

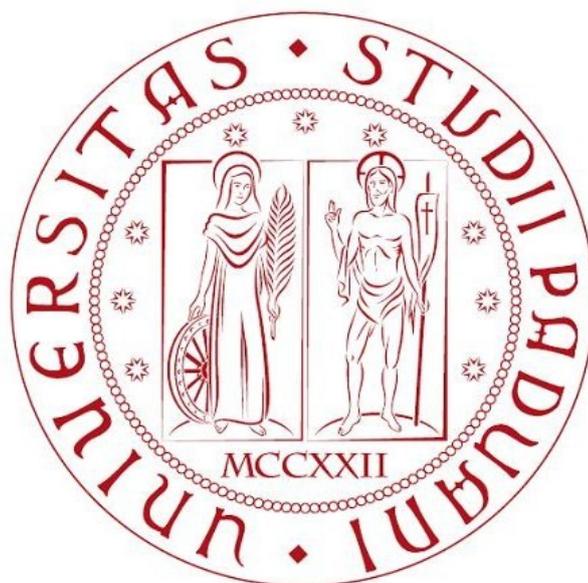
# PASSEGGIATE ALEATORIE CLASSICHE E PASSEGGIATE ALEATORIE QUANTISTICHE

RELATORE: Dott. Ticozzi Francesco

CORRELATORE: Dott. Giuseppe Vallone

LAUREANDO: Dalla Libera Alberto

A.A 2012-2013



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE  
TESI DI LAUREA

# PASSEGGIATE ALEATORIE CLASSICHE E PASSEGGIATE ALEATORIE QUANTISTICHE

RELATORE: Dott. Ticozzi Francesco  
CORRELATORE: Dott. Giuseppe Vallone  
LAUREANDO: Dalla Libera Alberto

Padova, 27 novembre 2012



# Indice

<b>Introduzione .....</b>	<b>5</b>
<b>Passeggiate aleatorie classiche .....</b>	<b>7</b>
2.1 <i>Introduzione alle passeggiate aleatorie classiche</i> .....	7
2.2 <i>Catene di Markov</i> .....	8
<b>Sistemi quantistici .....</b>	<b>11</b>
3.1 <i>Sistemi quantistici in rappresentazione matriciale</i> .....	11
3.2 <i>Sistemi quantistici a due livelli</i> .....	15
3.3 <i>Realizzazione di una passeggiata aleatoria con sistemi quantistici</i> .....	17
<b>Modello a tempo discreto.....</b>	<b>21</b>
4.1 <i>Descrizione stato</i> .....	21
4.2 <i>Descrizione operatore di transizione</i> .....	23
4.3 <i>Rotazione stato</i> .....	24
4.3 <i>Descrizione passeggiata classica</i> .....	25
4.4 <i>Descrizione passeggiata quantistica</i> .....	27
4.5 <i>Confronto</i> .....	28
4.5 <i>Applicazione del modello a tempo discreto ai grafi</i> .....	32
<b>Modello a tempo continuo .....</b>	<b>35</b>
5.1 <i>Caso classico</i> .....	35
5.2 <i>Caso quantistico</i> .....	36
<b>Importanza delle passeggiate aleatorie nell'informatica .....</b>	<b>37</b>
6.1 <i>Introduzione mixing time ed hitting time</i> .....	37
6.2 <i>Confronto</i> .....	38
<b>Bibliografia .....</b>	<b>43</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

I motivi per i quali si tende ad utilizzare modelli probabilistici per descrivere alcuni sistemi possono essere efficacemente spiegati citando Pierre Simon de Laplace, il quale scriveva: *“...Ma l’ignoranza delle diverse cause che concorrono alla formazione degli eventi come pure la loro complessità, insieme coll’imperfezione dell’analisi, ci impediscono di conseguire la stessa certezza rispetto alla grande maggioranza dei fenomeni. Vi sono quindi cose che per noi sono incerte, cose più o meno probabili, e noi cerchiamo di rimediare all’impossibilità di conoscerle determinando i loro diversi gradi di verosimiglianza. Accade così che alla debolezza della mente umana si debba una delle più fini e ingegnose fra le teorie matematiche, la scienza del caso o della probabilità”*.

Le passeggiate aleatorie sono un modello matematico utilizzato per descrivere un percorso dato da una successione di passi casuali, i quali, a seconda del sistema che vogliamo descrivere, potranno avere un certo numero di gradi di libertà o direzioni. Fisicamente parlando il percorso che andiamo a “disegnare” nel tempo non descriverà necessariamente un vero e proprio moto bensì potrà indicare più in generale l’evoluzione di una grandezza nel tempo; questo fa sì che le passeggiate aleatorie trovino applicazioni in fisica, chimica, biologia, ma anche in altre campi come l’informatica, l’economia e la sociologia.

Nei successivi capitoli daremo una descrizione generale delle passeggiate aleatorie classiche ed introdurremo alcuni modelli utilizzati per descriverle. Parallelamente verranno trattate le passeggiate aleatorie quantistiche, ovvero delle passeggiate aleatorie realizzate con sistemi quantistici, i quali sono intrinsecamente legati al concetto di probabilità. Un aspetto interessante delle passeggiate aleatorie quantistiche sta nel fatto che esse si dimostrano essere più “rapide” rispetto a quelle classiche, inoltre, essendo implementabili dai calcolatori quantistici, trovano applicazione in quella che possiamo definire “informatica del futuro”, ovvero l’informatica quantistica.

Nella parte finale verranno portati alcuni esempi di passeggiate aleatorie applicate ad ambiti informatici e, una volta definiti dei parametri utilizzati per quantificarne la “rapidità”, verranno messi in luce i vantaggi in termini di velocità computazionale che potrebbe portare l’utilizzo di passeggiate aleatorie quantistiche rispetto a quelle classiche.

## Capitolo 2

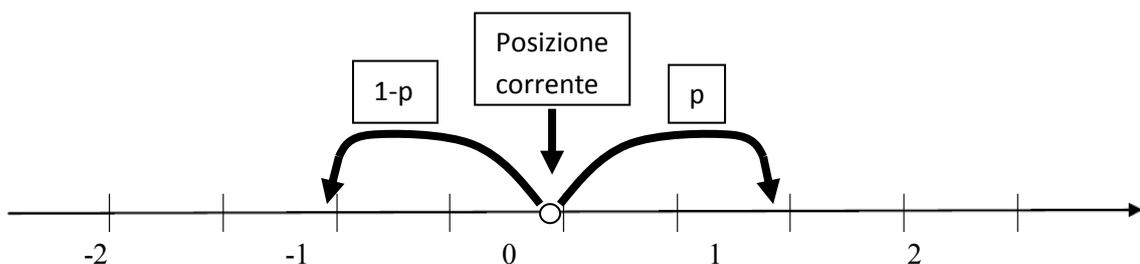
# Passeggiate aleatorie classiche

### 2.1 Introduzione alle passeggiate aleatorie classiche

Le passeggiate aleatorie classiche sono modelli matematici che descrivono il moto casuale di una o più particelle (termine che useremo da qui in avanti per indicare non soltanto “particelle” fisiche, ma possibilmente qualunque tipo di agenti, individui in una popolazione, valori di un indice finanziario, etc.), entro certi vincoli. In questo breve paragrafo introdurremo in maniera intuitiva le passeggiate aleatorie monodimensionali classiche, limitandoci al caso di una singola particella; una volta capito il meccanismo non sarà difficile comprendere come si svolgono passeggiate in più dimensioni.

Come suggerito dal nome, le passeggiate aleatorie monodimensionali descrivono il moto di una particella vincolata sulla retta reale alla quale ad ogni passo è concesso di muoversi verso sinistra o destra con una probabilità fissata a priori; supponiamo ad esempio che si abbia una probabilità pari a  $p$  di spostarsi verso destra e  $1-p$  di spostarsi verso sinistra.

Le passeggiate aleatorie classiche vengono spesso descritte mediante l'utilizzo delle catene di Markov, di cui verranno richiamati i concetti principali nel seguente paragrafo.



## 2.2 Catene di Markov

Le catene di Markov sono un modello matematico usato per descrivere l'evoluzione di particolari processi aleatori che obbediscono alla proprietà di Markov, che qui richiamiamo.

Consideriamo un processo aleatorio descritto dalla sequenza di variabili aleatorie  $X_0, X_1, X_2, \dots$  le quali possono assumere valori nell'insieme  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ , diremo che esso obbedisce alla proprietà di Markov se avremo che l'evoluzione del processo dipende dal passato solo attraverso il presente, ovvero lo stato in cui ci siamo trovati dopo  $n$  mosse. In formule, utilizzando la probabilità condizionata, avremo:

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = j_n, X_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-2} = j_{n-2}, \dots, X_0 = j_0\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = p_{ij}$$

La sequenza di variabili aleatorie può essere pensata come associata allo scorrere del tempo (o di un'altra variabile indipendente), associato all'indice  $n$ , mentre ognuno dei possibili valori ammissibili per una variabile è associato a uno degli  $N$  stati in cui si può trovare il sistema. In generale le  $p_{ij}$  possono dipendere dal tempo, ovvero dall'indice  $n$ , ma per semplicità qui considereremo solo catene indipendenti dal tempo, dette omogenee.

Per descrivere in forma più compatta le varie probabilità di transizione, le quali vengono assunte costanti durante l'evoluzione della catena, si fa uso di una matrice, detta matrice delle probabilità di transizione o matrice di transizione e indicata con la lettera  $P$ .

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N0} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

Dove  $p_{ij}$  rappresenta la probabilità che il sistema passi dallo stato  $i$  allo stato  $j$  con  $i, j$  compresi tra 0 e  $N$ ; si noti che per ovvie ragioni, trattandosi di probabilità, si avranno le due seguenti condizioni:

1.  $p_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \{0, \dots, N\}$
2.  $\sum_{j=0}^N p_{ij} = 1$

Nel caso della passeggiata aleatoria monodimensionale, avremo che i valori ammissibili per una variabile aleatoria saranno quelli appartenenti all'insieme  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  e saranno associati alla posizione della particella rispetto al punto di partenza attraverso

un processo di discretizzazione di una porzione di retta, in quanto assumiamo il numero di stati finito . La matrice di transizione invece avrà la seguente forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove  $p_{00}$  e  $p_{NN}$  assumono valori unitari in quanto abbiamo implicitamente assunto il numero di stati finito e deciso di porre delle barriere di assorbimento in 0 e in N, ovvero abbiamo deciso che se la particella finisce nello stato 0 o N essa rimarrà lì con probabilità 1.

Alternativamente si può supporre P fatta nella seguente maniera:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ p & \dots & \dots & \dots & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

Una tale matrice P è associata ad una passeggiata aleatoria che si svolge su un insieme ciclico, ovvero su un insieme finito di stati che può esse associato attraverso un isomorfismo a  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(N)$ ; nel nostro caso all'atto pratico si ha che una traslazione verso un ipotetico stato N+1 viene mappata in 0 e una verso un ipotetico stato -1 viene mappata in N.

Data la matrice P è possibile calcolare l'andamento nel tempo del vettore  $\overline{p(t)} = [p_0(t) \dots p_N(t)]^T$  dove  $p_i(t)$  con i che varia da 0 a N rappresenta la probabilità la variabile  $X_t$  assuma il valore i. Avremo infatti che:

$$p_i(t+1) = \sum_j P_{ji} p_j$$

$$\Rightarrow \overline{p(t+1)}^T = \overline{p(t)}^T P = [p_0(t) \dots p_N(t)]^T \begin{bmatrix} p_{00} & \dots & p_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N0} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

Vale la pena evidenziare che in questa forma l'evoluzione del vettore di probabilità è descritta da un sistema in forma di stato a tempo discreto. Anche se il meccanismo di evoluzione è lineare, il sistema non lo è in quanto l'evoluzione è considerata sull'insieme compatto e convesso delle distribuzioni di probabilità.

Alla luce della struttura della matrice  $P$  e della proprietà di Markov si può calcolare la probabilità  $p_{ij}^{(n)}$  uguale alla probabilità di raggiungere  $j$  partendo da  $i$  in  $n$  passi:

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{(n-i+j)/2} p^{(n-i+j)/2} (1-p)^{(n+i-j)/2}$$

Dove il secondo termine corrisponde alle probabilità associate ai passi fatti verso destra, il terzo a quelle associate ai passi a sinistra e il primo tiene conto di tutte le possibili permutazioni.

A loro volta, Le varie  $p_{ij}^{(n)}$  possono essere utilizzate per calcolare la probabilità che  $X_n = j$  infatti:

$$P\{X_n = j\} = \sum_i P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_i p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\}$$

Si verifica che per molte catene di Markov che l'ultima equazione converge con  $n \rightarrow \infty$  ad un valore che indicheremo con  $\pi_j$  una condizione sufficiente ma non necessaria è l'ergodicità. Una catena di Markov si dice ergodica se abbiamo che  $p_{ij}^{(n)}$  per qualsiasi  $i$  e  $j$  ammissibile risulta sempre maggiore di zero per qualche  $n$  maggiore di zero. I vari  $\pi_j$  vengono chiamati probabilità invarianti della catena di Markov e rappresentano i valori che soddisfano i seguenti vincoli:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^N \pi_k p_{kj} \quad \sum_{j=1}^N \pi_j = 1$$

Inoltre hanno l'interessante proprietà di rappresentare la frazione di tempo (con  $n \rightarrow \infty$  o comunque elevato) che il sistema trascorre nello stato etichettato da  $j$ .

## Capitolo 3

### Sistemi quantistici

#### 3.1 Sistemi quantistici in rappresentazione matriciale

Prima di cominciare a parlare delle passeggiate aleatorie quantistiche diamo una breve descrizione del formalismo matematico che viene utilizzato nella rappresentazione dei sistemi quantistici. Il modello deve essere in grado di descrivere adeguatamente lo stato in cui si trova il sistema, le quantità fisiche di interesse, dette osservabili, predire l'esito di eventuali misure sulle osservabili e determinare l'evoluzione temporale del sistema. Tutte queste caratteristiche sono descritte, per sistemi finito-dimensionali, mediante matrici complesse  $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$  che agiscono sullo spazio  $H_Q = \mathbb{C}^N$ .

Lo spazio  $H_Q$ , associato al sistema quantistico  $Q$  le cui variabili di interesse possono assumere solamente  $N$  esiti, è uno spazio di Hilbert finito-dimensionale, ovvero uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto interno e norma indotta dal prodotto stesso (nel caso a dimensione finita esso risulta automaticamente chiuso). Tali spazi di Hilbert sono tutti isomorfi a  $\mathbb{C}^N$ , quindi considereremo solo questo caso. Il prodotto e la norma saranno indicati e definiti rispettivamente:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \sum_{j=1}^N v_j^* w_j \\ \langle v, v \rangle &= \sum_{j=1}^N v_j^* v_j \\ \text{con } v, w &\in \mathbb{C}^N \text{ e } v_j, w_j \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Un generico elemento  $v$  di  $H_Q$  ed il suo trasposto coniugato in meccanica quantistica vengono rappresentato mediante la notazione di Dirac nella seguente maniera:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \rightarrow |v\rangle \text{ (ket)}$$

$$v^T = [v_1^* \quad \dots \quad v_N^*] \rightarrow \langle v| \text{ (bra)}$$

$$\langle v, w \rangle = \langle v||w\rangle$$

Le variabili fisiche o quantità osservabili in fisica quantistica possono assumere solamente determinati valori e vengono rappresentate da matrici hermitiane, ovvero matrici  $X$  in  $\mathbb{C}^{N \times N}$  aventi le seguenti proprietà:

1.  $X = X^T$  con  $X^T$  matrice trasposta e coniugata;
2.  $X = UD_xU^T$  con  $UU^T = I$  e  $D_x$  matrice diagonale;
3. Gli autovalori di  $D_x$  sono reali e corrispondono ai possibili esiti che può dare una misura relativa alla variabile  $X$ ;

$$X = UD_xU^T = U \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & x_{N-1} & 0 \\ & & & 0 & x_N \end{bmatrix} U^T$$

La matrice  $D_x$  viene anche chiamata rappresentazione spettrale e i suoi elementi sono lo spettro di  $X$ , infatti possiamo scrivere :

$$X = \sum_j x_j \Pi_j$$

Dove i vari  $\Pi_j$  rappresentano una famiglia di proiettori ortogonali sugli autospazi di  $X$ , ortogonali tra loro e che sommano all'identità. Una matrice  $\Pi$  si dice proiettore ortogonale se:

1.  $\Pi^2 = \Pi = \Pi^T$  il che implica in particolare che è hermitiana;

2.  $\Pi = U \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T$  ovvero ha come autovalori solo uno o zero;

È semplice vedere che si possono scegliere tali proiettori tutti a rango 1, cioè con un solo autovalore 1: tale scelta è unica e se  $X$  ha tutti gli autovalori diversi. Andiamo a vedere che forma avranno i vari  $\Pi_i$ . Possiamo scrivere, ragionando nella base in cui essi sono diagonali:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_j & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = x_j \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora si ottiene:

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= U \sum_j x_j \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T \\ &= \sum_j x_j U \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T \\ &= \sum_j x_j \Pi_j \\ \Rightarrow \Pi_i &= U \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^T \end{aligned}$$

dove  $U$  è un cambio di base che diagonalizza  $X$ .

In meccanica quantistica in generale non è possibile determinare con esattezza in che stato si trovi il sistema prima della misura, ma solamente le probabilità che una variabile assuma uno dei possibili valori concessi. Lo stato del sistema è infatti descritto da una matrice  $\rho$  in  $\mathbb{C}^{N \times N}$  hermitiana semidefinita positiva e a traccia 1, ovvero una matrice densità. Questa, oltre alle caratteristiche precedentemente esposte per  $X$ , presenta le seguenti proprietà:

1. Tutti gli autovalori di  $\rho$  sono positivi o nulli;
2. La loro somma è uguale ad uno;

Le due proprietà si possono motivare notando che la matrice  $\rho$  rappresenta l'equivalente quantistico di una distribuzione di probabilità; ciò sarà più evidente una volta che si sarà visualizzata la struttura di  $\rho$ :

$$\rho = U \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & p_N \end{bmatrix} U^T$$

Una volta noto  $\rho$  possiamo calcolare la probabilità che una misura della variabile  $X$  dia come esito  $x_i$ , dove  $x_i$  è uno degli autovalori di  $X$ ; il calcolo viene fatto per mezzo dei proiettori ortogonali  $\Pi_i$ .

$$P\{X = x_i\} = \text{tr}(\rho \Pi_i)$$

Una volta effettuata la misura sarà necessario aggiornare lo stato. Come nel caso in cui si debbono calcolare le distribuzioni di probabilità classiche condizionate all'esito di una misura, si dovrà assegnare probabilità uguale ad uno all'evento che è stato misurato e probabilità nulla a quelli incompatibili. Nel caso quantistico questo si traduce come:

$$\rho|_{X=x_i} = \frac{\Pi_i \rho \Pi_i}{\text{tr}(\Pi_i \rho)}$$

Nel caso in cui  $\Pi_i$  abbia rango 1 (solo un auto valore diverso da 0):

$$\rho|_{X=x_i} = \Pi_i$$

Un modo alternativo per sviluppare i conti, nel caso di proiettori su autospazi unodimensionali, è quello di utilizzare la notazione di Dirac:

$$\begin{aligned} \Pi_v &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} [v_1^* \quad \cdots \quad v_N^*] = |v\rangle \langle v| \\ \Rightarrow \Pi_i \rho \Pi_i &= |v_i\rangle \langle v_i | \rho |v_i\rangle \langle v_i| = |v_i\rangle \underbrace{\langle v_i | \rho |v_i\rangle}_{c \in \mathbb{C}} \langle v_i| = c \Pi_i \\ \text{tr}(\Pi_i \rho) &= \text{tr}(|v_i\rangle \langle v_i | \rho) = \text{tr}(\langle v_i | \rho |v_i\rangle) = c \end{aligned}$$

Dove l'ultimo il passaggio  $\text{tr}(|v_i\rangle \langle v_i | \rho) = \text{tr}(\langle v_i | \rho |v_i\rangle)$  si è effettuato in quanto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} ([v_1^* \quad \cdots \quad v_N^*] \rho) &= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} ([m_1 \quad \cdots \quad m_N]) = \begin{bmatrix} v_1 m_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & v_N m_N \end{bmatrix} \\ [v_1^* \quad \cdots \quad v_N^*] \rho \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} &= [m_1 \quad \cdots \quad m_N] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = m_1 v_1 + \cdots + m_N v_N \end{aligned}$$

$$e \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} v_1 m_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & v_N m_N \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}(m_1 v_1 + \dots + m_N v_N) = m_1 v_1 + \dots + m_N v_N$$

$$\Rightarrow \rho|_{X=x_i} = \frac{\Pi_i \rho \Pi_i}{\operatorname{tr}(\Pi_i \rho)} = \frac{c \Pi_i}{c} = \Pi_i$$

### 3.2 Sistemi quantistici a due livelli

Proviamo a dare un esempio di come può essere scritto un sistema quantistico a due livelli, facendo riferimento alla polarizzazione di un fotone lungo un piano identificato dagli assi verticale e orizzontale, a cui possiamo associare due numeri reali arbitrari: consideriamo 1 e -1, rispettivamente.  $H_q$  sarà identificato con  $\mathbb{C}^2$  e come osservabile  $X$  si considera:

$$X = U_X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_X^T; \quad \Pi_1 = U \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T; \quad \Pi_{-1} = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U^T$$

Possiamo supporre, a meno di un cambio di base,  $U = I$ .

Definiamo come  $|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $|-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  i vettori che generano gli autospazi su cui proiettano i proiettori  $\Pi_1$  e  $\Pi_{-1}$ , rispettivamente. Formando una base di  $\mathbb{C}^2$ , ogni vettore nello spazio di Hilbert potrà essere scritto con la notazione di Dirac come combinazione lineare di tali vettori.

Questo ci sarà utile nell'introdurre gli stati del sistema. Infatti, un caso particolare è quello degli stati puri, ovvero delle matrici densità associate a proiettori a rango 1. Questi a loro volta possono essere associati (in maniera univoca a meno di una fase globale), ai vettori a norma unitaria che generano il sottospazio su cui il proiettore ha immagine. Tali vettori normalizzati sono allora esprimibili come combinazione lineare di  $|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $|-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , che vengono a corrispondere rispettivamente alla caratteristica di polarizzazione lungo l'asse corrispondente a 1 o lungo l'asse -1. Essi si potranno scrivere nella seguente maniera:

$$|p\rangle = a_1 |1\rangle + a_{-1} |-1\rangle \text{ con } a_x \in \mathbb{C} \text{ e t.c. } |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = 1$$

I vincoli imposti sui coefficienti sono dovuti al fatto che  $|a_1|^2$  e  $|a_{-1}|^2$  rappresentano le probabilità che il sistema sia polarizzato lungo l'asse 1 o lungo l'asse -1. La matrice  $\rho$  ha infatti la seguente struttura:

$$\rho = \begin{bmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_{-1}^* \\ a_{-1} a_1^* & |a_{-1}|^2 \end{bmatrix}$$

Infatti avremo che:

$$P\{X = 1\} = \text{tr}(\rho \Pi_1) = |a_1|^2$$

E analogamente si avrà nel calcolo di  $P\{X = -1\}$ .

Un fatto fondamentale è che le caratteristiche espresse dai rispettivi stati  $|1\rangle$  e  $|-1\rangle$  e da ogni altra coppia di stati ortogonali devono essere tali da dare due comportamenti opposti se sottoposti ad opportuni test. Un fotone sottoposto ad un test di polarizzazione verticale lungo l'asse x o y che si trovi in  $|x\rangle$  o in  $|y\rangle$  farà sì che il fotone, con probabilità 1, passi o non passi la lente polarizzatrice. Non sarà invece ammissibile associare agli stati  $|x\rangle$  o  $|y\rangle$  il fatto che il fotone abbia rispettivamente polarizzazione lungo l'asse x oppure a quarantacinque gradi rispetto l'asse x in quanto non esiste alcun test di polarizzazione che fa sì che con probabilità uno il fotone passi o non passi il test a seconda che si trovi in  $|x\rangle$  o in  $|y\rangle$ . Un altro esempio può essere quello di una particella con spin  $\pm 1/2$  lanciata in un campo magnetico generato da un magnete sagomato di Stern-Gerlach con velocità perpendicolare alla direzione del campo la quale sarà identificata con un certo asse che indicheremo con z. La particella devierà la sua traiettoria verso l'alto oppure verso il basso a seconda che si trovi nello stato  $|\uparrow\rangle$  oppure  $|\downarrow\rangle$ , dove questi ultimi indicano il fatto di avere lo spin concorde all'asse z oppure rivolto in senso opposto. Dagli esempi fatti si può cogliere come gli stati  $|1\rangle$  e  $|-1\rangle$  possano essere visti come due facce della stessa medaglia in quanto se sappiamo che ci troviamo certamente in  $|1\rangle$  o  $|-1\rangle$  allora potremo prevedere con probabilità uno se il test darà esito positivo o negativo.

Un altro possibile caso si ha quando ci si trova in uno stato misto, ovvero uno stato dato dalla sovrapposizione probabilistica di più stati puri. Consideriamo il seguente esempio in cui ci troviamo ad avere probabilità pari a  $m_1$  di avere polarizzazione a  $-45^\circ$  rispetto all'asse 1 e probabilità pari a  $m_2 = 1 - m_1$  di avere polarizzazione a  $+45^\circ$  rispetto all'asse 1:

$$\rho = m_1 \rho_{-45} + m_2 \rho_{45}$$

La matrice di probabilità in questo caso avrà la seguente struttura:

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La probabilità di osservare un fotone con polarizzazione lungo l'asse 1 o l'asse -1 sarà data da:

$$\begin{aligned}
 P\{X = 1\} &= \text{tr}(\rho \Pi_1) = \text{tr} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

e analogamente per -1.

### 3.3 Realizzazione di una passeggiata aleatoria con sistemi quantistici

Vediamo in modo intuitivo come è possibile realizzare una passeggiata aleatoria unidimensionale utilizzando fenomeni quantistici. Prendiamo in considerazione una particella della quale, ai fini della nostra analisi, ci interessa descrivere le proprietà di spin e la sua posizione. La prima proprietà (spin) avrà il ruolo della “moneta” in una passeggiata aleatoria classica unidimensionale, cioè della variabile aleatoria che decide lo spostamento della particella in un verso o nell’altro. La posizione terrà conto dello spostamento avvenuto registrando la posizione raggiunta.

Come accennato in precedenza, lo spin viene descritto come un sistema quantistico a due livelli: ad esempio l’esito di una misura lungo l’asse z potrà assumere solamente i valori  $\pm 1/2$ , corrispondenti ai vettori ortogonali  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , i quali a loro volta identificano il fatto che il momento magnetico della particella sia orientato verso l’alto o verso il basso. Lo spazio vettoriale generato da  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  è lo spazio di Hilbert, isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ , in cui descriveremo questa prima proprietà.

Per introdurre una semplice descrizione quantistica dello spostamento, che immaginiamo avvenire per passi discreti e sempre uguali, associamo ad un vettore  $|\psi_{z_0}\rangle$  lo stato della particella quando si trova in  $z_0$  (tipicamente la posizione in meccanica quantistica è una variabile continua: possiamo nel nostro caso pensare ad una funzione d’onda con probabilità di trovare la particella concentrata in un intorno di  $z_0$ ), mentre con  $|\psi_{z_0+l}\rangle$  e  $|\psi_{z_0-l}\rangle$  si indicano rispettivamente i vettori associati agli stati della particella traslata a destra o a sinistra di una grandezza pari a  $l$ . A questa proprietà della particella viene quindi associato un altro spazio di Hilbert generato dalle base  $|\psi_{z_0-nl}\rangle, n \in \mathbb{Z}$ . In seguito ci restringeremo a considerare  $n$  in un sottoinsieme finito di  $\mathbb{Z}$ , con barriere assorbenti o con transizione ciclica.

Lo stato totale di una tale particella può essere descritto come uno stato di un sistema composto, ovvero un insieme di due o più sistemi quantistici non interagenti tra di loro se non mediante particolari operatori. Al sistema composto è associato lo spazio di Hilbert risultante dal seguente prodotto tra gli spazi dei due sistemi:

$$H = H_{spin} \otimes H_{posizione}$$

definito come lo spazio vettoriale generato dai vettori  $|\uparrow, \downarrow\rangle \otimes |\psi_{z_0-nl}\rangle$ .

Il simbolo  $\otimes$  è il prodotto di Kronecker, ovvero un'operazione tra matrici di dimensioni qualsiasi; esso è definito nella seguente maniera:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix} \text{ con } A \text{ matrice } p \times q \text{ e } B \text{ matrice } m \times n$$

$$\Rightarrow A \otimes B \text{ sar\`a una matrice } pm \times qn$$

Tra le varie proprietà del prodotto di Kronecker abbiamo che, prese 4 matrici tali che è possibile fare il prodotto tra matrici tra A e C e tra B e D allora:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

Come stato iniziale della passeggiata consideriamo per il momento un generico stato di  $H_{spin}$ : lo stato totale sar\`a quindi dato da:

$$|\Phi_0\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle \otimes |\psi_{z_0}\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle \otimes |\psi_{z_0}\rangle$$

Supponiamo ora di disporre di un dispositivo, la cui azione è associata ad un operatore lineare U, tale da traslare verso destra la particella nel caso in cui lo spin sia in  $|\uparrow\rangle$  e verso sinistra se siamo in  $|\downarrow\rangle$ . Usando il formalismo di Dirac, abbiamo:

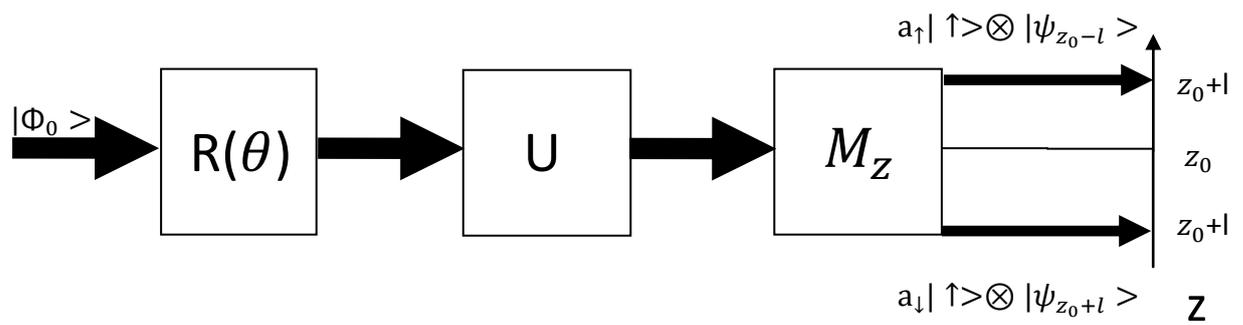
$$|\Phi_1\rangle = U|\Phi_0\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle \otimes |\psi_{z_0-l}\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle \otimes |\psi_{z_0+l}\rangle$$

Effettuando una misura di spin lungo z, che indicheremo con  $M_z$ , avremo una probabilità pari a  $|a_\uparrow|^2$  di rilevare la particella in un intorno di  $z_0 + l$  e una probabilità pari a  $|a_\downarrow|^2$  di rilevarla in un intorno di  $z_0 - l$ . Ricapitolando, applicando U a  $|\Phi_0\rangle$  ed effettuando successivamente una misura potremo trovarci negli stati  $|\uparrow\rangle \otimes |\psi_{z_0-l}\rangle$  o  $|\downarrow\rangle \otimes |\psi_{z_0+l}\rangle$ .

Supponiamo inoltre di poter agire sul sistema le probabilità con le quali i vari eventi si manifestano: in termini pratici questo corrisponde a poter ruotare lo spin, il che equivale ad un cambio di base; quest'ultima operazione verr\`a indicata con  $R(\theta)$ . In particolare considereremo  $R(\theta)$  che riporta lo stato dello spin dopo la misura nello stato iniziale, ottenendo:

$$|\Phi_1\rangle = a_\uparrow |\uparrow\rangle \otimes |\psi_{z_0\pm l}\rangle + a_\downarrow |\downarrow\rangle \otimes |\psi_{z_0\pm l}\rangle$$

Lo schema delle operazioni di base è riportato in figura.



Una passeggiata aleatoria può quindi essere realizzata eseguendo in sequenza le operazioni descritte qui sopra, i vari stati in cui ci si può trovare durante la camminata saranno identificati dalla posizione rispetto a  $z_0$ ; come vedremo la differenza tra una passeggiata classica e una passeggiata quantistica dipenderà dal fatto che la misura sullo spin venga fatta o meno, quando esso è preparato in alcuni stati iniziali che permettono di ottenere interferenza. Se la misura è effettuata a ogni passo, l'evoluzione corrisponde a quella di una passeggiata classica con probabilità di spostamento di  $\pm l$  rispettivamente  $|a_\uparrow|^2$  e  $|a_\downarrow|^2$ .



## Capitolo 4

### Modello a tempo discreto

Il primo modello che introduciamo viene detto a tempo discreto, in quanto la sua descrizione avviene per passi. Ad ogni passo viene sempre eseguita la stessa serie di operazioni sul sistema la quale comporta una transizione ad uno stato successivo. I vari passi si sviluppano come una successione ma nulla ci è detto riguardo al tempo impiegato per svolgere l'intera camminata o riguardo il tempo tra la transizione da uno stato all'altro.

#### 4.1 Descrizione stato

Per prima cosa diamo una descrizione degli stati del sistema. Un generico stato in cui si può trovare il sistema è scritto, seguendo la notazione di Dirac, come una combinazione lineare di elementi appartenenti all'insieme  $H$ . Ad esempio avremo:

$$|esempio\rangle = a_0|h_0\rangle + a_1|h_1\rangle + \dots + a_n|h_n\rangle$$
$$\text{con } h_0 \dots h_n \in H, a_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=0}^n |a_j|^2 = 1$$

Da quanto detto in precedenza lo stato  $|esempio\rangle$  avrà una probabilità pari a  $|a_0|^2$  di trovarsi nello stato  $|h_0\rangle$  e così via.

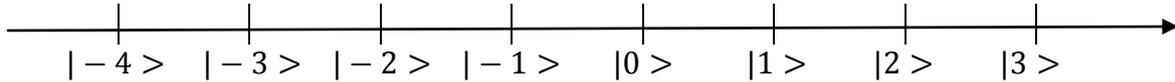
Veniamo ora alla definizione dell'insieme  $H$ . In simboli si può scrivere:

$$H = H_c \otimes H_p$$

L'insieme  $H_p$  è uno spazio di Hilbert di dimensione finita o infinita generato dalla base ortonormale

$$\{|i\rangle \text{ con } i \in A\} \text{ con } A = \mathbb{Z} \text{ oppure } A = \{j \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 0 \leq j \leq N-1\}$$

In altre parole, lo spazio  $H_p$  è associato alla posizione (discreta) della particella rispetto ad una posizione privilegiata, che possiamo indicare con  $|0\rangle$ , supponendola eventualmente come posizione di partenza; l'insieme  $H_p$  può essere raffigurato come nella figura sottostante.



Risulta ora evidente che caratteristiche comporti il fatto che  $A$  sia uguale a  $\mathbb{Z}$  oppure no. Nel primo caso stiamo assumendo che la passeggiata si svolga lungo una linea "infinita", ovvero che il numero di stati sia infinito o se non altro, rifacendoci al caso di un calcolatore reale, che il numero di stati disponibile sia sufficientemente grande da non poter essere esaurito nel tempo disponibile per la simulazione (si noti che in tempo  $T$  la particella può al più spostarsi di  $T$  passi. Basta quindi che  $N$  sia più grande del tempo in cui la particella evolve). Nel secondo caso invece abbiamo a che fare con uno spazio finito e facendo un paragone con l'algebra possiamo immaginare di lavorare in modulo  $N$ , ovvero si avrà che un eventuale stato  $N$  sarà mappato nello stato  $0$ ,  $N+1$  andrà in  $1$  e così via.

L'insieme  $H_c$ , detto anche "coin-space", è uno spazio di Hilbert di dimensione 2 generato da  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  e può essere visto come un sistema quantistico a due livelli. Gli stati  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , come vedremo da nelle successive pagine, determineranno il fatto che il sistema evolva spostandosi verso destra oppure verso sinistra.

Ora che dovrebbero essere chiari tutti gli elementi che caratterizzano uno stato appartenente al modello che stiamo descrivendo diamo qui sotto un esempio di come può essere scritto un generico stato.

*Esempio:*

$$H = H_c \otimes H_p$$

$$H_c = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$$

$$H_p = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle\} \text{ (spazio ciclico)}$$

Un possibile stato  $|g\rangle$  di  $H$  sarà:

$$|g\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle \otimes |1\rangle$$

Che può essere scritto in forma più sintetica come

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \frac{1}{2}|\uparrow\rangle |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle |2\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle |1\rangle \\ &= |\uparrow\rangle \left( \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle |1\rangle \end{aligned}$$

Lo stato  $|g\rangle$ , stando a quanto detto sopra, rappresenta lo stato in cui ci si ha  $1/2$  di probabilità di trovarsi a distanza 2 dall'origine con la caratteristica che il

successivo passo sarà verso destra e con probabilità 1/2 di trovarsi a distanza 1 dall'origine avendo la stessa possibilità di svolgere il successivo passo verso sinistra o verso destra.

## 4.2 Descrizione operatore di transizione

Come detto in precedenza gli stati  $|\uparrow\rangle$   $|\downarrow\rangle$  giocano un ruolo fondamentale nella determinazione del percorso che la particella compierà. Tale fatto risulterà pienamente chiaro solo una volta che sarà stato definito l'operatore di transizione, che indicheremo con la lettera U. L'operatore dovrà essere tale da far sì di mappare uno stato relativo alla posizione  $|i\rangle$  in  $|i+1\rangle$  se lo stato era composto con  $|\uparrow\rangle$ , in  $|\uparrow i-1\rangle$  se composto con  $|\downarrow\rangle$ .

Qui sotto diamo una definizione matematica di U:

$$U = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_i |i+1\rangle\langle i| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_i |i-1\rangle\langle i|$$

$$\text{con } |\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \langle\uparrow| = [1 \ 0] \text{ e } \langle\downarrow| = [0 \ 1]$$

*Esempio (continua):*

Con H definito come nell'esempio precedente avremo:

$$H = H_c \otimes H_p$$

$$H_c = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$$

$$H_p = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle\}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli uni evidenziati in grassetto sono dovuti al fatto che nell'esempio  $H_p$  è di dimensione finita e si è assunto che una traslazione verso destra dallo stato  $|5\rangle$  ci porti in  $|0\rangle$  e una a sinistra dallo stato  $|0\rangle$  sia mappata in  $|5\rangle$ .

Vediamo quindi un esempio di applicazione di U:

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|2\rangle$$

Applicando U a  $|g\rangle$  otterremo:

$$|g\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|1\rangle$$

Infatti per la proprietà del prodotto di Kronecker precedentemente messa in evidenza avremo:

$$U|g\rangle = (A \otimes B + C \otimes D)(E \otimes F + G \otimes L) = AE \otimes BF + AG \otimes BL + CE \otimes DF + CG \otimes DL$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sviluppando i conti e considerando che  $AG=0$  e  $CE=0$  otterremo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle |1\rangle$$

### 4.3 Rotazione stato

L'ultimo elemento che ci rimane da introdurre è un'ulteriore applicazione che indicheremo con C. Quest'ultima, chiamata anche "coin flip", consiste in una rotazione nella base di  $H_c$ . Precisiamo subito che la scelta di C è puramente arbitraria, ma ha enormi ripercussioni sullo sviluppo della passeggiata.

Per spiegare la funzione di C diamo un esempio di uno dei più utilizzati flip coin, ovvero l'Hadamard coin, talvolta indicato usando semplicemente la lettera H, da non confondere il simbolo relativo agli stati.

*Esempio:*

$$C = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se applichiamo H a  $|\uparrow\rangle$  o  $|\downarrow\rangle$  avremo rispettivamente:

$$|\uparrow\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

Si nota che H ha un'interessante proprietà, ovvero quella di essere bilanciato, nel senso che partendo dallo stato  $|\uparrow\rangle$  o  $|\downarrow\rangle$ , attraverso la rotazione indotta da H si avrà una redistribuzione delle probabilità in modo equo tra le due possibili direzioni. Notiamo inoltre che l'applicazione di H a  $|\downarrow\rangle$  induce la comparsa di un segno negativo che applicando  $|\uparrow\rangle$  non compare; vedremo nei successivi esempi che differenze comporterà la comparsa del segno meno in termini di sviluppo di passeggiate aleatorie classiche e quantistiche.

### 4.3 Descrizione passeggiata classica

Siamo ora in grado di dare un algoritmo rigoroso per la realizzazione di una passeggiata aleatoria classica utilizzando gli strumenti del modello descritti fino ad ora.

La passeggiata aleatoria classica nel modello discreto è vista come una successione di passi e ogni passo è formato da una serie di operazioni sempre uguali; indicheremo con  $V$  un singolo passo e con  $V^{\hat{T}}$  una passeggiata di  $T$  passi. Ogni passo  $U$  consta delle seguenti operazioni:

1. Rotazione mediante l'applicazione  $C$ ;
2. Applicazione di  $U$ ;
3. Misurazione dello stato in cui ci troviamo.

Si noti che mentre i primi due passi sono realizzati tramite trasformazioni unitarie, il terzo passo introduce una misura. Nei termini della teoria quantistica, questo introduce decoerenza, ovvero si passa da un'evoluzione che contiene solo stati puri (associati a sovrapposizioni lineari di vettori di base), a stati misti che dipendono dalla probabilità degli esiti della stessa introdotti dell'operazione di misurazione.

Ora che abbiamo inquadrato il procedimento con cui si sviluppa una passeggiata classica facciamo un esempio, utilizzando come applicazione  $S$  quella descritta in precedenza e come  $C$  la matrice  $H$  partendo dallo stato iniziale  $|a\rangle = |\downarrow\rangle|0\rangle$ .

*Esempio:*

Primo passo:

$$|a\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|-1\rangle$$

Infine eseguiremo la misurazione che ci dirà che ci troviamo nello stato  $|1\rangle$  con probabilità  $1/2$  e nello stato  $|-1\rangle$  con probabilità  $1/2$ . Se non specifichiamo l'esito, l'operatore densità associato alla mistura è quindi:

$$\rho(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |1\rangle\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |-1\rangle\langle -1|$$

Notiamo subito che il fatto di aver effettuato la misurazione alla fine del passo uno ha fatto sì che il segno meno non abbia alcuna rilevanza, visto che non ci sarà alcuna forma di "interferenza" con lo stato ai passi successivi.

Lo stato all'inizio del passo due è determinato dall'esito della misura precedente, e non comporterà nessuna difficoltà di calcolo in più rispetto al precedente: si può calcolare come miscela probabilistica dell'applicazione degli stessi operatori agli stati traslati  $|\uparrow\rangle |1\rangle, |\downarrow\rangle |-1\rangle$ , oppure direttamente all'operatore di densità. Altrettanto si avrà per i passi successivi.

Eseguendo la misurazione otterremo la stessa probabilità, uguale ad  $1/4$ , di trovarci  $|2\rangle$  o in  $|-2\rangle$  e probabilità pari ad  $1/2$  di trovarci in  $|0\rangle$ . Sottolineiamo un'altra volta che le misure effettuate hanno eliminato eventuali correlazioni tra i vari passi.

Dovrebbe essere chiaro come evolve la passeggiata aleatoria classica anche senza svolgere tutti i conti, quindi riportiamo qui sotto una tabella che descrive l'andamento delle probabilità in funzione del numero di passi eseguiti.

$T \backslash I$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$1/2$		$1/2$				
2				$1/4$		$1/2$		$1/4$			
3			$1/8$		$3/8$		$3/8$		$1/8$		
4		$1/16$		$1/4$		$3/8$		$1/4$		$1/16$	
5	$1/32$		$5/32$		$5/16$		$5/16$		$5/32$		$1/32$

Faremo un'analisi più approfondita della distribuzione di probabilità successivamente quando andremo a confrontarla con quella relativa alla passeggiata aleatoria quantistica, per ora ci limitiamo ad osservare che la distribuzione di probabilità è simmetrica e che le probabilità più elevate si hanno attorno al punto di partenza e risulta simile a quella di una gaussiana. E' comunque immediato vedere che il

comportamento è perfettamente analogo a quello del movimento di una particella classica.

#### 4.4 Descrizione passeggiata quantistica

Una passeggiata aleatoria quantistica con il modello a tempo discreto consiste sempre in una successioni di passi  $W^{\tilde{T}}$  solo che ogni passo  $W$  consta solamente di due operazioni:

1. Rotazione mediante l'applicazione di  $C$ ;
2. Applicazione di  $U$ .

Vediamo partendo dallo stesso stato iniziale e utilizzando la stessa  $C$  e la stessa  $U$  che distribuzione di probabilità otterremo dopo 3 passi.

*Esempio:*

primo passo:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |0\rangle - |\downarrow\rangle |0\rangle) \\ &\xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |1\rangle - |\downarrow\rangle |-1\rangle) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_1 = P_{-1} = 1/2$$

Secondo passo:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{H} \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle |1\rangle + |\downarrow\rangle |1\rangle - |\uparrow\rangle |-1\rangle + |\downarrow\rangle |-1\rangle) \\ &\xrightarrow{U} \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle |2\rangle + |\downarrow\rangle |0\rangle - |\uparrow\rangle |0\rangle + |\downarrow\rangle |0\rangle) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_2 = P_{-2} = \frac{1}{4} e P_0 = \frac{1}{2}$$

Terzo passo:

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{H} \frac{1}{2\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |2\rangle + |\downarrow\rangle |2\rangle + |\uparrow\rangle |0\rangle - |\downarrow\rangle |0\rangle - |\uparrow\rangle |0\rangle - |\downarrow\rangle |0\rangle \\ &\quad + |\uparrow\rangle |-2\rangle - |\downarrow\rangle |-2\rangle) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |2\rangle + |\downarrow\rangle |2\rangle - |\downarrow\rangle |0\rangle - |\downarrow\rangle |0\rangle + |\uparrow\rangle |-2\rangle - |\downarrow\rangle |-2\rangle) \\ &\xrightarrow{U} \frac{1}{2\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |3\rangle + |\downarrow\rangle |1\rangle - 2|\downarrow\rangle |-1\rangle + |\uparrow\rangle |-1\rangle - |\downarrow\rangle |-3\rangle) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_3 = P_{-2} = P_{-3} = \frac{1}{4} \text{ e } P_{-1} = \frac{5}{8}$$

$T \backslash I$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2		1/2				
2				1/4		1/2		1/4			
3			1/8		5/8		1/8		1/8		
4		1/16		5/8		1/8		1/8		1/16	
5	1/32		17/32		1/8		1/8		5/32		1/32

Effettuando un confronto tra la tabella riportata qui sopra e quella riguardante le passeggiate aleatorie classiche si nota che già dopo soli cinque passi si ottiene una distribuzione di probabilità molto diversa rispetto alla gaussiana. La tabella infatti mostra una distribuzione non simmetrica e spostata verso sinistra; nel prossimo paragrafo vedremo come realizzare una passeggiata aleatori quantistica simmetrica e ne confronteremo le caratteristiche con quella classica.

#### 4.5 Confronto

Attraverso l'applicazione del modello a tempo discreto alle passeggiate monodimensionali abbiamo messo in evidenza alcune differenze tra le distribuzioni di probabilità generate dalle passeggiate classiche e da quelle quantistiche. Per prima cosa abbiamo visto che, utilizzando per entrambe le passeggiate l'Hadamard coin e partendo dalle stesse condizioni iniziali, le passeggiate classiche danno una distribuzione simile ad una gaussiana mentre quelle quantistiche danno una distribuzione molto diversa che risulta essere non simmetrica.

Quest'ultimo fatto può essere ovviato utilizzando un operatore di rotazione differente rispetto a quello utilizzato in precedenza, ad esempio potremo utilizzare il seguente:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

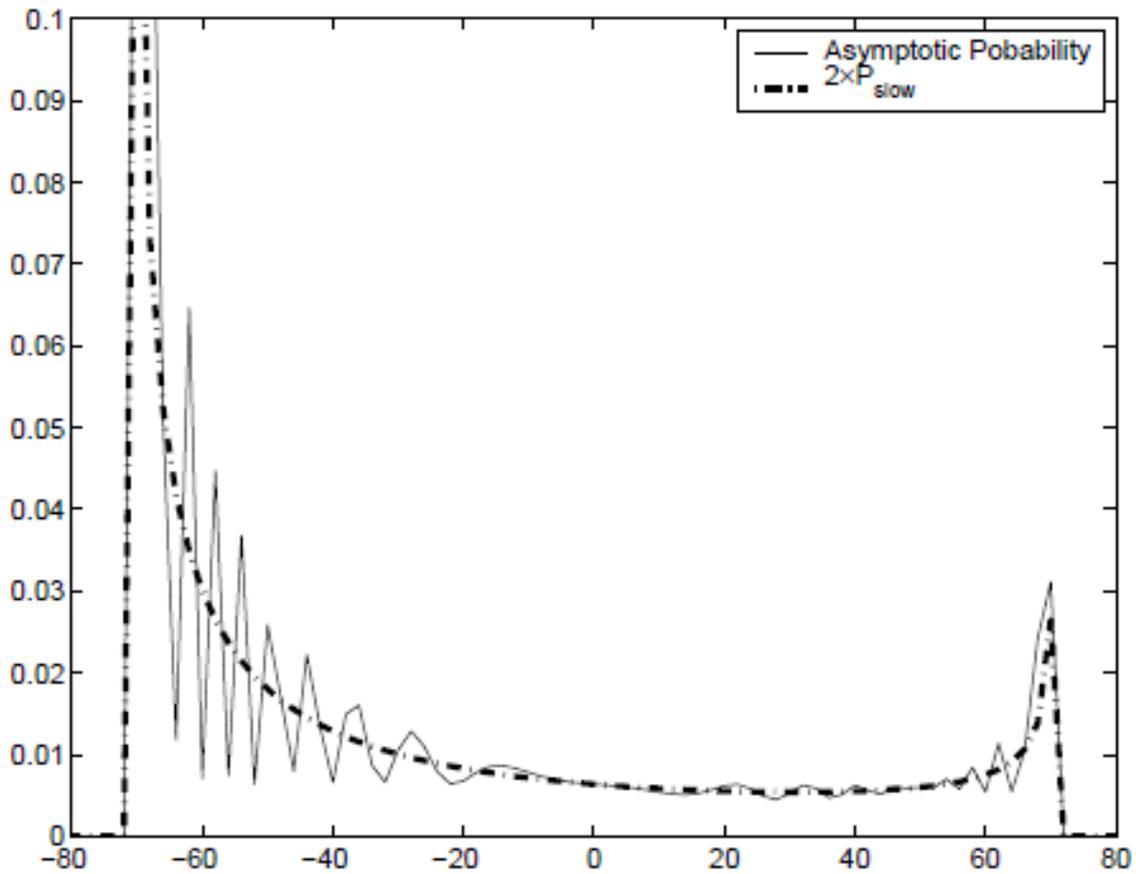
Si può ottenere la stessa distribuzione che si ottiene con C descritto qui sopra anche utilizzando l'Hadamard coin ma partendo da condizioni iniziali differenti rispetto a  $|\downarrow\rangle|0\rangle$  ad esempio partendo da  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|0\rangle + i|\downarrow\rangle|0\rangle)$ . Partendo da tali condizioni iniziali l'evoluzione dovuta a  $|\uparrow\rangle|0\rangle$  rimarrà nel reale mentre quella dovuta a  $|\downarrow\rangle|0\rangle$  rimarrà nei complessi in modo da far sì che le due evoluzioni non interferiscano tra di loro e diano una distribuzione simmetrica.

Nel caso classico sia utilizzando l'operatore di rotazione C descritto in precedenza e sia partendo dalla condizione iniziali  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|0\rangle + i|\downarrow\rangle|0\rangle)$  si ottiene comunque una gaussiana, infatti, come dimostrato in precedenza, la misurazione elimina ogni possibile forma di interferenza tra passi diversi e calcolando l'andamento della passeggiata classica passo per passo si otterrà lo stesso andamento descritto nella tabella della sezione 4.3.

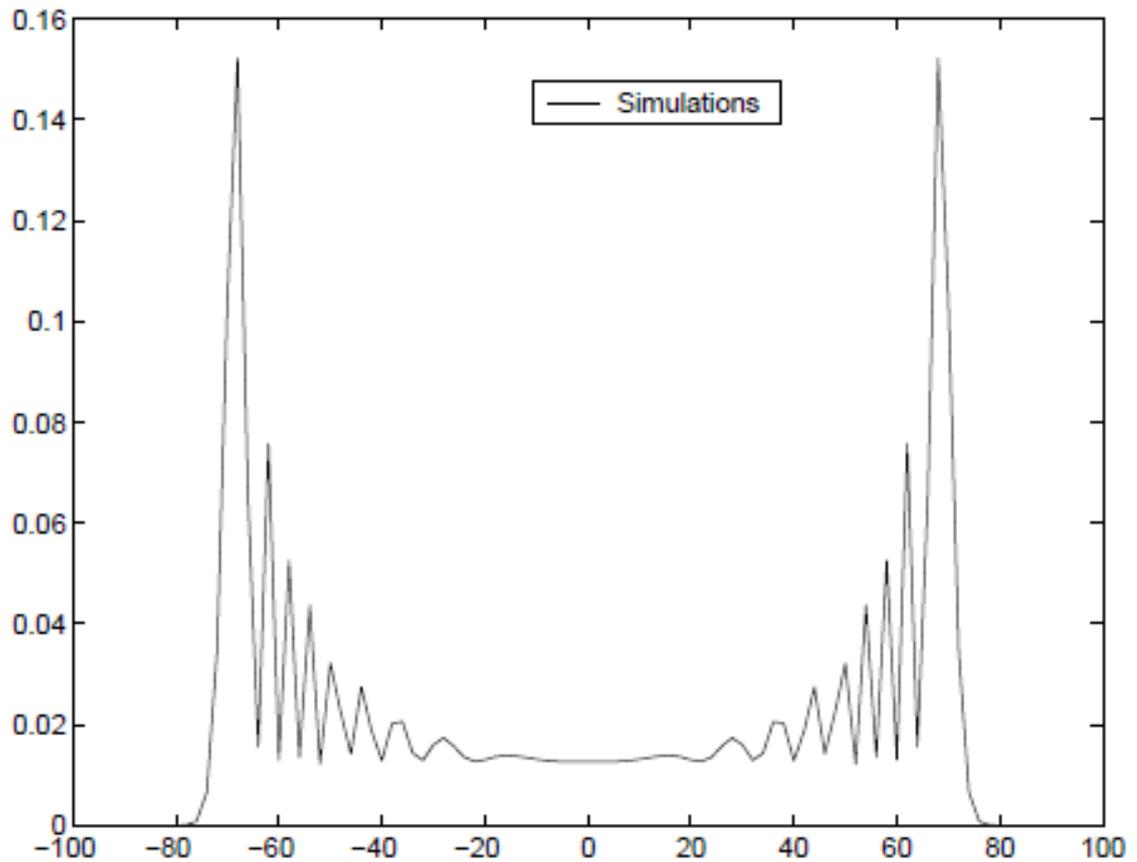
Riportiamo nelle pagine successiva alcune simulazioni delle varie distribuzioni di probabilità ottenute variando gli operatori di rotazione e le condizioni iniziali nelle modalità descritte in precedenza.

Si dimostra che la gaussiana generata dalla passeggiata aleatoria classica sulla linea ha una varianza  $\sigma^2 = T$ , il che implica che la deviazione standard vale  $\sigma = \sqrt{T}$  e che quindi dopo T passi ci aspettiamo di trovarci con alta probabilità ad una distanza dallo stato di partenza nell'ordine di grandezza di  $\sqrt{T}$ . La distribuzione relativa alla passeggiata aleatoria quantistica (simmetrica) ha una varianza  $\sigma^2 = T^2$  il che implica che dopo T passi ci aspettiamo di trovarci ad una distanza dal punto di partenza nell'ordine di grandezza di  $\sigma = T$ . Le osservazioni effettuate sulla distanza attesa dallo stato di partenza dopo T passi ci indicano un fatto molto rilevante, ovvero che la passeggiate aleatorie quantistiche si propagano molto più velocemente rispetto a quelle classiche.

Un ultimo fatto interessante è che, come si può notare dalle immagini, la passeggiata quantistica nell'intervallo  $\left[\frac{T}{\sqrt{2}}, \frac{T}{\sqrt{2}}\right]$  approssima una distribuzione costante, in forte contrasto con quanto avviene nelle passeggiate classiche.



*Distribuzione di probabilità di una passeggiata aleatoria quantistica ottenuta dopo 100 passi utilizzando come operatore di rotazione l'Hadamrad coin e partendo da condizioni iniziali  $|\downarrow\rangle |0\rangle$ . Sull'asse delle ascisse troviamo i possibili stati su quello delle ordinate le relative probabilità. La linea tratteggiata rappresenta la distribuzione di probabilità "filtrata" delle sue componenti ad elevate frequenze*



*Distribuzione di probabilità di una passeggiata aleatoria quantistica ottenuta dopo 100 passi utilizzando l'Hadamrad coin e con condizioni iniziali simmetriche  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|0\rangle + i|\downarrow\rangle|0\rangle$ ). Sull'asse delle ascisse troviamo i possibili stati su quello delle ordinate le relative probabilità.*

#### 4.5 Applicazione del modello a tempo discreto ai grafi

Il modello a tempo discreto può essere applicato anche ai grafi facendo alcune modifiche ai vari strumenti utilizzati. Supponiamo di trattare grafi  $d$ -regolari, ovvero grafi in cui ogni vertice ha grado  $d$  (ogni vertice ha  $d$  archi uscenti); vedremo successivamente che questa richiesta potrà essere facilmente allentata apportando alcune modifiche.

Ogni vertice sarà etichettato da una lettera dell'alfabeto e ogni archi uscente da un vertice sarà etichettato con un numero da 1 a  $d$ . Un arco che collega i vertici  $v$  e  $w$  in entrambe le direzioni potrà per tanto essere indicato come  $e_v^j = (v, w)$  o  $e_w^i = (w, v)$  con  $i$  e  $j$  compresi tra 0 e  $d$  ma non necessariamente coincidenti.

Il fatto che ad ogni passo la particella possa prendere  $d$  direzioni implica che  $H_c$  sarà uno spazio di Hilbert di dimensione  $d$ ; in notazione di Dirac uno stato puro di  $H_c$  verrà indicato con  $|j\rangle$  con  $0 < j < d + 1$  sarà associato al vettore  $[0 \dots 1 \ 0 \dots 0]^T$  con 1 nella posizione  $j$ -esima e rappresenterà uno dei  $d$  lati uscenti.

L'insieme  $H_p$  invece sarà uno spazio di Hilbert di dimensione  $|V|$  dove quest'ultima indica la cardinalità dell'insieme  $V = \{a, b, \dots\}$  uguale all'insieme di tutti i vertici o, nel nostro caso, posizioni. In notazione di Dirac avremo che ogni posizione sarà indicata con  $|w\rangle$  dove  $w$  è uguale alla lettera dell'alfabeto con cui è etichettata; ogni  $|w\rangle$  sarà associato ad un vettore di zeri con un solo 1 in posizione diversa per ogni diversa lettera ammissibile.

Un generico stato sarà come in precedenza dato da una combinazione di elementi appartenenti a  $H_c \otimes H_p$ , ad esempio con  $d$  maggiore o uguale a 4 potremo avere:

$$\begin{aligned} |esempio\rangle &= a_1|1\rangle|v\rangle + a_2|4\rangle|w\rangle \\ &\text{con } |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \end{aligned}$$

L'operatore precedentemente indicato con la lettera  $U$  sarà tale da mandare uno stato  $|j\rangle|w\rangle$  in  $|j\rangle|v\rangle$  dove  $v$  è il vertice su cui punta il lato uscente da  $w$  ed etichettato con la lettera  $j$ . Matematicamente avremo:

$$S = \sum_{j=1}^d |j\rangle \otimes [|w_a\rangle \dots |w_{|V|}\rangle]$$

Dove  $w_i$  indica la posizione puntata dal lato  $j$ -esimo del vertice  $i$  (si è implicitamente creato un isomorfismo tra lettere dell'alfabeto e numeri naturali compresi tra 1 e  $|V|$ ).

L'operatore di rotazione, indicato con la lettera  $C$ , sarà dato da una matrice  $\mathbb{C}^{d \times d}$ , la scelta più frequente è quella di utilizzare un operatore bilanciato, ovvero un operatore che ad ogni passo faccia sì che ci sia la medesima probabilità  $1/d$  di utilizzare uno dei possibili  $d$  lati uscenti dal vertice in cui ci si trova.

I vari passi di  $V^T$  e  $W^{\tilde{T}}$  che descrivono la passeggiata classica e quantistica sui grafi sono gli stessi del caso monodimensionale solo che l'insieme  $H$  e gli operatori  $C$  ed  $S$  hanno la forma descritta qui sopra.

Nel caso in cui si abbia a che fare con un grafo non  $d$ -regolare il modello può essere utilizzato comunque, basta applicare alcuni accorgimenti; si possono intraprendere due strade. La prima comporta di lasciare inalterato  $C$  e di far sì che il grafo sia  $d$ -regolare con  $d$  uguale al grado massimo dei vertici; sostanzialmente si andranno ad aggiungere dei self-loops ai vertici con meno di  $d$  lati in modo da portare il loro grado a  $d$ . L'altra alternativa è quella di agire su  $C$  creando un diverso operatore  $C_{d^i}$  per i vertici di grado  $d^i$ ; questa operazione dovrà essere fatta per tutti i gradi che si presentano nel grafo e permetterà di lasciare inalterati i lati.



## Capitolo 5

### Modello a tempo continuo

#### 5.1 Caso classico

Il modello a tempo continuo, che ci accingiamo ad introdurre per i grafi, non fa uso dello spazio  $H_c$  ma solamente dello spazio  $H_p$  che avrà le stesse caratteristiche descritte a tempo continuo. Per rendere il processo continuo sarà necessario assumere che le transizioni possano avvenire in qualsiasi istante, sarà quindi indispensabile introdurre un coefficiente che indicheremo con la lettera  $\gamma$  e rappresenta il tasso di transizione da un vertice ad un altro per unità di tempo; supporremo di avere a che fare con un grafo bilanciato, ovvero con un grafo in cui ogni lato abbia lo stesso tasso di transizione. Sarà necessario reintrodurre il vettore di stato  $p(t)$ :

$$p(t) = \begin{bmatrix} p(t)_1 \\ \vdots \\ p(t)_{|V|} \end{bmatrix}$$

Come in precedenza si è implicitamente creato un isomorfismo tra lettere dell'alfabeto e numeri naturali compresi tra 1 e  $|V|$ ).

Nelle passeggiate classiche avremo che, considerando ogni singola componente del vettore di stato, avremo che:

$$\frac{dp(t)_i}{dt} = -d_i \gamma p(t)_i + \sum_E \gamma p(t)_j$$

Con  $E$  insieme degli indici per i quali esiste un lato uscente che punta al vertice  $i$  e  $d_i$  grado del vertice  $i$ .

Similmente a quanto si fa con i sistemi compartimentali sarà possibile definire una matrice "dei flussi" che indicheremo con  $-H$ . i vari  $H_{ij}$  avranno la seguente forma:

$$H_{ij} = \begin{cases} -\gamma & \text{se } i \text{ e } j \text{ sono connessi} \\ 0 & \text{se } i \text{ e } j \text{ non sono connessi} \\ d_i\gamma & \text{se } i = j \end{cases}$$

Sarà quindi possibile scrivere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -Hp(t) \Rightarrow p(t) = \exp(-Ht)p(0)$$

L'ultima equazione scritta rappresenta l'evoluzione del vettore di stato nel tempo della passeggiata classica partendo da determinate condizioni iniziali.

## 5.2 Caso quantistico

L'evoluzione delle passeggiate aleatorie quantistiche con il modello a tempo continuo viene definita nei lavori di Farhi e Gutmann [1] nella seguente maniera:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi_{in}\rangle$$

Non dovrebbe risultare difficile partendo dall'ultima equazione scritta risalire all'evoluzione del vettore di stato  $p(t)$ ; per ogni singola componente  $p_i(t)$  avremo infatti che:

$$p_i(t) = (\langle i|\psi(t)\rangle)(\langle \psi(t)||i\rangle) = \langle i|(|\psi(t)\rangle\langle \psi(t)|)|i\rangle$$

L'ultimo passaggio ci dice che per ricavare l'evoluzione del vettore  $p(t)$  ci basta analizzare l'andamento della matrice  $|\psi(t)\rangle\langle \psi(t)|$ , in particolar modo saremo interessati agli elementi lungo la sua diagonale, infatti l'elemento in posizione  $i \times i$  individuerà la probabilità di trovarsi nello stato  $i$ .

Con questa definizione Farhi e Gutmann hanno messo in evidenza alcune importanti differenze tra passeggiate aleatorie classiche e quantistiche, ottenendo risultati concordi con simulazioni fatte utilizzando il modello discreto precedentemente introdotto.

## Capitolo 6

# Importanza delle passeggiate aleatorie nell'informatica

### 6.1 Introduzione mixing time ed hitting time

Le passeggiate aleatorie classiche vengono utilizzate nell'informatica teorica in svariati algoritmi: esse infatti forniscono un modo naturale per esplorare vasti insiemi di elementi mediante una sequenza di semplici transizioni.

Un esempio può essere il problema che, dato un grafo e due suoi nodi  $t$  ed  $s$ , si propone di dire se questi ultimi sono connessi oppure no. Per risolvere tale problema si possono effettuare una serie di passeggiate aleatorie con stato iniziale in  $t$  e lasciarle evolvere per un certo tempo  $T$  o, equivalentemente da un punto di vista discreto, per un numero di passi  $T$ ; se la passeggiata visiterà il nodo  $s$  sarà interrotta prima e l'algoritmo darà risposta affermativa. Ad ogni passeggiata è associata una certa probabilità  $p$  di visitare  $s$  entro un certo tempo  $T$  quindi, ripetendo la passeggiata per un numero di volte  $n$ , si avrà che la probabilità che si realizzi l'evento "la successione di passeggiate non visita il nodo  $s$ " sarà data da:

$$P\{\text{"non visitare } s\}\} = (1 - p)^n$$

Rendendo  $n$  sufficientemente grande si potranno rendere le probabilità di non visitare  $s$  piccole, diciamo pari a  $\varepsilon$ . Si avrà che:

$$\varepsilon = (1 - p)^n \Rightarrow \log_{(1-p)} \varepsilon = n$$

Per quantizzare le prestazioni degli algoritmi basati sulla ripetizione di passeggiate aleatorie definiamo due parametri, il mixing time e l'hitting time.

Il mixing time  $M_\varepsilon$  è il tempo necessario alla passeggiata aleatoria per "stabilizzarsi" ed approssimare alla sua distribuzione stazionaria. In formule abbiamo:

$$M_\varepsilon = \min\{T \text{ t. c. } \forall t \geq T, p(0): \|p(t) - \pi\| \leq \varepsilon\},$$

dove  $p(t)$  rappresenta il vettore di stato al tempo  $t$  mentre  $\pi$  rappresenta il vettore di stato della distribuzione stazionaria. Chiaramente, più piccolo sarà il tempo necessario alla passeggiata per avvicinarsi a una certa distribuzione di probabilità prima potremo fare previsioni sul tempo necessario per trovarci in un determinato insieme di stati, senza condizionamenti legati alle condizioni iniziali.

Per le passeggiate aleatorie quantistiche la definizione di mixing time deve essere leggermente modificata visto che esse non convergono ad una distribuzione stazionaria in quanto, come fatto notare in precedenza, a differenza delle passeggiate classiche esse mantengono memoria del passato, nel senso che essendo formate da una successione di trasformazioni unitarie esse sono sempre reversibili e non perdono mai l'informazione legata al loro stato di partenza. Anziché limitarsi allo studio dell'andamento del vettore  $p(t)$ , come fatto per le passeggiate classiche, verrà studiato il vettore  $c(t)$ , il quale rappresenta la media del vettore  $p(t)$  in un certo intervallo di tempo; si dimostra che il vettore  $c(t)$  converge ad una distribuzione stazionaria la quale dipende però dalle condizioni iniziali.

Il secondo parametro è l' hitting time  $T$ , ovvero il tempo per il quale si può affermare con elevata probabilità che la passeggiata è stata interrotta essendo finita in uno stato di interesse per il problema in questione. Rifacendoci all'esempio fatto in precedenza sui grafi l' hitting time rappresenta il tempo per il quale la passeggiata sul grafo, partendo da  $t$ , abbia visitato il nodo  $s$  almeno una volta con elevata probabilità. Come si può intuire dall'esempio sui grafi, questo parametro risulta fortemente legato alla velocità di propagazione della passeggiata.

Numerosi studi mostrano che per molti problemi le passeggiate aleatorie quantistiche forniscono prestazioni superiori rispetto a quelle classiche in termini di mixing time e hitting time e quindi anche in termini di tempo di risoluzione dell'algoritmo; il fatto non dovrebbe essere sorprendente visto quanto fatto notare in precedenza nelle simulazioni della passeggiate monodimensionali a tempo discreto, nelle quali attraverso la deviazione standard, si era messa in luce che la velocità di propagazione maggiore.

## 6.2 Confronto

Per rendere più precise le ultime affermazioni fatte riguardanti le migliori prestazioni delle passeggiate quantistiche rispetto quelle classiche in termini di mixing time ed hitting time e per quantificare il guadagno in termini di velocità, riportiamo alcuni risultati senza dimostrazione.

Iniziamo dal considerare la situazione più generale possibile, ovvero quella di un grafo, e ne andiamo ad analizzare il mixing time. Il vettore  $p(t)$  nel caso discreto avrà la seguente evoluzione:

$$p(t + 1) = Mp(t) \Rightarrow p(t) = M^t p(0).$$

Si dimostra [2] che  $M_\epsilon$  dipende solamente dal suo autovalore massimo  $\lambda_1 = 1$  e dal secondo autovalore massimo  $\lambda_2$ :

$$\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\log 2\epsilon} \leq M_\epsilon \leq \frac{1}{(1-\lambda_2)} (\max_i \{\log \pi_i^{-1}\} + \log \epsilon^{-1}).$$

Nel caso quantistico invece abbiamo che l'evoluzione potrà essere determinata dalla matrice  $U$  la quale non va applicata al vettore di stato  $p(t)$  ma agli stati quantistici del sistema e su di essi ha lo stesso effetto di applicare tutte le operazioni descritte in precedenza nel modello a tempo discreto per le passeggiate quantistiche (rotazione e applicazione operatore di transizione):

$$|\psi_{t+1}\rangle = U|\psi_t\rangle \Rightarrow |\psi_t\rangle = U^t|\psi_0\rangle$$

Dai vari  $|\psi_t\rangle$  che si susseguono nel tempo abbiamo la possibilità di calcolare l'evoluzione di  $p(t)$  ad ogni passo e farne la media arrivando così al vettore  $c(t)$ ; ogni componente del vettore  $p(t)$  verrà calcolata nella seguente maniera:

$$p_i(t) = \|\uparrow\rangle \otimes |i\rangle |\psi_t\rangle|^2 + \|\downarrow\rangle \otimes |i\rangle |\psi_t\rangle|^2$$

Come dimostrato da J. Kempe [4] il vettore  $c(t)$  converge ad una distribuzione stazionaria ed il suo  $M_\epsilon$  non dipende solamente dai due autovalori maggiori, infatti si ha che  $M_\epsilon$  dipende dai tutti i termini dati  $|\lambda_i - \lambda_j|$  con  $i$  e  $j$  che variano tra tutti i valori ammissibili. Andiamo ora ad analizzare casi più specifici, in modo da poter mettere in luce a livello pratico che differenze comporta il fenomeno sopra descritto.

### **Passeggiata aleatoria lungo una retta finita**

Mettiamoci nel primo caso che abbiamo trattato, ovvero nel caso di una passeggiata aleatoria monodimensionale su un insieme ciclico di  $N$  stati. Nel caso classico abbiamo che:

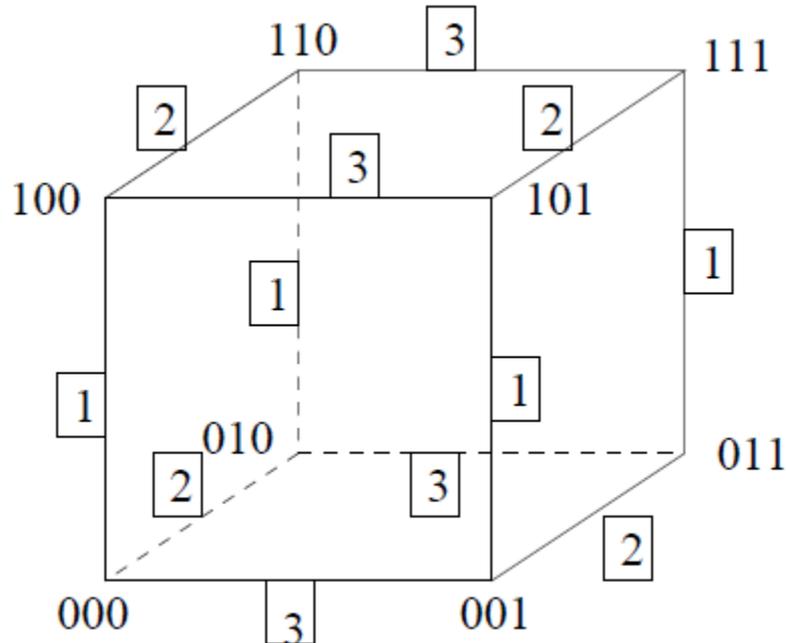
$$M_\epsilon \sim N^2 \log(1/\epsilon) \text{ e } T \sim N^2$$

Nel caso quantistico abbiamo:

$$M_\varepsilon \sim \frac{N \log(N)}{\varepsilon} \text{ e } T \sim N$$

In questo caso abbiamo un miglioramento di un fattore  $N$  sia di  $M_\varepsilon$  che di  $T$  [5].

### Passeggiata su un ipercubo di dimensione $d$



Consideriamo un particolare famiglia di grafi, ovvero gli ipercubi di dimensione  $d$ . Nell'immagine soprastante abbiamo portato un esempio di ipercubo con  $d=3$ . Notiamo che ogni vertice del grafo viene etichettato con  $d$  bit e che per ognuno vale che i vertici connessi hanno distanza di hamming unitaria, ovvero differiscono solamente per un bit (distinguendo i bit secondo la posizione); così facendo si avrà che per ogni vertice il suo opposto sarà quello etichettato con il codice avente distanza di hamming il maggiore possibile.

Supponiamo di svolgere una passeggiata aleatoria classica (bilanciata) e di essere interessati al tempo necessario per andare da un vertice al suo opposto. Da un punto di vista classico, come dimostrato in [5] avremo che:

$$M_\varepsilon \sim d \log d \log(1/\varepsilon) \text{ e } T \sim 2^d$$

Con le passeggiate quantistiche, come dimostrato in [6] e [3] otteniamo invece:

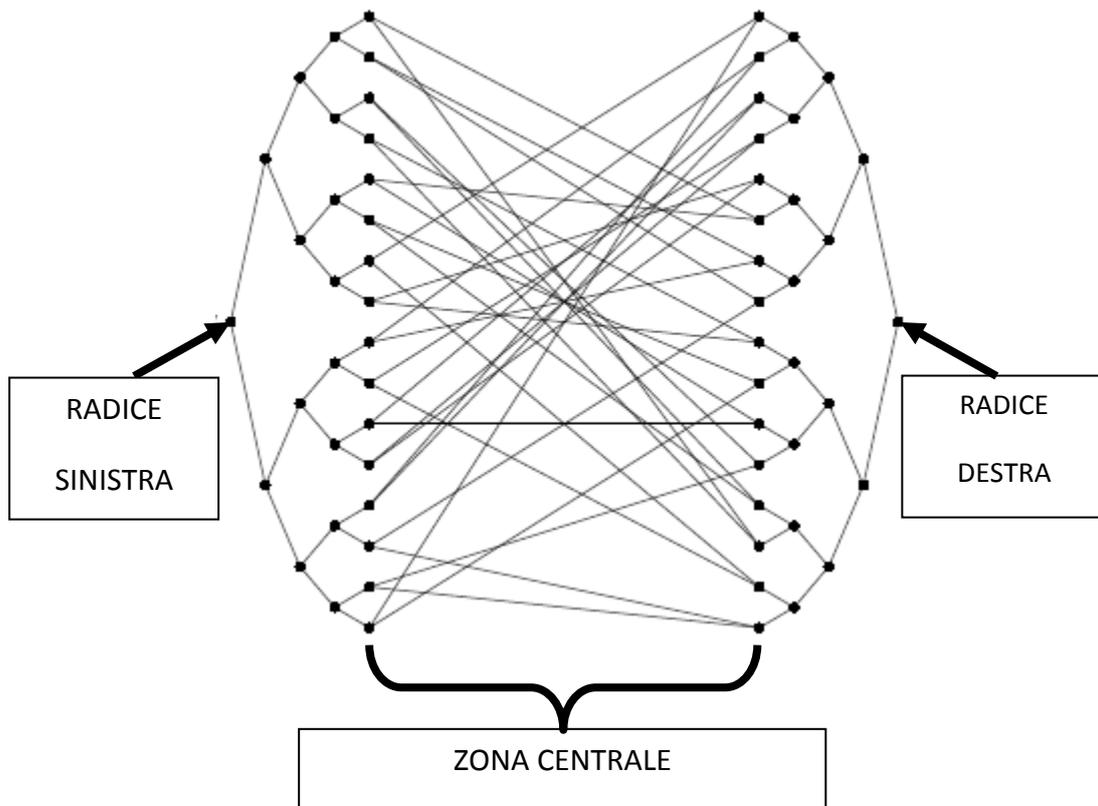
$$M_\varepsilon \sim \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \text{ e } T \sim \text{polinomiale in } d$$

In questo caso abbiamo un peggioramento del mixing time ma contemporaneamente abbiamo anche un miglioramento esponenziale di dell' hitting time.

### Esempio particolare

Presentiamo come ultimo esempio un caso particolare, in cui abbiamo una netta separazione tra caso classico e caso quantistico; sfortunatamente l'esempio non ha particolari applicazioni pratiche.

Consideriamo un grafo dato dall'unione di due alberi binari completi di altezza  $n$  uniti come nella figura sottostante (nel disegno  $n=4$ ).



Supponiamo di intraprendere una passeggiata bilanciata partendo dalla radice sinistra e di voler raggiungere la radice destra. Essendo che ogni ramo viene intrapreso con la stessa probabilità avremo che la passeggiata classica raggiungerà il centro del grafo molto rapidamente; al contrario avremo che il percorso dal centro verso la radice destra sarà reso più difficile, si avrà infatti che l' hitting time  $T$  sarà esponenziale in  $n$ .

Nel caso quantistico, come dimostrato nel lavoro di A.M. Childs, R. Cleve, E. Deotto, E. Farhi, S. Gutmann, and D.A. Spielman intitolato Exponential algorithmic speedup by quantum walk [7], si ha che  $T$  risulta polinomiale in  $n$ .

Sempre in [7] si dimostra che per la passeggiata classica un buon lower bound per  $T$  è  $2^n$ ; per la passeggiata quantistica abbiamo che si hanno probabilità pari a

$\frac{1}{2n}(1 - \varepsilon)$  di raggiungere la radice sinistra entro un tempo  $t$  appartenente all'intervallo  $\left[0, \frac{n^4}{\varepsilon}\right]$ . Nel caso quantistico si avrà quindi  $T \sim n^4$  rispetto al caso classico in cui avevamo  $T \gg 2^n$

## Bibliografia

- [1] E. Farhi and S. Gutmann. Quantum computation and decision trees. *Phys. Rev. A*, 58:915–928, 1998.
- [2] L. Lovasz and P. Winkler. Mixing times. In D. Aldous and J. Propp, editors, *Microsurveys in Discrete Probability*, volume 41 of *DIMACS Series on Disc. Math. And Theoret. Comp. Sci.*, pages 85–134. AMS, 1998.
- [3] J. Kempe. Quantum random walks hit exponentially faster, 2002. lanl-arXiv quant-ph/0205083.
- [4] J. Kempe. Quantum random walks - an introductory overview February 1, 2008.
- [5] On the Hitting Times of Quantum Versus Random Walks, Frédéric Magniez · Ashwin Nayak · Peter C. Richter · Miklos Santha Received: 13 November 2009 / Accepted: 24 April 2011 / Published online: 10 May 2011 © Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- [6] C. Moore and A. Russell. Quantum walks on the hypercube. In J.D.P. Rolim and S. Vadhan, editors, *Proc. RANDOM 2002*, pages 164–178, Cambridge, MA, 2002. Springer.
- [7] A.M. Childs, R. Cleve, E. Deotto, E. Farhi, S. Gutmann, and D.A. Spielman. Exponential algorithmic speedup by quantum walk, 2002. lanl-report quant-ph/0209131.