

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
Statistica Economia e Finanza



RELAZIONE FINALE
**CONFRONTO TRA DIVERSI TIPI DI TEST DI NORMALITA',
UNO STUDIO TRAMITE METODO MONTECARLO**

Relatore Prof. Luisa Bisaglia
Dipartimento di Scienze statistiche

Laureando: Davide Bottoli
Matricola N 1033296

Anno Accademico 2013/2014

Sommario

Introduzione.....	5
I test di normalità	7
2.1 Shapiro-Wilk	7
2.2 Test basati sulla funzione di distribuzione empirica	9
2.2.1 Il test Kolmogorov-Smirnov	9
2.2.2 Il test Lilliefors.....	11
2.2.3 Il test Cramer-Von Mises	12
2.2.4 Il test Anderson Darling	12
2.3 Test chi quadrato	14
2.4 Test basati sui momenti.....	15
2.4.1 Il test di Jarque-Bera	15
2.4.2 Il test omnibus di D'Agostino-Pearson	16
Il metodo Monte Carlo	17
3.1 Il calcolo dei valori critici	17
3.2 L'errore del I tipo	24
3.3 Le distribuzioni alternative	24
3.3.1 Le distribuzioni simmetriche a code leggere	26
3.3.2 Le distribuzioni simmetriche a code pesanti.....	31
3.3.3 Le distribuzioni asimmetriche	36
Risultati.....	42
4.1 Risultati simulazioni	42
4.1.1 Le distribuzioni simmetriche a code leggere	42
4.1.2 Le distribuzioni simmetriche a code pesanti.....	45
4.1.3 Le distribuzioni asimmetriche	48
4.2 Considerazioni aggiuntive	52
Conclusione.....	54
Appendice.....	55
A1 Tabelle contenenti i valori critici per gli otto test	55
A2 Tabelle contenenti i valori degli errori del I tipo per gli otto test	58

“.it is not enough to know that a sample could have come from a normal population; we must be clear that is it at the same time improbable that it has come from a population differing so much from the normal as to invalidate the use of “normal theory” tests in further handling of the material.”

E.S. Pearson, 1930

CAPITOLO 1

Introduzione

L'importanza della distribuzione normale è innegabile dato che è l'assunzione che sta alla base di moltissime procedure, è infatti la distribuzione più frequentemente usata nella teoria statistica e nelle sue applicazioni. Inoltre, conducendo analisi statistiche con metodi parametrici, verificare l'assunzione di normalità è un concetto fondamentale per l'analista soprattutto nel caso in cui si trovi a lavorare con t-test, regressioni lineari e analisi di varianze (ANOVA). Quando l'assunzione è violata, l'interpretazione e l'inferenza possono risultare non affidabili e invalide.

Le tre comuni procedure per verificare se un campione casuale di osservazioni indipendenti provenga da una distribuzione normale sono i metodi grafici (istogrammi, boxplot, Q-Q plot), i metodi numerici (indici di asimmetria e curtosi) e i più formali test di normalità; nonostante i metodi grafici possano essere utili, non sono sempre oggettivamente capaci di stabilire se l'assunzione di normalità sia verificata: alcuni analisti potrebbero notarla come altri no.

Nella letteratura possiamo trovare un notevole numero di test, descritti, per esempio, in D'Agostino e Stephens [1]. Inoltre, recentemente sono stati scritti parecchi libri e articoli relativi a quale test fosse meglio implementare dato un certo campione con numerosità variabile, senza, tuttavia, arrivare a determinare un test migliore degli altri.

I software statistici hanno implementato molti di questi test. In questo lavoro utilizzeremo per le nostre simulazioni il software R e i seguenti test: Shapiro-Wilk (SW), Kolmogorov-Smirnov (KS), Lilliefors (LL), Cramer-Von Mises (CVM), Anderson-Darling (AD), il test chi quadro di Pearson (CSQ), Jarque-Bera (JB) e D'Agostino-Pearson omnibus (DP).

Assumiamo di avere un campione X_1, X_2, \dots, X_n di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite da una distribuzione continua univariata con funzione di probabilità (PDF) non nota $f(x, \Theta)$, dove $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)$ è il vettore di parametri a valori reali. L'ipotesi formale per vedere se il campione provenga da una popolazione con distribuzione normale è la seguente:

$$\begin{cases} H_0: f(x, \theta) \in N(\mu, \sigma^2) \\ H_1: f(x, \theta) \notin N(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

Un test è detto tanto potente quanto è più alta la probabilità di rifiuto dell'ipotesi nulla quando il campione studiato è preso da una popolazione non normale. Facendo un paragone, tutti i test dovrebbero avere la stessa probabilità di rifiuto dell'ipotesi nulla quando il campione è preso veramente da una distribuzione normale, ossia dovrebbero avere tutti lo stesso errore del I tipo.

Usando il metodo Montecarlo sono stati generati 50000 campioni generati da distribuzioni non normali e la potenza del test è data dalla proporzione di campioni per cui si rifiuta l'ipotesi nulla.

Questo lavoro è articolato in 4 sezioni:

- Nella prima parte vengono descritti i test utilizzati.
- Nella seconda parte vengono elencate le distribuzioni utilizzate e come si è svolto il lavoro computazionale tramite il metodo di simulazione Montecarlo.
- Nella terza parte vengono riportati e commentati alcuni risultati dell'esperimento di Monte Carlo.
- Nella quarta parte vengono tratte le conclusioni basate su teoria e simulazioni.

CAPITOLO 2

I test di normalità

I test di normalità possono essere classificati in test basati sulla regressione e correlazione (Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia e Ryan-Joiner), in test tipo chi quadro (Chi quadro di Pearson), in test basati sulla funzione di distribuzione empirica (Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Anderson-Darling, Cramer-Von Mises), in test basati sui momenti (test di simmetria, test di curtosi, Jarque-Bera, D'Agostino-Pearson), in test basati sulle distanze (Rao, Greenwood) e in altri particolari tipi di test.

In questa sezione spiegheremo dettagliatamente i test usati nello studio.

2.1 Shapiro-Wilk

Questo test, SW, venne introdotto nel 1965 da Samuel Shapiro e Martin Wilk ed è considerato in letteratura uno dei più potenti per la verifica dell'ipotesi di normalità, specialmente per piccoli campioni.

Questa tipologia di test, che utilizza regressioni e combinazioni lineari, si basa sul fatto che una variabile $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ può essere espressa anche nella forma $Y = \mu + \sigma X$, dove $X \sim N(0, 1)$. Il test SW era originariamente limitato ad una dimensione campionaria $n \leq 50$.

Se $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ denota un campione casuale ordinato di dimensione n da una distribuzione normale standard ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$), definiamo $m' = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ il vettore dei valori attesi e $V = (v_{ij})$ la matrice di covarianza delle suddette statistiche ordinate. Sia inoltre $Y' = (Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)})$ un vettore di osservazioni casuali ordinate prese da una popolazione arbitraria. Se le $Y_{(i)}$ fossero osservazioni ordinate prese da una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2 sconosciute, allora si potrebbe scrivere le $Y_{(i)}$ come $Y_{(i)} = \mu + \sigma X_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

La statistica test per la normalità è:

$$SW = \frac{[\sum_{i=1}^n a_i Y_{(i)}]^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

dove $a' = m'V^{-1}(m'V^{-1}V^{-1}m)^{-1/2}$ e $a'a = 1$

o alternativamente se definiamo $b=a'Y$, sapendo che $a_i=-a_{n-i+1}$, otteniamo

$$b = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{n-i+1} (Y_{(n-i+1)} - Y_{(i)})$$

e di conseguenza il test diventa

$$SW = \frac{b^2}{((n-1)s^2)}$$

dove s^2 è la varianza campionaria.

Gli a_i sono i pesi che vengono ottenuti da Shapiro e Wilk [2] per campioni con numerosità inferiore a 50; una difficoltà per il test SW è che gli a_i sono conosciuti esattamente per campioni con numerosità fino a 20, mentre per numerosità campionarie maggiori sono solo stimati.

Il valore del test SW varia tra 0 e 1: valori piccoli portano a rifiutare l'ipotesi di normalità, mentre un valore pari a uno indica la normalità dei dati.

J.P. Royston [3] nel 1982 presentò una modifica del test, che lo portava ad essere valido anche per campioni di numerosità $7 \leq n \leq 2000$, con la seguente normalizzazione di SW:

$$y = (1 - SW)^\lambda$$

$$z = \frac{(y - \mu_y)}{\sigma_y}$$

quindi

$$z = \frac{((1 - SW)^\lambda - \mu_y)}{\sigma_y}$$

dove z è una normale standard traslata, μ_y e σ_y sono rispettivamente la media e la deviazione standard di y . Il parametro λ fu stimato per 50 campioni di numerosità fissata e liscio con il metodo polinomiale in $\ln(n) - d$ dove $d=3$ se $7 \leq n \leq 20$ e $d=5$ se $21 \leq n \leq 2000$. Royston dotò FORTRAN 66 dell'algoritmo AS 181 per il calcolo del valore della statistica test SW e del p-value per campioni con numerosità 3-2000. Successivamente si accorse che le approssimazioni dei pesi delle a_i usate dall'algoritmo erano inadeguate se $n > 50$; diede quindi un'ulteriore approssimazione ai pesi e creò l'algoritmo AS R94 che poteva essere utilizzato per qualunque dimensione con $3 \leq n \leq 5000$; questo studio utilizza l'ultimo algoritmo descritto. Successive variazioni e modifiche del test furono introdotte da Shapiro e Francia (1972), Weisberg e Bingham (1975), Rahman e Govindarajulu (1997).

2.2 Test basati sulla funzione di distribuzione empirica

L'idea che sta alla base dei test basati sulla funzione di distribuzione empirica (EDF) nel valutare la normalità dei dati consiste nel confrontare la EDF che viene stimata utilizzando i dati con la funzione di distribuzione cumulata (funzione di ripartizione, CDF) di una distribuzione normale per valutare se c'è concordanza tra esse. I test più noti sono il Kolmogorov-Smirnov (KS), il Lilliefors (LL), il Cramer-Von Mises (CVM) e l'Anderson-Darling (AD). I test che utilizzano la EDF rifiutano l'ipotesi nulla (il campione proviene da una popolazione normale) quando c'è troppa discrepanza tra le due funzioni di distribuzione; sono quindi tutti test a una coda.

2.2.1 Il test Kolmogorov-Smirnov

Siano $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ le osservazioni ordinate di un campione casuale di numerosità n e $F(x)$ sia la funzione di distribuzione di X . La EDF $F_n(x)$ è definita come la frazione delle $X_{(i)}$ che è minore o uguale a x per ogni x :

$$F_n(x) = \frac{\text{numero di osservazioni} \leq x}{n} \quad -\infty < x < \infty$$

La statistica KS appartiene alla classe delle statistiche EDF e questa classe si basa sulla maggiore differenza verticale tra la funzione di distribuzione empirica e quella ipotetica $F^*(x)$. Questo test richiede che la distribuzione $F^*(x)$ sia completamente definita con parametri conosciuti. Quando questo test viene utilizzato per la verifica della normalità, $F^*(x)$ viene presa da una distribuzione normale con media μ e deviazione standard σ note.

La statistica test è definita in tre maniere differenti a seconda del tipo di ipotesi alternativa:

- $\begin{cases} H_0: F(x) = F^*(x) \\ H_1: F(x) > F^*(x) \end{cases}$

La statistica $KS^+ = \sup[F^*(x) - F_n(x)]$ è la maggiore distanza verticale in cui la funzione $F^*(x)$ è sopra a $F_n(x)$.

- $\begin{cases} H_0: F(x) = F^*(x) \\ H_1: F(x) < F^*(x) \end{cases}$

Similmente, la statistica test $KS^- = \sup[F_n(x) - F^*(x)]$ è la maggiore distanza verticale in cui la funzione $F_n(x)$ è sopra a $F^*(x)$.

- $\begin{cases} H_0: F(x) = F^*(x) \\ H_1: F(x) \neq F^*(x) \end{cases} \quad (1)$

In tal caso $KS = \max(KS^+, KS^-)$

Grandi valori della statistica test ci portano a rifiutare l'ipotesi nulla.

Se $F(x)$ è continua, e nel nostro caso le distribuzioni alternative lo sono sempre, si dimostra che sotto H_0

$$\sqrt{n} KS \xrightarrow{d} K$$

dove K è la distribuzione di Kolmogorov e non dipende da $F(x)$; K ha infatti questa funzione di ripartizione[4] :

$$\Pr(K \leq x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 x^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / (8x^2)}$$

L'ipotesi nulla viene rifiutata se $\sqrt{n} KS > K_\alpha$ e K_α è determinato da

$$\Pr(\sqrt{n} KS \leq K_\alpha) = 1 - \alpha.$$

2.2.2 Il test Lilliefors

Il test LL è una modifica del test KS e fu introdotto da Hubert Lilliefors (1967), professore di statistica dell'Università George Washington; è adatto quando i parametri sconosciuti della distribuzione $F^*(x)$ devono essere stimati dal campione di dati. Il test LL confronta la distribuzione empirica delle X con una distribuzione normale dove i suoi parametri incogniti vengono stimati dal campione dato. La statistica LL è nuovamente dedotta dall'equazione (1) eccetto per il fatto che i valori di μ e σ utilizzati sono la media e la varianza campionaria, infatti le statistiche KS^+ e KS^- vengono cambiate con le seguenti:

$$KS^+ = \sup \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n} - \Phi \left(\left(\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \right) \right] \right]$$

$$KS^- = \sup \left[\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) - \frac{i-1}{n} \right] \right]$$

Visto che la CDF sotto l'ipotesi nulla è stata avvicinata ai dati grazie alle stime basate su questi ultimi, la distanza verticale massima è ridotta rispetto a quanto lo sarebbe se l'ipotesi nulla avesse individuato una predefinita distribuzione normale. Così la distribuzione sotto l'ipotesi nulla della statistica test è

stocasticamente più piccola della distribuzione di Kolmogorov-Smirnov. Fino ad oggi, le tabelle dei valori critici per questa distribuzione sono state calcolate solo attraverso metodi Monte Carlo.

2.2.3 Il test Cramer-Von Mises

Questo test, CVM, fu sviluppato da Harald Cramer, Richard Edier Von Mises e Stanislav Smirnov (1928-1930) e viene utilizzato per valutare la bontà di adattamento di una teorica CDF $F^*(x)$ a una EDF $F_n(x)$ o per confrontare due distribuzioni empiriche. E' definito dalla statistica

$$n\omega^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 dF^*(x)$$

che, come la statistica KS, è libera da distribuzioni, ossia la sua distribuzione non dipende dalla distribuzione teorica; il CVM è un test alternativo al KS.

Siano $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ le osservazioni ordinate di un campione di numerosità n , allora la statistica test può essere scritta come:

$$T = n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2$$

Se il valore assunto dalla statistica test è maggiore del valore critico, allora l'ipotesi che i dati provengano da una distribuzione $F^*(x)$ (nel nostro caso una normale) può essere rifiutata. Anche in tal caso, come per il test precedente, non esistono dei valori critici già definiti né la statistica test segue una distribuzione particolare, quindi vanno calcolati tramite simulazione.

2.2.4 Il test Anderson Darling

Questo test, AD, prende il nome dai suoi autori Theodore Wilbur Anderson e Donald Darling, che lo svilupparono nel 1952, ed è sostanzialmente una modifica del CVM che differisce da esso per il fatto che quest'ultimo dà meno peso alle code della distribuzione. A differenza del CVM che è libero da distribuzioni, il test

AD fa uso di una specifica distribuzione teorica nel calcolo dei valori critici, pertanto è più sensibile del precedente; un inconveniente di questo test è che i valori critici devono essere calcolati per ogni specifica distribuzione. In questo test viene calcolata la distanza tra $F^*(x)$ e $F_n(x)$ per mezzo di

$$n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 \omega(x) dF^*(x)$$

che è una media della distanza quadratica, ponderata da

$$\omega(x) = [F^*(x)(1 - F^*(x))]^{-1}$$

Notiamo che se quest'ultima è pari ad 1 ci riduciamo alla statistica $n\omega^2$ mentre nel caso generale la formula completa è questa

$$n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - F^*(x)]^2}{[F^*(x)(1 - F^*(x))]} dF^*(x)$$

Siano $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ le osservazioni ordinate di un campione di numerosità n , la statistica AD viene calcolata come

$$AD = -n - S$$

Dove

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln(\Phi(X_i)) + \ln(1 - \Phi(X_{n+1-i}))]$$

Stephens [5] nel 1986 propose una modifica alla statistica nel seguente modo:

$$AD^* = \begin{cases} AD \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right), & \text{se media e varianza sono sconosciute} \\ AD, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.3 Test chi quadrato

Il più antico e probabilmente più noto test di bontà di adattamento è il test chi quadrato di Pearson, CSQ, proposto per primo da Karl Pearson. Bisogna dire che il test CSQ non è altamente raccomandato per le distribuzioni continue, poiché nel calcolo della statistica test utilizza solamente il conteggio delle osservazioni in una cella piuttosto che le osservazioni stesse.

Sia O_i il numero di osservazioni nella cella i , con $i=1, 2, \dots, c$, sia p^*_i la probabilità che un'osservazione ricada nella cella i , sotto l'assunzione che l'ipotesi nulla sia vera; il numero atteso di osservazioni che ci si aspetta avere nella cella i è definito da $E_i = p^*_i n$ dove n è la numerosità campionaria

Il valore della statistica test è dato da:

$$CSQ = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Il test viene elaborato considerando che ci sia equiprobabilità tra le celle sotto ipotesi di normalità, ossia $p^*_i = 1/c$; la statistica diventa

$$CSQ = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^c (n_i - \frac{n}{c})^2$$

dove n_i è il numero di osservazioni che cade nella i -esima cella e c è il numero di celle equiprobabili.

Benno Schorr (1974) scoprì che, per campioni di grandi dimensioni, il numero ottimo di celle c dovesse essere inferiore a $M = 4 \left(\frac{2n^2}{z_\alpha^2} \right)^{1/5}$ dove z_α è il 100(1- α) percentile di una distribuzione normale standard. Se k è il numero di parametri della distribuzione di X che devono essere stimati, allora la distribuzione del test CSQ si trova tra due distribuzioni chi quadro, una con $c-k-1$ gradi di libertà e una con $c-1$ g.d.l [6].

2.4 Test basati sui momenti

I test di normalità basati sui momenti includono il test di asimmetria (S^2), il test di curtosi (K), il test di D'Agostino-Pearson (DP) e il test di Jarque-Bera (JB); i primi due sono più imprecisi poiché considerano un solo momento, per questo motivo in questo studio utilizzeremo gli ultimi due.

2.4.1 Il test di Jarque-Bera

Carlos Jarque e Anil K. Bera (1979), mentre lavoravano sulla loro dissertazione sui residui di regressione, utilizzarono la procedura dei moltiplicatori di Lagrange sulla famiglia di distribuzioni di Pearson per verificare la normalità dei residui di regressione e scoprirono che il test aveva un'ottima potenza a livello asintotico e una buona performance per un campione finito.

La statistica test JB è calcolata con l'utilizzo dell'asimmetria e curtosi campionarie ed è:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4} (K - 3)^2 \right)$$

Dove n è il numero delle osservazioni, mentre S^2 e K vengono calcolate così:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^2}$$

La statistica JB segue approssimativamente una distribuzione chi quadro con 2 gradi di libertà; è pari a 0 quando l'asimmetria è nulla e la curtosi è uguale a 3, questa è anche l'ipotesi nulla che viene testata. Alti valori di asimmetria in valore assoluto e valori di curtosi distanti da 3 portano al rifiuto dell'ipotesi nulla.

2.4.2 Il test omnibus di D'Agostino-Pearson

La convergenza della statistica JB al chi quadro con 2 g.d.l. è molto lenta, soprattutto per quanto riguarda la componente di curtosi; per superare questo ostacolo D'Agostino e Pearson (1990) proposero il seguente test che con delle trasformazioni accelerano la convergenza delle statistiche S e K alle corrispondenti distribuzioni normali [7]:

$$DP = Z_1(S)^2 + Z_2(K)^2$$

Anscombe e Glynn [8] proposero una trasformazione per K, che migliorava nettamente il test, con la limitazione che non poteva più venire usato per campioni di numerosità inferiore a 20; in questo documento e nelle simulazioni utilizziamo proprio quest'ultima modifica del test.

La statistica test DP segue approssimativamente una distribuzione chi quadro con 2 gradi di libertà quando la popolazione è normalmente distribuita. Questo test è detto spesso "omnibus test" per il fatto che è capace di individuare scostamenti dalla normalità dovuti ad entrambi i momenti contemporaneamente.

CAPITOLO 3

Il metodo Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo fa parte della famiglia dei metodi statistici non parametrici ed è estremamente utile per superare i problemi computazionali legati ai test; il metodo si basa sulla ripetizione di simulazioni di campioni casuali per ottenere risultati numerici e viene molto spesso utilizzato per ottenere la distribuzione di probabilità di un'entità probabilistica. Nel nostro caso viene utilizzato per valutare la potenza dei test SW, KS, LL, CVM, AD, CSQ, JB, AD nel giudicare se un campione casuale di n osservazioni indipendenti provenga da una distribuzione normale.

3.1 Il calcolo dei valori critici

Come primo passo abbiamo calcolato i valori critici per ogni test ai livelli di significatività dell'1%, del 5% e del 10%, per 50000 campioni di 15 numerosità crescenti, $n=10(5), 30(10), 50, 100(100), 500, 1000, 1500, 2000$; questi valori sono stati ottenuti basandoci su 50000 campioni simulati da una distribuzione normale standard e inoltre le 50000 statistiche test sono state utilizzate per creare la funzione di distribuzione empirica.

Dato che il test SW è un test a coda sinistra, i valori critici sono il $100(\alpha)$ percentile della distribuzione empirica di queste statistiche test; i valori critici per i test KS, LL, CVM, AD, CSQ, JB e DP, che sono a coda destra, sono il $100(1-\alpha)$ percentile della distribuzione empirica delle rispettive statistiche test. Al contrario i test di asimmetria e curtosi, che qui non analizziamo, sono a due code per cui i valori critici sarebbero il $100(\alpha/2)$ e il $100(1-\alpha/2)$ percentili della distribuzione empirica delle statistiche test. Per il test CSQ, dati una numerosità campionaria e la distribuzione alternativa considerata, la statistica test viene calcolata dall'elaboratore per vari c (numero di categorie) che siano più piccoli di

$$M = 4 \left(\frac{2n^2}{z_\alpha^2} \right)^{1/5}. \text{ La potenza del test CSQ è considerata quindi come la potenza}$$

più alta (proporzione di campioni rifiutati, ossia p -value più piccoli di α) tra le c categorie.

Il set completo di valori è elencato nelle tabelle in [A1]; qui vengono riportati solo quelli di tre numerosità campionarie (n=20, 200, 2000).

n=20			
	VALORI CRITICI		
	1%	5%	10%
SW	0.86622	0.90482	0.91997
	90%	95%	99%
KS	0.26516	0.29385	0.34982
LL	0.17608	0.19173	0.22346
CVM	0.10117	0.12299	0.17361
AD	0.60674	0.71894	0.99101
CSQ	8.0	9.4	13.6
JB	2.34377	3.83624	9.70386
DP	4.43357	6.36143	11.68339

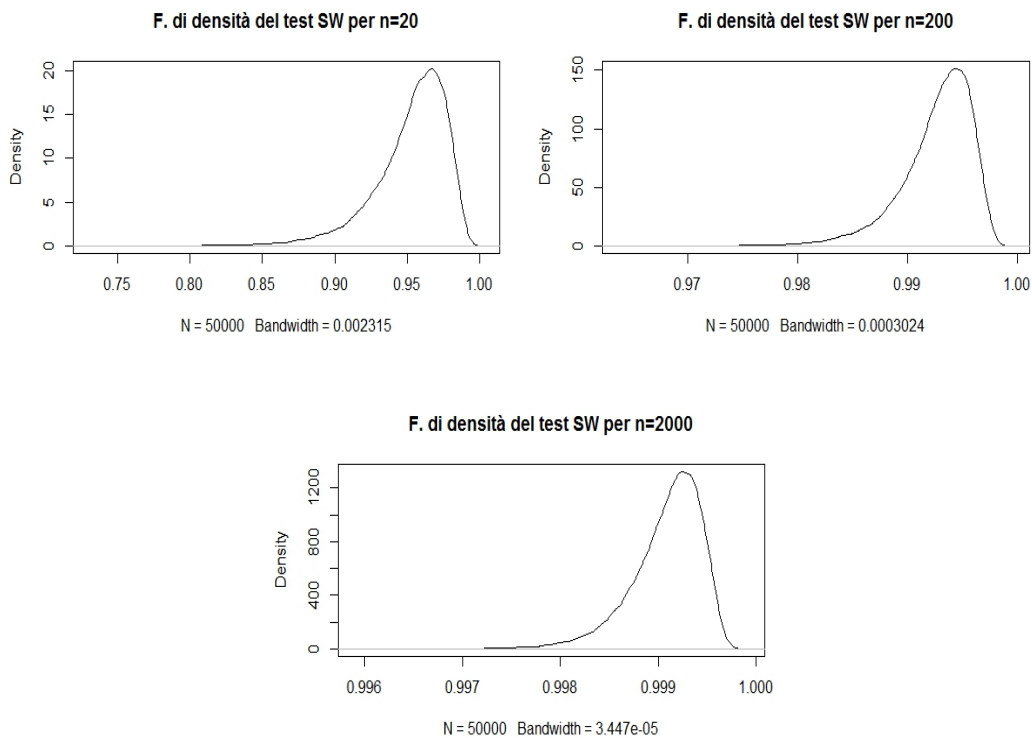
n=200			
	VALORI CRITICI		
	1%	5%	10%
SW	0.98158	0.98630	0.98833
	90%	95%	99%
KS	0.08599	0.09542	0.11435
LL	0.05820	0.06341	0.07336
CVM	0.10314	0.12506	0.17582
AD	0.62586	0.74447	1.01815
CSQ	21.3400	23.8900	29.1617
JB	4.05015	5.70115	11.9888
DP	4.61210	6.14742	10.56043

n=2000			
	VALORI CRITICI		
	1%	5%	10%
SW	0.99790	0.99839	0.99861
	90%	95%	99%
KS	0.02722	0.03019	0.03623
LL	0.01859	0.02022	0.02338
CVM	0.10311	0.12502	0.17641
AD	0.62694	0.74686	1.01409
CSQ	50.734	54.640	62.326
JB	4.50931	5.93726	9.56613
DP	4.56598	5.99806	9.27247

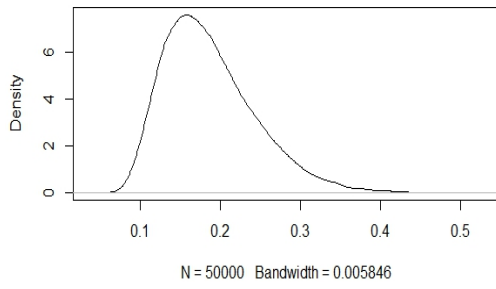
Inoltre per le stesse 3 numerosità campionarie abbiamo riprodotto graficamente le funzioni di densità sotto l'ipotesi nulla con metodo di densità Kernel gaussiano. Il parametro h indica il “bandwidth” o ampiezza di banda; è un parametro di liscio (smoothing): un alto valore (maggiore di uno) produce una linea più smussata, mentre un valore più vicino allo zero rende la curva più simile alla densità effettiva. Per un Kernel gaussiano, h viene calcolato in questo modo:

$$h = \left(\frac{4\sigma^5}{3n} \right)^{1/5} \approx 1.06\sigma n^{-1/5}$$

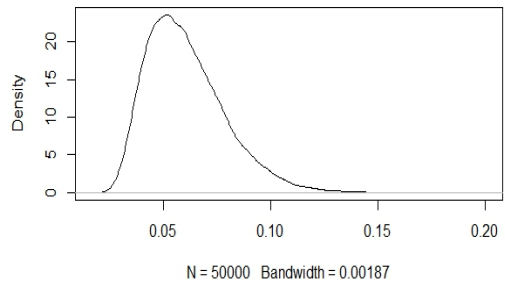
dove σ è la deviazione standard campionaria.



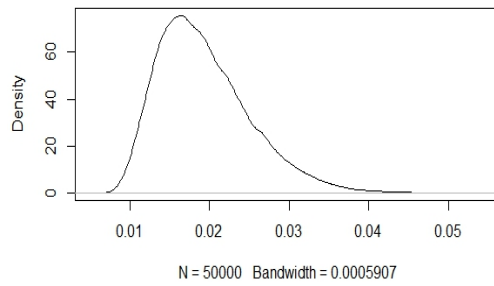
F. di densità del test KS per n=20



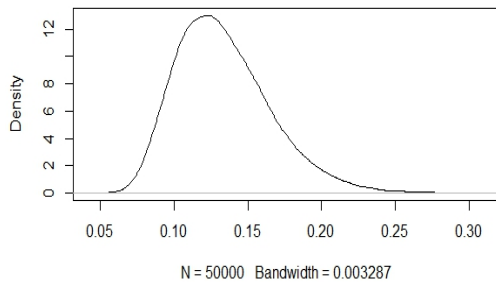
F. di densità del test KS per n=200



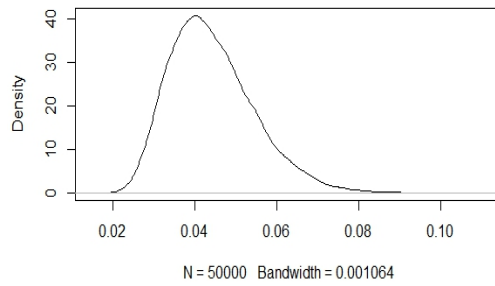
F. di densità del test KS per n=2000



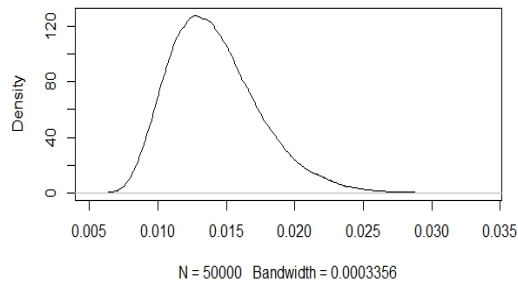
F. di densità del test LL per n=20



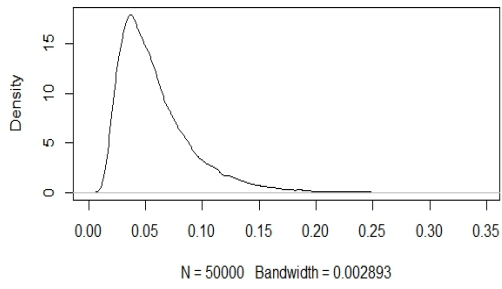
F. di densità del test LL per n=200



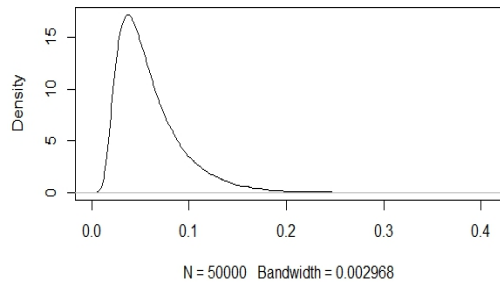
F. di densità del test LL per n=2000



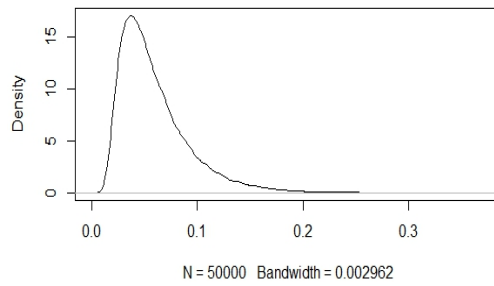
F. di densità del test CVM per n=20



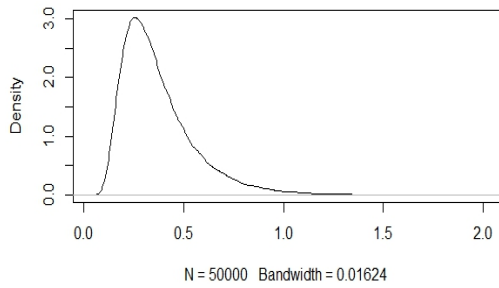
F. di densità del test CVM per n=200



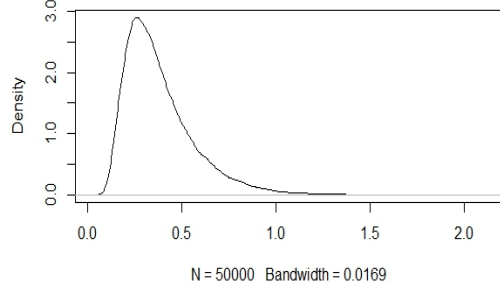
F. di densità del test CVM per n=2000



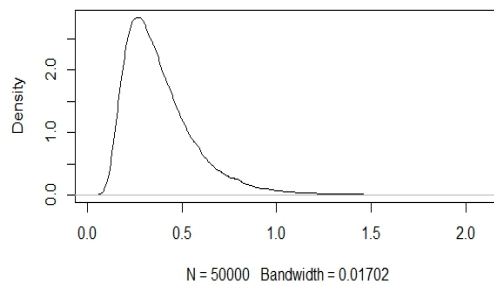
F. di densità del test AD per n=20



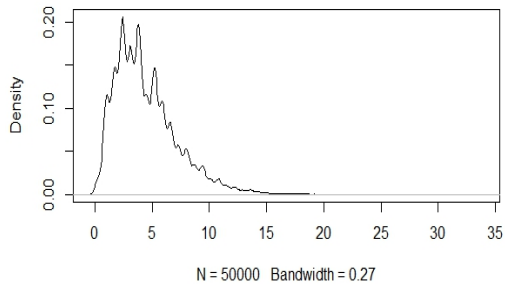
F. di densità del test AD per n=200



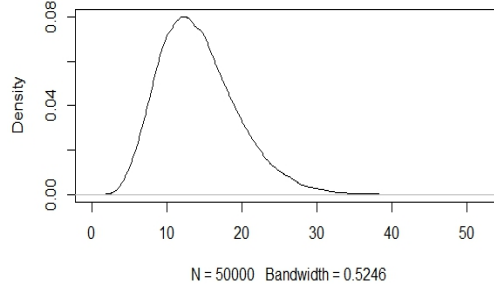
F. di densità del test AD per n=2000



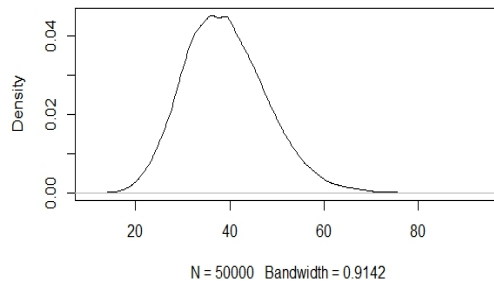
F. di densità del test CSQ per n=20



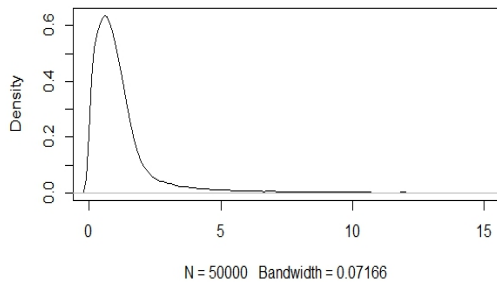
F. di densità del test CSQ per n=200



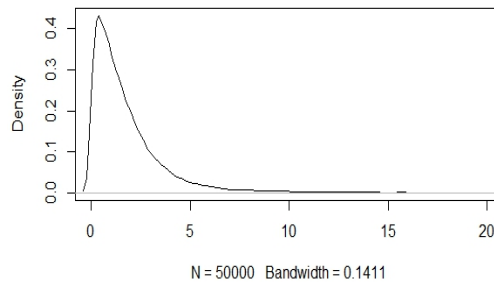
F. di densità del test CSQ per n=2000



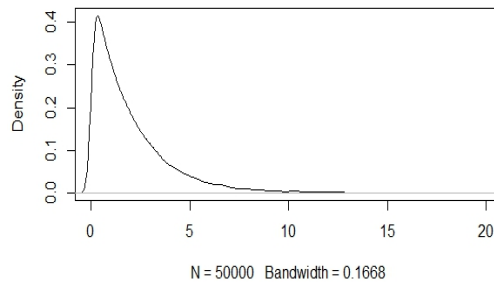
F. di densità del test JB per n=20

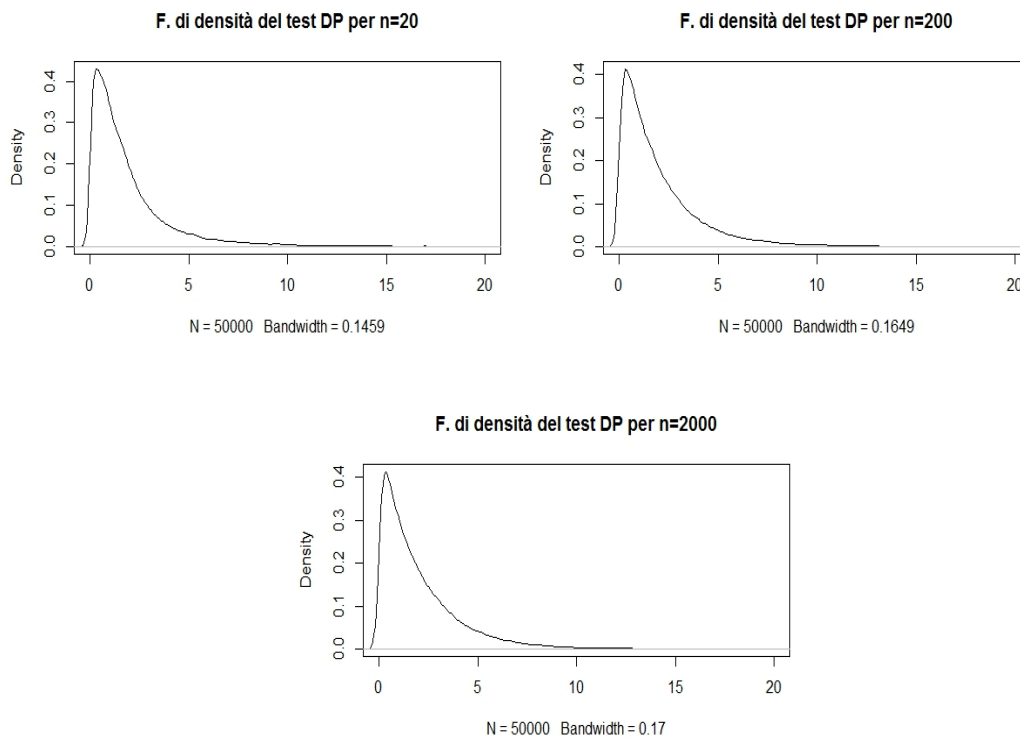


F. di densità del test JB per n=200



F. di densità del test JB per n=2000





Notiamo, sia dai valori tabulati sia dai grafici, che ci troviamo di fronte a situazioni variabili in base al diverso tipo di test:

- Per lo SW, unico test a coda sinistra, facendo crescere la numerosità campionaria otteniamo valori critici sempre più vicini a 1;
- Il KS e il LL hanno un comportamento molto simile, infatti all'aumento della numerosità, i valori si attestano intorno allo 0;
- I test CVM e AD al contrario sembrano mantenere dei valori critici indipendenti dalla numerosità;
- Dalla forma delle curve ci accorgiamo subito che i test JB e DP sono dei chi quadro con 2 g.d.l., nello specifico il test DP converge immediatamente a questa distribuzione mentre, come avevamo anche descritto nella teoria, il test JB ci arriva con numerosità più elevate;
- Vediamo infine che il test CSQ assume valori critici sempre più alti al crescere della numerosità dei dati come appunto fa una distribuzione chi quadrato all'aumentare dei suoi g.d.l.

3.2 L'errore del I tipo

In statistica l'errore del I tipo è il risultato di un test che porta erroneamente a rifiutare l'ipotesi sulla quale è stato condotto e viene chiamato anche falso positivo. Abbiamo svolto questa prova come conferma dei valori critici trovati precedentemente: invece che testare una distribuzione non normale, abbiamo generato 50000 campioni di numerosità crescente da 10 a 2000 da una gaussiana e li abbiamo sottoposti al controllo degli 8 test; come prevedibile, avendo calcolato dei valori critici validi, il numero dei campioni che risultano falsi positivi sono proprio l'1%, il 5% e il 10% (decimale più, decimale meno dovuti alla simulazione). L'unico test che presenta qualche allontanamento da questi valori è il CSQ per numerosità basse (notiamo la sua particolarità anche nel grafico della densità per $n=20$) ma, come avevamo riportato nella sua descrizione, questo test non è propriamente adeguato per valutare la normalità di un campione proveniente da una variabile con distribuzione continua. Nelle tabelle in [A2] sono riportati tutti i valori dei test.

3.3 Le distribuzioni alternative

In questa parte dell'esperimento sono stati generati 50000 campioni da distribuzioni diverse dalla Normale, ognuno di dimensione $n=10(5)$, $30(10)$, 50 , $100(100)$, 500 , 1000 , 1500 , 2000 . Le distribuzioni alternative sono state classificate in distribuzioni simmetriche a code leggere, distribuzioni simmetriche a code pesanti e distribuzioni asimmetriche.

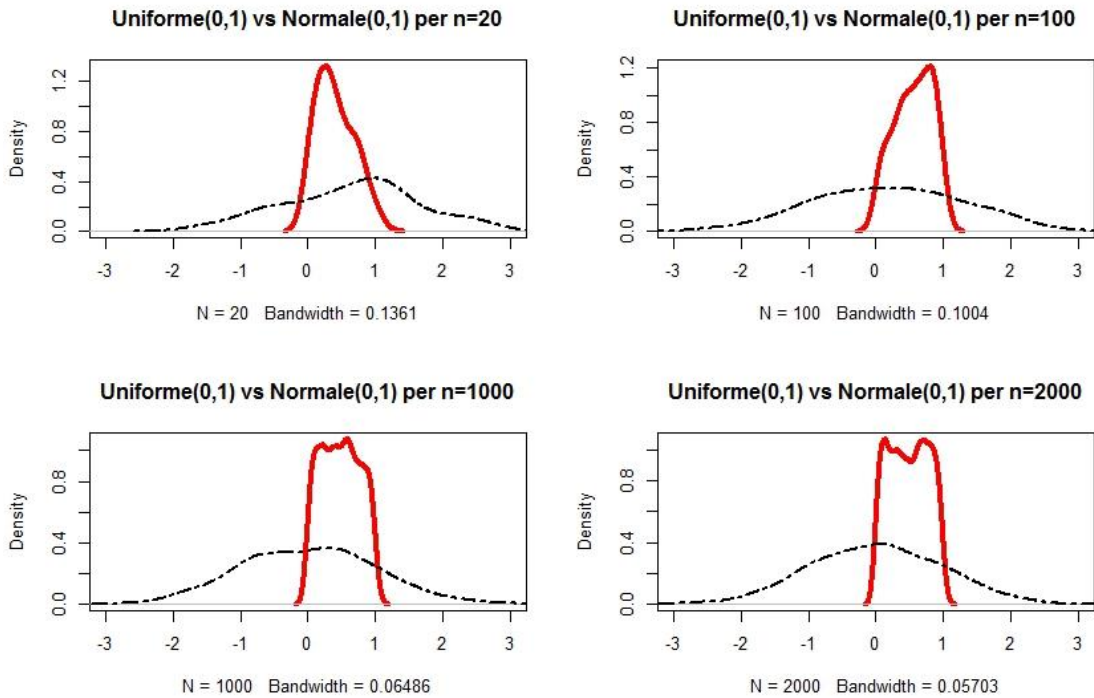
Le 6 simmetriche a code leggere sono: uniforme $U(0, 1)$, $GLD(0, 1, 0.25, 0.25)$, $GLD(0, 1, 0.5, 0.5)$, $GLD(0, 1, 0.75, 0.75)$, $GLD(0, 1, 1.25, 1.25)$ e $TRUNC(-2, 2)$;

le 8 simmetriche a code pesanti sono: $LAPLACE(0, 1)$, $LOGISTICA(0, 1)$, $GLD(0, 1, -0.1, -0.1)$, $GLD(0, 1, -0.15, -0.15)$, $t(10)$, $t(15)$, $ScCoN(0.2, 3)$, $ScCoN(0.05, 3)$;

le 10 asimmetriche infine: GAMMA(4, 5), BETA(2, 1), BETA(3, 2), CSQ(4), CSQ(10), CSQ(20), WEIBULL(3, 1), LOGNORMALE(0, 1), LoCoN(0.2, 3), LoCoN(0.05, 3).

Queste distribuzioni sono state scelte per coprire un'ampia gamma di valori di asimmetria e di curtosi. Nel seguito verranno elencate alcune caratteristiche delle distribuzioni, specialmente di quelle meno note, e una serie di grafici delle densità simulate per ogni distribuzione a numerosità campionaria crescente; vedremo che, come è lecito aspettarsi soprattutto per numerosità poco elevate, le curve assumono forme non sempre perfettamente concordanti con la funzione di distribuzione teorica; nei grafici vengono riportate la curva di densità di una data distribuzione (linea continua rossa) confrontata con la curva di densità di una distribuzione normale con la medesima numerosità campionaria (linea tratteggiata nera); ovviamente, avendo grafici diversi per ognuna delle 50000 simulazioni, siamo andati a sceglierli casualmente.

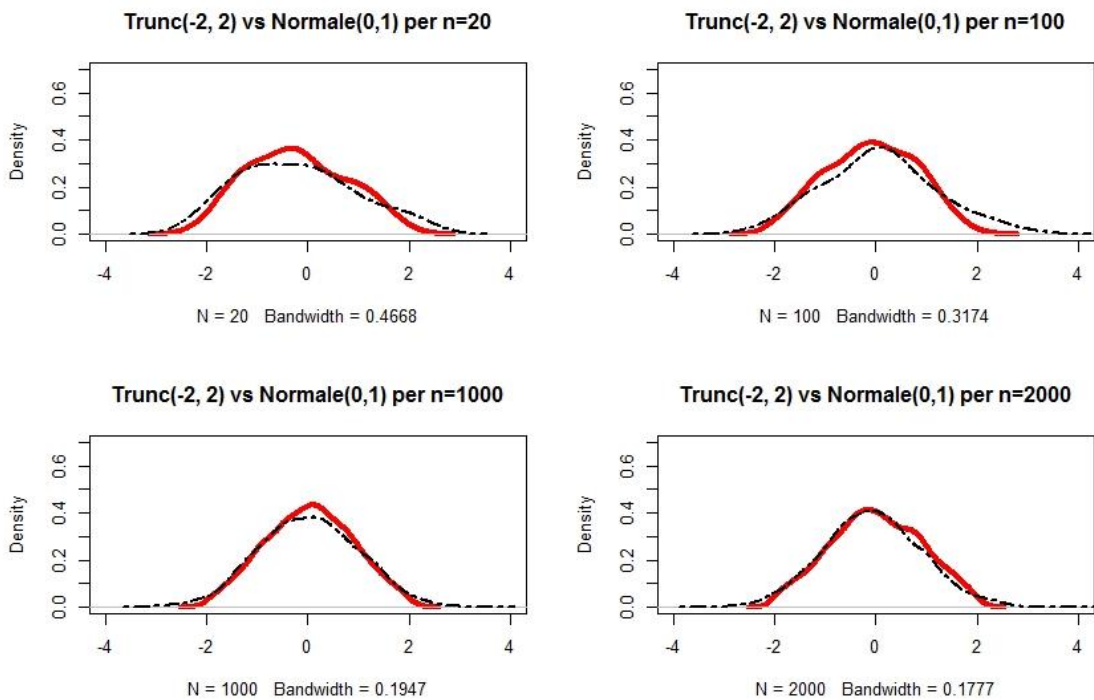
3.3.1 Le distribuzioni simmetriche a code leggere



Vediamo che, con l'aumentare di n, la funzione di densità di $U(0,1)$ converge sempre di più alla forma rettangolare classica di una $U(a,b)$, con base l'intervallo (a,b) , altezza $\frac{1}{b-a}$ e media $\frac{a+b}{2}$.

$$PDF = \frac{1}{b-a}$$

$$CDF = \frac{x-a}{b-a}$$



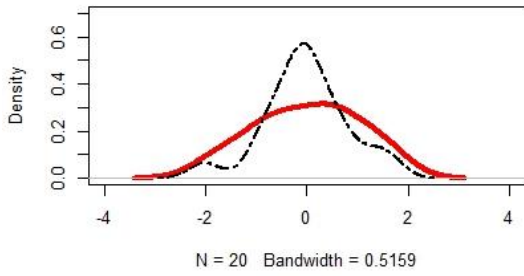
La distribuzione normale troncata è chiamata $TRUNC(a, b)$, dove a assume il valore di limite inferiore e b di limite superiore; è graficamente molto simile alla normale standard, escludendo gli estremi che vengono tagliati.

$$PDF = \frac{\phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(\Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)\right)}$$

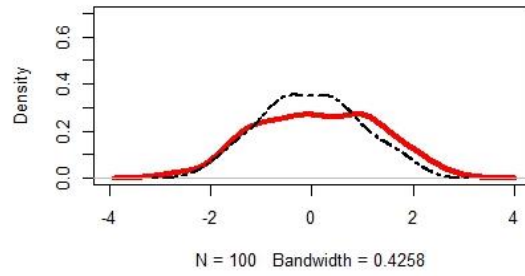
$$CDF = \frac{\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}$$

Nel caso di una troncata standard $\mu=0$ e $\sigma=1$

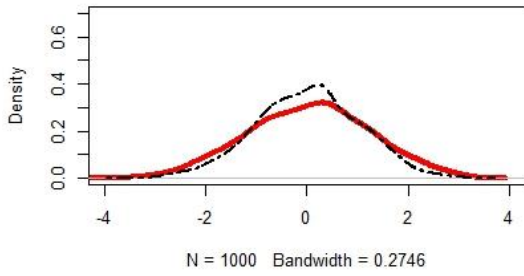
GLD(0, 1, 0.25, 0.25) vs Normale(0,1) per n=20



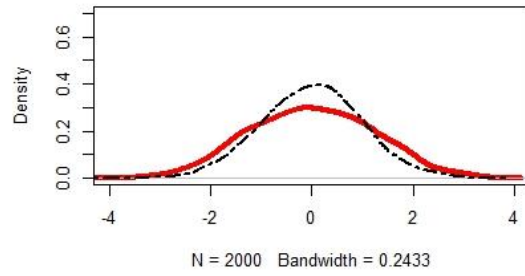
GLD(0, 1, 0.25, 0.25) vs Normale(0,1) per n=100



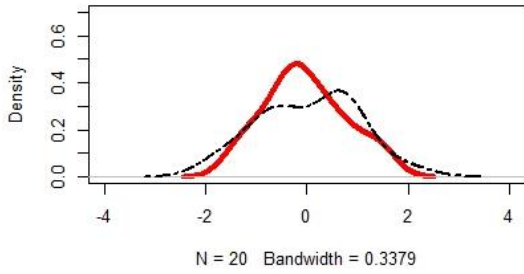
GLD(0, 1, 0.25, 0.25) vs Normale(0,1) per n=1000



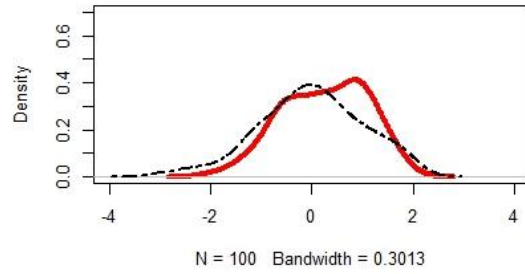
GLD(0, 1, 0.25, 0.25) vs Normale(0,1) per n=2000



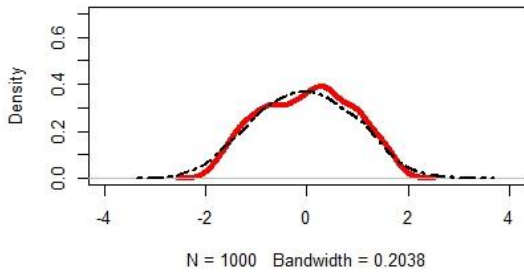
GLD(0, 1, 0.5, 0.5) vs Normale(0,1) per n=20



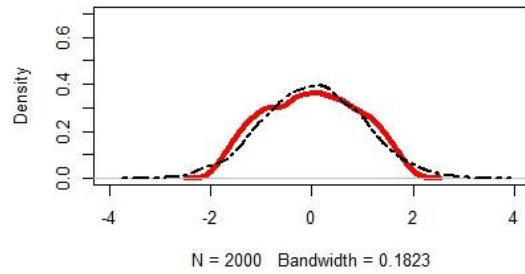
GLD(0, 1, 0.5, 0.5) vs Normale(0,1) per n=100



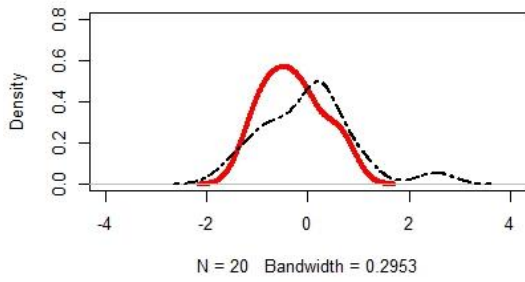
GLD(0, 1, 0.5, 0.5) vs Normale(0,1) per n=1000



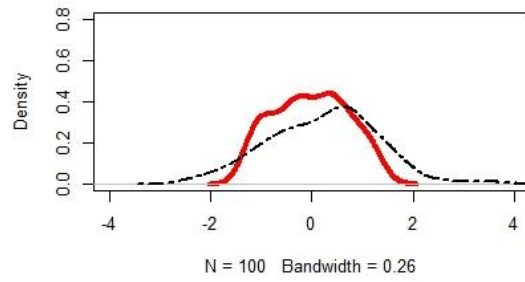
GLD(0, 1, 0.5, 0.5) vs Normale(0,1) per n=2000



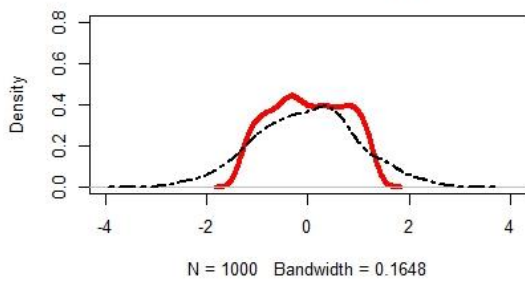
GLD(0, 1, 0.75, 0.75) vs Normale(0,1) per n=20



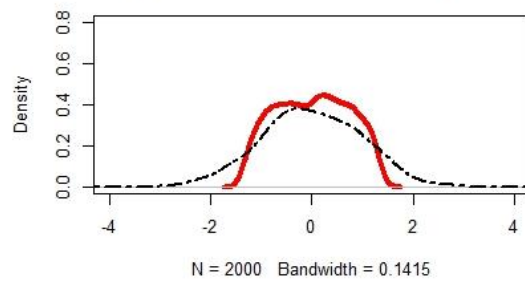
GLD(0, 1, 0.75, 0.75) vs Normale(0,1) per n=100



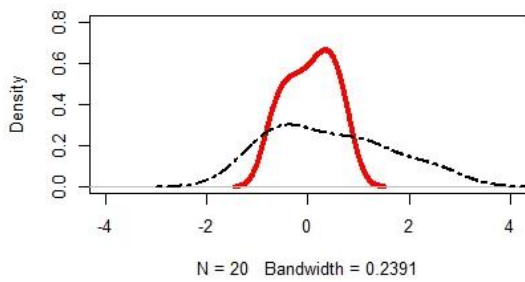
GLD(0, 1, 0.75, 0.75) vs Normale(0,1) per n=1000



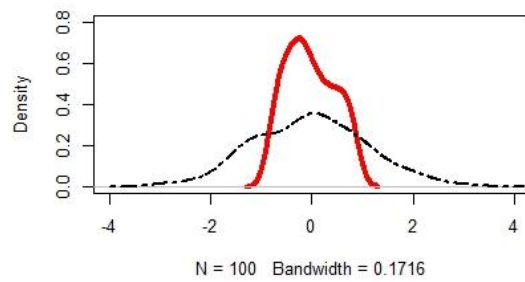
GLD(0, 1, 0.75, 0.75) vs Normale(0,1) per n=2000



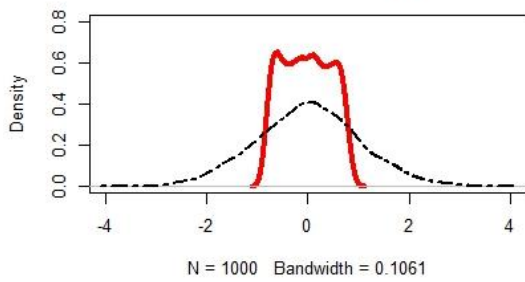
GLD(0, 1, 1.25, 1.25) vs Normale(0,1) per n=20



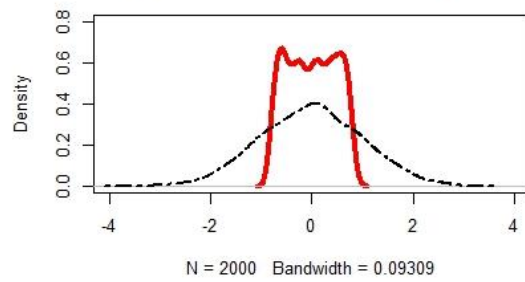
GLD(0, 1, 1.25, 1.25) vs Normale(0,1) per n=100



GLD(0, 1, 1.25, 1.25) vs Normale(0,1) per n=1000



GLD(0, 1, 1.25, 1.25) vs Normale(0,1) per n=2000



La distribuzione Lambda Generalizzata $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ proposta inizialmente da Ramberg e Schmeiser (1974), è una generalizzazione a 4 parametri della famiglia di distribuzione Tukey Lambda a 2 parametri; successivamente Karian e Dudewicz (2000) pubblicarono delle tavole che fornivano i valori dei parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ per dati livelli di asimmetria e curtosi [9]. Definiamo λ_1 il parametro di posizione, λ_2 il parametro di scala, λ_3 e λ_4 i parametri di forma che determinano l'asimmetria e la curtosi della distribuzione.

La funzione percentile, inversa della funzione di distribuzione, di una $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ è data da

$$Q(y) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1 - y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

dove $0 \leq y < 1$

La funzione di probabilità è invece:

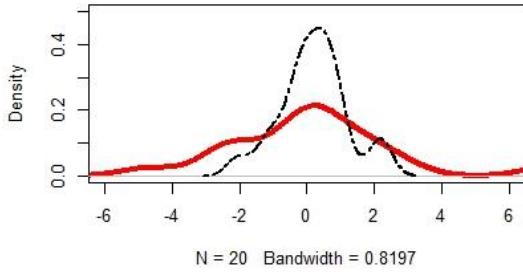
$$PDF = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} - \lambda_4 (1 - y)^{\lambda_4 - 1}}$$

dove $x = Q(y)$

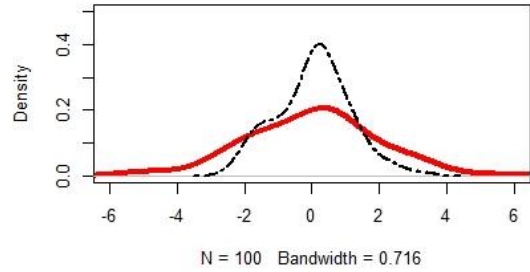
Graficamente notiamo come al crescere dei parametri λ_3 e λ_4 , la funzione si addensa verso la media della distribuzione le code diventano sempre più leggere; a conferma di questo, vedremo nei prossimi grafici, come con parametri negativi le code si appesantiscano decisamente.

3.3.2 Le distribuzioni simmetriche a code pesanti

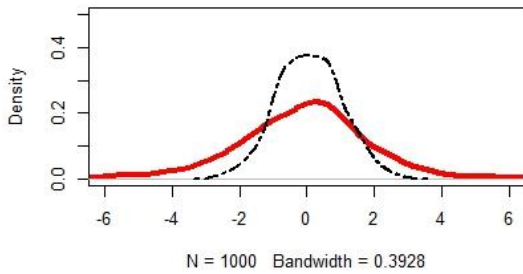
GLD(0, 1, -0.10, -0.10) vs Normale(0,1) per n=20



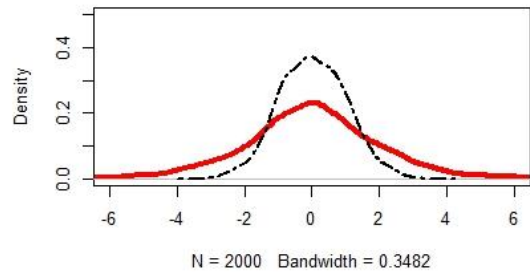
GLD(0, 1, -0.10, -0.10) vs Normale(0,1) per n=100



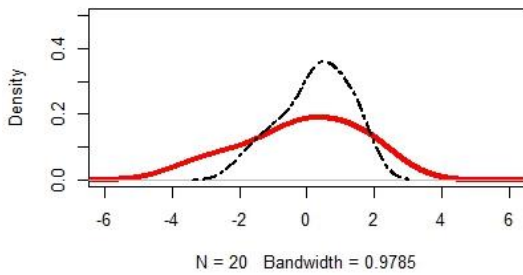
GLD(0, 1, -0.10, -0.10) vs Normale(0,1) per n=1000



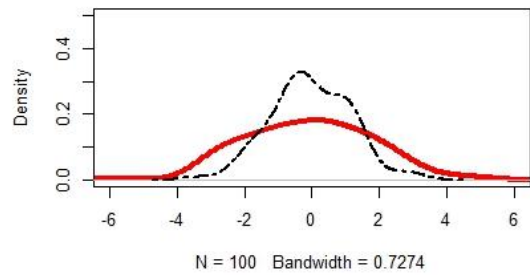
GLD(0, 1, -0.10, -0.10) vs Normale(0,1) per n=2000



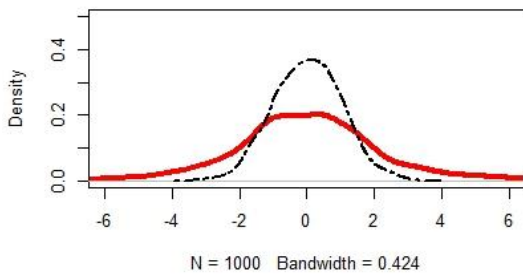
GLD(0, 1, -0.15, -0.15) vs Normale(0,1) per n=20



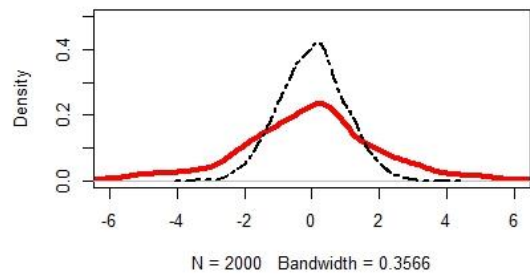
GLD(0, 1, -0.15, -0.15) vs Normale(0,1) per n=100

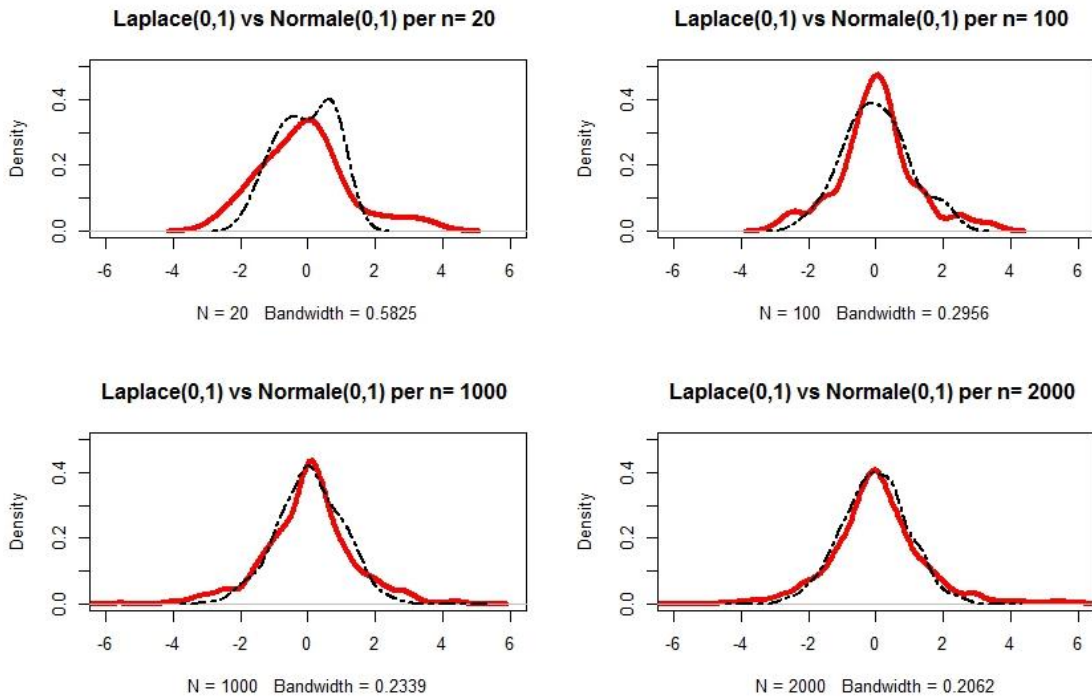


GLD(0, 1, -0.15, -0.15) vs Normale(0,1) per n=1000



GLD(0, 1, -0.15, -0.15) vs Normale(0,1) per n=2000





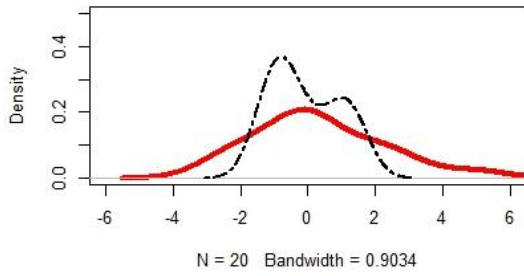
La distribuzione di Laplace (Laplace, 1774) è anche chiamata distribuzione esponenziale doppia poiché assomiglia all'unione di due distribuzioni esponenziali unite al principio simmetricamente rispetto al valor medio. La PDF di questa distribuzione ricorda molto quella di una normale, eccetto per il fatto che quest'ultima è espressa in termini della differenza quadratica dalla media, mentre quella della Laplace in termine della differenza assoluta.

$$PDF = \frac{1}{2s} \exp\left\{-\frac{|x - \mu|}{s}\right\}$$

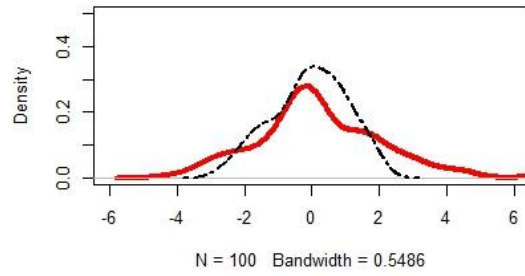
dove s è il parametro di scala, in questo caso 1.

Di conseguenza questa distribuzione ha code più pesanti rispetto a una normale; in letteratura è stato spesso discusso se per molte osservazioni in natura la Laplace fosse migliore della Normale.

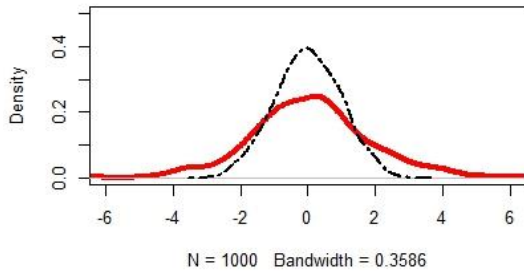
Logistica(0,1) vs Normale(0,1) per n=20



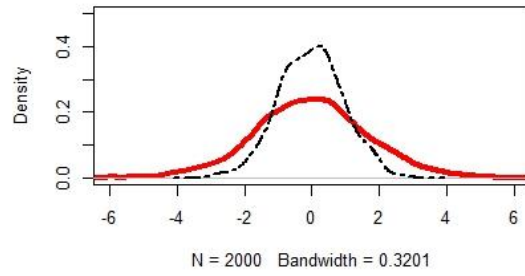
Logistica(0,1) vs Normale(0,1) per n=100



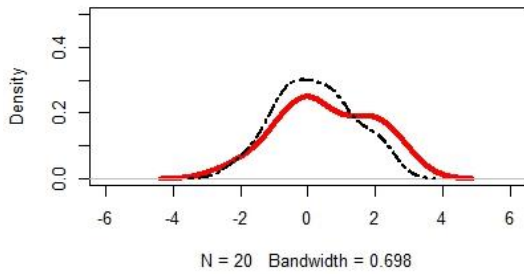
Logistica(0,1) vs Normale(0,1) per n=1000



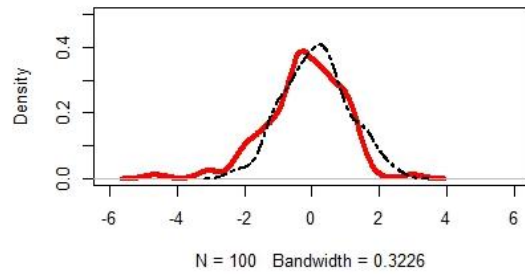
Logistica(0,1) vs Normale(0,1) per n=2000



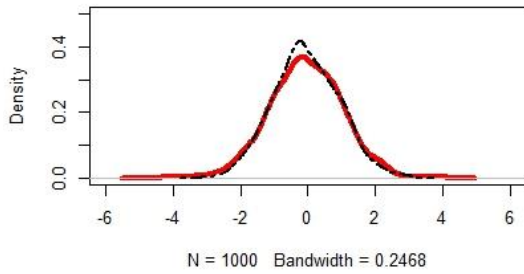
t(10) vs Normale(0,1) per n=20



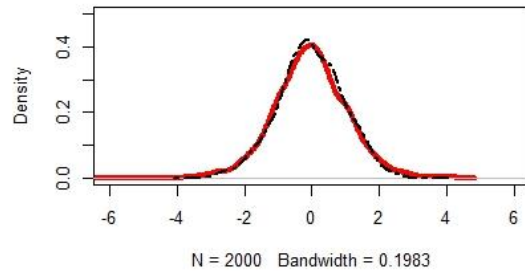
t(10) vs Normale(0,1) per n=100



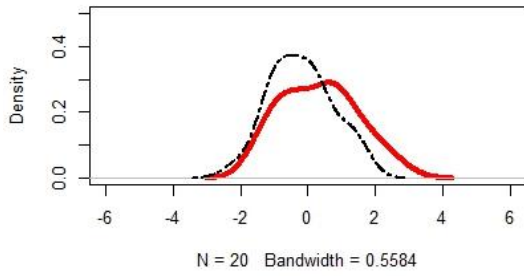
t(10) vs Normale(0,1) per n=1000



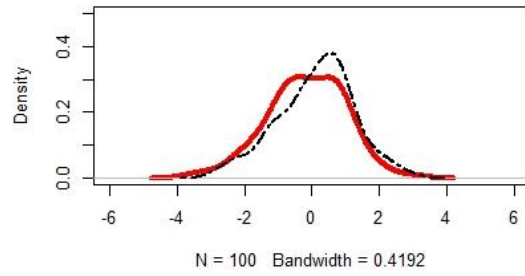
t(10) vs Normale(0,1) per n=2000



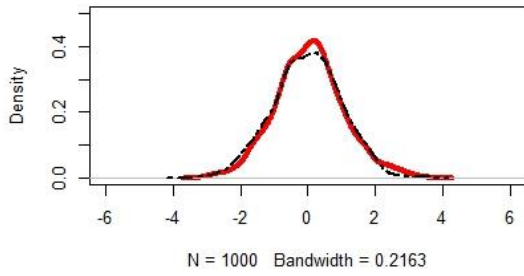
t(15) vs Normale(0,1) per n=20



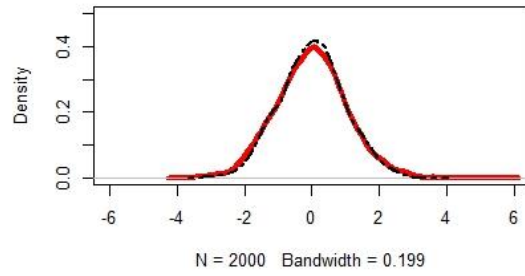
t(15) vs Normale(0,1) per n=100



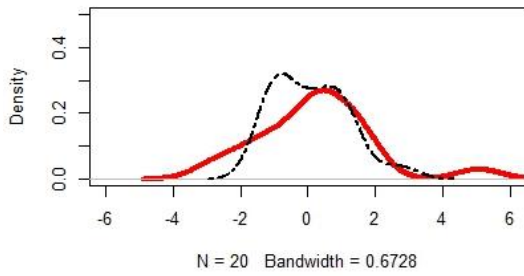
t(15) vs Normale(0,1) per n=1000



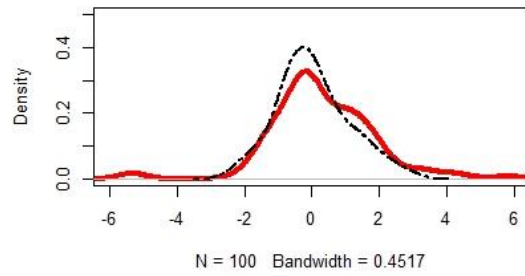
t(15) vs Normale(0,1) per n=2000



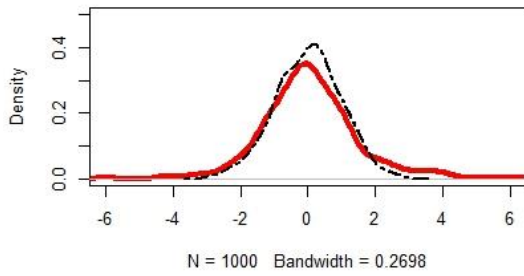
ScConN(0.2, 3) vs Normale(0,1) per n=20



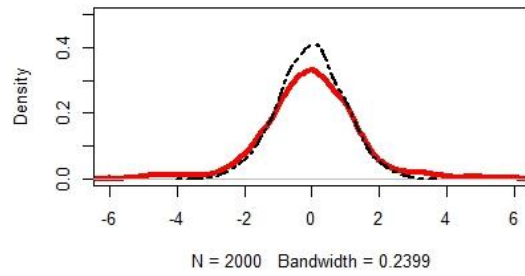
ScConN(0.2, 3) vs Normale(0,1) per n=100

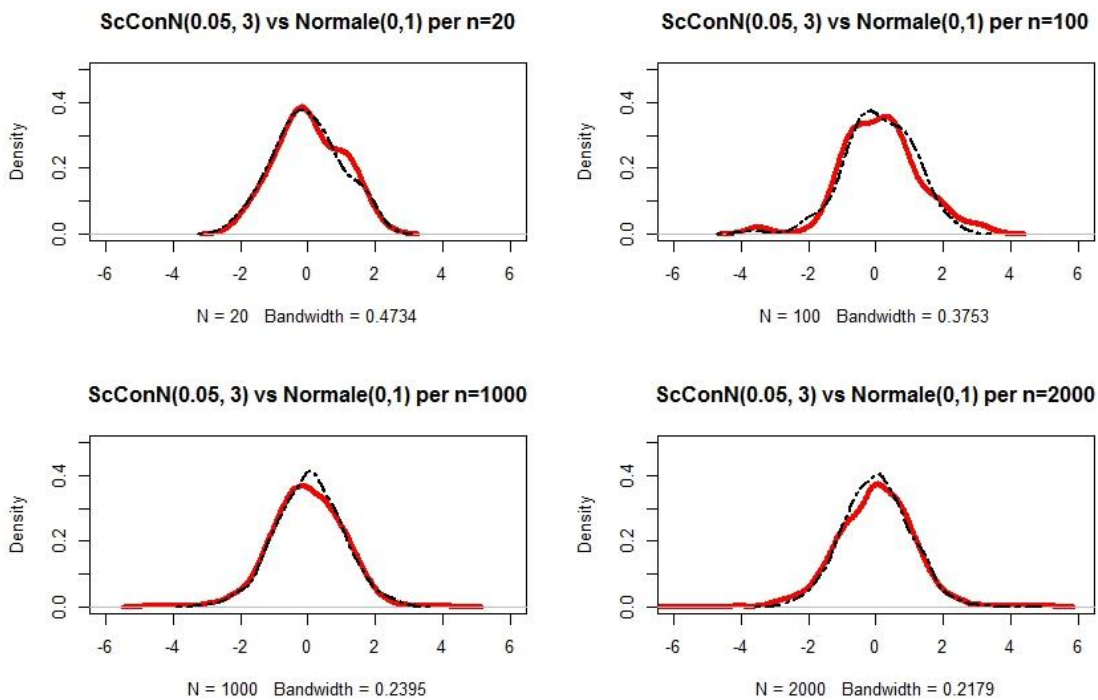


ScConN(0.2, 3) vs Normale(0,1) per n=1000



ScConN(0.2, 3) vs Normale(0,1) per n=2000

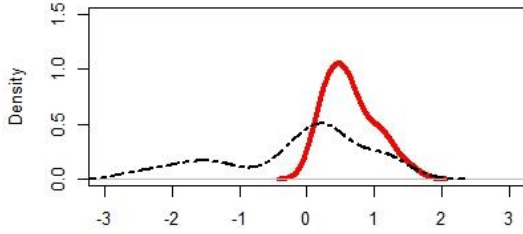




La distribuzione “Scale-contaminated-normal”, chiamata $ScCoN(p, b)$ è la mistura di due distribuzioni normali con probabilità p da una $N(0, b^2)$ e probabilità $1-p$ da una $N(0, 1)$. Questa distribuzione, così come la successiva LoCoN, non è implementata nei pacchetti di R; siamo quindi andati a crearla in questo modo: abbiamo generato un valore da una variabile casuale Uniforme e, dopo aver valutato se fosse maggiore o minore di p , siamo andati a generare osservazioni prese da una e dall'altra distribuzione, creando così il nostro campione misto. Questa distribuzione mantiene la simmetria rispetto a μ poiché la media delle due Normali è la stessa, ma ha code più pesanti di una Normale standard visto che il $p\%$ dei valori sono campionati da una Normale con deviazione standard più elevata.

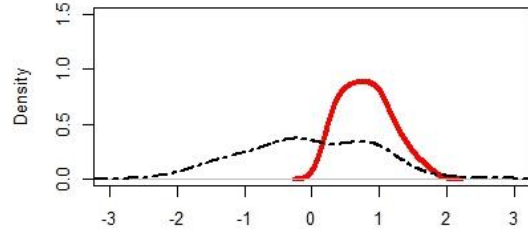
3.3.3 Le distribuzioni asimmetriche

Gamma(4,5) vs Normale(0,1) per n=20



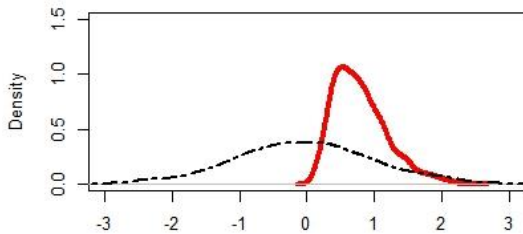
N = 20 Bandwidth = 0.1832

Gamma(4,5) vs Normale(0,1) per n=100



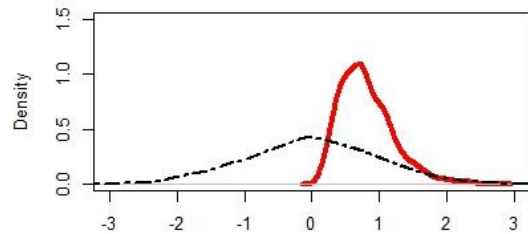
N = 100 Bandwidth = 0.1372

Gamma(4,5) vs Normale(0,1) per n=1000



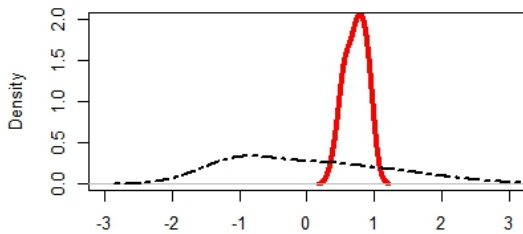
N = 1000 Bandwidth = 0.09011

Gamma(4,5) vs Normale(0,1) per n=2000



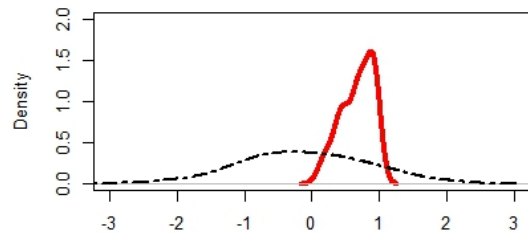
N = 2000 Bandwidth = 0.07578

Beta(2,1) vs Normale(0,1) per n= 20



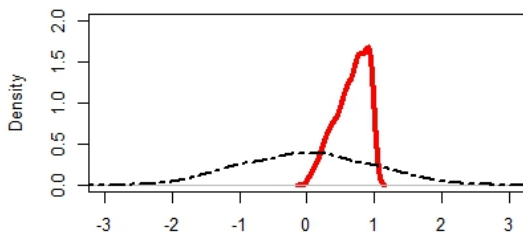
N = 20 Bandwidth = 0.0792

Beta(2,1) vs Normale(0,1) per n= 100



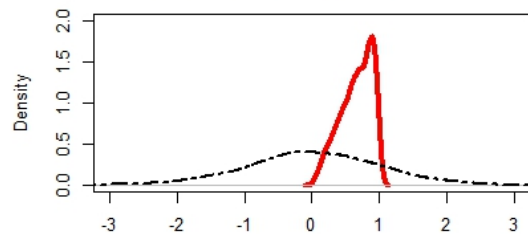
N = 100 Bandwidth = 0.08668

Beta(2,1) vs Normale(0,1) per n= 1000



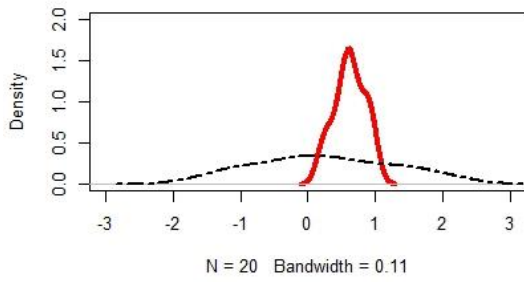
N = 1000 Bandwidth = 0.05398

Beta(2,1) vs Normale(0,1) per n= 2000

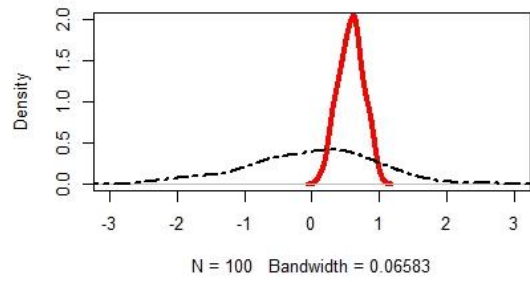


N = 2000 Bandwidth = 0.04656

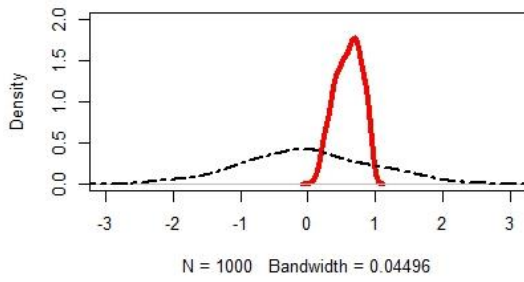
Beta(3,2) vs Normale(0,1) per n= 20



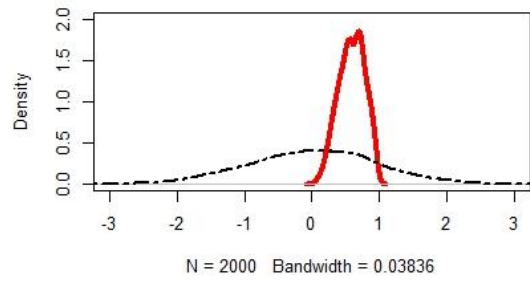
Beta(3,2) vs Normale(0,1) per n= 100



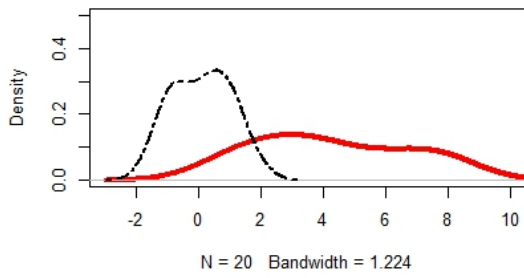
Beta(3,2) vs Normale(0,1) per n= 1000



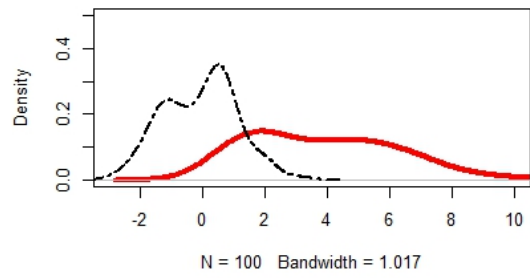
Beta(3,2) vs Normale(0,1) per n= 2000



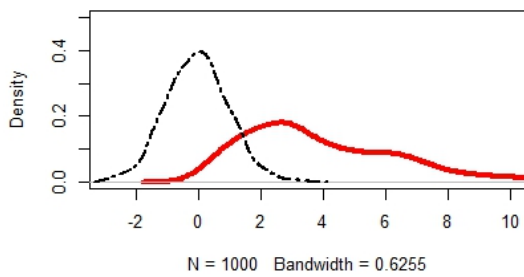
CSQ(4) vs Normale(0,1) per n=20



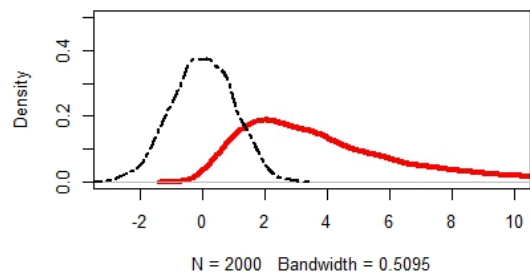
CSQ(4) vs Normale(0,1) per n=100



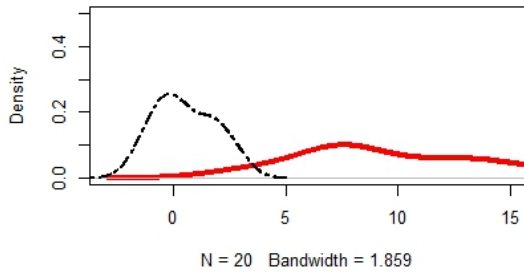
CSQ(4) vs Normale(0,1) per n=1000



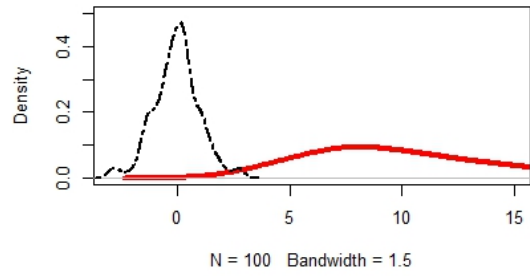
CSQ(4) vs Normale(0,1) per n=2000



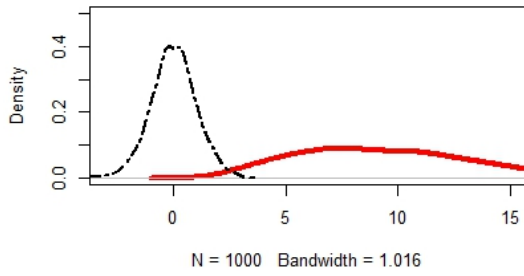
CSQ(10) vs Normale(0,1) per n=20



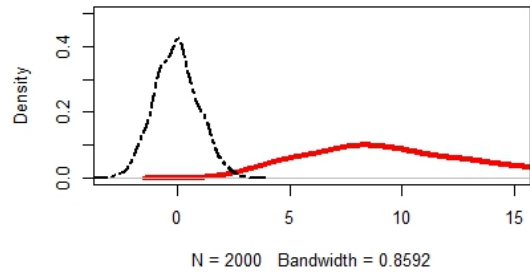
CSQ(10) vs Normale(0,1) per n=100



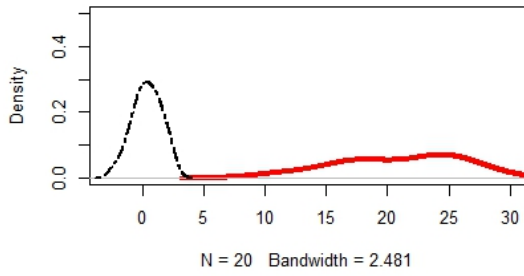
CSQ(10) vs Normale(0,1) per n=1000



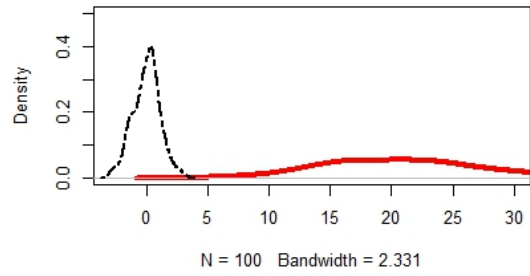
CSQ(10) vs Normale(0,1) per n=2000



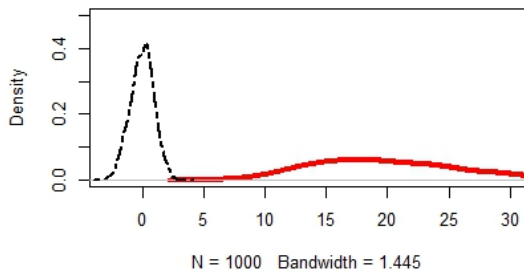
CSQ(20) vs Normale(0,1) per n=20



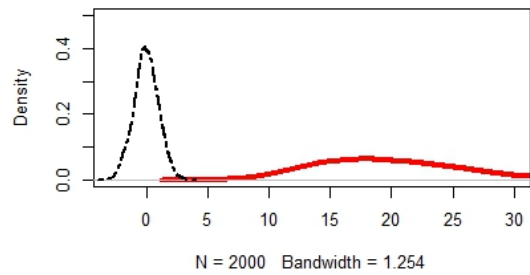
CSQ(20) vs Normale(0,1) per n=100

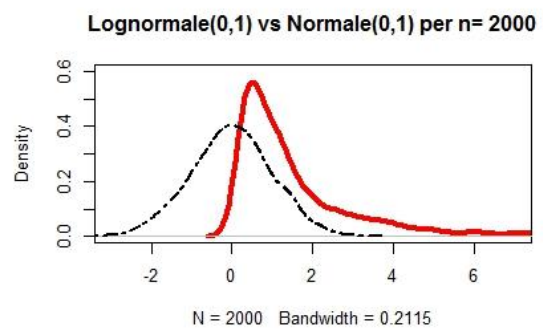
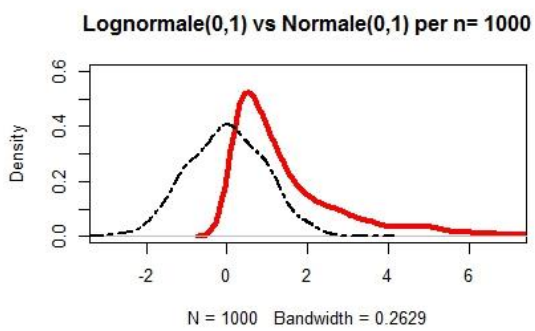
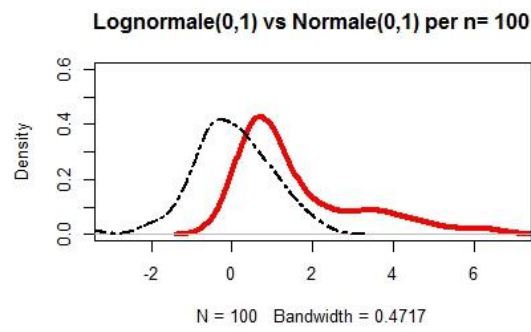
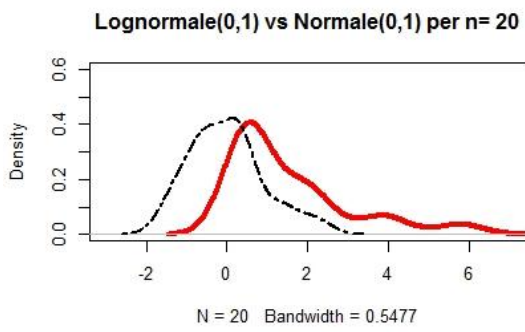
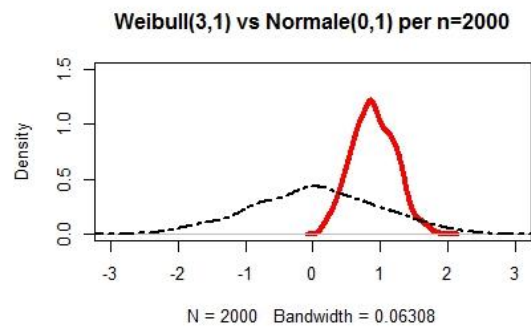
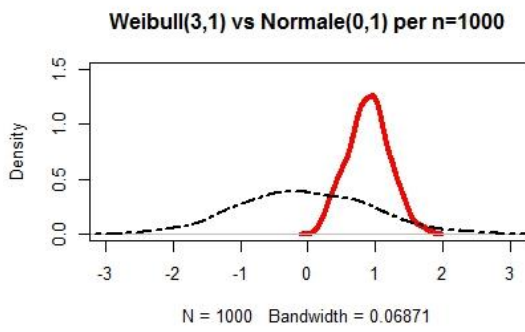
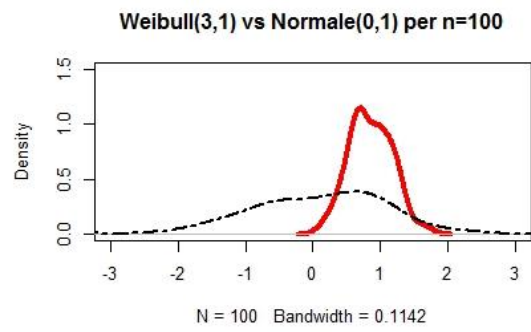
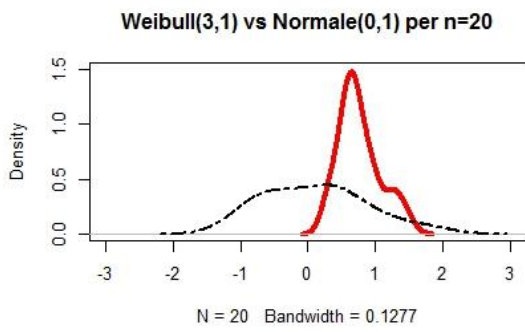


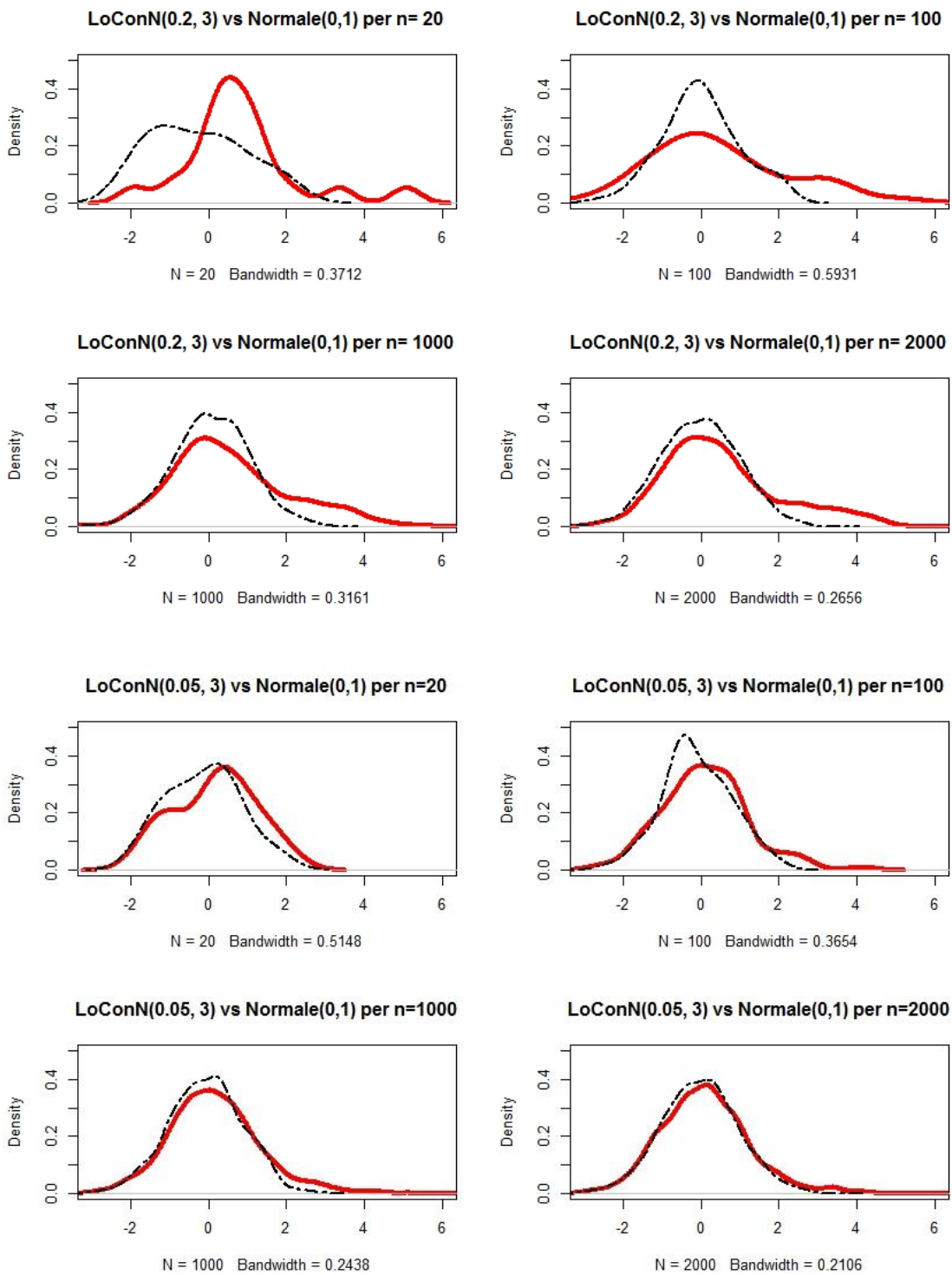
CSQ(20) vs Normale(0,1) per n=1000



CSQ(20) vs Normale(0,1) per n=2000







La distribuzione $LoCoN(p, a)$ va ad indicare la distribuzione di una variabile casuale che è campionata con probabilità p da una $N(a, 1)$ e con probabilità $1-p$ da una $N(0, 1)$. In questo caso la distribuzione non può risultare simmetrica poiché le due Normali hanno medie diverse, inoltre la distribuzione avrà una coda

più pesante dell'altra, più precisamente la destra se $a > 0$ e la sinistra viceversa;
infine prendendo p sempre piccole la LoCoN converge a una normale standard.

CAPITOLO 4

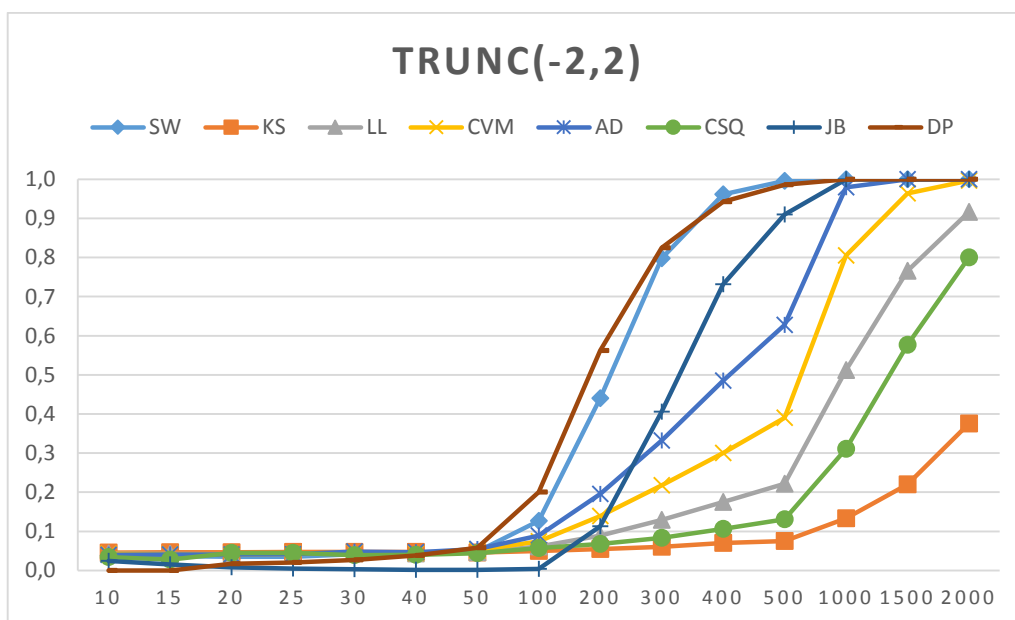
Risultati

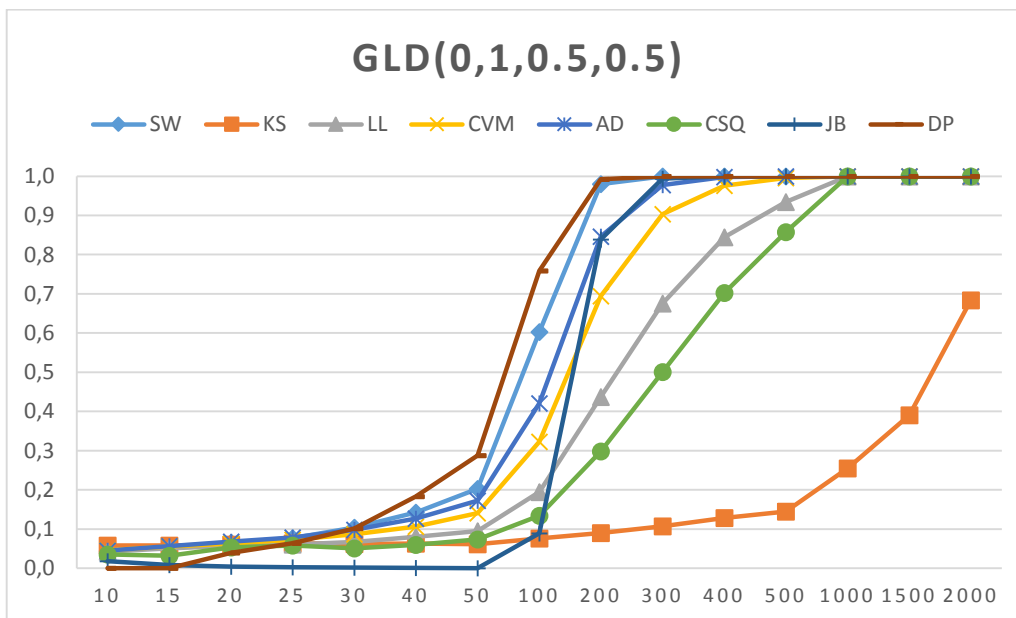
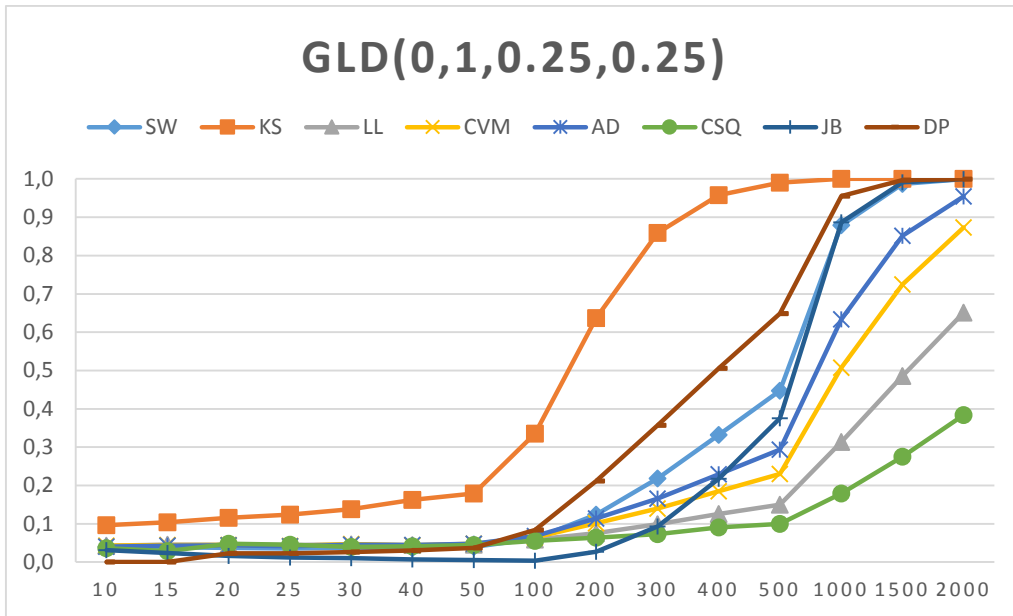
In questa sezione riportiamo i risultati relativi alla potenza empirica dei test di normalità per ognuno dei tre gruppi di distribuzioni, con $\alpha=0.05$. Per ognuna delle distribuzioni alternative considerate verrà tracciato un grafico a linee e punti per descrivere le performance degli 8 test alle diverse numerosità campionarie o la relativa tabella con i valori calcolati.

4.1 Risultati simulazioni

La potenza empirica del test viene calcolata come la proporzione di campioni su cui viene rifiutata l'ipotesi di normalità quando i campioni sono generati sotto l'ipotesi alternativa (distribuzione non normale). Ovviamente, ci aspettiamo che la potenza dei test tenda ad uno.

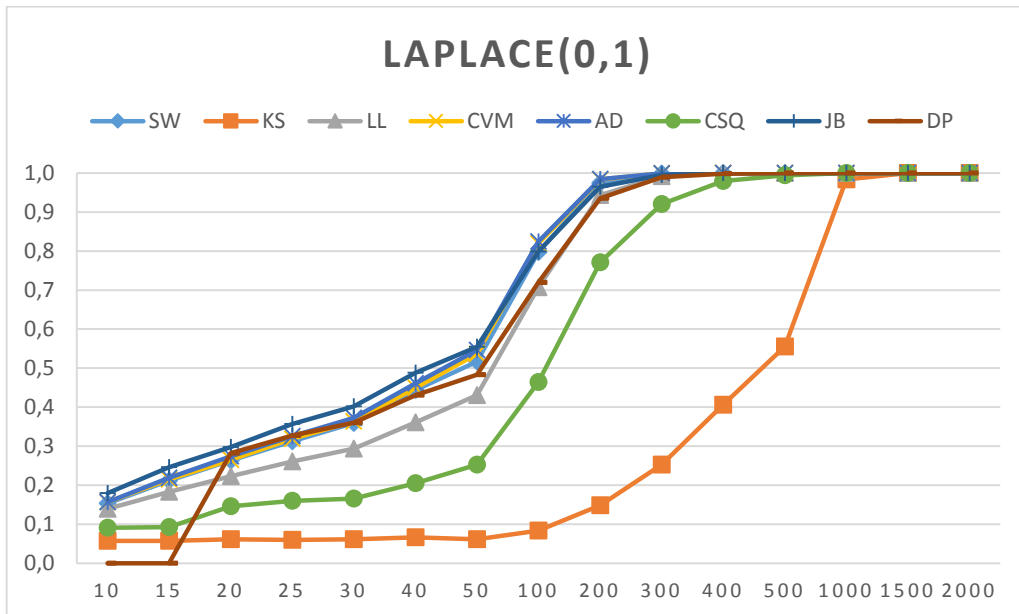
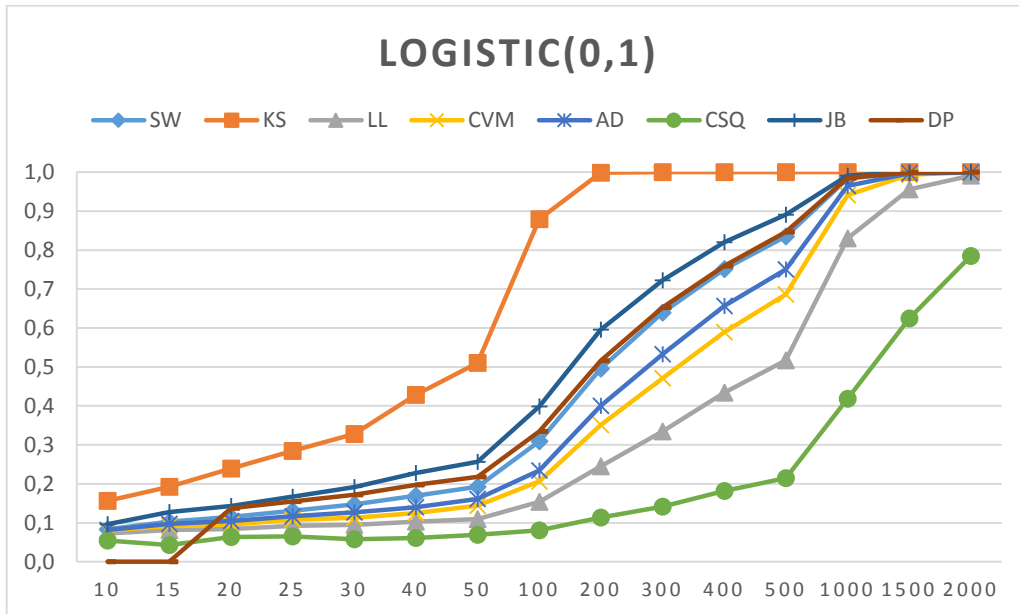
4.1.1 Le distribuzioni simmetriche a code leggere

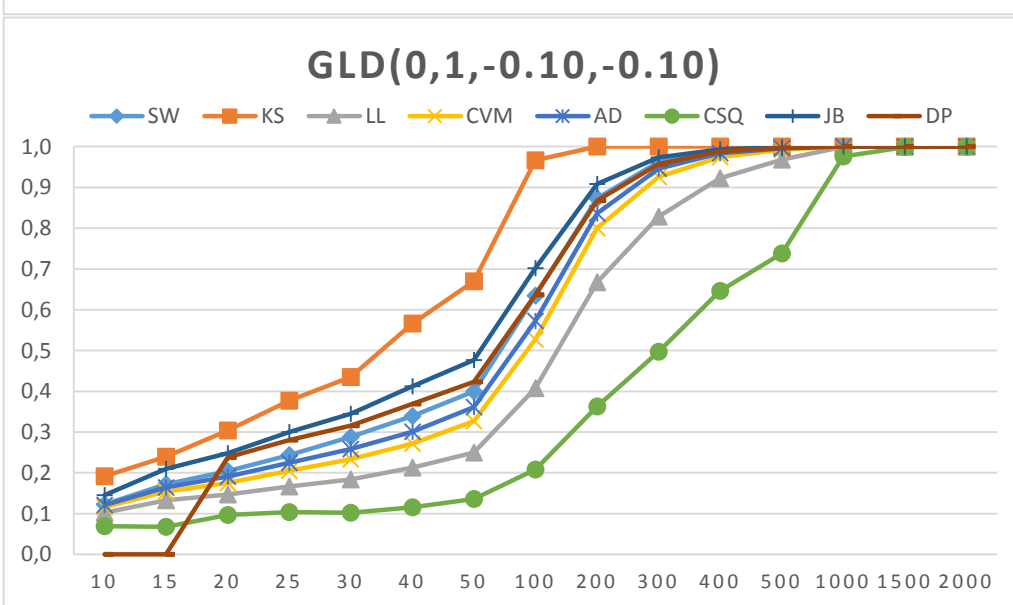
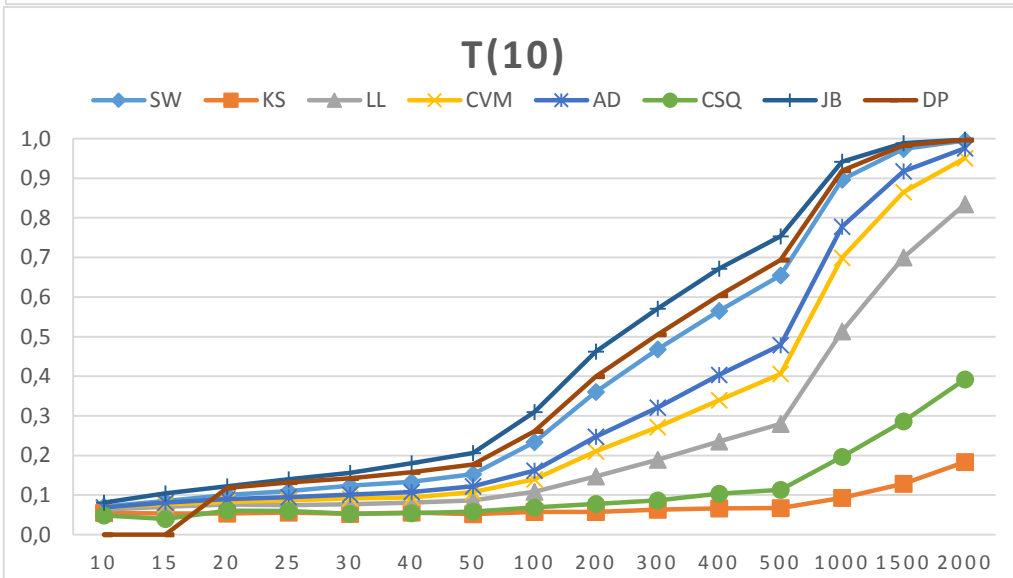
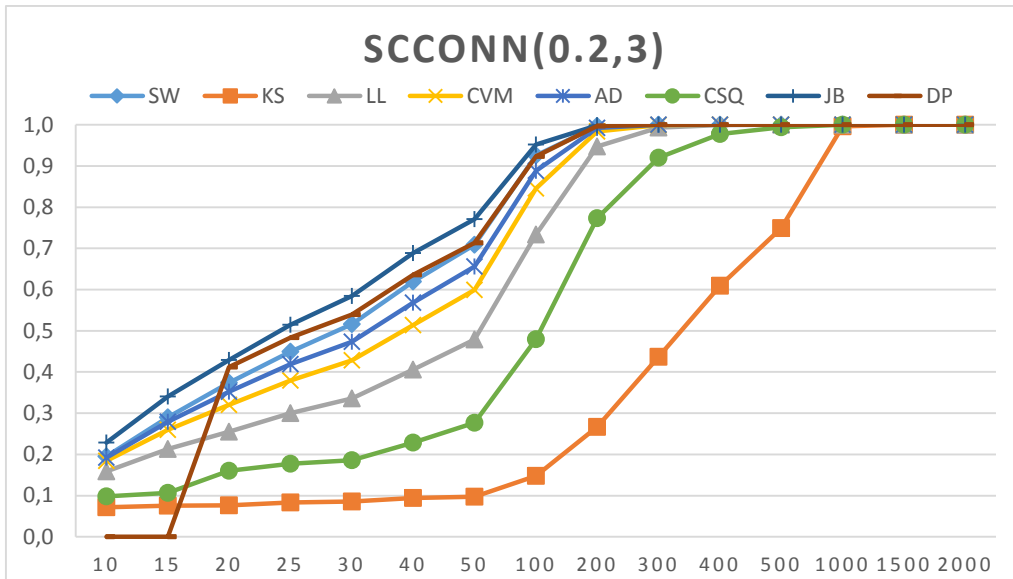




	SW	KS	LL	CVM	AD	CSQ	JB	DP
Uniforme(0,1)								
10	0,0816	1,0000	0,0613	0,0729	0,0766	0,0503	0,0163	0,0000
15	0,1322	1,0000	0,0789	0,1037	0,1189	0,0444	0,0074	0,0000
20	0,2006	1,0000	0,1006	0,1406	0,1711	0,0832	0,0028	0,1298
25	0,2830	1,0000	0,1206	0,1841	0,2317	0,1004	0,0014	0,2349
30	0,3925	1,0000	0,1434	0,2331	0,3020	0,0942	0,0012	0,3607
40	0,5769	1,0000	0,1957	0,3282	0,4349	0,1278	0,0009	0,5971
50	0,7431	1,0000	0,2577	0,4409	0,5781	0,1800	0,0082	0,7724
100	0,9958	1,0000	0,5856	0,8386	0,9478	0,4494	0,7446	0,9962
200	1,0000	1,0000	0,9461	0,9971	0,9999	0,8979	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	0,9973	1,0000	1,0000	0,9948	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
GLD(1,0,0.75,0.75)								
10	0,0651	0,0416	0,0534	0,0616	0,0628	0,0433	0,0165	0,0000
15	0,0919	0,0411	0,0667	0,0802	0,0873	0,0388	0,0067	0,0000
20	0,1313	0,0440	0,0783	0,1018	0,1183	0,0690	0,0029	0,0853
25	0,1761	0,0456	0,0927	0,1280	0,1543	0,0797	0,0013	0,1545
30	0,2540	0,0456	0,1084	0,1651	0,2046	0,0746	0,0012	0,2478
40	0,3847	0,0496	0,1418	0,2230	0,2925	0,0949	0,0006	0,4384
50	0,5322	0,0491	0,1765	0,3034	0,3996	0,1258	0,0020	0,6088
100	0,9641	0,0815	0,4224	0,6700	0,8223	0,2960	0,4755	0,9771
200	1,0000	0,8862	0,8233	0,9725	0,9974	0,7051	0,9978	1,0000
300	1,0000	1,0000	0,9692	0,9990	1,0000	0,9377	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	0,9971	1,0000	1,0000	0,9926	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	0,9997	1,0000	1,0000	0,9996	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
GLD(1,0,1.25,1.25)								
10	0,0946	0,0374	0,0660	0,0824	0,0884	0,0601	0,0164	0,0000
15	0,1591	0,0570	0,0875	0,1214	0,1410	0,0499	0,0072	0,0000
20	0,2482	0,0963	0,1154	0,1690	0,2083	0,0951	0,0027	0,1596
25	0,3446	0,1694	0,1406	0,2187	0,2774	0,1194	0,0018	0,2856
30	0,4692	0,3264	0,1682	0,2786	0,3626	0,1095	0,0011	0,4239
40	0,6629	1,0000	0,2272	0,3873	0,5103	0,1539	0,0018	0,6683
50	0,8216	1,0000	0,2999	0,5088	0,6599	0,2116	0,0144	0,8330
100	0,9989	1,0000	0,6699	0,9012	0,9773	0,5368	0,8413	0,9987
200	1,0000	1,0000	0,9738	0,9994	1,0000	0,9524	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	0,9992	1,0000	1,0000	0,9988	1,0000	1,0000
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

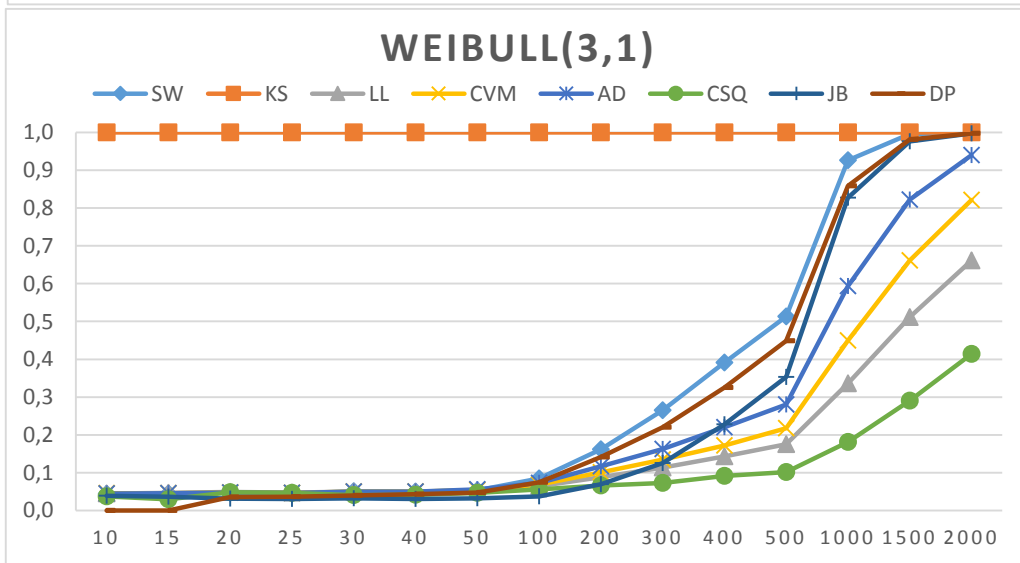
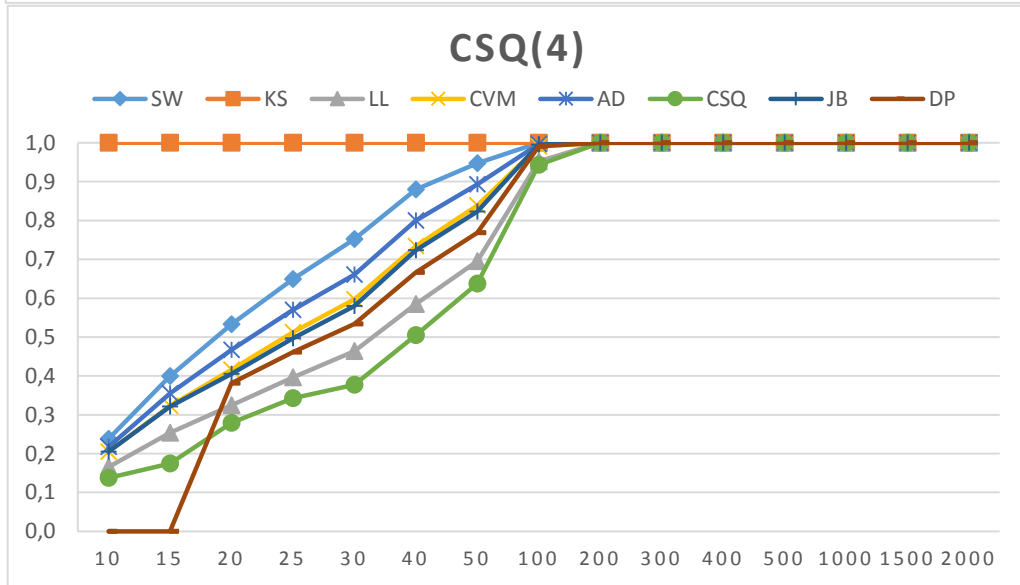
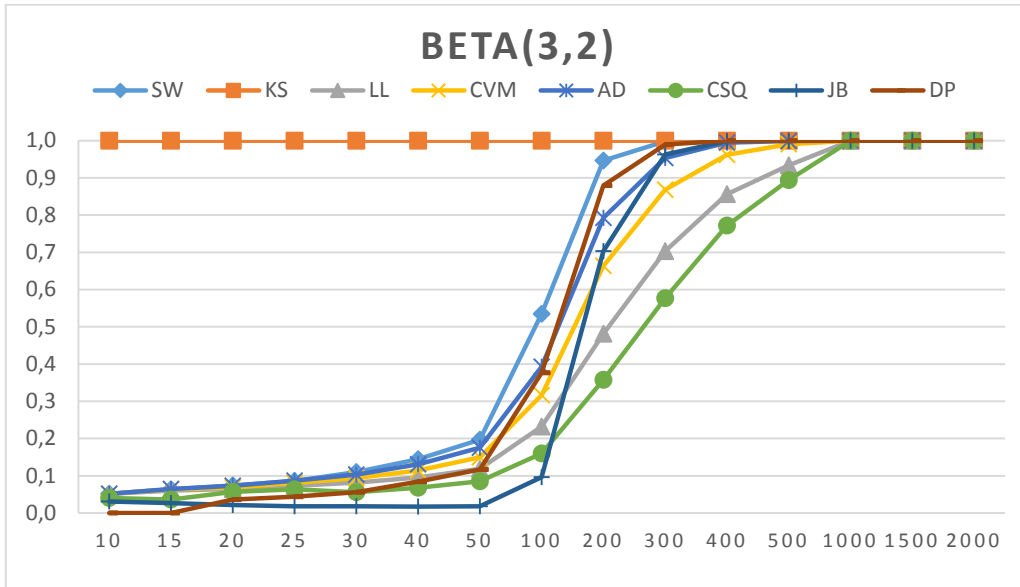
4.1.2 Le distribuzioni simmetriche a code pesanti

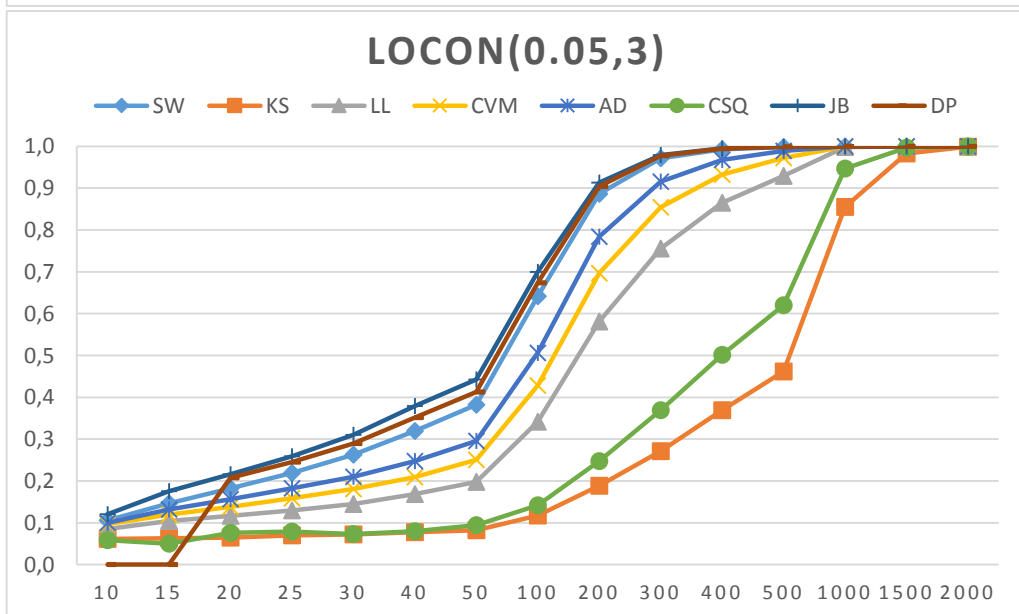
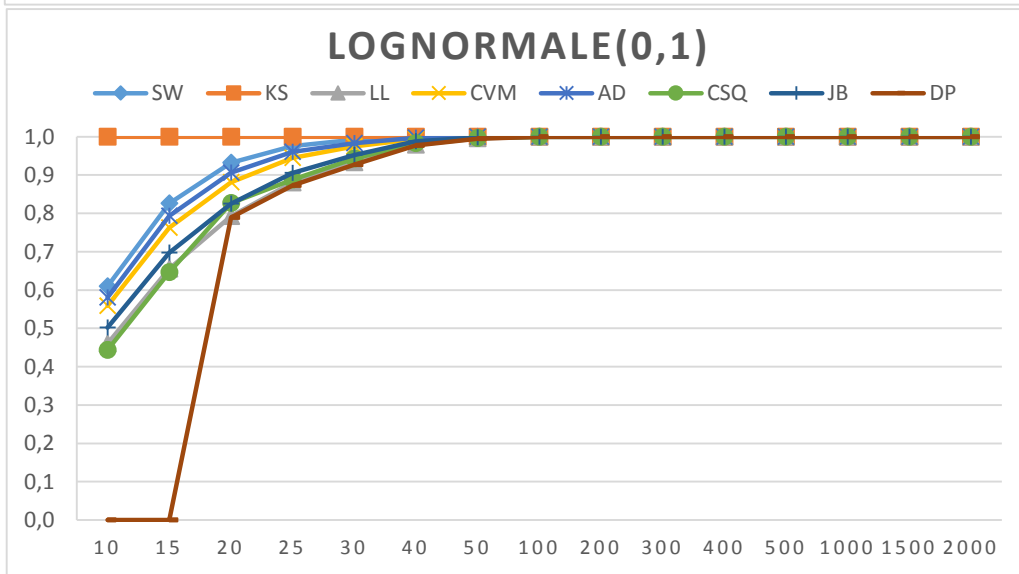
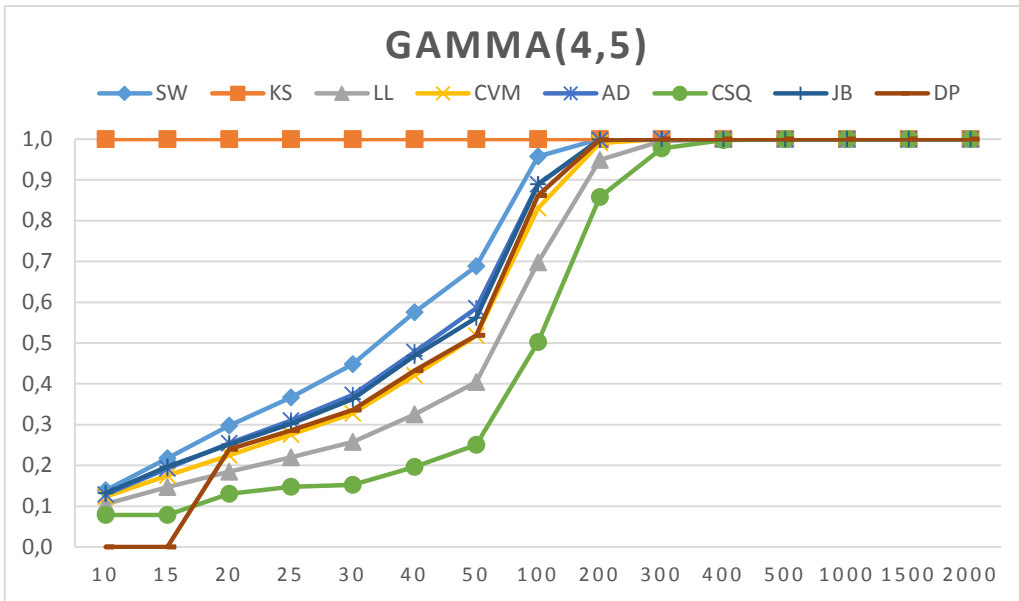




	SW	KS	LL	CVM	AD	CSQ	JB	DP
GLD(1,0,1.25,1.25)								
10	0,1477	0,2108	0,1240	0,1421	0,1453	0,0808	0,1757	0,0000
20	0,2608	0,3456	0,1913	0,2303	0,2494	0,1271	0,3057	0,2935
30	0,3553	0,4964	0,2434	0,3026	0,3295	0,1384	0,4141	0,3810
40	0,4341	0,6392	0,2946	0,3698	0,4007	0,1673	0,5048	0,4586
50	0,5048	0,7416	0,3460	0,4393	0,4731	0,1970	0,5753	0,5212
100	0,7600	0,9848	0,5590	0,6804	0,7185	0,3273	0,8113	0,7539
300	0,9926	1,0000	0,9490	0,9837	0,9890	0,7360	0,9946	0,9901
400	0,9990	1,0000	0,9860	0,9972	0,9985	0,8625	0,9993	0,9983
500	0,9999	1,0000	0,9962	0,9995	0,9997	0,9269	0,9999	0,9998
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	1,0000	1,0000
1500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
ScCoN(0.05,3)								
10	0,1110	0,0519	0,0913	0,0999	0,1051	0,0580	0,1289	0,0000
20	0,1960	0,0543	0,1271	0,1519	0,1706	0,0930	0,2264	0,2219
30	0,2648	0,0545	0,1520	0,1872	0,2167	0,0879	0,3076	0,2964
40	0,3224	0,0553	0,1738	0,2155	0,2516	0,1038	0,3776	0,3598
50	0,3773	0,0523	0,1916	0,2470	0,2903	0,1143	0,4367	0,4145
100	0,5878	0,0567	0,2708	0,3552	0,4223	0,1577	0,6549	0,6242
300	0,9147	0,0645	0,5280	0,6637	0,7550	0,2740	0,9415	0,9294
400	0,9623	0,0661	0,6282	0,7618	0,8466	0,3503	0,9775	0,9707
500	0,9839	0,0702	0,7135	0,8361	0,9041	0,3950	0,9907	0,9878
1000	0,9998	0,0908	0,9383	0,9806	0,9938	0,6656	0,9999	0,9998
1500	1,0000	0,1094	0,9890	0,9980	0,9998	0,8369	1,0000	1,0000
2000	1,0000	0,1451	0,9984	0,9998	1,0000	0,9327	1,0000	1,0000
t(15)								
10	0,0627	0,0539	0,0578	0,0624	0,0630	0,0453	0,0708	0,0000
20	0,0795	0,0537	0,0646	0,0683	0,0725	0,0539	0,0937	0,0913
30	0,0884	0,0529	0,0623	0,0703	0,0750	0,0458	0,1117	0,1021
40	0,0966	0,0542	0,0635	0,0719	0,0782	0,0483	0,1299	0,1144
50	0,1055	0,0510	0,0668	0,0776	0,0849	0,0510	0,1416	0,1225
100	0,1437	0,0532	0,0745	0,0875	0,0986	0,0553	0,2004	0,1655
300	0,2584	0,0570	0,1025	0,1358	0,1599	0,0638	0,3475	0,2950
400	0,3159	0,0555	0,1196	0,1618	0,1933	0,0697	0,4176	0,3529
500	0,3670	0,0566	0,1351	0,1883	0,2257	0,0710	0,4812	0,4173
1000	0,5981	0,0660	0,2217	0,3366	0,4031	0,0968	0,7098	0,6531
1500	0,7611	0,0755	0,3139	0,4758	0,5631	0,1217	0,8488	0,8130
2000	0,8607	0,0869	0,4083	0,6042	0,6947	0,1535	0,9222	0,9017

4.1.3 Le distribuzioni asimmetriche





	SW	KS	LL	CVM	AD	CSQ	JB	DP
Beta(2,1)								
10	0,1325	1,0000	0,0958	0,1157	0,1213	0,0950	0,0669	0,0000
15	0,2121	1,0000	0,1343	0,1705	0,1879	0,0880	0,0731	0,0000
20	0,3106	1,0000	0,1770	0,2301	0,2673	0,1626	0,0750	0,0955
25	0,4089	1,0000	0,2187	0,2952	0,3457	0,2260	0,0840	0,1156
30	0,5239	1,0000	0,2622	0,3622	0,4309	0,2262	0,0973	0,1424
40	0,6994	1,0000	0,3547	0,4840	0,5807	0,3349	0,1379	0,2029
50	0,8378	1,0000	0,4511	0,6138	0,7223	0,4701	0,2027	0,2839
100	0,9987	1,0000	0,8156	0,9377	0,9825	0,8858	0,8470	0,8977
200	1,0000	1,0000	0,9964	0,9997	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000
300	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CSQ(10)								
10	0,1191	1,0000	0,0946	0,1053	0,1102	0,0696	0,1157	0,0000
20	0,2451	1,0000	0,1553	0,1864	0,2089	0,1088	0,2133	0,2046
25	0,3034	1,0000	0,1834	0,2264	0,2560	0,1199	0,2602	0,2461
30	0,3771	1,0000	0,2160	0,2718	0,3094	0,1218	0,3132	0,2925
40	0,4790	1,0000	0,2686	0,3418	0,3891	0,1512	0,3946	0,3663
50	0,5859	1,0000	0,3315	0,4297	0,4884	0,1943	0,4821	0,4443
100	0,9053	1,0000	0,5964	0,7361	0,8057	0,3760	0,8186	0,7827
200	0,9980	1,0000	0,8906	0,9684	0,9874	0,7171	0,9932	0,9909
300	1,0000	1,0000	0,9780	0,9971	0,9994	0,9093	0,9999	0,9998
400	1,0000	1,0000	0,9965	0,9998	1,0000	0,9792	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	0,9996	1,0000	1,0000	0,9959	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
CSQ(20)								
10	0,0829	1,0000	0,0699	0,0764	0,0781	0,0516	0,0837	0,0000
20	0,1467	1,0000	0,1029	0,1154	0,1277	0,0744	0,1343	0,1316
25	0,1750	1,0000	0,1135	0,1346	0,1482	0,0771	0,1634	0,1556
30	0,2138	1,0000	0,1305	0,1562	0,1748	0,0741	0,1932	0,1830
40	0,2635	1,0000	0,1546	0,1843	0,2083	0,0868	0,2377	0,2225
50	0,3269	1,0000	0,1860	0,2292	0,2594	0,1000	0,2844	0,2663
100	0,6070	1,0000	0,3332	0,4204	0,4800	0,1670	0,5298	0,5000
200	0,9052	1,0000	0,5964	0,7334	0,8045	0,3230	0,8599	0,8452
300	0,9838	1,0000	0,7824	0,8967	0,9396	0,4904	0,9697	0,9673
400	0,9978	1,0000	0,8937	0,9647	0,9845	0,6558	0,9961	0,9953
500	0,9999	1,0000	0,9508	0,9889	0,9961	0,7703	0,9997	0,9996
1000	1,0000	1,0000	0,9995	1,0000	1,0000	0,9897	1,0000	1,0000
1500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000
2000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	SW	KS	LL	CVM	AD	CSQ	JB	DP
LoCoN(0.2,3)								
10	0,1321	0,1911	0,1155	0,1310	0,1308	0,0793	0,1119	0,0000
15	0,1992	0,2506	0,1690	0,1956	0,2015	0,0837	0,1426	0,0000
20	0,2610	0,3213	0,2175	0,2576	0,2679	0,1401	0,1607	0,1466
25	0,3207	0,3958	0,2671	0,3240	0,3369	0,1592	0,1866	0,1643
30	0,3940	0,4572	0,3192	0,3925	0,4090	0,1673	0,2203	0,1865
40	0,5073	0,5846	0,4170	0,5132	0,5322	0,2285	0,2870	0,2340
50	0,6152	0,6811	0,5155	0,6272	0,6504	0,2965	0,3596	0,2904
100	0,9202	0,9548	0,8418	0,9229	0,9359	0,6105	0,7531	0,6856
200	0,9985	0,9997	0,9907	0,9988	0,9993	0,9287	0,9873	0,9832
300	1,0000	1,0000	0,9998	1,0000	1,0000	0,9926	0,9998	0,9997
400	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	1,0000	1,0000
500	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000
1000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

4.2 Considerazioni aggiuntive

Per avere una rappresentazione più chiara delle performance dei diversi test di normalità è stata utilizzata una procedura di classificazione dei test stessi. Al test con più alta performance, nel senso di potenza maggiore, è stato assegnato il numero 1 mentre quello con la più bassa ha ricevuto il numero 8 (visto che abbiamo a che fare con 8 test in questo studio); questo è stato fatto per ognuna delle distribuzioni alternative. La classifica complessiva è stata creata poi sommando i 24 numeri ma mantenendo la divisione in tre categorie; il test con il numero inferiore sarà quindi da considerarsi il migliore e viceversa. I risultati sono riportati nella tabella seguente.

DISTRIBUZIONI ALTERNATIVE								
$\alpha=0.05$								
	SW	KS	LL	CVM	AD	CSQ	JB	DP
Simmetriche a code leggere	11	22	39	30	24	41	17	10
Simmetriche a code pesanti	16	43	45	30	26	55	14	17
Asimmetriche	18	17	56	41	26	67	28	28
Totale	45	82	140	101	76	163	59	55

Si può vedere chiaramente che il test SW è il miglior test da adottare complessivamente poiché ha una potenza eccellente in ognuna delle diverse tipologie di distribuzioni. I test DP e JB lavorano in maniera piuttosto adeguata per distribuzioni simmetriche. Notiamo che tra i test basati sulla funzione di distribuzione empirica è preferibile il test AD rispetto a test LL e CVM; discorso a parte merita il KS: questo test ha un comportamento particolare visto che per distribuzioni asimmetriche è quasi ottimale, arrivando rapidissimamente a rifiutare l'ipotesi di normalità, mentre per molte distribuzioni simmetriche fatica a raggiungere questi risultati. Il test CSQ, come prevedibile, guadagna la posizione più bassa della classifica, non risultando una buona scelta da compiere per valutare la normalità di distribuzioni continue.

Tutti i risultati riportati nel capitolo 4 utilizzano un livello di fiducia α al 5%, ma il nostro studio completo teneva in considerazione anche l'1% e il 10%; non li

abbiamo elencati poiché sostanzialmente portano alle stesse conclusioni di classificazione riguardo i test; ovviamente si diversificano tra loro per i valori contenuti nelle tabelle poiché all'1% arrivano a convergere ad 1 con numerosità più elevate mentre il contrario al 10%.

CAPITOLO 5

Conclusione

In conclusione, l'aggiunta di un test di normalità al più informale metodo grafico può condurre a una giusta decisione finale per quanto riguarda la distribuzione di una variabile. Dal nostro studio si evince quindi che il test più raccomandabile è lo SW che copre in maniera adeguata la maggior parte delle distribuzioni; se il ricercatore nota dai dati che la distribuzione è asimmetrica otterrebbe buoni risultati anche con il test AD o KS, se invece è simmetrica può utilizzare correttamente il DP e lo JB. Infine, va sottolineato che la valutazione della normalità in un campione con numerosità inferiore a 30 non è facile, quindi le conclusioni che si possono trarre, vanno prese con una certezza molto minore di quando si lavora con grandi campioni.

Appendice

A1 Tabelle contenenti i valori critici per gli otto test

n=10 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.78445	0.84453	0.87058
	90%	95%	99%
KS	0.36867	0.40857	0.48488
LL	0.24095	0.26266	0.30407
CVM	0.09911	0.11934	0.16862
AD	0.57878	0.68929	0.93923
CSQ	6.8	8.0	11.6
JB	1.64699	2.54765	5.83896
DP			

n=15 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.83803	0.88278	0.90149
	90%	95%	99%
KS	0.30457	0.33808	0.40667
LL	0.20090	0.21853	0.25361
CVM	0.09987	0.12107	0.16992
AD	0.59527	0.70682	0.96607
CSQ	7.0	8.6	11.8
JB	2.04717	3.24166	7.95705
DP			

n=20 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.86622	0.90482	0.91997
	90%	95%	99%
KS	0.26516	0.29385	0.34982
LL	0.17608	0.19173	0.22346
CVM	0.10117	0.12299	0.17361
AD	0.60674	0.71894	0.99101
CSQ	8.0	9.4	13.6
JB	2.34377	3.83624	9.70386
DP	4.43357	6.36143	11.68339

n=25 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.88802	0.91923	0.93231
	90%	95%	99%
KS	0.23795	0.26351	0.31592
LL	0.15883	0.17320	0.20063
CVM	0.10157	0.12365	0.17567
AD	0.61135	0.72803	1.00428
CSQ	9.24	11.16	15.64
JB	2.56986	4.16738	10.99267
DP	4.49531	6.39485	11.70311

n=30 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.90306	0.93077	0.94156
	90%	95%	99%
KS	0.21748	0.24136	0.28976
LL	0.14597	0.15899	0.18497
CVM	0.10215	0.12362	0.17695
AD	0.61360	0.72919	1.01521
CSQ	9.46667	11.6	15.33333
JB	2.74655	4.35433	11.17060
DP	4.53984	6.36819	11.34627

n=40 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.92239	0.94475	0.95316
	90%	95%	99%
KS	0.18890	0.20947	0.25163
LL	0.12763	0.13904	0.16188
CVM	0.10289	0.12551	0.17801
AD	0.62231	0.74155	1.01374
CSQ	10.85	13.10	17.15
JB	3.00898	4.70551	12.16791
DP	4.56452	6.390516	11.36635

n=50 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.93635	0.95374	0.96099
	90%	95%	99%
KS	0.17072	0.18948	0.22625
LL	0.11445	0.12475	0.14585
CVM	0.10302	0.12456	0.17794
AD	0.62198	0.73895	1.02195
CSQ	12.4	14.4	18.8
JB	3.19299	4.96787	12.61111
DP	4.54439	6.41128	11.42237

n=100 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.96484	0.97466	0.97849
	90%	95%	99%
KS	0.12054	0.13378	0.15948
LL	0.08176	0.08895	0.10414
CVM	0.10328	0.12562	0.17951
AD	0.62701	0.74846	1.03356
CSQ	16.22	18.56	23.76
JB	3.69862	5.41791	12.63005
DP	4.63414	6.25703	10.97399

n=200 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.98158	0.98630	0.98833
	90%	95%	99%
KS	0.08599	0.09542	0.11435
LL	0.05820	0.06341	0.07336
CVM	0.10314	0.12506	0.17582
AD	0.62586	0.74447	1.01815
CSQ	21.3400	23.8900	29.1617
JB	4.05015	5.70115	11.9888
DP	4.61210	6.14742	10.56043

n=300 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.98737	0.99054	0.99191
	90%	95%	99%
KS	0.07020	0.07788	0.09375
LL	0.04766	0.05188	0.06051
CVM	0.10377	0.12571	0.17770
AD	0.62982	0.75078	1.03136
CSQ	24.93333	27.86667	33.46667
JB	4.18996	5.91058	11.39517
DP	4.59911	6.15491	10.11932

n=400 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.99033	0.99274	0.99376
	90%	95%	99%
KS	0.06070	0.06735	0.08117
LL	0.04128	0.04491	0.05254
CVM	0.10373	0.12659	0.17882
AD	0.63122	0.75111	1.02694
CSQ	27.35	30.21	36.48
JB	4.29273	5.88116	10.79469
DP	4.58342	6.14590	10.01964

n=500 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.99213	0.99408	0.99492
	90%	95%	99%
KS	0.05439	0.06059	0.07250
LL	0.03699	0.04026	0.04697
CVM	0.10321	0.12705	0.18174
AD	0.62903	0.75461	1.04878
CSQ	31.000	34.100	40.301
JB	4.28917	5.82474	10.84868
DP	4.56906	6.04098	9.79937

n=1000 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.99589	0.99690	0.99733
	90%	95%	99%
KS	0.03857	0.04278	0.05119
LL	0.02615	0.02855	0.03335
CVM	0.10301	0.12578	0.18050
AD	0.62836	0.74907	1.03974
CSQ	39.104	42.688	49.856
JB	4.48438	5.93672	10.22302
DP	4.63360	6.10296	9.59309

n=1500 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.99724	0.99789	0.99817
	90%	95%	99%
KS	0.03149	0.03496	0.04227
LL	0.02147	0.02337	0.02733
CVM	0.10331	0.12638	0.17879
AD	0.63074	0.75238	1.02998
CSQ	46.19467	49.99467	57.59517
JB	4.48171	5.89374	9.73310
DP	4.57756	5.95797	9.39568

n=2000 VALORI CRITICI			
	1%	5%	10%
SW	0.99790	0.99839	0.99861
	90%	95%	99%
KS	0.02722	0.03019	0.03623
LL	0.01859	0.02022	0.02338
CVM	0.10311	0.12502	0.17641
AD	0.62694	0.74686	1.01409
CSQ	50.734	54.640	62.326
JB	4.50931	5.93726	9.56613
DP	4.56598	5.99806	9.27247

A2 Tabelle contenenti i valori degli errori del I tipo per gli otto test

n=10	1%	5%	10%
SW	0.00996	0.04846	0.09972
KS	0.01064	0.04984	0.10308
LL	0.01012	0.04900	0.10012
CVM	0.00920	0.04950	0.09872
AD	0.00976	0.04800	0.09872
CSQ	0.00712	0.04038	0.06704
JB	0.00998	0.04960	0.09686
DP			

n=15	1%	5%	10%
SW	0.01034	0.05072	0.09890
KS	0.01028	0.04724	0.09786
LL	0.01000	0.05204	0.10114
CVM	0.01018	0.05256	0.10298
AD	0.00988	0.05140	0.10068
CSQ	0.00824	0.03140	0.06456
JB	0.01042	0.04990	0.10028
DP			

n=20	1%	5%	10%
SW	0.00992	0.04992	0.09788
KS	0.00958	0.04932	0.09862
LL	0.01030	0.04992	0.09922
CVM	0.01014	0.04956	0.09916
AD	0.01032	0.04938	0.09792
CSQ	0.00814	0.04886	0.09076
JB	0.01070	0.04952	0.09962
DP	0.01062	0.05086	0.10052

n=25	1%	5%	10%
SW	0.00978	0.04888	0.09964
KS	0.01028	0.05026	0.10044
LL	0.00996	0.04912	0.10176
CVM	0.00952	0.04924	0.10046
AD	0.00924	0.04942	0.10066
CSQ	0.00750	0.04766	0.10014
JB	0.00942	0.04940	0.10060
DP	0.00938	0.04972	0.10078

n=30	1%	5%	10%
SW	0.01042	0.05296	0.10276
KS	0.01020	0.04890	0.09762
LL	0.01016	0.04948	0.10010
CVM	0.01046	0.05094	0.10068
AD	0.01034	0.05128	0.10206
CSQ	0.01074	0.04146	0.09636
JB	0.01034	0.05168	0.09908
DP	0.01048	0.05142	0.09940

n=40	1%	5%	10%
SW	0.00930	0.04716	0.09486
KS	0.00922	0.05064	0.09958
LL	0.00942	0.04888	0.09750
CVM	0.00942	0.04758	0.09716
AD	0.00980	0.04758	0.09572
CSQ	0.00878	0.04222	0.09612
JB	0.00902	0.05062	0.10010
DP	0.00912	0.04916	0.09890

n=50	1%	5%	10%
SW	0.00962	0.04892	0.09712
KS	0.00974	0.04834	0.09922
LL	0.00914	0.04882	0.09842
CVM	0.00958	0.05074	0.09794
AD	0.00976	0.05064	0.09844
CSQ	0.00904	0.04450	0.09002
JB	0.00964	0.05020	0.09920
DP	0.00996	0.04834	0.10038

n=100	1%	5%	10%
SW	0.01002	0.05020	0.09916
KS	0.00934	0.04942	0.09962
LL	0.00894	0.05118	0.09874
CVM	0.00952	0.05014	0.10122
AD	0.01010	0.04974	0.09980
CSQ	0.00970	0.04724	0.09364
JB	0.00952	0.05028	0.09870
DP	0.00978	0.04942	0.09682

n=200	1%	5%	10%
SW	0.00992	0.04824	0.09690
KS	0.01050	0.05002	0.09944
LL	0.01064	0.04936	0.09732
CVM	0.01102	0.04988	0.09908
AD	0.01118	0.05080	0.09860
CSQ	0.01082	0.05008	0.09670
JB	0.00954	0.04802	0.09532
DP	0.00896	0.04828	0.09534

n=300	1%	5%	10%
SW	0.01068	0.05088	0.10080
KS	0.00988	0.05048	0.09896
LL	0.00968	0.05026	0.10166
CVM	0.00986	0.05914	0.10152
AD	0.01010	0.05112	0.10064
CSQ	0.01078	0.04706	0.09748
JB	0.00938	0.04832	0.10102
DP	0.00950	0.04974	0.10128

n=400	1%	5%	10%
SW	0.00990	0.04856	0.09850
KS	0.00994	0.04580	0.09494
LL	0.01056	0.05304	0.10134
CVM	0.00990	0.04800	0.09878
AD	0.01048	0.04846	0.09764
CSQ	0.00988	0.05136	0.10210
JB	0.01052	0.04918	0.10004
DP	0.00936	0.04800	0.10162

n=500	1%	5%	10%
SW	0.00978	0.04944	0.09908
KS	0.01048	0.04988	0.10230
LL	0.00978	0.05104	0.10068
CVM	0.00936	0.04884	0.10000
AD	0.00912	0.04932	0.09904
CSQ	0.01056	0.04878	0.09762
JB	0.00932	0.05122	0.10346
DP	0.01002	0.05052	0.10074

n=1000	1%	5%	10%
SW	0.00958	0.05016	0.09964
KS	0.00948	0.04912	0.09748
LL	0.00980	0.05110	0.10272
CVM	0.00940	0.04976	0.09948
AD	0.00966	0.04964	0.09960
CSQ	0.01016	0.05032	0.10312
JB	0.00936	0.04904	0.09984
DP	0.00972	0.04786	0.09848

n=1500	1%	5%	10%
SW	0.01036	0.05166	0.10066
KS	0.01052	0.05356	0.10460
LL	0.00980	0.04990	0.09958
CVM	0.00992	0.04982	0.10104
AD	0.01024	0.05038	0.10054
CSQ	0.00982	0.04968	0.09782
JB	0.01038	0.05184	0.09998
DP	0.01026	0.05164	0.10010

n=2000	1%	5%	10%
SW	0.01106	0.05340	0.10494
KS	0.00944	0.05116	0.10252
LL	0.01144	0.05184	0.10096
CVM	0.01136	0.05148	0.10276
AD	0.01178	0.05206	0.10326
CSQ	0.00978	0.04938	0.10072
JB	0.01088	0.05268	0.10422
DP	0.01114	0.05288	0.10450

BIBLIOGRAFIA

- [1] R.B. D'Agostino e M.A. Stephens, "Goodness of fit Techniques", (1986)
- [2] S.S. Shapiro e M.B. Wilk, "*An analysis of variance test for normality (complete samples)*", *Biometrika* 52 (1965)
- [3] J.P. Royston, "*An estension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples*", *Appl. Statis.* 31 (1982)
- [4] N.Smirnov, "*On the estimation of the discrepancy between empirical curve of distribution for two independent samples*", *Bulletin Mathematique de l'Universit  de Moscou*, Vol.2, fasc.2 (1939)
- [5] M.A. Stephens, "*EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*", *Journal of the American Statistical Association* 69 (1974)
- [6] H. Chernoff e E.L. Lehmann, "*The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness-of-fit*". *The Annals of Mathematical Statistics*; 25(1952)
- [7] R.B. D'Agostino e A. Belanger, "*A suggestion for Using Powerful and Informative Tests of Normality*", *The American Statistician*, vol.44 (1990)
- [8] F.J. Anscombe e William J. Glynn, "*Distribution of the kurtosis statistic b_2 for normal statistics*", *Biometrika* 70 (1983)
- [9] A. Lakhany e H. Mausser, "*Estimating the Parametres of the Generalized Lambda Distribution*", paper (2010)
- [10] H.C. Thode Jr, "*Testing for Normality*", CRC press (2002)
- [11] B.W. Yap e C.H. Sim, "*Comparisons of various type of normality test*", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81:12, 2141-2155 (2011)