perche altrimenti sarebbero prodotto di permutabili; poniamo $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$.
Consideriamo $\langle a^p \rangle$ e $\langle b^p \rangle$. Avendo ordine p^{i-1} $\langle a^p \rangle$ e $\langle b^p \rangle$ sono permutabili in G e dunque
$\langle a^p \rangle \langle b \rangle \leq G$ e $\langle b^p \rangle \langle a \rangle \leq G$
Ora $(\langle a^p \rangle \langle b \rangle)(\langle b^p \rangle \langle a \rangle) = \langle b \rangle \langle a \rangle$ e $(\langle b^p \rangle \langle a \rangle)(\langle a^p \rangle \langle b \rangle) = \langle a \rangle \langle b \rangle$
Quindi $(\langle a^p \rangle \langle b \rangle)(\langle b^p \rangle \langle a \rangle) \neq (\langle b^p \rangle \langle a \rangle)(\langle a^p \rangle \langle b \rangle)$
Poichè non permutano dovrà essere:
$|\langle a^p \rangle \langle b \rangle| = p^i$ e $|\langle b^p \rangle \langle a \rangle| = p^i$ da cui $\langle a^p \rangle \leq \langle b \rangle$ e $\langle b^p \rangle \leq \langle a \rangle$
Quindi: $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^p \rangle = \langle b^p \rangle$

□

Proposizione 2.3.2.
$H = \Omega_1(G) = \{g \in G : g^p = 1\}$ *è abeliano elementare e* $|H| = p^2$.

Dimostrazione.
$H = \Omega_1(G) = \{g \in G : g^p = 1\}$ perchè i sottogruppi di ordine p permutano; H è abeliano elementare e poichè G non è ciclico $|H| \geq p^2$.
Proviamo che $|H| = p^2$.
siano $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$ due sottogruppi non permutabili. Per la proposizione precedente i sottogruppi $\langle a \rangle / \langle a^p \rangle$ e $\langle b \rangle / \langle b^p \rangle$ hanno ordine p, non permutano e generano un sottogruppo di ordine p^3. Quindi $|\langle a, b \rangle| = p^{i+2}$.
Poichè $\langle a \rangle \cap H = p$ e $|H| > p$ esiste $t \in H, t \notin \langle a \rangle$.
$\langle a \rangle \langle t \rangle \leq G$ ha ordine p^{i+1} ed è abeliano o isomorfo a M(p^{i+1}).
In ogni caso $\langle b \rangle \nsubseteq \langle a \rangle \langle t \rangle$ e $\langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$ ha ordine p^{i+2} da cui $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$.
Ora $\langle a \rangle \langle t \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ e contiene tutti i coniugati di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$.
Supponendo che esista $s \in H, s \notin \langle a \rangle \langle t \rangle$ con gli argomenti di sopra si ottiene $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle s \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \langle s \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ e contiene tutti i coniugati di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$.
Quindi $\langle a \rangle \langle s \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle$ contraddizione. □

Teorema 2.3.3.
Non esiste un p-gruppo $G \in S(p^i)$ con $i \geq 2$ e $p > 3$.

Dimostrazione.
In particolare dalla dimostrazione della proposizione 2.3.2 si ottiene che se $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ sono sottogruppi di G di ordine p^i tali che $AB \neq BA$ allora $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$ dove $t \in H \setminus \Omega_1(A)$.
Inoltre $\langle a \rangle \langle t \rangle \leq G$ ha ordine p^{i+1} è abeliano o isomorfo a $\mathrm{M}(p^{i+1})$ e analogamente $\langle b \rangle \langle t \rangle \leq G$ ha ordine p^{i+1} ed è abeliano o isomorfo a $\mathrm{M}(p^{i+1})$.
Inoltre per la proposizione 2.3.1 $\langle a^p \rangle = \langle b^p \rangle$ e posso scegliere b in modo che $a^p = b^p$.
Ho i seguenti casi:

- $a^t = a, b^t = b, a^b = at$ (b induce sul sottogruppo abeliano $\langle a \rangle \langle t \rangle$ un automorfismo di ordine p e lascia invariati gli elementi di $\Omega_1(\langle a, t \rangle)$. Per il teorema 4.6 di [6] $a^b = ah$ con $h \in \left\langle a^{p^{i-1}}, t \right\rangle$ e a meno di cambiare t con h otteniamo quanto voluto).Poichè $\langle a, b \rangle$ ha classe due ottengo: $(ab^{-1})^p = a^p b^{-p} t^{\binom{p}{2}} = 1$.
  Dunque in $\langle a, b \rangle$ esiste un elemento di ordine p che non normalizza $\langle a \rangle$ contro le ipotesi.

- $a^t = a, b^t = b^{1+hp^{i-1}}$ Poichè $\langle a, t \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ si ha che $a^b = a^i t^r$.
  Essendo $a^p = b^p$ ottengo
  $a^p = (a^p)^b = a^{ip} t^{rp} = a^{ip} \Leftrightarrow p \equiv ip \pmod{p^i} \Leftrightarrow i = 1 + kp^{i-1}$.
  Quindi $a^t = a, b^t = b^{1+hp^{i-1}}, a^b = aa^{kp^{i-1}} t^r$.
  In particolare $\langle a, b \rangle$ ha classe ≤ 3 e derivato contenuto in $\left\langle a^{p^{i-1}}, t \right\rangle$ di esponente p. Il p-gruppo $\langle a, b \rangle$ è regolare.
  Quindi: $(ba^{-1})^p = b^p a^{-p} x^p$ con $x \in \langle a, b \rangle'$, da cui $(ba^{-1})^p = 1$.
  Dunque in $\langle a, b \rangle$ esiste un elemento di ordine p che non normalizza $\langle a \rangle$ contro le ipotesi.

- $a^t = a^{1+h_1 p^{i-1}}, b^t = b^{1+h_2 p^{i-1}}$ con $h_1, h_2 \in \{1, 2 \ldots, p-1\}$.
  In questo caso posto $s = a^{h_1 p^{i-1}}$ ottengo $a^t = as, b^t = bs^k$ con $k \in \{1, 2, \ldots p-1\}$.
  Poichè $\langle a, t \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ si ha $a^b = a^i t^r$ ed essendo $a^p = b^p$ ottengo $a^p = (a^p)^b = a^{ip} t^{rp} = a^{ip} \Leftrightarrow p \equiv ip \pmod{p^i} \Leftrightarrow i = 1 + kp^{i-1}$. Quindi $a^t = as, b^t = bs^k, a^b = aa^{hp^{i-1}} t^r$.
  In particolare $\langle a, b \rangle$ ha classe ≤ 3 e derivato contenuto in $\left\langle a^{p^{i-1}}, t \right\rangle$ di esponente p. Il p-gruppo $\langle a, b \rangle$ è regolare.
  Quindi: $(ba^{-1})^p = b^p a^{-p} x^p$ con $x \in \langle a, b \rangle'$, da cui $(ba^{-1})^p = 1$.
  Dunque in $\langle a, b \rangle$ esiste un elemento di ordine p che non normalizza $\langle a \rangle$

contro le ipotesi. Dunque in $\langle a, b\rangle$ esiste un elemento di ordine p che non normalizza $\langle a\rangle$ contro le ipotesi.

$\square$

2.4 3-gruppi appartenenti a $\mathbf{S}(\mathbf{3}^i)$ con $i \geq 2$

Gli argomenti usati nel caso $p \neq 3$ per provare che $|H| = p^2$, $|\langle a, b\rangle| = p^{i+2}$ e $\langle a, b\rangle = \langle a\rangle \langle t\rangle \langle b\rangle$ continuano a valere anche nel caso $p = 3$.
Distinguiamo due casi:

1. $i > 3$.
   Come nel caso $p \neq 3$ ho tre casi possibili:

   (a) $a^t = a, b^t = b, a^b = at$ (b induce sul sottogruppo abeliano $\langle a\rangle \langle t\rangle$ un automorfismo di ordine 3 e lascia invariati gli elementi di $\Omega_1(\langle a\rangle \langle t\rangle))$.
   Il gruppo $\langle a, b\rangle$ ha classe 2 e $\langle a, b\rangle' = \langle t\rangle$ e quindi:
   $(ab^{-1})^3 = a^3 b^{-3} t^{\binom{3}{2}} = 1$.
   Dunque in $\langle a, b\rangle$ esiste un elemento di ordine 3 che non normalizza $\langle a\rangle$ contro le ipotesi.

   (b) $b^t = b, a^t = a^{1+h3^{i-1}}, b^a = bt^{-1}$ con $h \in \{1, 2\}$.
   $\left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle \leq Z(\langle a, b\rangle)$, $\langle a, b\rangle' \leq \left\langle a^{3^{i-1}}, t \right\rangle$ ed inoltre $\langle a, b\rangle / \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle$ ha classe ≤ 2.
   Quindi $(ab^{-1})^3 \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle = 1$ da cui $(ab^{-1})^3 \in \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle$.
   Quindi ab^{-1} ha ordine 3 o 9 ma non permuta con $\langle a\rangle$:infatti $\langle a, b\rangle = \langle a, ab^{-1}\rangle$ ma se permutassero $|\langle a, ab^{-1}\rangle| \leq \frac{3^i 9}{3}$.

   (c) Con gli stessi calcoli e le stesse notazioni del caso $p \neq 3$ abbiamo le relazioni $a^t = as, b^t = bs^k, a^b = at$.
   $\langle s\rangle = \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle \leq Z(\langle a, b\rangle)$, $\langle a, b\rangle' \leq \langle s, t\rangle$ ed inoltre $\langle a, b\rangle / \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle$ ha classe ≤ 2.
   Quindi $(ab^{-1})^3 \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle = 1$ da cui $(ab^{-1})^3 \in \left\langle a^{3^{i-1}} \right\rangle$.
   Quindi ab^{-1} ha ordine 3 o 9 ma non permuta con $\langle a\rangle$:infatti $\langle a, b\rangle = \langle a, ab^{-1}\rangle$ ma se permutassero $|\langle a, ab^{-1}\rangle| \leq \frac{3^i 9}{3}$.

2. $i = 2$.
   Elenchiamo i gruppi non abeliani di ordine 3^4:

   (a) $\mathrm{M}(3^4)$

(b) $\langle u, v, w, x : \quad x^3 = u^3 = v^3 = w^3 = 1, uv = vu,$
$vw = wv, uw = wu, u^x = uv, w^x = v, v^x = vw\rangle .$

(c) $\langle u, v, w, x : \quad x^3 = u^3 = v^3 = w^3 = 1, uv = vu,$
$vw = wv, uw = wu, u^x = uv, w^x = v, v^x = v\rangle .$

(d) $\langle u, v, w, x : \quad u^3 = v^3 = w^3 = 1, x^3 = v, uv = vu,$
$vw = wv, uw = wu, u^x = uv, w^x = v, v^x = v\rangle .$

(e) $\langle u, v, w, x : \quad u^3 = v^3 = w^3 = 1, x^3 = w, uv = vu,$
$vw = wv, uw = wu, u^x = uv, w^x = v, v^x = v\rangle .$

(f) $\langle x, y : x^9 = y^9 = 1, x^y = x^4\rangle$.

(g) $\langle x, v : x^3 = v^3 = 1, [x, v] \in Z(\langle x, v\rangle)\rangle * \langle u : u^9 = 1\rangle$.

(h) $\langle x, y, z : x^3 = y^3 = z^9 = 1, yz = zy, y^x = yz^3, z^x = zy\rangle$.

(i) $\left\langle x, y, z : x^3 = y^3 = z^9 = 1, yz = zy, y^x = yz^{3k^2}, z^x = zy \right\rangle$.

(j) $\langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3}\rangle$.

I gruppi (a) e (f) sono un M-gruppo.
I gruppi (b),(c),(d),(e) possiedono un sottogruppo abeliano elementare di tipo (p,p,p).
Il gruppo (g) contiene elementi di ordine 3 che non permutano.
I gruppi (h) e (i) contengono x che è elemento di ordine 3 ma non normalizza $\langle z\rangle$.
Proviamo che il gruppo (j) è del tipo cercato.
Certamente i sottogruppi di ordine 3^3 sono massimali e quindi normali ed esistono sottogruppi di ordine 3^2 che non sono quasi normali. Resta da provare che gli elementi di ordine 3 normalizzano ogni elemento di ordine 9 che non appartenga a $\langle u, v\rangle$. A tal fine basta vedere che ogni elemento di questo tipo ha cubo in $\langle u^3\rangle$.
Osservo che:
$(v^j)^x = v^j u^{-3j}$
$(v^j)^{x^2} = v^j u^{-6j}$
$u^x = uv$
$u^{x^2} = uvvu^{-3}$
$(u^i)^x = u^i v^i$
$(u^i)^{x^2} = u^i v^i v^i u^{-3i}$
Un elemento che non stia in $\langle u, v\rangle$ è della forma $x(u^i v^j)$, o $x^2(u^i v^j)$.

$$\begin{aligned}
[x(u^i v^j)]^3 &= x^3(u^i v^j)^{x^2}(u^i v^j)^x(u^i v^j) \\
&= x^3 u^i v^i v^i u^{-3i} v^j u^{-6j} u^i v^i v^j u^{-3j} u^i v^j \\
&= x^3 u^{i(1+1+1-3)} u^{-j(3+6)} v^{i(1+1+1)} v^{j(1+1+1)} = x^3
\end{aligned}$$

$$[x^2(u^i v^j)]^3 = x^6(u^i v^j)^{x^4}(u^i v^j)^{x^2}(u^i v^j) = x^6(u^i v^j)^x(u^i v^j)^{x^2}(u^i v^j) = x^6.$$

Teorema 2.4.1.
Dato G 3-gruppo finito sono equivalenti:

1. $G \in S(3^i)$ *con* $i > 2$;
2. $G \in S(3^2)$;
3. $G = \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3} \rangle$.

Dimostrazione.
Ho già provato che se
G$\cong \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3} \rangle$ allora
$G \in S(3^2)$ e che non esistono 3-gruppi in $S(3^i)$ con $i > 2$.

Se $G \in S(3^2)$ allora G contiene un sottogruppo isomorfo a
$\langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3} \rangle$.
Inoltre essendo $\Omega_1(G) = \langle u^3, v \rangle$ G verifica le ipotesi del teorema (4.12) del [6] e dunque $C_G(\Omega_1(G))$ è massimale e metaciclico e $G = \langle x \rangle \ C_G(\Omega_1(G))$.
Dimostro che $C_G(\Omega_1(G)) = \langle u, v \rangle$.
Suppongo $y \in C_G(\Omega_1(G))$ di ordine 9.
Provo che $y \in \langle u, v \rangle$.
Ho le seguenti possibilità:

- $\langle y \rangle \cap \langle u \rangle = \langle u \rangle$
  In questo caso $y \in \langle u, v \rangle$.

- $\langle y \rangle \cap \langle u \rangle = \langle u^3 \rangle$
  Allora poichè $\langle u, y \rangle$ non è ciclico ottengo $\Omega_1(\langle u, y \rangle) = \langle u^3, v \rangle$.
  Posso sempre supporre $u^3 = y^3$.
  Certamente $\langle u \rangle$ e $\langle y \rangle$ permutano.Infatti se così non fosse avrei
  $\langle u, y \rangle \cong \langle u, x \rangle$ ma $\langle \Omega_1 \langle y, u \rangle \rangle = \langle u^3, v \rangle \subseteq Z(\langle u, y \rangle)$ mentre $\Omega_1(\langle x, u \rangle) \nsubseteq Z(\langle x, u \rangle)$.
  Quindi $\langle u \rangle$ e $\langle y \rangle$ permutano, $\langle y \rangle \trianglelefteq \langle u, y \rangle$ ed u induce su $\langle y \rangle$ un automorfismo di ordine 3 che tiene fisso y^3. Quindi ottengo $y^u = y^{1+3h}$ con $h \in \{1, 2, 3\}$ e trovo che $u^{-1}y$ ha ordine 3.
  Ora $u^{-1}y = u^{3i}v^j$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$ da cui $y \in \langle u, v \rangle$.

- $\langle y \rangle \cap \langle u \rangle = 1$.
  Per la proposizione 2.3.1 i sottogruppi $\langle u \rangle$ e $\langle y \rangle$ avendo intersezione identica permutano.
  Osservo che $\langle y^3, u^3 \rangle = \Omega_1(\langle u, y \rangle) = \langle u^3, v \rangle$ da cui $y^3 = u^{3k}v^j$.
  Inoltre essendo $\langle y, u^3 \rangle \trianglelefteq \langle u, y \rangle$
  $y^u = y^i u^{3h}$ e
  $y^3 = (y^3)^u = y^{3i}u^{9h} = y^{3i}$ ottengo

$y^u = yh$ con $h \in \Omega_1(\langle u, y\rangle)$.
Considero
$(u^k y^{-1})^3 = u^{3k}(y^{-1})^{u^{2k}}(y^{-1})^{u^k}y^{-1} = u^{3k}y^{-1}h^{2k}y^{-1}h^k y^{-1} = u^{3k}y^{-3} = v$.
Quindi posso sempre supporre che sia $y^3 = v$.
Avendo intersezione identica i sottogruppi $\langle y\rangle$ e $\langle x\rangle$ permutano e da $\langle y, x^3\rangle \trianglelefteq \langle x\rangle$ ottengo $y^x = y^i x^{3h}$
Ora però:
$vu^{-3} = v^x = (y^3)^x = (y^i x^{3h})^3 = y^{3i} = v^i$ assurdo.

Suppongo ora $y \in C_G(\Omega_1(G))$ di ordine 27.
Ho le seguenti possibilità

- $\langle y\rangle \cap \langle u\rangle = \langle u\rangle$ impossibile perchè x normalizzerebbe $\langle y\rangle$ e quindi anche $\langle u\rangle$.
- $\langle y\rangle \cap \langle u\rangle = \langle u^3\rangle$. Allora posso prendere y in modo che $u^3 = y^9$ e ho due casi :

    1. $\langle u, y\rangle$ è abeliano. In questo caso uy^{-3} ha ordine 3 e avrò $uy^{-3} = u^{3k}v^i$ con $k \in \{1, 2, 3\}$ e $i \in \{1, 2\}$ da cui $u = y^3u^{3k}v^i$.
    Poichè y ha ordine 27 $\langle x\rangle$ permuta con $\langle y\rangle$ e $\langle y, x\rangle$ o è abeliano o è isomorfo a M(81).In ogni caso $y^x = y^{1+9h}$ con $h \in \{1, 2, 3\}$ da cui $u^x = (y^x)^3(u^{3k})^x(v^i)^x = y^3u^{3k}v^iu^{-3i} = (y^3u^{3k}v^i)u^{-3i} = uu^{-3i}$ e quindi avrei $u^x \in \langle u\rangle$ assurdo.
    2. $\langle u, y\rangle \cong M(81)$. In questo caso $y^x = y^{1+9k}$ con $k \in \{1, 2\}$ e come sopra uy^{-3} ha ordine 3 e $uy^{-3} = u^{3k}v^i$ con $k \in \{1, 2, 3\}$ e $i \in \{1, 2\}$ da cui $u = y^3u^{3k}v^i$.
    Poichè y ha ordine 27 $\langle x\rangle$ permuta con $\langle y\rangle$ e $\langle y, x\rangle$ o è abeliano o è isomorfo a M(81). In ogni caso $y^x = y^{1+9h}$ con $h \in \{1, 2, 3\}$ da cui $uv = u^x = (y^x)^3(u^{3k})^x(v^i)^x = y^3u^{3k}v^iu^{-3i} = uu^{-3i}$ e quindi avrei $u^x \in \langle u\rangle$ assurdo.

- $\langle y\rangle \cap \langle u\rangle = 1$
Questo significherebbe che esiste un elemento $y \in C_G(\Omega_1(G))$ di ordine 9 che non interseca $\langle u\rangle$ assurdo.

Ho dimostrato che $C_G(\Omega_1(G)) = \langle u, v\rangle$ e quindi $G = \langle u, v, x\rangle$ come si voleva.
$\square$

2.5 2-gruppi appartenenti a S(4)

Proposizione 2.5.1.
Sia G 2-gruppo, $G \in S(4)$ e $|\Omega_1(G)| = 2$.
Allora G è il gruppo dei quaternioni generalizzato di ordine 16.

Dimostrazione.
Se $|\Omega_1(G)| = 2$ poichè G non può esser ciclico deve essere isomorfo a Q_g gruppo dei quaternioni generalizzato di ordine $g = 2^n$.
$Q_{16} = \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1} \rangle$ appartiene a S(4). Infatti i sottogruppi $\langle a \rangle$ e $\langle ab \rangle$ non permutano mentre i sottogruppi di ordine 8 sono massimali e quindi normali.
Q_8 è hamiltoniano e se $n \geq 5$ allora Q_{2^n} contiene sottogruppi non permutabili di ordine diverso da 4. Infatti sia $Q_{2^n} = \left\langle a, b : a^4 = 1, b^{2^{n-2}} = a^2, b^a = b^{-1} \right\rangle$ per $n \geq 5$. Il sottogruppo $\langle ab \rangle$ ha ordine 4, permuta con $\left\langle b^{2^{n-3}} \right\rangle$ e il sottogruppo generato $\left\langle ab, b^{2^{n-3}} \right\rangle$ ha ordine 8. Il sottogruppo $\langle a \rangle$ ha ordine 4, ma $\left\langle ab, b^{2^{n-3}} \right\rangle$ e $\langle a \rangle$ non permutano perchè se permutassero $\left\langle ab, b^{2^{n-3}}, a \right\rangle = \langle a, b \rangle$ avrebbe ordine ≤ 16 assurdo. Quindi ho sottogruppi di ordini diversi non permutabili. □

Proposizione 2.5.2.
Sia G gruppo finito $G \in S(2^2)$ con $|\Omega_1(G)| > 2$.
Allora $\Omega_1(G)$ ha ordine 4.

Dimostrazione.
Siano A e B sottogruppi di G aventi ordine 4 e tali che $AB \neq BA$.
A e B sono ciclici altrimenti sarebbero prodotto di permutabili.
Poniamo $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$.
La proposizione 2.3.1 vale anche per $p = 2$ e quindi $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a^2 \rangle$ da cui $a^2 = b^2$.
Essendo $|\Omega_1(G)| > 2$ esiste $t \in \Omega_1(G) \setminus \langle a^2 \rangle$.
$\langle a, t \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \leq G$ e $|\langle a, t \rangle| = 2^2$.
Quindi $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$.
Inoltre $\langle a, t \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ e dunque $\langle a, t \rangle$ contiene tutti i coniugati di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$, anzi è la chiusura normale di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$.
Suppongo ora che esista $s \in \Omega_1(G), s \notin \langle a, t \rangle$.
Con gli stessi argomenti di sopra ottengo $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle s \rangle \langle b \rangle$, $\langle a, s \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ da cui $\langle a, t \rangle = \langle a, s \rangle$ contro l'ipotesi.

□

Nel seguito del capitolo G è 2-gruppo con $\Omega_1(G) > 2$.

Proposizione 2.5.3.
Sia G 2-gruppo finito $G \in S(2^2)$.
Allora G contiene un sottogruppo isomorfo a
$T = \langle x, y : x^4 = y^4 = 1, y^x = y^3 \rangle$.

Dimostrazione.
Dalla dimostrazione della proposizione 2.5.2 ottengo che presi $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ sottogruppi con $AB \neq BA$ allora $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$ dove $t \in \Omega_1(G) \setminus \langle a^2 \rangle$, e $|\langle a, b \rangle| = 2^4$.
Essendo $\langle a, t \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ dovrà essere $a^b = a^i t$ con $i \in \{1, 3\}$.
Inoltre essendo $\langle a \rangle \trianglelefteq \langle a, t \rangle$ e $\langle b \rangle \trianglelefteq \langle b, t \rangle$ trovo i seguenti 4 casi:

1. $a^t = a^3$ $b^t = b$ ma
   $a^2 = (a^2)^b = (a^i t)^2 = a^i t a^i t = a^i (a^i)^t = a^i a^{3i} = a^{4i} = 1$ assurdo.

2. $a^t = a$ $b^t = b^3$ ma
   $b^2 = (b^2)^a = (b^i t)^2 = b^i t b^i t = b^i (b^i)^t = b^i b^{3i} = b^{4i} = 1$ assurdo.

3. $a^t = a^3$ $b^t = b^3$ ma
   $a^2 = (a^2)^b = (a^i t)^2 = a^i t a^i t = a^i (a^i)^t = a^i a^{3i} = a^{4i} = 1$ assurdo.

4. $a^t = a$ $b^t = b$
   Quindi $a^2 = (a^2)^b = (a^i t)^2 = a^i t a^i t = a^{2i} \Leftrightarrow 2 \equiv 2i \mod(4) \Leftrightarrow i \in \{1, 3\}$
   Se $a^b = a^3 t$ allora sostituendo a t $t' = a^2 t$ otteniamo:
   $at' = t'a, bt' = t'b$ e $a^b = at'$.

Quindi un 2-gruppo che appartenga a $S(2^2)$ contiene sempre un sottogruppo isomorfo a $\big\langle a, b : a^4 = t^2 = 1, b^2 = a^2, at = ta, bt = tb, a^b = at \big\rangle$.
Osservo che tutti i sottogruppi di ordine 2 sono contenuti nel centro e dunque sono normali, e che i sottogruppi di ordine 8 sono massimali e quindi normali.
Inoltre se considero:
$(ab^{-1})^2 = a^2 (b^{-1})^a b^{-1} = a^2 t b^{-2} = t$
$(ab^{-1})^a = atb^{-1} = (ab^{-1})^3$
posti: $(ab^{-1}) = x$ e $b = y$ posso concludere che
$\langle a, b \rangle \cong \langle x, y : x^4 = y^4 = 1, y^x = y^3 \rangle$. □

Osservazione 3.
Osservo che
$T = \{1, x^2, y^2, x^2y^2, x, x^3, xy^2, x^3y^2, xy, x^3y, xy^3, x^3y^3, y, y^3, yx^2, y^3x^2\}$.

Osservazione 4.
Dalla dimostrazione della proposizione 2.5.2 segue che se due sottogruppi ciclici hanno intersezione identica allora sono permutabili.

Teorema 2.5.4.
Il 2-gruppo $T = \langle x, y : x^4 = y^4 = 1, y^x = y^3 \rangle$ *non è immergibile in nessun 2-gruppo* $G \in S(4)$ *a esponente >4.*

Dimostrazione.
Suppongo esista $z \in G$ di ordine 8.
Osservo che detto t elemento di ordine 2 diverso da z^4, essendo $\langle z \rangle$ permutabile in G, t normalizza $\langle z \rangle$ e ho le seguenti possibilità:

- $z^t = z$;
- $z^t = z^3$ ma in questo caso $(tz^2)^2 = t^2 z^6 z^2 = 1$ assurdo perchè da $t, tz^2 \in \Omega_1(G) = \Omega_1(T)$ ottengo $z^2 \in \Omega_1(G)$ mentre z ha ordine 8;
- $z^t = z^5$;
- $z^t = z^7$ ma in questo caso $(tz)^2 = t^2 = 1$ assurdo perchè $z \notin T$;

Quindi $\langle z, t \rangle$ è abeliano o isomorfo a M(16).
Distinguo due casi:

1. Suppongo $z^2 \notin T$;
   (a) $z^4 = y^2$
   Allora essendo $\langle z \rangle \trianglelefteq \langle z, y \rangle$ ho le seguenti possibilità:
   - $z^y = z$ ma allora $(z^2 y)^2 = z^4 y^2 = 1$ mentre $z^2 \notin T$;
   - $z^y = z^3$ ma $(yz)^2 = y^2 z^4 = y^4 = 1$ assurdo;
   - $z^y = z^{1+4}$ ma allora $(yz^2)^2 = y^2 (z^5)^2 z^2 = y^2 z^4 = 1$ mentre $z^2 \notin T$;
   - $z^y = z^7$
     $(yz)^2 = y^2$ quindi yz ha ordine 4,$\langle yz \rangle$ permuta con $\langle x \rangle$ e $|\langle yz, x \rangle| = 16$ da cui $\langle yz, x \rangle$ è permutabile in G. In particolare permuta con y e $|\langle yz, x, y \rangle| = \frac{16 \cdot 4}{2} = 32$ ma $\langle yz, x, y \rangle = \langle x, y, z \rangle$ che ha invece ordine 64.

   (b) $z^4 = x^2$
   Allora essendo $\langle z \rangle \trianglelefteq \langle z, x \rangle$ ho le seguenti possibilità:
   - $z^x = z$ ma allora $(z^2 x)^2 = z^4 x^2 = 1$ mentre $z^2 \notin T$;
   - $z^x = z^3$ ma $(xz)^2 = x^2 z^4 = x^4 = 1$ assurdo;
   - $z^y = z^{1+4}$ ma allora $(xz^2)^2 = x^2 (z^5)^2 z^2 = x^2 z^4 = 1$ mentre $z^2 \notin T$;

- $z^y = z^7$
  $(xz)^2 = x^2$ quindi xz ha ordine 4, $\langle xz\rangle$ permuta con $\langle y\rangle$ e $|\langle xz, y\rangle| = 16$ e $\langle xz, y\rangle$ è permutabile in G. In particolare permuta con $\langle x\rangle$ e $|\langle xz, y, x\rangle| = \frac{16\cdot 4}{2} = 32$ ma
  $\langle xz, y, z\rangle = \langle x, y, z\rangle$ che ha invece ordine 64.

(c) $z^4 = x^2y^2$.
Essendo $\langle z, x^2\rangle \trianglelefteq \langle z, x\rangle$ ho le seguenti possibilità:

- $z^x = z$;
- $z^x = zx^2$;
  $(zx)^2 = z^2$ ma $|\langle zx, z\rangle| = 16$ mentre $\langle zx, z\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 32.
- $z^x = z^3$ ma $(xz)^2 = x^2z^3z = y^2$ e quindi $\langle xz\rangle$ permuta con $\langle x\rangle$ e dovrei avere che l'ordine di $\langle xz, x\rangle$ è 16 mentre $\langle xz, x\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 32.
- $z^x = z^3x^2$;
  $x^z = x^{-1}z^6$;
  $(xz)^2 = x^2z^3x^2z \in \langle z^4\rangle$ e quindi avrei $|\langle zx, x\rangle| \leq 16$ mentre $\langle zx, x\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 32.
- $z^x = z^5$.
- $z^x = z^5x^2$;
  $x^z = x^3z^4$;
  $(zx)^2 = z^2x^3z^4x = z^6$ e quindi $|\langle zx, z\rangle| = 16$ mentre
  $\langle zx, z\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 32.
- $z^x = z^7$;
  $x^z = xz^2$;
  $(xz)^2 = x^2z^7z = x^2$
  Quindi $\langle xz, y\rangle$ ha ordine 16 ed è quasi normale in G.
  In particolare dovrebbe permutare con $\langle x\rangle$ e $|\langle xz, y, x\rangle| = 32$ mentre $\langle xz, x, y\rangle = \langle x, z, y\rangle$ che ha ordine 64.
- $z^x = z^7x^2$;
  $x^z = x^3z^2$;
  $(xz)^2 = x^2z^7x^2z$.
  Poichè $\langle z, x^2\rangle \cong M(16)$ o è abeliano ottengo:
  se $z^{x^2} = z$ allora $(xz)^2 = z^7z = 1$ assurdo;
  Se $z^{x^2} = z^5$ allora $(xz)^2 = z^4$ ma $\langle xz, x\rangle$ avrebbe ordine 16 mentre $\langle xz, x\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 32.

Quindi ho le seguenti possibilità: $z^x = z, z^x = z^5$.
Con calcoli analoghi si prova che per y ho le possibilità
$z^y = z, z^y = z^5$ e quindi ho i seguenti casi:

- $z^x = z, z^y = z$.
  Ottengo$(xyz)^2 = x^2z^2$ e quindi $|\langle xyz, zx\rangle| = 16$ mentre $\langle xyz, xz\rangle = \langle y, zx\rangle$ ha ordine 32.
- $z^x = z, z^y = z^5$;
  $y^z = yz^4$.
  Ottengo $(zxy)^2 = z^2xyz^4xy = z^6x^2$ e $(zx)^2 = z^2x^2$.
  Quindi $|\langle zx, zxy\rangle| = 16$ mentre $\langle zx, zxy\rangle = \langle zx, y\rangle$ ha ordine 32.
- $z^x = z^5, z^y = z$;
  $z^{x^2} = z$.
  Ottengo $(xyz)^2 = x^2y^3z^5yz = x^2z^6$ e $(xz)^2 = x^2z^5z = x^2z^6$.
  Quindi $|\langle xyz, xz\rangle| = 16$ mentre $\langle xyz, xz\rangle = \langle y, xz\rangle$ ha ordine 32.
- $z^x = z^5, z^y = z^5$;
  $x^z = xz^4, y^z = yz^4$.
  Ottengo $(xyz)^2 = x^2(y^3z^5y)z = x^2z^2$ e $(xz)^2 = x^2z^6$.
  Quindi $|\langle xyz, xz\rangle| = 16$ mentre $\langle xyz, xz\rangle = \langle y, xz\rangle$ ha ordine 32.

2. Suppongo $z^2 \in T$

   (a) $z^4 = y^2$
   Allora $z^2 \in y\langle x^2, y^2\rangle$ e quindi $x^{z^2} = xy^2$. Essendo $\langle z, x^2\rangle \trianglelefteq \langle z, x\rangle$ ottengo:

   - $z^x = z$ ma z^2 normalizzerebbe $\langle x\rangle$ assurdo;
   - $z^x = zx^2$ da cui $x^z = x^3$ ma z^2 normalizzerebbe $\langle x\rangle$ assurdo;
   - $z^x = z^3$;
     $(xz)^2 = x^2z^4 = x^2y^2$ e quindi $|\langle xz, x\rangle| = 16$ (i due sottogruppi permutano perchè $\langle xz\rangle \cap \langle x\rangle = 1$) ma $|\langle x, z\rangle| = 32$.
   - $z^x = z^3x^2$;
     $x^z = x^3z^6$;
     $$\begin{aligned}(xz)^2 &= x^2z^3x^2z = x^2z^4(x^2)^z = x^2z^4x^3z^6x^3z^6\\ &= x(x^3)^{z^2} = xx^3y^2 = z^4\end{aligned}$$
     Quindi dovrei avere $|\langle xz, z\rangle| = 16$ ma $\langle xz, z\rangle = \langle x, z\rangle$ che ha ordine 32.
   - $z^x = z^5$ da cui $x^z = xz^4$ e z^2 normalizzerebbe $\langle x\rangle$ assurdo.
   - $z^x = z^5x^2$ ma
     $(xz)^2 = x^2z^5x^2z = z^4z^{x^2}z$ che vale o z^2 o z^6
     In ogni caso dovrei avere che $|\langle xz, z\rangle| = \frac{8\cdot 8}{4} = 16$ mentre $\langle xz, z\rangle = \langle x, z\rangle$ che ha ordine 32.

- $z^x = z^7$
  $(xz)^2 = x^2$ ma in ogni caso otterrei $|\langle xz, x\rangle| \leq 16$.
- $z^x = z^7x^2$;
  $x^z = x^3z^2$ ma

$$\begin{aligned}(xz)^2 &= x^2z^7x^2z = x^2(x^2)^z = x^2x^3z^2x^3z^2 \\ &= xz^4(x^3)^{z^2} = xz^4x^3y^2 = z^4z^4 = 1\end{aligned}$$

  assurdo.

(b) $z^4 = x^2$
Allora:

- $z^2 = x$ ma in questo caso $\langle z\rangle$ e $\langle xy\rangle$ permutano e $\langle z\rangle \trianglelefteq \langle z, xy\rangle$ ma allora xy normalizzerebbe anche x assurdo.
- $z^2 = x^3$ sostituendo sopra x^3 a x si prova l'assurdo.
- $z^2 = xy^2$ sostituendo sopra xy^2 a x si prova l'assurdo.
- $z^2 = x^3y^2$ sostituendo sopra x^3y^2 a x si prova l'assurdo.
- $z^2 = xy$ invertendo i ruoli di x e xy concludo.
- $z^2 = x^3y$ sostituendo sopra x^3y a xy si prova l'assurdo.
- $z^2 = xy^3$ sostituendo sopra xy^3 a x^3y si prova l'assurdo.
- $z^2 = x^3y^3$ sostituendo sopra x^3y^3 a xy^3 si prova l'assurdo.

(c) $z^4 = x^2y^2$ ma in T non ci sono elementi il cui quadrato sia x^2y^2.

□

Osservazione 5.
Se G è 2-gruppo finito a esponente 4 allora $G' \subseteq \Omega_1(G)$.
Infatti $G/\Omega_1(G)$ avendo esponente ≤ 2 è abeliano e quindi $G' \subseteq \Omega_1(G)$. In particolare un 2-gruppo G appartenente a S(4) e a esponente 4 ha il sottogruppo derivato di ordine 2 o 4.

Proposizione 2.5.5.
Sia G 2-gruppo finito $G \in S(2^2)$ a esponente 4, $|G| = 32$ e $|G'| = 2$.
Allora $G \cong \langle a, b, c : c^4 = a^4 = 1, a^2 = b^2, ca = ac, bc = cb, b^a = b^3\rangle = M$.

Dimostrazione.
Essendo $|G| = 32$, $|G'| = 2$ e $T = \langle a, b : a^4 = b^4 = 1, b^a = b^3\rangle \subseteq G$ ottengo $G' = \langle b^2\rangle$.
Noto che ogni elemento di $G \setminus T$ ha ordine 4. Sia $c \in G \setminus T$.
Allora $c^2 \in \Omega_1(G) = \langle a^2, b^2\rangle \subseteq Z(G)$.

Poichè $[c, a] \in \langle b^2\rangle$, $[c, b] \in \langle b^2\rangle$ posso supporre $[c, a] = b^{2h}, [c, b] = b^{2k}$.

Osservo però che c opera su T come $a^k b^h$ e quindi sostituendo a c $c(a^k b^h)$ posso supporre $c \in Z(G)$.
Non può quindi certamente essere $c^2 = a^2$ (perchè avrei $(ac)^2 = 1$) e nemmeno $c^2 = b^2$ (perchè avrei $(bc)^2 = 1$).Quindi deve essere
$G = \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = a^2 b^2, b^a = b^3, ac = ca, bc = cb \rangle$.
Sostituendo ac al posto di a trovo la rappresentazione dell'enunciato.

Infine nel gruppo M i sottogruppi $\langle ac \rangle$ e $\langle bc \rangle$ non permutano e hanno ordine 4. I sottogruppi di ordine diverso da 4 sono normali come prova il teorema 0.0.2 □

Proposizione 2.5.6.
Sia G 2-gruppo finito $G \in S(2^2)$ a esponente 4,$|G| = 32$ e $|G'| = 4$.
Allora $G \cong \left\langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, ca = ac, c^b = ca^2, b^a = b^3 \right\rangle = R$.

Dimostrazione.
Essendo $|G| = 32$, $|G'| = 4$, $G' \subseteq \Omega_1(G)$ ed essendo
$T = \langle a, b : a^4 = b^4 = 1, b^a = b^3 \rangle \subseteq G$ ottengo $G' = \langle b^2, a^2 \rangle \leq Z(G)$.
Sia $c \in G, c \notin T$. Allora $c^2 \in \Omega_1(G) = \langle a^2, b^2 \rangle$, e $c^2 \neq 1$.
Poichè $[c, a] \in \langle a^2, b^2 \rangle, [c, b] \in \langle a^2, b^2 \rangle$ posso supporre $[c, a] = a^{2i} b^{2j}, [c, b] = a^{2h} b^{2k}$ da cui $[cb^j a^k, a] = a^{2i}, [cb^j a^k, b] = a^{2i}$ e sostituendo $cb^j a^k$ al posto di c posso supporre $a^c = a^{1+2^i}$ e $b^c = a^{2h} b$. Poichè $a^2 \in G'$ uno tra i e h deve essere dispari.
Se sono entrambi dispari $(ab)^c = ab$ e sostituisco ab ad a.
In conclusione ho due possibili azioni di c su T:

- $a^c = a, b^c = a^2 b$.
  Non può essere $c^2 = a^2$ (perchè avrei $(ac)^2 = 1$)e nemmeno $c^2 = a^2 b^2$ (perchè avrei $(cb)^2 = 1$).Quindi ottengo $c^2 = b^2$ e $G \cong R$.

- $a^c = a^{-1}, b^c = b$.
  Non può essere $c^2 = b^2$ (perchè avrei $(bc)^2 = 1$)e nemmeno $c^2 = a^2$ (perchè avrei $\langle c \rangle \trianglelefteq G$ e $G/\langle c \rangle$ sarebbe diedrale di ordine 8 con $\langle a \langle c \rangle \rangle$ non permutabile, e quindi $\langle a, c \rangle$ non è permutabile in G). Quindi deve essere $c^2 = a^2 b^2$. Ponendo $a' = c, b' = a, c' = bc$ si vede che $G \cong R$.

Infine i sottogruppi di R $\langle ab \rangle$ e $\langle a \rangle$ non permutano e hanno ordine 4 mentre i sottogruppi di ordine diverso da 4 sono tutti normali come prova il teorema 0.0.2. □

Osservazione 6.
I soli 2-gruppi a esponente 4 di ordine 32 i cui sottogruppi non normali hanno ordine 4 sono M e R.
Inoltre R non contiene elementi centrali di ordine 4 e non ha sottogruppi di ordine 8 isomorfi al gruppo dei quaternioni.

Proposizione 2.5.7.
M non è contenuto propriamente in nessun G 2-gruppo a esponente 4 appartenente a $S(2^2)$ e di ordine maggiore di 32.
In particolare ogni 2-gruppo a esponente 4 appartenente a $S(2^2)$ con $|G'| = 2$ ha ordine ≤ 32.

Dimostrazione.
Suppongo che sia falso. Allora esiste un gruppo G contenente M.
Posso supporre che $|G| = 64$ e quindi sarà $G = \langle a, b, c, d\rangle$ con $d \notin M$.
Essendo $G' \subseteq \Omega_1(G) = \langle a^2, c^2\rangle$ distinguo i due casi:

1. $|G'| = 2$ e poichè $\langle b^2\rangle \subseteq G'$ si ha $G' = \langle b^2\rangle$.
   Quindi posso supporre $[a, d] = b^{2h}, [b, d] = b^{2k}, [c, d] = b^{2r}$.Osservo che $b^h a^k$ opera su $\langle a, b\rangle$ come d e quindi prendendo $d(b^h a^k)$ al posto di d, posso supporre di avere $[a, d] = 1, [b, d] = 1, [c, d] = b^{2r}$.Inoltre $d \notin Z(G)$ perchè ogni elemento di $\Omega_1(G)$ è quadrato di un elemento di M e dunque da $d^2 = t^2$ avrei $(dt)^2 = 1$.
   Quindi ottengo $[a, d] = 1, [b, d] = 1, [c, d] = b^2$.
   Non può essere $d^2 = a^2$ perchè avrei $(da)^2 = 1$ e nemmeno $d^2 = a^2c^2$ perchè avrei $(dc)^2 = d^2ca^2c = 1$. Resta $d^2 = c^2$ ma in questo caso $(dac)^2 = d^2aca^2ac = 1$.
   Quindi M non è immergibile in un gruppo con derivato di ordine 2.

2. $|G'| = 4$ cioè $G' = \langle b^2, c^2\rangle$.
   Posso supporre $[a, d] = b^{2h}c^{2k}, [b, d] = b^{2i}c^{2j}, [c, d] = b^{2r}c^{2s}$ da cui $[a, db^h a^i] = c^{2k}, [b, db^h a^i] = c^{2j}, [c, db^h a^i] = b^{2r}c^{2s}$. Quindi prendendo $db^h a^i$ al posto di d posso supporre
   $[a, d] = c^{2k}, [b, d] = c^{2j}, [c, d] = b^{2r}c^{2s}$. Distinguiamo 3 casi:

   (a) $d^2 = a^2$.
   $\langle a, b\rangle \cong Q_8$ è permutabile in G e dunque $[a, d] \in \langle b^2\rangle, [b, d] \in \langle b^2\rangle$.Quindi deve essere $[a, d] = 1, [b, d] = 1$ da cui $(ad)^2 = 1$.

   (b) $d^2 = c^2$. Certamente non può essere $[a, d] = c^2$ (perchè $(da)^2 = d^2ac^2a = a^2$ ma da non normalizza $\langle a, b\rangle$) e analogamente non può essere $[b, d] = c^2$ (perchè $(db)^2 = d^2bc^2b = b^2$ ma db non normalizza $\langle a, b\rangle$).
   Non può essere $[c, d] = 1$ (perchè avrei $(cd)^2 = 1$) e se $[c, d] = b^2$, essendo $(dc)^2 = d^2cb^2c = b^2$,rientro nel primo caso sostituendo dc al posto di d. Quindi restano due casi:

   - $[c, d] = c^2b^2, [a, d] = 1$ e $[b, d] = 1$ ma $\langle dc, ac\rangle \cong Q_8$ (infatti $(dc)^2 = d^2cc^2b^2c = c^2b^2, (ac)^2 = a^2c^2, (ac)^{dc} = (ac)^3$) e non è permutabile in G. Infatti se fosse permutabile sarebbe normalizzato da (bd) (essendo $(bd)^2 = b^2c^2$) ma $(ac)^{bd} = ac^3 \notin \langle dc, ac \rangle$.

- $[c, d] = c^2, [a, d] = 1$ e $[b, d] = 1$ ma $\langle ac, db \rangle \cong Q_8$ (infatti $(ac)^2 = a^2c^2 = (bd)^2, (ac)^{bd} = a^3c^3 = (ac)^3$) non è permutabile. Infatti se fosse permutabile sarebbe normalizzato da (ad) (essendo $(ad)^2 = a^2c^2$) ma $(bd)^{ad} = b^3d \notin \langle ac, db \rangle$.

(c) $d^2 = a^2c^2$.Certamente non può essere $[a, d] = c^2$ perchè avrei $(da)^2 = d^2ac^2a = 1$ e nemmeno $[b, d] = c^2$ (perchè $(db)^2 = d^2bc^2b = 1$).Non può essere $[c, d] = 1$ (perchè $(dac)^2 = 1$) e nemmeno $[c, d] = a^2$ (perchè $(dc)^2d^2ca^2c = 1$). Se $[c, d] = a^2c^2$ allora $(dc)^2 = d^2ca^2c^2c = c^2$ e prendendo (dc) al posto di d rientro nel caso precedente.
Rimane il caso $[c, d] = c^2, [a, d] = 1, [b, d] = 1$ ma il sottogruppo $\langle dab, c \rangle \cong Q_8$ (infatti $(dab)^2 = d^2abab = d^2a^2 = c^2$ e $c^{dab} = cc^2$) non è permutabile.Infatti se fosse permutabile dovrebbe essere normalizzato da db (essendo $(db)^2 = d^2b^2 = c^2$) ma $(dab)^{db} = da^3b \notin \langle dab, c \rangle$.

Quindi M non è immergibile in un gruppo con derivato di ordine 4.

$\square$

Osservazione 7.
Se G è 2-gruppo a esponente 4 in $S(4)$ ogni sottogruppo di ordine 32 di G è isomorfo a R.
Infatti se K sottogruppo di G di ordine 32, ho due possibilità:

- K contiene sottogruppi non permutabili.
  In questo caso K è isomorfo a M o a R ma per la proposizione 2.5.7 deve essere $K \cong R$.

- K ha tutti i sottogruppi permutabili.
  In questo caso K è isomorfo a $Q_8 \times E$ con E abeliano elementare, o è abeliano.
  Non può essere $K \cong Q_8 \times E$ con E abeliano elementare perchè $|\Omega_1(K)| \leq 4$ e analogamente K non può essere abeliano perchè avendo esponente 4 non è ciclico ed essendo $|\Omega_1(K)| \leq 4$ il suo ordine risulterebbe strettamente minore di 32.

Proposizione 2.5.8. [1]
Sia $G \in S(2^2)$ *2-gruppo a esponente 4* $|G| = 64$ *allora*

$$G \cong V = \langle a, b, c, d : \quad a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, c^b = ca^2, \\ b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = cb^2 \rangle .$$

Dimostrazione.
Suppongo che $|G| \geq 32$ e suppongo che $|G| = 64$. Allora G dovrà contenere K sottogruppo di ordine 32, dovrà essere $|K'| = 4$ e posso identificarlo con R per l'osservazione 7.
Sia $d \in G, d \notin R$ allora $G = \langle a, b, c, d \rangle$.
Provo che posso sempre supporre $b^d = b, d^2 = a^2$.
Certamente $[b, d] \in \langle a^2, b^2 \rangle$.
Se fosse $b^d = ba^2$ ponendo $d' = dc$ ottengo $b^{d'} = b$.
Se fosse $b^d = bb^2$ ponendo $d' = da$ ottengo $b^{d'} = b$.
Se fosse $b^d = ba^2b^2$ ponendo $d' = dac$ ottengo $b^{d'} = b$.
Quindi posso supporre $b^d = b$.
Certamente $d^2 \neq b^2$.
Se fosse $d^2 = a^2b^2$ ponendo $d' = db$ ottengo $b^{d'} = b$ e $d'^2 = a^2$.
Quindi deve essere $d^2 = a^2$.
Certamente non posso avere $a^d = a$ e nemmeno $a^d = a^3$ perchè $\langle a, d, b \rangle$ sarebbe sottogruppo isomorfo a R contente un sottogruppo isomorfo a Q_8 assurdo.Non può essere $a^d = ab^2$ perchè avrei $bd \in Z(\langle a, b, bd \rangle)$ con $\langle bd, b, a \rangle$ di ordine 32. La sola possibilità è $a^d = aa^2b^2$.
Non può essere $c^d = c$ perchè avrei $d \in Z(\langle b, c, d \rangle)$ e $(dcb)^2 = 1$. Non può essere $c^d = ca^2$ perchè avrei $c \in Z(\langle a, c, bd \rangle)$ con $\langle bd, c, a \rangle$ di ordine 32.
Restano quindi i seguenti casi:

1. $c^d = c^{-1}, a^d = ab^2a^2$;
2. $c^d = ca^2b^2, a^d = ab^2a^2$ ma $d \in Z(\langle ac, b, d \rangle)$.

Rimane quindi solo il caso 1 che fornisce V.

Infine i sottogruppi di V $\langle ab \rangle$ e $\langle a \rangle$ non permutano e hanno ordine 4 mentre i sottogruppi di ordine diverso da 4 sono normali come prova il teorema 0.0.2. □

[1] Le dimostrazioni di 2.5.8 e di 2.5.9 sono tratte da [1] con qualche adattamento.

Proposizione 2.5.9.
Sia G 2-gruppo finito a esponente 4.
Se $G \in S(4)$ allora $|G| \leq 64$.

Dimostrazione.
Posso supporre che $|G| = 128$.
Allora G contiene un sottogruppo isomorfo a V.
Poichè $|G'| = 4$ i coniugati di a sono tutti e soli a, a^3, ab^2, aa^2b^2 e dunque il centralizzante in G di a ha ordine 32 ed è contenuto in un sottogruppo D di ordine 64 .
Essendo $|D \cap V| = 32$ si ha che D contiene un sottogruppo isomorfo a R e dunque per la proposizione 2.5.8 ottengo $D \cong V$.Il centralizzante di a in D ha ordine 32, mentre i centralizzanti degli elementi di ordine 4 di V hanno tutti ordine 16, contraddizione. Quindi $|G| \leq 64$. □

Conclusioni

Le proposizioni precedenti dimostrano il seguente teorema:

Teorema 2.5.10.
Sono equivalenti:

- *G è 2-gruppo i cui sottogruppi non permutabili hanno ordine 4;*
- *G è isomorfo a uno dei seguenti gruppi:*

  1. $\langle a, b : b^8 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1} \rangle$;
  2. $\langle a, b : a^4 = b^4 = 1, b^a = b^3 \rangle$;
  3. $\langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b \rangle$;
  4. $\langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2 \rangle$;
  5. $$\begin{aligned} \langle a, b, c, d : \quad & a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, \\ & c^b = ca^2, b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = cb^2 \Big\rangle . \end{aligned}$$

2.6 2-gruppi in S($2^{\mathbf{n}}$) con n > 2

In tutto il capitolo n è un intero > 2.

Osservazione 8.
Sia $G \in$ S(2^n).I sottogruppi non permutabili di G sono ciclici altrimenti sarebbero prodotto di permutabili. La proposizione 2.3.1 vale anche per $p = 2$ e quindi se $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ sono sottogruppi di ordine 2^n che non permutano allora $\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle$.

Proposizione 2.6.1.
Sia $G \in$S(2^n).Allora $\Omega_1(G)$ ha ordine 4.

Dimostrazione.
Sia $G \in$ S(2^n). Certamente G non è ciclico e non può essere isomorfo a un gruppo dei quaternioni generalizzato perchè Q_8 è hamiltoniano e Q_g per $g \geq 16$ ha sottogruppi di ordine 4 non permutabili.
Quindi $\Omega_1(G) > 2$.
Siano $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$ sottogruppi di ordine 2^n che non permutano e sia $t \in \Omega_1(G) \setminus \left\langle a^{2^{n-1}} \right\rangle$.
$\langle a \rangle / \langle a^2 \rangle$ e $\langle b \rangle / \langle b^2 \rangle$ hanno ordine 2, non permutano e generano un sottogruppo di ordine 2^3. Quindi $|\langle a, b \rangle| = 2^{n+2}$.
$\langle a \rangle \langle t \rangle \leq G$ ha ordine 2^{n+1}.Certamente $\langle b \rangle \nsubseteq \langle a \rangle \langle t \rangle$ (altrimenti b normalizzerebbe $\langle a \rangle$) e $\langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$ ha ordine 2^{n+2} da cui $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle \langle b \rangle$.
Ora $\langle a \rangle \langle t \rangle \lhd \langle a, b \rangle$ e contiene tutti i coniugati di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$.
Supponendo che esista $s \in \Omega_1(G) \setminus \left\langle a^{2^{n-1}}, t \right\rangle$ con gli argomenti di sopra si ottiene $\langle a, b \rangle = \langle a \rangle \langle s \rangle \langle b \rangle$, $\langle a \rangle \langle s \rangle \trianglelefteq \langle a, b \rangle$ e contiene tutti i coniugati di $\langle a \rangle$ in $\langle a, b \rangle$. Quindi $\langle a \rangle \langle s \rangle = \langle a \rangle \langle t \rangle$ contraddizione. □

Teorema 2.6.2.
Sia G un 2-gruppo finito con $G \in S(2^n)$. Allora G contiene uno dei seguenti sottogruppi:

- $T_1 = \langle x, y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3 \rangle$.
- $T_2 = \left\langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7 \right\rangle$.

Dimostrazione.
Consideriamo $a, b \in G$ tali che $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ non pemutano.
Per la proposizione 2.6.1 posso sempre supporre $a^2 = b^2$.
Considero $t \in \Omega_1(G), t \notin \langle a \rangle$. Allora $\langle a, t \rangle \cong M(2^{n+1})$ o è abeliano.
Analogamente $\langle b, t \rangle \cong M(2^{n+1})$ o è abeliano. Quindi ho i seguenti casi:

1. $at = ta$, $bt = tb$.
   Essendo $\langle a,t\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$ ottengo:
   $a^b = a^i t$ ma $a^2 = (a^2)^b = a^{2i} \Leftrightarrow 2 \equiv 2i \bmod(2^n)$ da cui $a^b = at$ o $a^b = a^{1+2^{n-1}}t$ ma nel secondo caso sostituisco t con $a^{2^{n-1}}t$ e ottengo il seguente gruppo:
   $T_1 = \left\langle a,b,t : a^{2^n} = 1 = t^2, a^2 = b^2, at = ta, bt = tb, a^b = at\right\rangle$
   $(ab^{-1})^2 = a^2b^{-1}tb^{-1} = t$
   $(ab^{-1})^a = ab^{-1}t = (ab^{-1})^3$
   Quindi ponendo $x = ab^{-1}$, $y = a$ ottengo:
   $T_1 = \left\langle x,y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3\right\rangle$

2. $a^t = a^{1+2^{n-1}}$, $bt = tb$
   Essendo $\langle b,t\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$ ottengo:
   $b^a = b^i t$ ma $b^2 = (b^2)^a = b^{2i} \Leftrightarrow 2 \equiv 2i \bmod(2^n)$ da cui
   $b^a = bt$ o $b^a = b^{1+2^{n-1}}t$ ma nel secondo caso sostituisco t con $a^{2^{n-1}}t$ e posso sempre supporre $b^a = bt, a^b = at$.
   Quindi $(a^2)^b = atat = aa^{1+2^{n-1}} \neq a^2$ assurdo.

3. $at = ta$, $b^t = b^{1+2^{n-1}}$
   Sostituendo tra loro al punto precedente a e b trovo di nuovo l'assurdo.

4. $a^t = a^{1+2^{n-1}}$, $b^t = b^{1+2^{n-1}}$.
   Essendo $\langle a,t\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$ ottengo:
   $a^b = a^r t$ ma
   $a^2 = (a^2)^b = a^r a^{r(1+2^{n-1})} = a^{2r+2^{n-1}}$
   Quindi $2 \equiv 2r + 2^{n-1} \bmod(2^n) \Leftrightarrow 1 \equiv r + 2^{n-2} \bmod(2^{n-1})$
   da cui $a^b = a^{1+2^{n-2}}t$ o $a^b = a^{1+3\cdot 2^{n-2}}t$.
   Nel secondo caso sostituisco t con $a^{2^{n-1}}t$ e posso sempre supporre $a^b = a^{1+2^{n-2}}t$.
   Ottengo dunque il gruppo:
   $$T_2 = \left\langle a,b,t : a^{2^n} = 1 = t^2, a^2 = b^2, a^t = a^{1+2^{n-1}}, b^t = b^{1+2^{n-1}}, a^b = a^{1+2^{n-2}}t\right\rangle.$$
   Considero
   $$\begin{aligned}(ab^{-1})^2 &= a^2a^{2^{n-2}}tb^{-1}b^{-1} = a^2a^{2^{n-2}}tb^{-1}b^{-1} = a^{2+2^{n-2}}tb^{-2} \\ &= a^2a^{2^{n-2}}b^{-2}t = a^{2^{n-2}}t\end{aligned}$$
   $(ab^{-1})^b = a^{1+2^{n-2}}tb^{-1} = a^{1+2^{n-2}}b^{-1}b^{2^{n-1}}t = ab^{-1}a^{3\cdot 2^{n-2}}t = (ab^{-1})^7$
   Ponendo $x = ab^{-1}$ e $y = b$ ottengo:
   $T_2 = \left\langle x,y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7\right\rangle$.

$\square$

Il gruppo $T_1 = \langle$ x,y: $\mathbf{x}^4 = \mathbf{y}^{2^n} = 1, \mathbf{x}^{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^3\rangle$.

Proposizione 2.6.3.
Il gruppo $T = T_1 = \left\langle x, y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3 \right\rangle \in S(2^n)$.

Dimostrazione.
Osservo dapprima che $Z(T) = \langle x^2, y^2 \rangle$ e quindi ogni elemento di $Z(T)$ al quadrato appartiene a $\langle y^4 \rangle$.
Gli elementi di T sono tutti della forma z, xz_1, xyz_2, yz_3 con $z, z_i \in Z(T)$.
Poichè i sottogruppi $\langle xyz_2 \rangle$ e $\langle yz_3 \rangle$ hanno ordine 2^n l'unica cosa da provare è che i sottogruppi $\langle xz_1 \rangle$ permutano con i sottogruppi $\langle yz_2 \rangle$ e $\langle xyz_3 \rangle$.
$xz_1yz_3 = xyz_1z_3 = x^2y^xx^3z_1z_3 = yx^2xz_1z_3 = yz_3(xz_1)^3{z_1}^{-2}$.
Supponendo ${z_3}^2 = y^{4i}, {z_1}^2 = y^{4j}$ ottengo:
$(yz_3)^2 = y^{2(1+2i)}$e quindi elevando yz_3 ad una opportuna potenza dispari ottengo:
$xz_1yz_3 = (yz_3)^r(xz_1)^3$.
Analogo considerando xyz_2 in luogo di yz_3.

$\square$

Osservazione 9.
Suppongo $G \in S(2^n)$, $T \subseteq G$.
Ho provato nella proposizione 2.6.1 che $\Omega_1(G)$ ha ordine 4 e quindi $\Omega_1(G) = \Omega_1(T) = \left\langle x^2, y^{2^{n-1}} \right\rangle$.
Poichè $G/\Omega_1(G)$ ha tutti i sottogruppi permutabili (le controimmagini dei sottogruppi di $G/\Omega_1(G)$ non sono cicliche) e così considerando G/K dove K è sottogruppo di G contenente $\Omega_1(G)$, presi $u, v \in G$ tali che l'ordine di uK è 2 e l'ordine di $vK \leq 4$ allora $[v, u] \in K$.

Teorema 2.6.4.
Il gruppo $T = T_1 = \left\langle x, y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3 \right\rangle$ *con* $n > 2$ *non è immergibile in nessun 2-gruppo appartenente a* $S(2^n)$.

Dimostrazione.
Sia $G \in S(2^n)$ con $T \subseteq G$.

Considero i seguenti casi:

1. Provo che non esistono elementi di ordine 4 fuori da T.
   I sottogruppi generati dagli elementi di ordine 2 o 4 sono permutabili e quindi $\Omega_2(G)$ è abeliano o è isomorfo a $Q_8 \times E$ con E abeliano elementare.Poichè $\Omega_2(T) = \langle x^2 \rangle \times \left\langle y^{2^{n-2}} \right\rangle$ è abeliano e prodotto diretto di due ciclici di ordine 4 ottengo che $\Omega_2(G)$ è abeliano.
   Suppongo $z \in G, z \notin T$ di ordine 4. Ogni elemento di T di ordine 2 è un quadrato e allora avrei $(zt)^2 = 1$ assurdo.

2. Provo che non esistono elementi di ordine $2^m < 2^n$ appartenenti a $G \backslash T$.
Ho provato al punto 1 che vale per m=2.
Suppongo che non ci siano elementi di ordine 2^m fuori da T e considero z di ordine 2^{m+1}, $(m+1) \leq (n-1)$ e $z^2 \in T$ e quindi $|\langle x, y, z\rangle| = 2^{n+3}$.
Gli elementi di ordine 2^m con $m \geq 2$ in T sono: $y^{i2^{n-m}}$ con i dispari, $xy^{i2^{n-m}}$ e $x^3y^{i2^{n-m}}$ con i dispari se $m > 2$, $x^2y^{i2^{n-m}}$ con i dispari.
Distinguo dunque i 4 casi:

   (a) $z^2 = y^{2^{n-m}}$ ma
   $|\langle y, z\rangle| = 2^{n+1}$ ed è abeliano o isomorfo a $M(2^{n+1})$.
   Nel primo caso però $(zy^{-2^{n-m-1}})^2 = z^2y^{-2^{n-m}} = 1$ assurdo.
   Nel secondo caso $y^z = y^{1+2^{n-1}}$ quindi y^2 commuta con z e ottengo $(zy^{-2^{n-m-1}})^2 = z^2y^{-2^{n-m}} = 1$ assurdo.
   Se $z^2 = y^{i2^{n-m}}$ con i dispari ripeto i calcoli di prima e concludo.

   (b) $z^2 = xy^{i2^{n-m}}$.
   $z^4 = x^2y^{i2^{n-m+1}}$.
   In questo caso posto $K = Z(T)$ essendo $|zK| = 4$ e $|yK| = 2$ per l'osservazione 9 ottengo $[y, z] \in K$. Ho le seguenti possibilà:

      i. $y^z = y^{1+2h}$ ma otterrei che z^2 normalizza $\langle y\rangle$ assurdo;
      ii. $y^z = y^{1+2h}x^2 = y^{1+2s}z^4$
      In questo caso $y^{z^2} = (y^{1+2s}z^4)^{1+2s}z^4 = y^{1+2h}z^{8(1+2s)} \in \langle y\rangle$ perchè $z^8 \in \langle y^2\rangle$. Quindi trovo che z^2 normalizza $\langle y\rangle$ assurdo.

   (c) $z^2 = x^3y^{i2^{n-m}}$.
   Sostituendo a z z^{-1} trovo il caso 2b .

   (d) $z^2 = x^2y^{2^{n-m}}$
   $z^4 = y^{2^{n-m+1}}$.
   Considero $\langle x, z\rangle$: $|\langle x, z\rangle| = 2^{m+3}$.
   Inoltre osservo che z^2 commuta con x e che $\langle x, z^2\rangle \trianglelefteq \langle x, z\rangle$.
   Quindi ho le seguenti possibilità:

      - $x^z = x$ ma sostituendo (xz) a z rientro nel caso 2a.
      - $x^z = xz^{2j}$;
      L'ordine di z è strettamente maggiore di 4 e quindi da $x = x^{z^2} = xz^{4j}$ ottengo che j deve essere pari.
      Suppongo j=2k e considero

$$\begin{aligned}(zx)^2 &= z^2xz^{4k}x = x^2z^{2(1+2k)} = x^2(x^2y^{2^{n-m}})^{1+2k} \\ &= x^2(x^2y^{2^{n-m}})(x^4y^{2^{n-m+1}})^k = y^{2^{n-m}(1+2k)}\end{aligned}$$

      e prendendo zx al posto di z trovo il caso 2a.

- $x^z = x^3$;
  $(zx)^2 = z^2$;
  Quindi essendo $\langle z\rangle$ permutabile in G ottengo
  $|\langle zx, x\rangle| = \frac{2^{m+1} \cdot 2^{m+1}}{2^m} = 2^{m+2}$ ma $\langle zx, x\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 2^{m+3} assurdo.
- $x^z = x^3 z^{2j}$;
  $(zx)^2 = z^2 x^3 z^{2j} x = z^{2+2j}$ e dunque $\langle z\rangle$ e $\langle zx\rangle$ non permutano perchè se permutassero $|\langle zx, z\rangle| = 2 \cdot 2^{m+1} = 2^{m+2}$ mentre $\langle zx, z\rangle = \langle z, x\rangle$ che ha ordine 2^{m+3}.

3. Provo che non ci sono elementi di ordine 2^n fuori da T.
   Sia $z \notin T, z^{2^n} = 1, z^2 \in T$
   Gli elementi di ordine 2^{n-1} in T sono: y^{2i} con i dispari, $x^2 y^{2i}$ con i dispari, xy^{2i} e $x^3 y^{2i}$ con i dispari se $n > 3$.
   Distinguo dunque i 4 casi:
   (a) $z^2 = y^{2i}$;
   Ho due possibilità:
   - $\langle z\rangle$ e $\langle y\rangle$ permutano. Allora $\langle y, z\rangle$ è abeliano o isomorfo a $M(2^{n+1})$
     Nel primo caso $(yz^{-1})^2 = 1$ assurdo.
     Nel secondo caso $(zy^{-1})^2 = z^2 y^{-1+2^{n-1}} y^{-1} = y^{2^{n-1}}$ assurdo.
   - $\langle z\rangle$ e $\langle y\rangle$ non permutano.
     Dai calcoli fatti in generale essendo $yx^2 = x^2 y$ ottengo che $x^2 z = zx^2$ e che $\langle y, z\rangle \cong T_1$.
     In particolare da $|\Omega_2(\langle z, y\rangle)| = |\Omega_2(T)|$ ed essendo $\Omega_2(T) = \Omega_2(G)$ ottengo $\Omega_2(\langle z, y\rangle) = \Omega_2(T)$.Quindi $x \in \langle z, y\rangle$ da cui $T \subseteq \langle z, y\rangle$ ed avendo lo stesso ordine vale uguale cioè $z \in T$ assurdo.

   (b) $z^2 = xy^{2i}$;
   $z^4 = x^2 y^{4i}$;
   $z^8 = y^{8i}$.
   Posto $K = Z(G)$ ed essendo $|zK| = 4$ e $|yK| = 2$ per l'osservazione 9 deve essere $[y, z] \in K$.
   Quindi ho le seguenti possibilità:
   - $y^z = y^{1+2h}$ ma $z^2 = xy^{2i}$ non normalizza $\langle y\rangle$;
   - $y^z = y^{1+2h} x^2 = y^{1+2s} z^4$ ma
     $y^{z^2} = (y^{1+2s} z^4)^{1+2s} z^4 = y^{(1+2h)^2} z^{4(1+2s)} z^4 = y^{(1+2h)^2} z^{8(1+s)} \in \langle y\rangle$ mentre $z^2 = xy^{2i}$ non normalizza $\langle y\rangle$.

   (c) $z^2 = x^3 y^{2i}$
   Sostituendo a z z^{-1} trovo il punto 3b.

(d) $z^2 = x^2y^{2i}$ con i dispari
$z^4 = y^{4i}$
Posto $K = Z(T)$ ed essendo $|xK| = 2$ e $|zK| = 4$ per l'osservazione 9 otttengo $[x,z] = x^{2r}y^{2s}$ e $[y,z] = x^{2h}y^{2k}$.
Se fosse $[x,z] = y^{2s}$ allora $(zx)^2 = z^2xy^{2s}x = z^2x^2y^{2s} \in \langle y^2\rangle$ e sostituendo zx a z trovo il caso 3a o il caso 2a.
Quindi posso supporre $[x,z] = x^2y^{2s}$.
Se fosse $[y,z] = x^2y^{2k}$ allora sostituendo xz a z otterrei:
$[y,zx] = y^{-1}x^{-1}z^{-1}yzx = xy^{-1}z^{-1}yzx = xx^2y^{2k} = y^{2k}$ e quindi posso sempre supporre: $x^z = x^3y^{2s}$ e $y^z = y^{1+2k} = y^j$.
Considero:

$$\begin{aligned}(zxy)^2 &= z^2x^3y^{2s}y^jxy = z^2y^jx^2yy^{2s}\\ &= x^2y^{2i}y^jx^2yy^{2s} = y^{2i+j+1+2s} = y^{2(i+1+k+s)} = y^{2t}\end{aligned}$$

Ho due possibilità:

- se $\langle zxy\rangle$ e $\langle y\rangle$ permutano allora $|\langle zxy, y\rangle| = 2^{n+1}$.Tuttavia da $(zx)^2 = z^2x^3y^{2s}x = x^2y^{2i+2s} \notin \langle y^2\rangle$ ottengo che $|\langle zxy, y\rangle| = |\langle zx, y\rangle| = 2^{n+2}$ assurdo;
- se $\langle zxy\rangle$ e $\langle y\rangle$ non permutano allora posto $z' = zxy$ essendo $yx^2 = x^2y$ dai calcoli fatti in generale ottengo che $\langle y, z'\rangle$ è isomorfo a T_1.Quindi $|\Omega_2(\langle y, z'\rangle)| = 16$ ed essendo contenuto in $\Omega_2(G) = \Omega_2(T)$ ottengo $\Omega_2(\langle y, z'\rangle) = \Omega_2(T)$. Quindi $x \in \langle y, z'\rangle$ da cui $T \subseteq \langle z', y\rangle$ ed avendo lo stesso ordine $T = \langle y, z'\rangle$. In particolare $z' = zxy \in T$ assurdo.

4. Non esiste un elemento $z \in G, z \notin T$ di ordine 2^{n+1} e tale che $z^2 \in T$.
Gli elementi di ordine 2^n sono in $y\langle x^2, y^2\rangle, xy\langle x^2, y^2\rangle$.
Suppongo $z^2 \in y\langle x^2, y^2\rangle$ $z^4 \in y^2\langle y^4\rangle$
Quindi $|\langle z, xy\rangle| = \frac{2^{n+1}.2^n}{2^{n-1}} = 2^{n+2}$ e xy dovrebbe normalizzare $\langle z\rangle$ e anche $\langle z^2\rangle$.
Ora però i sottogruppi generati da elementi del laterale $y\langle x^2, y^2\rangle$ non permutano con il sottogruppo generato da xy e trovo una contraddizione.
Analogo se suppongo $z^2 = xy\langle x^2, y^2\rangle$.

□

Il gruppo $\mathbf{T}_2 = \langle$x,y: x^8=1, x^4= y^4, x^y=x$^7\rangle$.

Proposizione 2.6.5.
Il gruppo $T = T_2 = \langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^4, x^y = x^7\rangle$ *appartiene a S(2^3).*

Dimostrazione.
$Z(T) = \langle y^2\rangle$.
Gli elementi che non appartengono al centro sono tutti e soli quelli dei laterali $x^2\langle y^2\rangle, x\langle y^2\rangle, x^3\langle y^2\rangle, y\langle y^2\rangle, xy\langle y^2\rangle, x^3y\langle y^2\rangle, x^2y\langle y^2\rangle, \langle y^2\rangle$.
Tutti gli elementi hanno ordine 8 tranne quelli di $x^2\langle y^2\rangle$,che hanno ordine 4.

I sottogruppi $\langle z\rangle$ con $z \in Z(T)$ permutano con ogni sottogruppo di T.
$\Omega_1(G) = \{x^4, x^2y^2, x^6y^2, 1\}$ e $T/\Omega_1(T) \cong Q_8$ e quindi i sottogruppi non ciclici di T sono normali.
$\Omega_2(T) = \langle x^2, y^2\rangle = \langle x^2y^2\rangle \times \langle y^2\rangle$.
Gli elementi di $T \setminus \Omega_2(G)$ hanno ordine 8 e $z^4 = y^4 = x^4$.
$[x^2y^{2i}, T] = [x^2, T] = \langle x^4\rangle$ e dunque x^2y^{2i} normalizza i sottogruppi di ordine 8 ciclici e centralizza i sottogruppi di ordine ≤ 4. □

Teorema 2.6.6.
Il gruppo $T = \langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^4, x^y = x^7\rangle$ *non è contenuto propriamente in nessun 2-gruppo* $G \in S(8)$.

Dimostrazione.
Suppongo esista $G \in S(8)$ con $T \subseteq G$ e suppongo $[G : T] = 2$.
$\Omega_1(T) = \Omega_1(G)$ e ogni sottogruppo di $G/\Omega_1(G)$ è permutabile, $T/\Omega_1(T) \cong Q_8$ e quindi $G/\Omega_1(G) \cong Q_8 \times C_2$. Quindi G ha solo elementi di ordine 4 fuori da T.
Provo invece che non esiste $z \in G \setminus T$ di ordine 4 e con $z^2 \in T$.
Ho le seguenti possibilità:

- $z^2 = y^4$.
  In questo caso $\langle z, y\rangle$ è isomorfo a M(2^4) o è abeliano.In entrambi i casi $(y^2z)^2 = 1$ assurdo.

- $z^2 = x^2y^2$.
  In questo caso $|\langle z, y\rangle| = 32$, $y^{z^2} = y^{x^2} = y^5$ e $\langle y, z^2\rangle \trianglelefteq \langle z, y\rangle$.
  Quindi ho le seguenti possibilità:

  – $y^z = y^i$ con i dispari.
    In questo caso $y^{z^2} = y^{i^2} = y$ assurdo.

  – $y^z = yz^2$.
    In questo caso $y^{z^2} = yz^4 = y$ assurdo.

- $y^z = y^3 z^2$.
  In queso caso si ha $(zy)^2 = z^2y^3z^2y = x^2y^2y^3x^2y^2y = x^2y^5x^2y^3 = 1$ assurdo.
- $y^z = y^5 z^2$.
  In questo caso si ha $(y^5z^2)^2 = (y^7x^2)^2 = x^6y^6x^2 = y^6$ e quindi $y^{z^2} = (y^5z^2)^5z^2 = y^4y^5z^2z^2 = y$ assurdo.
- $y^z = y^7 z^2$.
  $(zy)^2 = z^2y^7z^2y = z^2y^7x^2y^2y = x^2y^2x^6y^2 = y^4$ e otterrei $|\langle zy, y\rangle| = 16$ mentre $|\langle z, y\rangle| = 32$ assurdo.

* $z^2 = x^2y^6$.
  In questo caso sostituendo a y y^{-1} mi trovo nel caso precedente.

$\square$

Il gruppo $\mathbf{T}_2 = \langle \mathbf{x,y}\text{: } \mathbf{x}^8\mathbf{=1}, \mathbf{x}^4\mathbf{=y}^{2^{n-1}}, \mathbf{x^y=x^7} \rangle$ con n>3.

Proposizione 2.6.7.
Il gruppo $T_2 = \left\langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7 \right\rangle$ *con n>3 appartiene a S(2^n) .*

Dimostrazione.
Gli elementi di T sono del tipo seguente:

- $z_1 \in \langle y^2 \rangle$
  $z_1 \in Z(T_2)$ e ha ordine $\leq 2^{n-1}$.
- $z_2 \in y\,\langle y^2 \rangle$
  z_2 ha ordine 2^n e $\langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$;
- $z_3 \in x\,\langle y^2 \rangle$
  z_3 ha ordine $\leq 2^{n-1}$;
- $z_4 \in x^3\,\langle y^2 \rangle$
  z_4 ha ordine $\leq 2^{n-1}$;
- $z_5 \in x^2\,\langle y^2 \rangle$
  z_5 ha ordine $\leq 2^{n-1}$;
- $z_6 \in yx\,\langle y^2 \rangle$
  z_6 ha ordine 2^n e $\langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$;
- $z_7 \in yx^3\,\langle y^2 \rangle$
  z_7 ha ordine 2^n e $\langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$;

- $z_8 \in yx^2 \langle y^2 \rangle$
  z_8 ha ordine 2^n e $\langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$;

Poichè gli elementi z_2, z_6, z_7, z_8 generano sottogruppi di ordine 2^n devo provare che gli elementi z_1, z_3, z_4, z_5 generano ciclici quasi normali.

- I sottogruppi generati da elementi di tipo z_1 sono normali;

- I sottogruppi generati da elementi di tipo $z_3 = xy^{2i}$ sono permutabili: commutano con i sottogruppi generati da elementi z_1, z_3, z_4, z_5.
  Permutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo $z_2 = yy^{2j}$:
  $xy^{2i}yy^{2j} = xyy^{2i}y^{2j} = yx^7y^{2i}y^{2j} = yy^{2j}(xy^{2i})^7y^{-12j}$ e $y^{-12j} \in \langle (yy^{2j})^2 \rangle$.
  Permutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo $z_6 = yxy^{2j}$:
  $xy^{2i}yxy^{2j} = xyy^{2i}y^{2j} = yx^7xy^{2i}y^{2j} = yxy^{2j}(xy^{2i})^7y^{-12j}$ e
  $y^{-12j} \in \langle (yxy^{2j})^2 \rangle$.
  Permutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo z_7, z_8 e lo si prova con gli stessi calcoli del caso precedente;

- I sottogruppi generati da elementi di tipo $z_4 = x^3y^{2i}$ sono permutabili perchè $(z_4)^{-1} = (x^3y^{2i})^{-1} = y^{-2i}x^{-3} = y^{-2i}x^5 = xy^{2j}$ che è elemento di tipo z_3;

- I sottogruppi generati da elementi di tipo $z_5 = x^2y^{2i}$ sono permutabili: commutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo z_1, z_3, z_4, z_5.
  Permutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo $z_2 = yy^{2j}$:
  $x^2y^{2i}yy^{2j} = x^2yy^{2i}y^{2j} = yx^6y^{2i}y^{2j} = yy^{2j}(x^2y^{2i})^3y^{-4j}$ e
  $y^{-4j} \in \langle (yy^{2j})^2 \rangle$.
  Con analoghi calcoli si prova che permutano con i sottogruppi generati da elementi di tipo z_6, z_7, z_8.

□

Teorema 2.6.8.
Il gruppo $T_2 = \left\langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7 \right\rangle$ *con* $n > 3$
non è immergibile in nessun gruppo $G \in S(2^n)$.

Dimostrazione.
Suppongo esista $G \in S(2^n), T_2 \subseteq G$.
$\Omega_1(T_2) \cap Z(T_2) = \langle x^4 \rangle$ e poichè $\Omega_1(T_2) \cap Z(G) \neq 1$ deve essere $\Omega_1(T_2) \cap Z(G) = \langle x^4 \rangle$.
Provo che $G/\langle x^4 \rangle$ è un gruppo con tutti i sottogruppi permutabili tranne quelli di ordine uguale a $y\langle x^4 \rangle$.
I sottogruppi di $G/\langle x^4 \rangle$ sono $H/\langle x^4 \rangle$ con $\langle x^4 \rangle \leq H \leq G$.
Siano ora $H/\langle x^4 \rangle$ e $K/\langle x^4 \rangle$ sottogruppi che non permutano.

Allora H e K non permutano in G, sono ciclici, hanno ordine 2^n e $\langle x^4 \rangle \subseteq H$ da cui concludo che $|H/\langle x^4 \rangle| = 2^{n-1} = |y\langle x^4 \rangle|$. Inoltre $G/\langle x^4 \rangle$ ha sottogruppi non permutabili, ad esempio $\langle y\langle x^4 \rangle \rangle$ e $\langle xy\langle x^4 \rangle \rangle$.
Quindi $T_1 \cong T_2/\langle x^4 \rangle \subseteq G/\langle x^4 \rangle$ e per il teorema 2.6.4 $T_2/\langle x^4 \rangle = G/\langle x^4 \rangle$ da cui $T_2 = G$.
Quindi T_2 non è immergibile. $\square$

2.7 Conclusioni

Possiamo quindi concludere con il seguente teorema:

Teorema 2.7.1.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- *G è p-gruppo appartenente a $S(p^n)$;*
- *G è uno dei gruppo seguenti:*

  1. $G \cong \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1}\rangle$ *con p=2 e n=2;*
  2. $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1\rangle$ *con* $p \geq 3$ *n=1;*
  3. $\cong \left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^i} = 1, [a, b] = d^{p^{i-1}}, [a, d] = 1, [b, d] = 1 \right\rangle$ *con* $p \geq 3$, *n=1 e* $m > 1$;
  4. $G \cong \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3}\rangle$ *con p=3 e n=2;*
  5. $G \cong \left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1} \right\rangle$ *con p=2 e n=1;*
  6. $G \cong \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb \right\rangle$ *con p=2 e n=1;*
  7. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$ *con p=2 e n=1;*
  8. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b\rangle$ *con p=2 e n=2;*
  9. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2\rangle$ *con p=2 e n=2;*
  10. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d & : a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, \\ & c^b = ca^2, b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = cb^2 \end{array} \right\rangle$ *con p=2 e n=2;*
  11. $G \cong \left\langle x, y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3 \right\rangle$ *con p=2 e n* $\geq$*2;*
  12. $G \cong \left\langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7 \right\rangle$ *con p=2 e n* ≥ 3.

Capitolo 3

Classi di coniugio dei sottogruppi non permutabili

Considero il gruppo non nilpotente $G = N \rtimes P$ con $N \trianglelefteq G$ di ordine primo q e P p-gruppo ciclico con $p \neq q$,$[N, P] \neq 1$,$[N, \Phi(P)] = 1$.
G ha una sola classe di coniugio di sottogruppi non permutabili rappresentata da P e il numero dei coniugati di P è esattamente q.

Provo invece che in ognuno dei gruppi del teorema 2.7.1 le classi di coniugio dei sottogruppi non permutabili sono almeno due. Infatti:

1. $G \cong \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1} \rangle$ (p=2, n=2).
   In questo caso i sottogruppi $\langle a \rangle$ e $\langle ab \rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle a, b^2 \rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle ab \rangle$.

2. $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1 \rangle$
   $(p > 2, n = 1)$ In questo caso i sottogruppi $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle a, c \rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle b \rangle$.

3. $G \cong \left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^i} = 1, [a, b] = d^{p^{i-1}}, [a, d] = 1, [b, d] = 1 \right\rangle$
   (p ≥3 e n=1).
   In questo caso i sottogruppi $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle a, d \rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle b \rangle$.

4. $G \cong \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3} \rangle$
   ($p = 3$,n=2).

In questo caso i sottogruppi $\langle u\rangle$ e $\langle x\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle u, v\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle x\rangle$.

5. $G \cong \left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1}\right\rangle$ ($p = 2$ e n=1).
In questo caso i sottogruppi $\langle ab\rangle$ e $\langle b\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle b, a^2\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle ab\rangle$.

6. $G \cong \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb\right\rangle$
($p = 2$, n=1,$i > 1$).
In questo caso i sottogruppi $\langle ab\rangle$ e $\langle b\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle b, c\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle ab\rangle$.

7. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$
($p = 2$ e n=1).
In questo caso i sottogruppi $\langle ab\rangle$ e $\langle b\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle b, c, d\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle ab\rangle$

8. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b\rangle$
($p = 2$, n=2).
In questo caso i sottogruppi $\langle ac\rangle$ e $\langle bc\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle ac, c\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle bc\rangle$.

9. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2\rangle$
($p = 2$, n=2).
In questo caso i sottogruppi $\langle ab\rangle$ e $\langle a\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle c, a\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle ab\rangle$.

10. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^4 = 1, b^2 = c^2, d^2 = a^2, ca = ac, \\ & c^b = ca^2, b^a = b^3, db = bd, a^d = aa^2b^2, c^d = c^3 \end{array} \right\rangle$
($p = 2$, n=2).
In questo caso i sottogruppi $\langle b\rangle$ e $\langle c\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle c, a, d\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle b\rangle$.

11. $G \cong \left\langle x, y : x^4 = y^{2^n} = 1, x^y = x^3\right\rangle$ ($p = 2$, n $\geq$2).
In questo caso i sottogruppi $\langle y\rangle$ e $\langle yx\rangle$ non permutano e non sono

coniugati perchè $\langle y, x^2\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle xy\rangle$.

12. $G \cong \left\langle x, y : x^8 = 1, x^4 = y^{2^{n-1}}, x^y = x^7 \right\rangle$ ($p = 2$, n ≥ 3).
In questo caso i sottogruppi $\langle y\rangle$ e $\langle yx\rangle$ non permutano e non sono coniugati perchè $\langle y, x^2\rangle$ è massimale e quindi normale in G ma non contiene $\langle yx\rangle$.

Conto ora le classi di coniugio e il numero di coniugati dei sottogruppi non permutabili:

1. $G \cong \langle a, b : a^4 = 1, b^4 = a^2, b^a = b^{-1}\rangle$
I ciclici di ordine 4 sono:$\langle a\rangle$, $\langle ab\rangle$, $\langle ab^2\rangle$, $\langle ab^3\rangle$, $\langle b^2\rangle$.Il sottogruppo $\langle b^2\rangle$ è normale in G.
$N_G(\langle a\rangle) = \langle a, b^2\rangle$ e $\langle a\rangle^b = \langle ab^2\rangle$;
$N_G(\langle ab\rangle) = \langle ab, b^2\rangle$ e $\langle ab\rangle^b = \langle ab^3\rangle$;
Quindi ho due classi di coniugio di sottogruppi non permutabili e sono rappresentate da $\langle a\rangle$ e da $\langle ab\rangle$.

2. $G \cong \langle a, b, c : a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = 1, [b, c] = 1\rangle$.
Ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente p coniugati.
Infatti se x è elemento in G tale che $|x| = p$ e $\langle x\rangle$ non è permutabile allora $\langle x, c\rangle$ è normale in G .
Posso quindi concludere che $\langle x\rangle$ ha esattamente p coniugati.
Le classi di coniugio di sottogruppi non permutabili sono esattamente $p + 1$ e sono rappresentate da $\langle ab^i\rangle$ con $i \in 1, 2, \cdots, p$ e da $\langle b\rangle$.

3. G $\cong \left\langle a, b, d : a^p = b^p = d^{p^i} = 1, [a, b] = d^{p^{i-1}}, [a, d] = 1, [b, d] = 1 \right\rangle$.
Ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente p coniugati.
Infatti se x è elemento in G tale che $|x| = p$ e $\langle x\rangle$ non è permutabile allora $\langle x, d\rangle$ è normale in G da cui anche $\left\langle x, d^{p^{i-1}} \right\rangle$ è normale in G .
Posso quindi concludere che $\langle x\rangle$ ha esattamente p coniugati.
Le classi di coniugio di sottogruppi non permutabili sono esattamente $p + 1$ e sono rappresentate da $\langle ab^i\rangle$ con $i \in 1, 2, \cdots, p$ e da $\langle b\rangle$.

4. G $\cong \langle u, v, x : u^9 = v^3 = 1, x^3 = u^3, uv = vu, u^x = uv, v^x = vu^{-3}\rangle$.
I sottogruppi ciclici di ordine 9 sono: $\langle u\rangle$, $\langle uv\rangle$, $\langle uv^2\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle xv\rangle$, $\langle xv^2\rangle$, $\langle ux\rangle$, $\langle ux^2\rangle$, $\langle uxv\rangle$, $\langle uxv^2\rangle$, $\langle ux^2v\rangle$, $\langle ux^2v^2\rangle$ e nessuno di essi è permutabile. Poichè $N_G(\langle u\rangle) = \langle u, v\rangle$ ottengo che $\langle u\rangle$ ha esattamente 3 coniugati, e sono $\langle u\rangle$, $\langle uv\rangle$, $\langle uv^2\rangle$. In 2.4 si è provato che ogni elemento di ordine 9 che non appartiene a $\langle u, v\rangle$ ha cubo in $\langle u^3\rangle$ ed è normalizzato

da v. Detto t il generatore del sottogruppo di ordine 9 ottengo quindi: $N_G(\langle t\rangle) = \langle t, v\rangle$ da cui $\langle t\rangle$ ha esattamente 3 coniugati.
In conclusione ho 4 classi di coniugio di sottogruppi non permutabili e ogni sottogruppo non permutabile ha esattamente 3 coniugati.
Rappresentanti di tali classsi di coniugio sono: $\langle u\rangle, \langle x\rangle, \langle ux\rangle$ e $\langle ux^2\rangle$.

5. $G \cong \left\langle a, b : a^4 = 1 = b^2, a^b = a^{-1}\right\rangle$.
   Inoltre essendo G un diedrale ci sono 2 classi di coniugio di sottogruppi non permutabili e ciascun sottogruppo non permutabile ha 2 coniugati.
   Rappresentanti di tali classi di coniugio sono: $\langle b\rangle, \langle ba\rangle$.

6. $G \cong \left\langle a, b, c : a^4 = b^2 = 1, c^{2^{i-1}} = a^2, a^b = a^{-1}, ac = ca, bc = cb\right\rangle$.
   Inoltre essendo $\Omega_1(G)$ un diedrale ed essendoci almeno due classi di coniugio di sottogruppi non permutabili posso concludere che ci sono 2 classi di coniugio di sottogruppi non permutabili e ciascun sottogruppo non permutabile ha 2 coniugati.
   Rappresentanti di tali classi di coniugio sono: $\langle b\rangle, \langle ba\rangle$.

7. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a, b, c, d : & a^4 = b^2 = 1, a^2 = c^2 = d^2, a^b = a^{-1}, c^d = c^{-1}, \\ & ac = ca, bc = cb, ad = da, bd = db \end{array} \right\rangle$.
   In questo caso ho 5 classi di coniugio di sottogruppi non permutabili e ciascun sottogruppo non permutabile ha 2 coniugati. Rappresentanti delle classi di coniugio sono: $\langle b\rangle, \langle ab\rangle, \langle ac\rangle, \langle ad\rangle, \langle acd\rangle$.

8. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = c^4 = 1, a^2 = b^2, b^a = b^3, a^c = a, b^c = b\rangle$.
   Detto t il generatore di un sottogruppo ciclico di ordine 4 e supponendo che $\langle t\rangle$ non sia normale allora $N_G(\langle t\rangle) = \langle t, c\rangle$ che è massimale. In particolare quindi i sottogruppi non permutabili hanno 2 coniugati e le distinte classi di coniugio sono 3 rappresentate da $\langle ac\rangle, \langle bc\rangle, \langle abc\rangle$.

9. $G \cong \langle a, b, c : a^4 = b^4 = 1, c^2 = b^2, b^a = b^3, ac = ca, b^c = ba^2\rangle$.
   I sottogruppi ciclici normali di ordine 4 sono 2: $\langle ac\rangle, \langle ac^3\rangle$. Gli altri sottogruppi ciclici di ordine 4 hanno tutti due coniugati.
   Infatti:
   $N_G(\langle a\rangle) = \langle a, c\rangle$ e $\langle a\rangle^b = \langle ab^2\rangle$;
   $N_G(\langle b\rangle) = \langle a, b\rangle$ e $\langle b\rangle^c = \langle a^2 b\rangle$;
   $N_G(\langle ab\rangle) = \langle ab, c\rangle$ e $\langle ab\rangle^b = \langle ab^3\rangle$;
   $N_G(\langle c\rangle) = \langle a, c\rangle$ e $\langle c\rangle^b = \langle a^2 c\rangle$;
   $N_G(\langle bc\rangle) = \langle b, bc\rangle$ e $\langle bc\rangle^a = \langle bc^3\rangle$;
   $N_G(\langle abc\rangle) = \langle abc, a\rangle$ e $\langle abc\rangle^b = \langle a^3bc^3\rangle$.
   In particolare i sottogruppi non permutabili hanno ciasuno due coniugati e le distinte classi di coniugio dei sottogruppi non permutabili sono rappresentate da: $\langle a\rangle, \langle ab\rangle, \langle ab^3\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle, \langle bc\rangle, \langle abc\rangle$.

10. $G \cong \left\langle \begin{array}{ll} a,b,c,d: & a^4=b^4=1, b^2=c^2, d^2=a^2, ca=ac, \\ & c^b=ca^2, b^a=b^3, db=bd, a^d=aa^2b^2, c^d=c^3 \end{array} \right\rangle$.
$N_G(\langle a\rangle)=\langle a,c,db\rangle$ che è massimale e $\langle a\rangle^b=\langle ab^2\rangle$
$N_G(\langle b\rangle)=\langle b,d,a\rangle$ che è massimale e $\langle b\rangle^c=\langle ba^2\rangle$
$N_G(\langle c\rangle)=\langle c,a,d\rangle$ che è massimale e $\langle c\rangle^b=\langle ca^2\rangle$
$N_G(\langle ab\rangle)=\langle ab,c,db\rangle$ che è massimale e $\langle ab\rangle^b=\langle ab^3\rangle$
$N_G(\langle ac\rangle)=\langle a,c,b\rangle$ che è massimale e $\langle ac\rangle^d=\langle a^3c\rangle$
$\langle a^2c\rangle$ è normale.
$N_G(\langle bc\rangle)=\langle c,b,ad\rangle$ che è massimale e $\langle bc\rangle^d=\langle b^3c\rangle$
$N_G(\langle abc\rangle)=\langle a,bc,dc\rangle$ che è massimale e $\langle abc\rangle^d=\langle a^3bc\rangle$
$N_G(\langle d\rangle)=\langle d,b,ac\rangle$ che è massimale e $\langle d\rangle^c=\langle db^2\rangle$.
$N_G(\langle da\rangle)=\langle d,a,bc\rangle$ che è massimale e $\langle da\rangle^b=\langle dab^2\rangle$.
$N_G(\langle db\rangle)=\langle b,d,c\rangle$ che è massimale e $\langle db\rangle^a=\langle d^3b\rangle$.
$N_G(\langle dc\rangle)=\langle dc,b,ac\rangle$ che è massimale e $\langle dc\rangle^c=\langle dc^3\rangle$.
$N_G(\langle dab\rangle)=\langle d,ab,ab\rangle$ che è massimale e $\langle dab\rangle^b=\langle dab^3\rangle$.
$N_G(\langle dac\rangle)=\langle a,dc,b\rangle$ che è massimale e $\langle dac\rangle^c=\langle dac^3\rangle$.
$N_G(\langle dbc\rangle)=\langle a,dbc,b\rangle$ che è massimale e $\langle dbc\rangle^d=\langle dbc^3\rangle$.
$N_G(\langle dabc\rangle)=\langle ad,bc,ac\rangle$ che è massimale e $\langle dabc\rangle^a=\langle da^3bc\rangle$.
Quindi tutti i sottogruppi non normali hanno due coniugati e in particolare i sottogruppi non permutabili hanno due coniugati.I rappresentanti di tali classi di coniugio sono i sottogruppi sopra elencati tranne il sottogruppo normale.

11. G $\cong \langle x,y : x^4=y^{2^n}=1, x^y=x^3\rangle$.
I sottogruppi non permutabili sono tutti e soli $\langle y\rangle, \langle yx^2\rangle, \langle xy\rangle, \langle x^3y\rangle$. Osservo che detto t il generatore del sottogruppo non permutabile allora $\langle t,x^2\rangle$ è il normalizzante di $\langle t\rangle$ che ha quindi esattamente 2 coniugati.Posso concludere che i rappresentanti delle classi di coniugio dei sottogruppi non permutabile sono:$\langle y\rangle$ e $\langle xy\rangle$.

12. G $\cong \left\langle x,y : x^8=1, x^4=y^{2^{n-1}}, x^y=x^7\right\rangle$.
I sottogruppi non permutabili sono tutti e soli $\langle y\rangle, \langle yx^2\rangle, \langle xy\rangle, \langle x^3y\rangle$. Osservo che detto t il generatore del sottogruppo non permutabile allora $\langle t,x^2\rangle$ è il normalizzante di $\langle t\rangle$ che quindi ha esattamente 2 coniugati. Posso concludere che i rappresentanti delle classi di coniugio dei sottogruppi non permutabile sono:$\langle y\rangle$ e $\langle xy\rangle$.

Bibliografia

[1] R.BRANDL , *Groups with few non-normal subgroups*, Comm. in Algebra,23(6),2091-2098 (1995)

[2] G. ZAPPA , *Sui gruppi finiti i cui sottogruppi non normali hanno tuttti lo stesso ordine*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v.13 , 2002, 5-16.

[3] G. ZAPPA , *Sui gruppi finiti i cui sottogruppi non normali hanno tuttti lo stesso ordine*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v.14 , 2003, 13-21.

[4] R.SCHMIDT, *Subgroup Lattices of Groups* , De Gruyter exposition in mathematics, 14, Walter de Gruyter, Berlin, New-York 1994.

[5] M.SUZUKI, *Group Theory I*, Gundlehren der mathematischen Wissenschaften 247, A series of comprehensive studies in Methematics ,Berlin,Springer- Verlag, 1982

[6] M.SUZUKI, *Group Theory II*, Gundlehren der mathematischen Wissenschaften 248, A series of comprehensive studies in Methematics , New York,Springer- Verlag,1986

[7] M.HALL, *The Theory of Groups*,The Macmillan Company, New York,1959.