Tesi di Laurea **A.A. 2003-2004**

Dipendenza reale analitica da perturbazioni del supporto e della densità dei potenziali elastici di semplice e doppio strato

Relatore: Ch.mo Prof. Massimo Lanza de Cristoforis

Controrelatore: Ch.mo Dott. Paolo Ciatti

Laureando: Matteo Dalla Riva

Università degli Studi di Padova
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea **A.A. 2003-2004**

Dipendenza reale analitica da perturbazioni del supporto e della densità dei potenziali elastici di semplice e doppio strato

Relatore: Ch.mo Prof. Massimo Lanza de Cristoforis

Controrelatore: Ch.mo Dott. Paolo Ciatti

Laureando: Matteo Dalla Riva

Università degli Studi di Padova
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Corso di Laurea in Matematica

a Tita, Gigi, Giulio, Andrea

Indice

Introduzione **vii**

Ringraziamenti **ix**

1 Preliminari tecnici e notazioni **1**

2 Analiticità reale dei potenziali elastici di strato **7**

A Teoria del potenziale per le equazioni dell'elastostatica **25**

B Il problema di Dirichlet **41**

Bibliografia **51**

Introduzione

Il proposito di questa Tesi è di studiare la dipendenza dei potenziali elastici di semplice e doppio strato dall'ipersuperfice di integrazione, cioè dal supporto. Assumeremo che tale ipersuperficie di integrazione sia *di tipo sfera*. Ovvero che, posto che sia $\mathbb{B}_n \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x| < 1\right\}$ la palla unitaria aperta in $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, la nostra ipersuperficie sia individuata da un diffeomorfismo ϕ di $\partial\mathbb{B}_n$ su $\phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right) \subseteq \mathbb{R}^n$. In questo modo $\phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)$ sarà una varietà $(n-1)$-dimensionale immersa in $\mathbb{R}^n$. Considereremo poi l'insieme $\mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ delle ϕ ammissibili (vedi Lemma 1.5), e lo spazio di Schauder $C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$. L'insieme $C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ è aperto in $C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$ e possiamo pensare a ϕ come ad un punto di questo insieme. Sia $f \in C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$, allora la funzione $f \circ \phi^{(-1)}$ è definita su $\phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)$. Se $\mathbf{A}(\partial_x)u + g = 0$ è l'equazione di equilibrio di un mezzo elastico omogeneo ed isotropo ($u = (u_1, \ldots, u_n)$ si chiama vettore di spostamento e $g = (g_1, \ldots, g_n)$ è la forza che agisce sui punti di Ω, vedi Kupradze [KGBB, I, §12]) ha senso considerare il potenziale di semplice e doppio strato

$$
\begin{aligned}
v[\phi, f](\xi) &\equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Gamma\left(\eta - \xi\right) f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, d\sigma_\eta \qquad \forall \xi \in \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\
w[\phi, f](\xi) &\equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Big(f \circ \phi^{(-1)}(\eta) \Big(\mathbf{T}\, d\Gamma^{(j)}(\eta - \xi)\Big) \left[\nu_\phi(\eta)\right]\Big)_{j=1,\ldots,n} d\sigma_\eta \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \xi \in \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right),
\end{aligned}
$$

dove $\Gamma(\cdot)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore $\mathbf{A}(\partial_x)$ in $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{T}$ e $\Gamma^{(j)}$ sono definiti nel Capitolo 2 e ν_ϕ è la normale esterna dell'insieme $\mathfrak{I}[\phi]$ limitato da $\phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)$ (vedi Capitolo 1). Possiamo poi considerare le funzioni

$$
V[\phi, f](x) \equiv v[\phi, f] \circ \phi(x) \qquad \forall x \in \partial\mathbb{B}_n, \tag{0.1}
$$

$$
W[\phi, f](x) \equiv w[\phi, f] \circ \phi(x) \qquad \forall x \in \partial\mathbb{B}_n. \tag{0.2}
$$

$V[\cdot,\cdot]$ è allora un operatore di $\left(C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$ e manda (ϕ, f) nella funzione $V[\phi, f]$; $W[\cdot,\cdot]$ è un operatore non lineare di $\left(C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}\right) \times C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$ in $C^{m,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$ e manda (ϕ, f) nella funzione $W[\phi, f]$.

Il proposito di questa Tesi è di mostrare che questi operatori (non lineari) $V[\cdot,\cdot]$ e $W[\cdot,\cdot]$ sono reali analitici (vedi Teorema 2.11). Fatto questo calcoleremo il differenziale di ogni ordine di V e W (vedi Proposizione 2.13). Il problema qui

trattato è già stato risolto da Lanza e Rossi in [LR] per i potenziali di strato relativi all'operatore Laplaciano e noi seguiremo la traccia del loro lavoro.
Per primo considereremo l'operatore $V[\cdot,\cdot]$. Infatti saremo in grado di esprimere l'operatore $W[\cdot,\cdot]$ tramite $V[\cdot,\cdot]$ e gli operatori corrispondenti a $V[\cdot,\cdot]$ e $W[\cdot,\cdot]$ costruiti usando la soluzione fondamentale dell'operatore Laplaciano, in modo tale che l'analiticità di $W[\cdot,\cdot]$ potrà essere dedotta da quella di $V[\cdot,\cdot]$, già provata, e da quella dei corrispondenti operatori relativi all'operatore Laplaciano provata da Lanza e Rossi in [LR].
Descriviamo brevemente la nostra strategia.
Data una coppia (ϕ_0, f_0) in $(C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n,\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n})\times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n,\mathbb{R}^n)$ esiste un $0<\delta<1$ ed un intorno aperto $\mathcal{W}_0$ di ϕ_0, tali che ogni ϕ appartenente a $\mathcal{W}_0$ si può estendere ad un diffeomormismo $\mathbf{E}_{\phi_0}[\phi]$, della stessa regolarità di ϕ, definito dall'anello

$$\mathbb{A}_\delta \equiv \left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, 1-\delta<|x|<1+\delta\right\}$$

su un intorno di $\phi(\partial\mathbb{B}_n)$. Porremo

$$\mathbb{A}_\delta^+ \equiv \left\{x\in\mathbb{R}^n, \,\middle|\, 1-\delta<|x|<1\right\}, \qquad \mathbb{A}_\delta^- \equiv \left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, 1<|x|<1+\delta\right\},$$

e mostreremo che $v[\phi,f]$ è univocamente determinato da due funzioni v^+ e v^- definite su $\mathbf{E}_{\phi_0}[\phi](\mathbb{A}_\delta^+)$ e $\mathbf{E}_{\phi_0}[\phi](\mathbb{A}_\delta^-)$ rispettivamente e tali che la coppia (v^+,v^-) è l'unica soluzione di un problema accoppiato con dati al bordo (vedi Teorema 2.4). Trasformeremo poi questo problema, che è definito su un dominio che dipende da $\mathbf{E}_{\phi_0}[\phi]$, in un problema accoppiato con dati al bordo definito su un dominio fisso. La soluzione di quest'ultimo sarà una coppia di funzioni (V^+,V^-) che determina univocamente $V[\phi,f]$ e tale che V^+ e V^- sono definite su $\mathbb{A}_\delta^+$ e $\mathbb{A}_\delta^-$ rispettivamente. Il passo successivo sarà di riformulare il problema con dato al bordo per (V^+,V^-) in un'equazione funzionale astratta in spazi di Banach e di analizzare questa tramite il Teorema della Funzione Implicita (sarà fatto nella dimostrazione della Proposizione 2.10). Potremo così dedurre la reale analiticità di (V^+,V^-) e quindi di $V[\cdot,\cdot]$.

La Tesi è organizzata come segue. Il Capitolo 1 è un capitolo di preliminari e notazioni il cui scopo è di definire alcuni degli oggetti che verranno poi usati. Nessuna delle dimostrazioni è qui svolta; essendo i risultati citati tutti già conosciuti verranno solo dati dei riferimenti bibliografici per le dimostrazioni. Nel capitolo 2 per prima cosa elencheremo alcune proprietà dei potenziali elastici di strato (Teorema 2.1), poi introdurremo i problemi con dato al bordo per (v^+,v^-) e per (V^+,V^-) e quindi dimostreremo il nostro principale Teorema 2.11. Infine nella Proposizione 2.13, calcoleremo il differenziale di ogni ordine di V e W. Nell'Appendice A dedurremo per comodità del lettore i risultati elencati nel Teorema 2.1 tramite la Teoria del Potenziale classica. Nell'Appendice B ci occuperemo della risolubilità del problema di Dirichlet per l'operatore $\mathbf{A}(\partial_x)$.

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento va ai miei genitori che mi hanno sostenuto per tutto il tempo necessario ad arrivare alla laurea.
Poi ringrazio tutti i professori che ho incontrato nei miei anni di università: ognuno di loro ha aggiunto qualcosa al mio amore per la Matematica, in particolare il Prof. M. Lanza de Cristoforis, che mi ha seguito con grande attenzione e premura nella stesura di questa Tesi.
Ringrazio anche coloro che, con le loro domande, osservazioni, congetture e piccole sfide, hanno reso più avvincente la mia cariera di studente: Dario Benetti, Luca Prelli, Luca Mertens, Raffaele Marigo.
Infine ringrazio Andrea che con dolcezza e comprensione mi ha aiutato a non prendermi troppo sul serio.

Padova, settembre 2004 — Matteo Dalla Riva

Capitolo 1

Preliminari tecnici e notazioni

Denoteremo la norma dello spazio normato $\mathcal{X}$ con $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Dati due spazi normati $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ forniremo lo spazio prodotto $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ della norma definita da $\|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \equiv \|x\|_{\mathcal{X}}+\|y\|_{\mathcal{Y}}$ per ogni $(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, mentre in $\mathbb{R}^n$ useremo la norma euclidea. Per le definizioni standard di calcolo negli spazi normati faremo riferimento a Prodi e Ambrosetti [PA]. Il simbolo $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali compreso lo 0. In tutta la Tesi n sarà un elemento di $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. La funzione inversa di una funzione invertibile f si denoterà con $f^{(-1)}$, mentre il reciproco di una funzione a valori complessi g, o l'inversa di una matrice A, saranno denotate con g^{-1} e A^{-1}, rispettivamente. Un puntino "$\cdot$" denoterà il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Se A è una matrice, indicheremo con A^t la matrice trasposta di A, con $\operatorname{tr} A$ la traccia di A, con $\det A$ il determinante di A e con A_{ij} l'elemento di posto (i,j) di A. Se inoltre A è invertibile, porremo $A^{-t}\equiv\left(A^{-1}\right)^t$. L'insieme delle matrici $r\times s$ ad elementi reali si indicherà con $\mathrm{M}_{r\times s}(\mathbb{R})$. Se $x\in\mathbb{R}^n$, x_j sarà la j-esima coordinata di x, $|x|$ la norma euclidea di x, porremo poi $(x',x_n)\equiv x$ con $x'\equiv(x_1,\dots,x_{n-1})$. Se $x\in\mathbb{R}^n$ e $A\in\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ scriveremo xA intendendo $x^t A$, notiamo che tale scrittura non crea ambiguità. Se $\mathrm{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ denoteremo con $\operatorname{cl}\mathrm{D}$ la chiusura di D, se poi $x\in\mathbb{R}^n$ sarà $\operatorname{dist}(x,\mathrm{D})\equiv\inf\left\{|y-x|\,\middle|\,y\in\mathrm{D}\right\}$. Se $\mathrm{B}\subseteq\mathbb{R}^n$ è Lebesgue-misurabile indicheremo con $|\mathrm{B}|$ la sua misura n-dimensionale di Lebesgue. Per ogni $R>0$ e $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{B}_n(x,R)$ sarà la palla $\{y\in\mathbb{R}^n\,|\,|y-x|<R\}$. Per brevità porremo $\mathbb{B}_n\equiv\mathbb{B}_n(0,1)$. Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio delle funzioni a valori reali m volte differenziabili con continutà si denoterà con $C^m(\Omega,\mathbb{R})$, o più semplicemente con $C^m(\Omega)$, se $g\in C^m(\Omega)$ si indicherà con ∇g il vettore gradiente di g e cioè il vettore $(\frac{\partial g}{\partial x_i})_{i=1,\dots,n}$. $\mathcal{D}(\Omega)$ denoterà lo spazio delle funzioni di $C^\infty(\Omega)$ con supporto compatto. Il duale $\mathcal{D}'(\Omega)$ denoterà lo spazio delle distribuzioni in Ω, se $g\in\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ indicheremo con $\langle g,\varphi\rangle$ la valutazione di g su φ; con δ_0 indicheremo la distribuzione delta di Dirac, definita da $\langle g,\varphi\rangle=\varphi(0)$, per ogni $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Sia $f\in C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)=(C^m(\Omega))^n$. La s-esima componente di f si indicherà con f_s, e Df denoterà la matrice gradiente $\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_l}\right)_{s,l=1,\dots,n}$. Sia $\eta\equiv(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\mathbb{N}^n$, $|\eta|\equiv\eta_1+\dots+\eta_n$. Allora $D^\eta f$ sarà $\frac{\partial^{|\eta|}f}{\partial x_1^{\eta_1}\dots\partial x_n^{\eta_n}}$. Si denoterà con $C^m(\mathrm{cl}\Omega)$ il sot-

tospazio di $C^m(\Omega)$ delle funzioni f estendibili con continuità a $\mathrm{cl}\Omega$ assieme alle loro derivate $D^\eta f$ di ordine $|\eta| \leq m$. Il sottospazio di $C^m(\mathrm{cl}\Omega)$ le cui funzioni hanno derivate di ordine m Hölder continue con esponente $\alpha \in]0,1]$, si denoterà con $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$, (vedi ad esempio Gilbarg e Trudinger [GT, §4.1]). Sia $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{D})$ denoterà $\left\{f \in (C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega))^n \;\middle|\; f(\mathrm{cl}\Omega) \subseteq \mathrm{D}\right\}$. $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{r\times s}(\mathbb{R}))$ denoterà lo spazio delle funzioni di $\mathrm{cl}\Omega$ in $\mathrm{M}_{r\times s}(\mathbb{R})$ le cui componenti sono di classe $C^{m,\alpha}$. Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$. Allora $C^m(\mathrm{cl}\Omega)$ con la norma $\|f\|_m \equiv \sum_{|\eta|\leq m} \sup_{\mathrm{cl}\Omega} |D^\eta f|$ è uno spazio di Banach. Se $f \in C^{0,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$, allora il suo quoziente di Hölder $|f : \Omega|_\alpha$ è $\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \;\middle|\; x, y \in \mathrm{cl}\,\Omega, x \neq y\right\}$. Lo spazio $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$ con la norma $\|f\|_{m,\alpha} = \|f\|_m + \sum_{|\eta|=m} |D^\eta f|_\alpha$, è uno spazio di Banach. Diremo che un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ è di classe C^m o di classe $C^{m,\alpha}$ se è una varietà con bordo immersa in $\mathbb{R}^n$ di classe C^m o $C^{m,\alpha}$, rispettivamente (vedi ad esempio Gilbarg e Trudinger [GT, §6.2]). Per rendere più compatte le nostre notazioni porremo $C^{m,0} \equiv C^m$.

Raccogliamo nella prossima proposizione alcune poprietà conosciute degli spazi di Schauder di cui avremo bisogno nel seguito (vedi ad esempio Gilbarg e Trudinger [GT, §4.2] e Lanza [L, §2, Lemmi 3.1, 4.26, Teorema 4.28]).

Lemma 1.1 *Siano m, $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$; α, $\beta \in]0,1]$. Siano Ω, Ω_1 aperti connessi e limitati $\mathbb{R}^n$ di classe C^1. Allora*

(i) Il prodotto puntuale è continuo in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$.

(ii) L'immersione di $C^{m+1}(\mathrm{cl}\Omega)$ in $C^{m,1}(\mathrm{cl}\Omega)$ è continua.

(iii) Se $\alpha > \beta$, l'immersione di $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$ in $C^{m,\beta}(\mathrm{cl}\Omega)$ è compatta.

(iv) Se $m > 0$ e $(\phi, \psi) \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega_1) \times C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{cl}\Omega_1)$, allora $\phi \circ \psi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$.

(v) Se $m > 0$, $\phi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$, ϕ è iniettiva e $\det D\phi \neq 0$ in $\mathrm{cl}\Omega$, allora la funzione inversa $\phi^{(-1)} \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\phi(\Omega), \mathbb{R}^n)$.

(vi) Il prodotto matriciale puntuale è bilineare e continuo, e quindi reale analitico, dallo spazio $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{r\times r}(\mathbb{R})) \times C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{r\times r}(\mathbb{R}))$ nello spazio $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{r\times r}(\mathbb{R}))$.

(vii) La mappa $F \mapsto F^{-1}$ è reale analitica dall'insieme $\left\{F \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\,\Omega, \mathrm{M}_{r\times r}(\mathbb{R})) \;\middle|\; \det F \neq 0 \text{ su } \mathrm{cl}\Omega\right\}$ in se stesso, ed il suo differenziale in F_0 è dato dalla mappa $M \mapsto -F_0^{-1} \cdot M \cdot F_0^{-1}$.

Notiamo che nel seguito “analitico” significherà sempre “reale analitico”. Per la definizione e le proprietà degli operatori analitici facciamo riferimento a Prodi e Ambrosetti [PA, p. 89].

Come annunciato nell'Introduzione avremo a che fare con diffeomorfismi fra sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$. Ci servirà il seguente Lemma (vedi [L, Corollario 4.24, Prop. 4.29]).

Lemma 1.2 *Sia Ω un sottoinsieme limitato e aperto di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1. Allora l'insieme*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cl}\Omega} \equiv \left\{ \Phi \in C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \,\middle|\, \Phi \text{ è iniettiva, } \det D\Phi(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathrm{cl}\Omega \right\}$$

è aperto in $C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Sia ora $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in [0,1]$. È ben noto che un sottoinsieme M di $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziale di dimensione s e classe $C^{m,\alpha}$ immersa in $\mathbb{R}^n$ se, per ogni $P \in M$, esistono un intorno W di P in $\mathbb{R}^n$, ed una parametrizzazione $\psi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_s, \mathbb{R}^n)$ tali che ψ è un omeomorfismo di $\mathbb{B}_s$ su $W \cap M$, $\psi(0) = P$, e $D\psi$ ha rango s in tutti i punti di $\mathrm{cl}\mathbb{B}_s$. Se supponiamo inoltre che M sia compatta, esisteranno $P_1, \ldots, P_r \in M$, e $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots,r}$, tali che, per ogni $i = 1, \ldots, r$, $\psi_i \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_s, \mathbb{R}^n)$ sia la parametrizzazione di un intorno $W_i \cap M$ di P_i in M e che $\cup_{i=1}^r (W_i \cap M) = M$. Denoteremo con $C^{m,\alpha}(M)$ lo spazio lineare delle funzioni f di M in $\mathbb{R}^n$ tali che $f \circ \psi_i \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_s)$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, e porremo

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(M)} \equiv \sup_{i=1,\ldots,r} \|f \circ \psi_i\|_{C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_s)} \qquad \forall f \in C^{m,\alpha}(M).$$

È ben noto che con diverse scelte della famiglia finita di parametrizzazioni locali si ottengono norme equivalenti. Inoltre lo spazio $\left(C^{m,\alpha}(M), \|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(M)}\right)$ è completo. Abbiamo allora il seguente (vedi ad esempio Troianiello [T, Teorema 1.3, Lemma 1.5])

Lemma 1.3 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in [0,1]$. Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$. Allora*

(i) $\partial\Omega$ è una varietà di classe $C^{m,\alpha}$ e codimensione 1 e la mappa di restrizione è lineare e continua da $C^{k,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$ in $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ per ogni $k = 0, \ldots, m$.

(ii) Esiste un operatore di estensione $\mathbf{F}$ lineare e continuo definito da $C^{m,\alpha}(\partial\Omega)$ in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\,\Omega)$ tale che $\mathbf{F}[f]_{|\partial\Omega} = f$ per ogni $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega)$.

(iii) Sia $R > 0$ tale che $\mathrm{cl}\Omega \subseteq \mathbb{B}_n(0,R)$. Allora esiste un operatore lineare e continuo $\mathbf{F}_R$ di $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$ in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_n(0,R))$ tale che $\mathbf{F}_R[f]_{|\mathrm{cl}\Omega} = f$ per ogni $f \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega)$.

Introduciamo ora la seguente variante di [L, Prop. 4.29] (la si può ottenere con una leggera modifica della dimostrazione della Proposizione 4.29 [L]).

Lemma 1.4 *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Sia $C^{0,1}(K, \mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni Lipschitziane di K in $\mathbb{R}^n$ e sia $|f : K|_1$ la costante di Lipschitz di $f \in C^{0,1}(K, \mathbb{R}^n)$. Poniamo*

$$l_K[f] \equiv \inf \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \,\middle|\, x, y \in K, \ x \neq y \right\} \qquad \forall f \in C^{0,1}(K, \mathbb{R}^n).$$

Allora $l[\cdot]$ è una mappa continua definita da $C^{0,1}(K, \mathbb{R}^n)$, dotato della seminorma $|\cdot : K|_1$, in $[0, +\infty[$.

Il seguente Lemma è una variante di [L, Teorema 4.18, Prop. 4.29] dimostrata in [LR, Lemma 2.5].

Lemma 1.5 *Sia $\phi \in C^1(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Allora $l_{\partial\mathbb{B}_n}[\phi] > 0$ se e solo se ϕ è iniettiva ed il differenziale $d\phi(p)$ è iniettivo per ogni $p \in \partial\mathbb{B}_n$. La mappa $l_{\partial\mathbb{B}_n}[\cdot]$ di $C^1(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $[0, +\infty[$ è continua e l'insieme*

$$\mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n} \equiv \left\{\phi \in C^1(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; l_{\partial\mathbb{B}_n}[\phi] > 0\right\}$$

è aperto in $C^1(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$.

Notiamo che, se $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora, per il Teorema di separazione di Jordan-Leray (vedi ad esempio Deimling [D, Teorema 5.2]), l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial\mathbb{B}_n)$ ha esattamente due componenti connesse. Denoteremo con $\mathcal{I}[\phi]$ la componente limitata e con $\mathcal{E}[\phi]$ quella illimitata. Abbiamo allora il seguente (vedi [LR, Lemma 2.6])

Lemma 1.6 *Siano $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\alpha \in [0,1]$. Se $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora $\mathcal{I}[\phi]$ è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$, e $\partial\mathcal{I}[\phi] = \phi(\partial\mathbb{B}_n) = \partial\mathcal{E}[\phi]$.*

Riportiamo qui di seguito le Proposizioni 2.7, 2.8 ed il Lemma 2.9 di [LR]. La prima Proposizione mostra che ogni ϕ *ammissibile* si può estendere ad un diffeomorfismo definito su un intorno anulare di $\partial\mathbb{B}_n$. La seconda mostra l'esitenza locale di un operatore di estensione per diffeomorfismi. Il Lemma introduce l'insieme di diffeomorfismi $\mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ che ci servirà in seguito.

Proposizione 1.7 *Siano $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\alpha \in [0,1]$. Se $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora esistono $\delta \in]0,1[$ e $\Phi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ tali che*

(i) *$\Phi(x) = \phi(x)$ per ogni $x \in \partial\mathbb{B}_n$.*

(ii) *$\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)$ è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$ contenuto in $\mathcal{I}[\phi]$, e $\partial\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right) = \Phi((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n) \cup \Phi(\partial\mathbb{B}_n)$.*

(iii) *$\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)$ è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$ contenuto in $\mathcal{E}[\phi]$, e $\partial\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right) = \Phi(\partial\mathbb{B}_n) \cup \Phi((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n)$.*

Proposizione 1.8 *Siano $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\alpha \in [0,1]$. Se $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora esistono $\delta \in]0,1[$ e $\Phi_0 \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ soddisfacenti (i), (ii), (iii) della Proposizione 1.7, un intorno aperto $\mathcal{W}_0$ di ϕ_0 contenuto in $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ ed un operatore di estensione lineare e continuo $\mathbf{F}_0$ di $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n)$ tali che la mappa $\mathbf{E}_0$ di $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n)$ definita da*

$$\mathbf{E}_0[\phi] \equiv \Phi_0 + \mathbf{F}_0[\phi - \phi_0] \qquad \forall \phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

mappa $\mathcal{W}_0$ in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$, e soddisfa le seguenti condizioni.

(i) $\mathbf{E}_0[\phi]_{|\partial\mathbb{B}_n} = \phi$, *per ogni* $\phi \in \mathcal{W}_0$.

(ii) $\mathbf{E}_0[\phi](x) = \Phi_0(x)$, *per ogni* $x \in (1-\delta)\partial\mathbb{B}_n \cup (1+\delta)\partial\mathbb{B}_n$ *e per ogni* $\phi \in \mathcal{W}_0$.

(iii) $\mathbf{E}_0[\phi]\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)$ *è un aperto connesso e limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* $C^{m,\alpha}$ *contenuto in* $\mathcal{I}[\phi]$, *e* $\partial\left(\mathbf{E}_0[\phi]\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)\right) = \Phi_0\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right) \cup \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)$, *per ogni* $\phi \in \mathcal{W}_0$.

(iv) $\mathbf{E}_0[\phi]\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)$ *è un aperto connesso e limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* $C^{m,\alpha}$ *contenuto in* $\mathcal{E}[\phi]$, *e* $\partial\left(\mathbf{E}_0[\phi]\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)\right) = \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right) \cup \Phi_0\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right)$, *per ogni* $\phi \in \mathcal{W}_0$.

Lemma 1.9 *Siano* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in [0,1]$ *e* $\delta \in]0,1[$. *Allora*

(i) *Se* $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ *si ha* $\phi \equiv \Phi_{|\partial\mathbb{B}_n} \in \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$.

(ii) *L'insieme* $\mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta} \equiv \left\{\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta} \,\middle|\, \Phi(\mathbb{A}_\delta^+) \subseteq \mathcal{I}[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}]\right\}$ *è aperto in* $\mathcal{A}_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ *e* $\Phi(\mathbb{A}_\delta^-) \subseteq \mathcal{E}[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}]$ *per ogni* $\Phi \in \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$.

(iii) *Se* $\Phi \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$, *allora sia* $\Phi(\mathbb{A}_\delta^+)$ *che* $\Phi(\mathbb{A}_\delta^-)$ *sono aperti di classe* $C^{m,\alpha}$ *e*

$$\partial\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right) = \Phi\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right) \cup \Phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)\,,$$
$$\partial\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right) = \Phi\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right) \cup \Phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right)\,.$$

Notiamo che, per come è definito, l'operatore $\mathbf{E}_0[\cdot]$ della Proposizione 1.8 ha valori in $C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$.

Capitolo 2

Analiticità reale dei potenziali elastici di strato

Sia Γ la funzione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definita da

$$\Gamma_{ij}(\xi) \equiv \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\delta_{ij}S_n(\xi) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\frac{1}{\sigma_n}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^n} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \tag{2.1}$$

dove S_n è la soluzione fondamentale dell'operatore Laplaciano, σ_n denota la misura $(n-1)$ dimensionale di $\partial\mathbb{B}_n$, λ e μ sono le costanti reali di Lamé e devono soddisfare le condizioni

$$\mu > 0\,, \qquad 2\mu + n\lambda > 0\,. \tag{2.2}$$

Allora Γ è la soluzione fondamentale dell'operatore

$$\mathbf{A}(\partial_x) \equiv \mu\Delta + (\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}$$

(vedi Teorema A.1). Vedremo che le condizioni (2.2) sono necessarie e sufficenti perché la forma bilineare $\mathbf{B}[\cdot,\cdot]$ canonicamente associata ad $\mathbf{A}(\partial_x)$ (vedi (2.15) e Teorema A.2) sia coerciva.
Sia T la mappa lineare di $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ in se stesso definita da

$$\mathrm{T}A \equiv \lambda(\mathrm{tr}A)\mathbf{1}_n + \mu(A + A^t)\,,$$

per ogni $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se f è una funzione differenziabile di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ e $\{dx_j\}_{j=1,\dots,n}$ è la base canonica dello spazio delle 1-forme lineari su $\mathbb{R}^n$ porremo

$$\mathbf{T}df(x) \equiv \Big(\sum_{j=1,\dots,n} (\mathrm{T}Df(x))_{ij}dx_j\Big)_{i=1,\dots,n}\,. \tag{2.3}$$

Per ogni $i = 1,\dots,n$ e per ogni $\nu \in \mathbb{R}^n$ risulterà allora

$$(\mathbf{T}df(x))\,[\nu] = \lambda\,\mathrm{div}f(x)\,\nu + \mu\left(Df(x) + Df(x)^t\right)\nu\,, \tag{2.4}$$

(vedi Kupradze [KGBB, I, §13]).

Raccogliamo nel seguente Teorema alcuni risultati dimostrati nell'Appendice A (vedi Teoremi A.6, A.12, A.13 e A.11).

Teorema 2.1 *Siano* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$. *Sia* Ω *un sottoinsieme aperto e limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* $C^{m,\alpha}$. *Allora si verificano le seguenti proposizioni*

(i) *Se* $\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, *allora la funzione* $v[\varphi]$ *di* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}^n$ *definita da*

$$v[\varphi](\xi) \equiv \int_{\partial\Omega} \Gamma(\xi-\eta)\varphi(\eta)\, d\sigma_\eta \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

è continua in $\mathbb{R}^n$ *e vale* $\mathbf{A}(\partial_x)v[\varphi] \equiv 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$. *La funzione* $v^+ \equiv v[\varphi]_{|\mathrm{cl}\Omega}$ *appartiene a* $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e la funzione* $v^- \equiv v[\varphi]_{|\mathbb{R}^n\setminus\Omega}$ *appartiene a* $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_n(0,R)\setminus\Omega, \mathbb{R}^n)$ *per tutti gli* $R > 0$ *tali che* $\mathrm{cl}\Omega \subseteq \mathbb{B}_n(0,R)$. *Inoltre, se* $\nu_\Omega(x)$ *è la normale esterna di* $\partial\Omega$ *in* x,

$$(\mathbf{T}dv^+(\xi))[\nu_\Omega(\xi)] - (\mathbf{T}dv^-(\xi))[\nu_\Omega(\xi)] = -\varphi(\xi) \qquad \forall \xi \in \partial\Omega. \tag{2.6}$$

(ii) *Sia* $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e sia* $w[\varphi] \equiv (w_j[\varphi])_{j=1,\dots,n}$ *la funzione di* $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ *in* $\mathbb{R}^n$ *definita per ogni* $j = 1, \dots, n$ *da*

$$w_j[\varphi](\xi) \equiv \int_{\partial\Omega} \varphi(\eta)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(\eta-\xi))[\nu_\Omega(\eta)]\, d\sigma_\eta \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega \tag{2.7}$$

dove si è posto $\Gamma^{(j)} \equiv (\Gamma_{ji})_{i=1,\dots,n}$. *Allora:* $\mathbf{A}(\partial_x)w[\varphi] \equiv 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$, *la restizione* $w[\varphi]_{|\Omega}$ *ha un'unica estensione* $w^+ \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$, *e la restrizione* $w[\varphi]_{|\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{cl}\Omega}$ *ha un'unica estensione* $w^- \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \mathbb{R}^n)$, *inoltre*

$$w^+(\xi) - w^-(\xi) = \varphi(\xi) \qquad \forall \xi \in \partial\Omega. \tag{2.8}$$

Se $\xi \in \partial\Omega$, *allora, per ogni* $j = 1, \dots, n$,

$$w_j^\pm(\xi) \;\; = \;\; \pm\frac{1}{2}\varphi_j(\xi) + \int_{\partial\Omega}^{*} \varphi(\eta)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(\eta-\xi))[\nu_\Omega(\eta)]\, d\sigma_\eta, \tag{2.9}$$

dove l'integrale si intende in senso singolare (vedi ad esempio Mikhlin [M, §5]).

(iii) *Se* $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, $v[\varphi]$ *e* $w[\varphi]$ *sono come in (2.5), (2.7), ripettivamente, e* $\tilde{v}[\varphi]$ *,*$\tilde{w}[\varphi]$ *sono definite, per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *da*

$$\tilde{v}[\varphi](\xi) \equiv \int_{\partial\Omega} S_n(\xi-\eta)\varphi(\eta)\, d\sigma_\eta\,, \tag{2.10}$$

$$\tilde{w}[\varphi](\xi) \equiv \int_{\partial\Omega} \varphi(\eta)\frac{\partial}{\partial\nu_\Omega(\eta)} S_n(\xi-\eta)\, d\sigma_\eta\,, \tag{2.11}$$

allora, se $\mathscr{M}(\partial_\eta, \nu_\Omega(\eta))$ *è definito come in (A.13),*

$$w[\varphi](\xi) = \tilde{w}[\varphi](\xi) - \tilde{v}[\mathscr{M}(\partial_\eta, \nu_\Omega(\eta))\varphi(\eta)](\xi) + 2\mu\; v[\mathscr{M}(\partial_\eta, \nu_\Omega(\eta))\varphi(\eta)](\xi)\,, \tag{2.12}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathrm{H}^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev con norma

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Diciamo che $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $u_j \to u$ in $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. È noto che, con il prodotto

$$(u,v) = \int_\Omega u \cdot v + \mathrm{tr}(\mathrm{D}u\, \mathrm{D}v^t)\, dx \qquad \forall\, u,v \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n , \tag{2.13}$$

$(\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n$ è uno spazio di Hilbert (si veda, *e.g*, Brezis [B, IX.4]). Notiamo poi che, con una semplice applicazione della Disugualianza di Poincaré (vedi ad esempio [B, IX.19 *Disugualianza di Poincaré*]), possiamo verificare l'esistenza di $c_\Omega > 0$ tale che

$$\int_\Omega u \cdot u \, dx \le c_\Omega \int_\Omega \mathrm{tr}(\mathrm{D}u\, \mathrm{D}u^t)\, dx \qquad \forall\, u \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n .$$

La norma indotta da (2.13) è perciò equivalente a quella indotta da

$$(u,v)' = \int_\Omega \mathrm{tr}(\mathrm{D}u\, \mathrm{D}v^t)\, dx \qquad \forall\, u,v \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n . \tag{2.14}$$

Ora, se $\mathbf{A}(\partial_x)u = 0$ in $[(\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n]'$ avremo $\int_\Omega u\mathbf{A}(\partial_x)v\, dx = 0$ per ogni $v \in \mathcal{D}^n(\Omega)$ e questo implica che, se E è definito come nel Teorema A.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[u,v] &\equiv \int_\Omega \mathrm{E}(v,u)\, dx &(2.15)\\ &= \int_\Omega \lambda \,\mathrm{div}\, u \;\mathrm{div}\, v + \frac{\mu}{2}\mathrm{tr}\left((Du+Du^t)(Dv+Dv^t)\right)\, dx = 0 \qquad \forall\, v \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n . \end{aligned}$$

Usando la Disugualianza di Korn (vedi ad esempio Valent [V, III, §1]) è facile mostrare che, poiché λ e μ soddisfano le condizioni 2.2, $\mathbf{B}$ è una forma bilineare continua e coerciva; ovvero che esiste una costante $c > 0$, tale che

$$\mathbf{B}[v,v] \ge c\|v\|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \qquad \forall\, v \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n . \tag{2.16}$$

Possiamo allora dedurre la validità dei seguenti Lemmi, il primo dei quali è di immediata verifica.

Lemma 2.2 *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, l'unico elemento $u \in (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n$ tale che $\mathbf{A}(\partial_x)u = 0$ in $[(\mathrm{H}^1_0(\Omega))^n]'$ è $u = 0$.*

Lemma 2.3 *Sia $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\alpha \in]0,1[$ ed Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$. Siano $f \in C^{m-2,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $g \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora esiste ed è unica $u \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{g}$ una funzione di $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g$ (vedi Lemma 1.3). Abbiamo osservato che, poiché le costanti di Lamé λ e μ soddisfano le condizioni (2.2), vale la (2.16) e quindi siamo nelle ipotesi di Valent [V, III, Teorema 7.2], esisterà allora una funzione $u_0 \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbf{A}(\partial_x)u_0 = f - \mathbf{A}(\partial_x)\tilde{g}$ in Ω ed $u_{0|\partial\Omega} = 0$. È immediato verificare che la funzione cercata è $u \equiv u_0 + \tilde{g}$. L'unicità viene dal Lemma 2.2, infatti, se fosse u' un'altra soluzione, $u' - u$ sarebbe una soluzione del problema omogeneo associato, e quindi $u' - u = 0$. □

Mostriamo ora che la coppia (v^+, v^-) (vedi Teorema 2.1 (i)) è l'unica soluzione di un problema accoppiato con dati al bordo.

Teorema 2.4 *Siano* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, $\delta \in]0,1[$. *Siano* $\Phi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$, $\phi \equiv \Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}$ *e sia* ν_ϕ *la normale esterna di* $\mathcal{I}[\phi]$.
Allora, se $f \in C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, *il problema con dati al bordo*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_\xi)v^+ = 0 & \text{in } \left(\mathcal{D}^n\left(\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)\right)\right)', \\ \mathbf{A}(\partial_\xi)v^- = 0 & \text{in } \left(\mathcal{D}^n\left(\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)\right)\right)', \\ v^+ - v^- = 0 & \text{su } \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\ (\mathbf{T}dv^+(\xi))[\nu_\phi(\xi)] - (\mathbf{T}dv^-(\xi))[\nu_\phi(\xi)] = -f \circ \phi^{(-1)}(\xi) & \forall\, \xi \in \phi\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\ v^+(\xi) = \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Gamma(\xi - \eta) f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, d\sigma_\eta & \forall \xi \in \Phi\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \\ v^-(\xi) = \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Gamma(\xi - \eta) f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, d\sigma_\eta & \forall \xi \in \Phi\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \end{cases} \tag{2.17}$$

ha un'unica soluzione $(v^+, v^-) \in C^{m,\alpha}\big(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\big) \times C^{m,\alpha}\big(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\big)$ *e sarà*

$$\begin{aligned} v^+(\xi) &= \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Gamma(\xi - \eta) f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \\ v^-(\xi) &= \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Gamma(\xi - \eta) f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Per le proprietà dei potenziali di strato elencate nel Teorema 2.1 la coppia (v^+, v^-), con v^+ e v^- definite come in (2.18), è una soluzione del problema (2.17). Dobbiamo mostrare che tale soluzione è unica.
Supponiamo che esistano due coppie di soluzioni di (2.17):

$$(v_1^+, v_1^-), (v_2^+, v_2^-) \in C^{m,\alpha}\big(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\big) \times C^{m,\alpha}\big(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\big).$$

Poniamo poi $u^+ = v_1^+ - v_2^+$ e $u^- = v_1^- - v_2^-$. Abbiamo allora $u^+ = u^-$ su $\phi(\partial\mathbb{B}_n)$, $u^+ \equiv 0$ su $\Phi((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n)$, $u^- \equiv 0$ su $\Phi((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n)$, $(\mathbf{T}du^+)[\nu_\phi] = (\mathbf{T}du^-)[\nu_\phi]$ su $\phi(\partial\mathbb{B}_n)$, $\mathbf{A}(\partial_x)u^+ \equiv 0$ in $\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)$ e $\mathbf{A}(\partial_x)u^- \equiv 0$ in $\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)$. In particolare u^+ ed u^- sono ciascuna soluzione di un problema di Drichlet interno, perciò, per il Teorema B.14, sarà $u^+ \in C^1(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n)$ ed $u^- \in C^1(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n)$.
Sia ora u la funzione definita su $\Phi(\mathbb{A}_\delta)$ che coincide con u^+ su $\Phi(\mathbb{A}_\delta^+)$ e con u^- su

$\Phi(\mathbb{A}_\delta^-)$. Allora per il Teorema A.2 e per le proprietà di u^+ e u^- appena elencate calcoliamo che, per ogni $v \in \mathcal{D}^n(\Phi(\mathbb{A}_\delta))$,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}(\partial_x)u\,,\, v\rangle &= \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta)} u\mathbf{A}(\partial_\xi)v\, d\xi \\ &= \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^+)} u^+\mathbf{A}(\partial_\xi)v\, d\xi + \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^-)} u^-\mathbf{A}(\partial_\xi)v\, d\xi \\ &= \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^+)} \mathrm{E}(v,u^+)\, d\xi + \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^-)} \mathrm{E}(v,u^-)\, d\xi \\ &= \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^+)} v\mathbf{A}(\partial_\xi)u^+\, d\xi + \int_{\Phi(\mathbb{A}_\delta^-)} v\mathbf{A}(\partial_\xi)u^-\, d\xi = 0\,,\end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{D}$ è denso in H_0^1, questo significa che $\mathbf{A}(\partial_\xi)u = 0$ in $[(\mathrm{H}_0^1(\Phi(\mathbb{A}_\delta))^n]'$. Per il Lemma 2.2 deve allora essere $u = 0$. □

Il problema (2.17) è definito su un dominio che dipende da Φ, a noi servirà trasformarlo in un problema definito su un dominio fisso: su $\mathbb{A}_\delta$. Dobbiamo per questo cambiare variabile in (2.17) tramite la funzione Φ ed abbiamo bisogno di sapere come si trasformano la normale e l'area di ipersuperfice: sarà il contenuto del prossimo Lemma 2.5. C'è però un problema. Infatti se $m = 1$ la mappa Φ è differenziabile con continuità solo una volta, dobbiamo perciò spiegare come intendiamo cambiare la variabile nell'operatore $\mathbf{A}(\partial_\xi)$ che compare in (2.17). Lo faremo nel successivo Lemma 2.6. Entrambi i lemmi sono di facile verifica.

Lemma 2.5 *Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1. Sia ν_Ω la normale esterna di $\partial\Omega$. Sia $\Phi \in C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\Omega}$ e sia ν_Φ la normale esterna di $\partial\Phi(\Omega)$. Allora:*

(i) $\nu_\Phi(\Phi(x)) = \frac{(D\Phi(x))^{-t}\nu_\Omega(x)}{|(D\Phi(x))^{-t}\nu_\Omega(x)|}$ *per ogni $x \in \partial\Omega$.*

(ii) Se $\omega \in L^1(\Phi(\partial\Omega))$, allora

$$\int_{\Phi(\partial\Omega)} \omega(\eta)\, d\sigma_\eta = \int_{\partial\Omega} \omega \circ \Phi(y)\sigma_n[\Phi](y)\, d\sigma_y,$$

dove $\sigma_n[\Phi] = |\det D\Phi||(D\Phi)^{-t}\nu_\Omega|$.

(iii) Se $u \in C^1(\mathrm{cl}\Phi(\Omega))$, $x \in \partial\Omega$, allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_\Phi}(\Phi(x)) = D(u\circ\Phi)(x)\ (D\Phi(x))^{-1}\ \frac{(D\Phi(x))^{-t}\ \nu_\Omega}{\left|(D\Phi(x))^{-t}\ \nu_\Omega\right|},$$

per ogni $x \in \partial\Omega$.

Lemma 2.6 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia*

$$\mathcal{Y}^{m-1,\alpha}(\Omega) \equiv \left\{ w = (w_{ij}) \in C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})) \;\middle|\; \int_\Omega \mathrm{tr}(w\, D\psi^t)\, dx = 0 \;\forall \psi \in \mathcal{D}^n(\Omega) \right\},$$

allora $\mathcal{Y}^{m-1,\alpha}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Sia Π_Ω la proiezione canonica di $C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ sullo spazio (di Banach) quoziente

$$\mathcal{Z}^{m-1,\alpha}(\Omega) \equiv C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})) / \mathcal{Y}^{m-1,\alpha}(\Omega).$$

Sia $A[\cdot,\cdot]$ la mappa definita da $(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\Omega}) \times C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ che a (Φ, v) associa

$$A[\Phi, v] \equiv \left(\mu Dv\,(D\Phi)^{-1}(D\Phi)^{-t} + (\mu+\lambda)\,\mathrm{tr}\left(Du\,(D\Phi)^{-1}\right)(D\Phi)^{-t}\right)|\det D\Phi|.$$

Sia (Φ, v) appartenente a $(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{A}_{\mathrm{cl}\Omega}) \times C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $f \equiv (f_{ij})$ appartenente a $C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Allora avremo

$$\Pi_\Omega A[\Phi, v] = \Pi_\Omega[f] \tag{2.19}$$

se e solo se, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$\left(\mathbf{A}(\partial_x)\left(v \circ \Phi^{(-1)}\right)\right)_i = \mathrm{div}\left\{\left(f^{(i)} \circ \Phi^{(-1)}\right)\left(D\Phi(\Phi^{(-1)})\right)^t |\det D(\Phi^{(-1)})|\right\}, \tag{2.20}$$

nel senso delle distribuzioni in $\Phi(\Omega)$, cioè in $\mathcal{D}'(\Phi(\Omega))$ ($f^{(i)}$ è la i-esima riga di f, ovvero $f^{(i)} \equiv (f_{ij})_{j=1,\ldots,n}$).

Dimostrazione. Con un semplice argomento basato sulla convoluzione con una famiglia di mollificatori si può mostrare che (2.19) è equivalente all'equazione

$$\int_\Omega \mathrm{tr}\left(A[\Phi, v]\; D(\varphi \circ \Phi)^t\right) dx = \int_\Omega \mathrm{tr}\left(f\; D(\varphi \circ \Phi)^t\right) dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^n(\Phi(\Omega)). \tag{2.21}$$

Usando le regole del cambio di variabile per gli integrali troviamo che

$$\int_\Omega \mathrm{tr}\left(A[\Phi, v]\; D(\varphi \circ \Phi)^t\right) dx = \int_{\Phi(\Omega)} \mu \mathrm{tr}\left(D(v \circ \Phi^{(-1)})\; D\varphi^t\right) + (\mu+\lambda)(\mathrm{tr}D\varphi)\left(\mathrm{tr}D(v \circ \Phi^{(-1)})\right) d\xi,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}^n(\Phi(\Omega))$ e $v \in C^1(\mathrm{cl}\Omega)$, e che

$$\int_\Omega \mathrm{tr}\left(f\; D(\varphi \circ \Phi)^t\right) dx = \int_{\Phi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\left(f \circ \Phi^{(-1)}\, D\Phi^t \circ \Phi^{(-1)}\right) D\varphi^t\right) |\det D(\Phi^{(-1)})|\, d\xi,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}^n(\Phi(\Omega))$. Possiamo allora dedurre che (2.21) è equivalente a (2.20). $\square$

Dal Teorema 2.4 e dai Lemmi 2.5, 2.6, segue immediatamente la validità del prossimo

Teorema 2.7 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, $\delta \in]0,1[$, sia $\Phi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$ e sia $f \in C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Allora la coppia (v^+, v^-) di $C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\right)$ $\times C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\right)$ è una soluzione di (2.17) se e solo se la coppia $(V^+, V^-) \equiv (v^+ \circ \Phi, v^- \circ \Phi)$ appartenente a $C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+, \mathbb{R}^n\right) \times C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-, \mathbb{R}^n\right)$ è una soluzione del seguente problema con dati al bordo*

$$\begin{cases} \Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}\left[A\left[\Phi, V^+\right]\right] = 0 & \text{in } \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \\ \Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}\left[A\left[\Phi, V^-\right]\right] = 0 & \text{in } \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \\ V^+ - V^- = 0 & \text{su } \partial\mathbb{B}_n, \\ B_1\left[V^+, V^-, \Phi\right] & \\ \qquad \equiv \mathbf{T}(D\Phi^{-t}\, dV^+)[\nu_\Phi] - \mathbf{T}(D\Phi^{-t}\, dV^-)[\nu_\Phi] = -f & \text{su } \partial\mathbb{B}_n, \\ V^+(x) = \int_{\partial\mathbb{B}_n} \Gamma\left(\Phi(x) - \Phi(y)\right) f(y) \sigma_n[\Phi](y) d\sigma_y & \forall x \in (1-\delta)\partial\mathbb{B}_n, \\ V^-(x) = \int_{\partial\mathbb{B}_n} \Gamma\left(\Phi(x) - \Phi(y)\right) f(y) \sigma_n[\Phi](y) d\sigma_y & \forall x \in (1+\delta)\partial\mathbb{B}_n, \end{cases} \tag{2.22}$$

dove $\sigma_n[\cdot]$, $A[\cdot,\cdot]$, $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}$, $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}$ sono già stati introdotti nei Lemmi 2.5, 2.6 mentre ν_Φ è definito da $\nu_\Phi \equiv \frac{(D(\Phi))^{-t}\ \nu_{\mathbb{B}_n}}{|(D(\Phi))^{-t}\ \nu_{\mathbb{B}_n}|}$.

Esattamente come volevamo il problema (2.22) è ora definito su un dominio fisso. Come annunciato nell'introduzione il prossimo passo sarà di riformulare (2.22) in un'equazione astratta in qualche spazio di Banach e di analizzarla tramite il Teorema della Funzione Implicita. Per fare questo abbiamo bisogno di verificare che le ipotesi del Teorema della Funzione Implicita sono verificate. In particolare vogliamo che i secondi membri delle ultime due equazioni di (2.22) dipendano analiticamente da Φ e da f. Questo è il contenuto del prossimo Lemma che enunciamo senza dimostrare perché lo si può ottenere ricalcando quanto già fatto da Lanza e Rossi in [LR, Lemma 3.9] per il potenziale di semplice strato relativo all'operatore Laplaciano.

Lemma 2.8 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, $\delta \in]0,1[$, $r \in [1-\delta, 1+\delta] \setminus \{1\}$ e sia $\Phi \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}$. Allora la mappa V_r di $\left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m,\alpha}(r\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ definita da*

$$V_r[\Phi, f](x) \equiv \int_{\partial\mathbb{B}_n} \Gamma\left(\Phi(x) - \Phi(y)\right) f(y) \sigma_n[\Phi](y)\, d\sigma_y \qquad \forall x \in r\partial\mathbb{B}_n,$$

per ogni $(\Phi, f) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ è reale analitica.

Il prossimo Lemma 2.9 generalizza il Lemma 2.3 e ci sarà utile nella dimostrazione del risultato principale della tesi, assieme al Lemma 2.3 servirà a mostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione per il problema linearizzato associato a (2.22). La prova si basa sull'esistenza di una soluzione regolare per il problema di Dirichlet omogeneo, esistenza che dimostreremo nell'Appendice B grazie ad un metodo di Mikhlin [M] ed al teorema di regolarità per i potenziali di strato ottenuto da Miranda (vedi [Mi, Teorema 2.I]).

Lemma 2.9 *Sia* $\alpha \in]0,1[$ *ed* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* $C^{1,\alpha}$. *Siano* $f \in C^{0,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *e* $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, *sia* $\mathrm{div}\ f \equiv \left(\mathrm{div}\ f^{(1)}, \dots \ \dots, \mathrm{div}\ f^{(n)}\right)$, *con* $f^{(i)} \equiv (f_{ij})_{j=1,\dots,n}$. *Allora esiste ed è unica* $u \in C^{1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)\, u = \mathrm{div}\ f & \text{in } [\mathcal{D}^n(\Omega)]', \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una funzione a supporto compatto tale che $\tilde{f}_{|\mathrm{cl}\Omega} = f$ (vedi Troianiello [T, Teorema 1.3]). Consideriamo la distribuzione $(\Gamma * \mathrm{div}\, \tilde{f})$, si verifica facilmente che $\mathbf{A}(\partial_x)(\Gamma * \mathrm{div}\, \tilde{f}) = \mathrm{div}\, \tilde{f}$ e

$$\Gamma * \mathrm{div}\, \tilde{f} = \mathrm{div}\,(\Gamma * \tilde{f})\,.$$

Si avrà allora $(\Gamma * \mathrm{div}\, \tilde{f}) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (vedi ad esempio Miranda [Mi, Teorema 3.II]). Poniamo $u_0 \equiv (\Gamma * \mathrm{div}\, \tilde{f})_{|\mathrm{cl}\Omega}$, la soluzione di (2.23) cercata è allora $u \equiv u_0 + w$ con w soluzione del problema di Dirichlet omogeneo con dato al bordo $g - u_{0|\partial\Omega}$, (vedi Teorema B.14). L'unicità segue con un argomento standard dal Lemma 2.2 (vedi Lemma 2.3, Dimostrazione). □

Introduciamo ora qualche notazione. Poniamo

$$v^+[\phi, f](\xi) \equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, \Gamma(\eta - \xi)\, d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \mathcal{I}[\phi],$$
$$v^-[\phi, f](\xi) \equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} f \circ \phi^{(-1)}(\eta)\, \Gamma(\eta - \xi)\, d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \mathcal{E}[\phi],$$

per ogni $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, ed $f \in C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$,

$$w^+[\phi, f](\xi) \equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Big(f \circ \phi^{(-1)}(\eta) (\mathbf{T} d\Gamma^{(j)}(\eta - \xi))[\nu_\phi(\eta)] \Big)_{j=1,\dots,n} d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \mathcal{I}[\phi],$$
$$w^-[\phi, f](\xi) \equiv \int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \Big(f \circ \phi^{(-1)}(\eta) (\mathbf{T} d\Gamma^{(j)}(\eta - \xi))[\nu_\phi(\eta)] \Big)_{j=1,\dots,n} d\sigma_\eta \quad \forall \xi \in \mathcal{E}[\phi],$$

per ogni $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, $f \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ ($\Gamma^{(j)}$ è definito come nel Teorema 2.1 (ii)). Allora, per il Teorema 2.1, sappiamo che $v^+[\phi, f]$, $w^+[\phi, f]$, e $v^-[\phi, f]$, $w^-[\phi, f]$ si possono estendere con continuità a $\mathrm{cl}\mathcal{I}[\phi]$ e a $\mathrm{cl}\mathcal{E}[\phi]$, rispettivamente. Denoteremo le estensioni corrispondenti con lo stesso simbolo delle

funzioni da estendere.
La prossima Proposizione 2.10 implicherà immediatamente il risultato principale della tesi (vedi Teorema 2.11).

Proposizione 2.10 *Siano* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, $\delta \in]0,1[$. *Allora valgono le seguenti proposizioni*

(i) *Per ogni* $(\Phi, f) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ *siano* $V^+[\Phi, f]$ *e* $V^-[\Phi, f]$ *le estensioni continue a* $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$ *ed a* $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-$ *di* $v^+[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}, f] \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^+}$ *e di* $v^-[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}, f] \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^-}$*, rispettivamente. Allora le mappe*

$$V^+ : \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+, \mathbb{R}^n\right) ,$$
$$V^- : \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-, \mathbb{R}^n\right)$$

che mandano (Φ, f) *in* $V^+[\Phi, f]$ *ed in* $V^-[\Phi, f]$*, rispettivamente, sono reali analitiche.*

(ii) *Per ogni* $(\Phi, f) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ *siano* $W^+[\Phi, f]$ *e* $W^-[\Phi, f]$ *le estensioni continue a* $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$ *ed a* $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-$ *di* $w^+[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}, f] \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^+}$ *e di* $w^-[\Phi_{|\partial\mathbb{B}_n}, f] \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^-}$*, rispettivamente. Allora le mappe*

$$W^+ : \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+, \mathbb{R}^n\right) ,$$
$$W^- : \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-, \mathbb{R}^n\right) ,$$

che mandano (Φ, f) *in* $W^+[\Phi, f]$ *ed in* $W^-[\Phi, f]$*, rispettivamente, sono reali analitiche.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima la proposizione (i).
Siano $\mathcal{X} \equiv C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{Y} \equiv C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+, \mathbb{R}^n\right) \times C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-, \mathbb{R}^n\right)$. Sia Λ l'operatore (non lineare) di $\mathcal{U} \equiv (C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{Y}$ nello spazio di Banach

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^+\right) \times \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^-\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \\ \times C^{m,\alpha}((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \times C^{m,\alpha}((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) ,\end{aligned}$$

definito da

$$\begin{aligned}\Lambda\left[\Phi, f, V^+, V^-\right] \equiv \Big(&\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}\left[A\left[\Phi, V^+\right]\right], \Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}\left[A\left[\Phi, V^-\right]\right] , \\ &V^+ - V^-, B_1\left[V^+, V^-, \Phi\right] + f, \\ &V^+_{|(1-\delta)\partial\mathbb{B}_n} - V_{1-\delta}[\Phi, f], V^-_{|(1+\delta)\partial\mathbb{B}_n} - V_{1+\delta}[\Phi, f]\Big) ,\end{aligned}$$

per ogni $(\Phi, f, V^+, V^-) \in \mathcal{U}$, dove $B_1\left[V^+, V^-, \Phi\right]$ e $V_{1\pm\delta}[\Phi, f]$ sono stati introdotti in (2.22) e nel Lemma 2.8, rispettivamante. Per il Teorema 2.7, il grafico dell'operatore $(V^+[\cdot,\cdot], V^-[\cdot,\cdot])$ di $\left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{Y}$ concide con l'insieme su cui si annulla Λ. Possiamo quindi dedurre l'analiticità reale dell'operatore $(V^+[\cdot,\cdot], V^-[\cdot,\cdot])$ mostrando che si può applicare il Teorema della Funzione Implicita per gli operatori reali analitici (vedi ad esempio Prodi ed Ambrosetti [PA, Teorema 11.6]) all'equazione $\Lambda\left[\Phi, f, V^+, V^-\right] = 0$ in un intorno di $(\Phi_1, f_1, V^+[\Phi_1, f_1], V^-[\Phi_1, f_1])$, per ogni $(\Phi_1, f_1) \in \left(C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta, \mathbb{R}^n\right) \cap \mathcal{A}'_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta}\right) \times C^{m-1,\alpha}\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)$. Il dominio $\mathcal{U}$ di Λ è chiaramente aperto in $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. Per definizione, $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}$, $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}$ sono lineari e continue. Per il Lemma 1.1 e la Proposizione 1.8, $A[\Phi, V^\pm]$ e $B_1[V^+, V^-, \Phi] + f$ dipendono in modo reale analitico da (Φ, f, V^+, V^-). Infine per il Lemma 2.8, e per la linearità e continuità della mappa di restrizione possiamo concludere che Λ è reale analitico. Sarà quindi sufficente mostrare che il differenziale $d_{(V^+,V^-)}\Lambda\left[\Phi_1, f_1, V^+[\Phi_1, f_1], V^-[\Phi_1, f_1]\right]$ è un omeomorfismo lineare. Poiché poi $d_{(V^+,V^-)}\Lambda\left[\Phi_1, f_1, V^+[\Phi_1, f_1], V^-[\Phi_1, f_1]\right]$ è continuo, per il Teorema della Mappa Aperta basterà mostrare che è una biezione, ovvero che, per ogni $(F^+, F^-, g, g_1, h^+, h^-) \in \mathcal{Z}$ esiste ed è unico $(X^+, X^-) \in \mathcal{Y}$ tale che

$$
\begin{cases}
\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}\left[A\left[\Phi_1, X^+\right]\right] = F^+ & \text{in } \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \\
\Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}\left[A\left[\Phi_1, X^-\right]\right] = F^- & \text{in } \mathcal{Z}^{m-1,\alpha}\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \\
X^+ - X^- = g & \text{su } \partial\mathbb{B}_n, \\
B_1\left[X^+, X^-, \Phi_1\right] = g_1 & \text{su } \partial\mathbb{B}_n, \\
X^+ = h^+ & \text{su } (1-\delta)\partial\mathbb{B}_n, \\
X^- = h^- & \text{su } (1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\,.
\end{cases}
\tag{2.24}
$$

Poiché $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}$ e $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}$ sono suriettivi esisteranno $f^+ \in C^{m-1,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$ e $f^- \in C^{m-1,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^-, \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$ tali che $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^+}[f^+] = F^+$ e $\Pi_{\mathbb{A}_\delta^-}[f^-] = F^-$. Poniamo $\phi_1 \equiv \Phi_{1|\partial\mathbb{B}_n}$. Cambiando variabile tramite Φ_1 (si vedano i Lemma 2.5 e 2.6), è facile mostrare che (2.24) è equivalente al seguente sistema

$$
\begin{cases}
\mathbf{A}(\partial_x)\left(X^+ \circ \Phi_1^{(-1)}\right) = \mathrm{div}\ b^+ & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)\right)\right]', \\
\mathbf{A}(\partial_x)\left(X^- \circ \Phi_1^{(-1)}\right) = \mathrm{div}\ b^- & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)\right)\right]', \\
X^+ \circ \Phi_1^{(-1)} - X^- \circ \Phi_1^{(-1)} = g \circ \Phi_1^{(-1)} & \text{su } \phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\
\mathbf{T}d(X^+ \circ \Phi_1^{(-1)})[\nu_{\phi_0}] - \mathbf{T}d(X^- \circ \Phi_1^{(-1)})[\nu_{\phi_0}] & \\
\qquad\qquad = g_1 \circ \Phi_1^{(-1)} & \text{su } \phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\
X^+ \circ \Phi_1^{(-1)} = h^+ \circ \Phi_1^{(-1)} & \text{su } \Phi_1\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \\
X^- \circ \Phi_1^{(-1)} = h^- \circ \Phi_1^{(-1)} & \text{su } \Phi_1\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right).
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

dove $\mathrm{div}\ b^\pm \equiv (\mathrm{div}\, b^{\pm\,(1)}, \dots, \mathrm{div}\, b^{\pm\,(n)})$ e, posto che sia $f^{+\,(i)} \equiv (f^+_{ij})_{j=1,\dots,n}$, $f^{-\,(i)} \equiv (f^-_{ij})_{j=1,\dots,n}$,

$$
b^{\pm\,(i)} \equiv \left\{\left(f^{\pm\,(i)} \circ \Phi_1^{(-1)}\right)\left(D\Phi_1(\Phi_1^{(-1)})\right)^t \left|\det\left(D(\Phi_1^{(-1)})\right)\right|\right\}.
$$

Proviamo l'esistenza di una soluzione per (2.25), poi l'unicità.
Sia $(F^+, F^-, g, g_1, h^+, h^-) \in \mathcal{Z}$. Per il Lemma 1.1, si vede facilmente che allora

$b^{\pm} \in C^{m-1,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^{\pm}\right), \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$, $g\circ\Phi_1^{(-1)} \in C^{m,\alpha}\left(\phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n\right)\right)$, $g_1\circ\Phi_1^{(-1)} \in C^{m-1,\alpha}\left(\phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right)\right)$, e $h^{\pm}\circ\Phi_1^{(-1)} \in C^{m,\alpha}\left(\Phi_1\left((1\mp\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \mathbb{R}^n\right)$. Per i Lemmi 2.3 e 2.9, esisteranno $a^- \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\right)$ ed $a^+ \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\right)$ tali che

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)\, a^- = \operatorname{div} b^- & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)\right)\right]', \\ a^- = h^-\circ\Phi_1^{(-1)} & \text{su } \Phi_1\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)\, a^+ = \operatorname{div} b^+ & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)\right)\right]', \\ a^+ = a^- + g\circ\Phi_1^{(-1)} & \text{su } \Phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right) = \phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\ a^+ = h^+\circ\Phi_1^{(-1)} & \text{su } \Phi_1\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \end{cases}$$

Sia $\varphi = g_1\circ\Phi_1^{(-1)} - (\mathbf{T}da^+)[\nu_{\phi_1}] + (\mathbf{T}da^-)[\nu_{\phi_1}]$, allora $\varphi \in C^{m-1,\alpha}\left(\phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \mathbb{R}^n\right)$, e, per il Teorema 2.4, $v^{\pm}\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_{\delta}^{\pm},\right), \mathbb{R}^n\right)$. Si verifica allora che il sistema (2.25) ha una soluzione $(X^+, X^-) \in \mathcal{Y}$ se e solo se il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)\, \tilde{X}^+ = 0 & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)\right)\right]', \\ \mathbf{A}(\partial_x)\, \tilde{X}^- = 0 & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)\right)\right]', \\ \tilde{X}^+ - \tilde{X}^- = 0 & \text{su } \phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\ (\mathbf{T}d\tilde{X}^+)[\nu_{\phi_1}] - (\mathbf{T}d\tilde{X}^-)[\nu_{\phi_1}] = 0 & \text{su } \phi_1\left(\partial\mathbb{B}_n\right), \\ \tilde{X}^+ = v^+\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] & \text{su } \Phi_1\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \\ \tilde{X}^- = v^-\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] & \text{su } \Phi_1\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right). \end{cases} \tag{2.26}$$

ammette una soluzione $(\tilde{X}^+, \tilde{X}^-) \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\right) \times C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\right)$, ed in tal caso vale

$$\begin{aligned} \tilde{X}^+ &= X^+\circ\Phi_1^{(-1)} - a^+ + v^+\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] \\ \tilde{X}^- &= X^-\circ\Phi_1^{(-1)} - a^- + v^-\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] \end{aligned}$$

Infine il sistema (2.26) ha soluzione

$$(\tilde{X}^+, \tilde{X}^-) \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right), \mathbb{R}^n\right) \times C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right), \mathbb{R}^n\right)$$

se e solo se esiste $\tilde{X} \in C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta\right), \mathbb{R}^n\right)$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)\, \tilde{X} = 0 & \text{in } \left[\mathcal{D}^n\left(\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta\right)\right)\right]', \\ \tilde{X} = v^+\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] & \text{su } \Phi_1\left((1-\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \\ \tilde{X} = v^-\left[\phi_1, \varphi\circ\phi_1\right] & \text{su } \Phi_1\left((1+\delta)\partial\mathbb{B}_n\right), \end{cases} \tag{2.27}$$

ed in tal caso vale $\tilde{X}_{|\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)} = \tilde{X}^+$, $\tilde{X}_{|\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)} = \tilde{X}^-$.
Infatti, se $\tilde{X}$ è una soluzione di (2.27) $(\tilde{X}_{|\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^+\right)}, \tilde{X}_{|\mathrm{cl}\Phi_1\left(\mathbb{A}_\delta^-\right)})$ è una soluzione di (2.27). Viceversa, sia $(\tilde{X}^+, \tilde{X}^-)$ una soluzione regolare di (2.26) e sia $\tilde{Y}$ la funzione definita su $\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta)$ che coincidte con $\tilde{X}^+$ su $\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta^+)$ e con $\tilde{X}^-$ su $\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta^-)$, allora è possile mostrare con un argomento che si basa sul Teorema A.2 (vedi Teorema 2.4, Dimostrazione), che $\tilde{Y}$ soddisfa le equazioni del sistema (2.27).

Per verificare che (2.26) e (2.27) sono equivalenti ci basterà allora mostrare che $\tilde{Y} \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta), \mathbb{R}^n)$. Sappiamo che, per il Teorema B.14, il problema (2.24) ammette una soluzione $\tilde{X} \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta), \mathbb{R}^n)$ e che tale soluzione è unica. $\tilde{X}$ dovrà quindi coincidere quasi ovunque con $\tilde{Y}$ (vedi Lemma 2.2). Ma allora, poichè per la terza equazione di (2.26), $\tilde{Y}$ è continua, $\tilde{X}$ dovrà coincidere identicamente con $\tilde{Y}$ e quindi $\tilde{Y} \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Phi_1(\mathbb{A}_\delta), \mathbb{R}^n)$.
Con questo si è dimostrata l'esistenza e l'unicità di una soluzione per il problema (2.24), infatti, se (2.24) avesse due soluzioni distinte così le avrebbe (2.25), (2.26), e, per quanto appena osservato, (2.27); allo stesso modo, se (2.24) non avesse soluzioni neppure le avrebbe (2.27). In entrambi i casi contradiremmo il Teorema B.14 e perciò la soluzione di (2.24) esiste ed è unica.

Ora dedurre la proposizione (ii) è facile. Possiamo limitarci a considerare $W^+[\cdot,\cdot]$, per $W^-[\cdot,\cdot]$ le cose sono del tutto analoghe. Per il Teorema 2.1 (iii) si ha $W^+[\Phi, f] = \tilde{W}^+[\Phi, f] - \tilde{V}^+[\Phi, \mathscr{M}f] + 2\mu V^+[\Phi, \mathscr{M}f]$ con $\tilde{V}^+$ estensione a $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$ di $\tilde{v} \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^+}$ e $\tilde{W}^+$ estensione a $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$ di $\tilde{w}^+ \circ \Phi_{|\mathbb{A}_\delta^+}$ (vedi [LR, Prop. 3.11]).
Sia F_R come nel Lemma 1.3 con $R \geq 1$, allora, per come è definito in (A.13), $\mathscr{M}f = \mathscr{M}(\mathrm{F}_R f)$ e la mappa di $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ in $C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ che manda f in $\mathscr{M}(\mathrm{F}_R f)$ è lineare e continua, quindi reale analitica.
Lanza e Rossi in [LR, Prop. 3.11] dimostrano la dipendenza reale analitica di $\tilde{V}^+[\Phi, f_1]$ e $\tilde{W}^+[\Phi, f_2]$ da $(\Phi, f_1) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}A_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\partial\mathbb{B}_n}\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ e da $(\Phi, f_2) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}A_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}'_{\partial\mathbb{B}_n}\right) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, rispettivamente, allora, per il punto (i) appena dimostrato, la mappa che manda

$$(\Phi, f_1, f_2) \in \left(C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}A_\delta, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}'_n}\right) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)]$$

in $\tilde{W}^+[\Phi, f_1] - \tilde{V}^+[\Phi, f_2] + 2\mu V^+[\Phi, f_2] \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, è reale analitica. Non resta che concludere ricordando che la composizione di mappe reali analitiche è reale analitica (vedi Prodi e Ambrosetti [PA, Teorema 11.1]). □

Siamo ora pronti a provare il nostro risultato principale.

Teorema 2.11 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0, 1[$. Allora sono vere le seguenti proposizioni.*

(i) La mappa $V[\cdot,\cdot]$ di $(C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ nello spazio $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ definita da (0.1) è reale analitica.

(ii) La mappa $W[\cdot,\cdot]$ di $(C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ nello spazio $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ definita da (0.2) è reale analitica.

Dimostrazione. Proviamo prima la proposizione (i). Chiaramente è sufficente mostrare che se $(\phi_0, f_0) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, allora $V[\cdot,\cdot]$ è reale analitica in un intorno di (ϕ_0, f_0). Ora, siano $\mathcal{W}_0$, δ, $\mathbf{E}_0$ come nella

Proposizione 1.8. Per il Teorema 2.1 e la (2.24) abbiamo che $V[\phi, f] = v^+[\phi, f] \circ \phi = V^+[\mathbf{E}_0[\phi], f]$ su $\partial\mathbb{B}_n$ per ogni $(\phi, f) \in \mathcal{W}_0 \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. È quindi sufficente mostrare che la coppia $(v^+[\phi, f] \circ \phi, v^-[\phi, f] \circ \phi)$ dipende in modo reale analitico da (ϕ, f) vicino a (ϕ_0, f_0), e questo è immediata conseguenza delle Proposizioni 1.8, 2.10. La proposizione (ii) si prova ora facilmente, basta osservare che $W[\phi, f] = \tilde{W}[\phi, f] - \tilde{V}[\phi, \mathscr{M}f] + 2\mu V[\phi, \mathscr{M}f]$ (Teorema 2.1 (iii)) e concludere la dipendenza reale analitica di $W[\phi, f]$ da $(\phi, f) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ grazie al punto (i) appena mostrato e a [LR, Teorema 3.12] (vedi Proposizione 2.10 (ii), Dimostrazione). □

Passiamo ora a calcolare i differenziali di V e W. Useremo un'idea di Lanza e Preciso [LP, §4]. Per chiarezza i calcoli sono stati qui riportati anche se i risultati sono stati ottenuti seguendo passo a passo quanto fatto da Lanza e Rossi in [LR, Prop. 3.14].
Introduciamo prima qualche notazione.
Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0, 1]$, $\phi \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora combinando la Proposizione 1.7 ed il Lemma 2.5, si può vedere che esiste una funzione positiva $\tilde{\sigma}_n[\phi] \in C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\phi(\partial\mathbb{B}_n)} \omega(\eta)\, d\sigma_\eta = \int_{\partial\mathbb{B}_n} \omega \circ \phi(y) \tilde{\sigma}_n[\phi](y)\, d\sigma_y \qquad \forall \omega \in L^1(\phi(\partial\mathbb{B}_n)) .$$

Poniamo

$$\tilde{\tau}_n[\phi] \equiv (\nu_\phi \circ \phi)\, \tilde{\sigma}_n[\phi] ,$$

dove ν_ϕ indica la normale esterna di $\mathbb{I}[\phi]$. Ovviamente,

$$\tilde{\sigma}_n[\phi] = |\tilde{\tau}_n[\phi]| .$$

Per la Proposizione 1.8 ed il Lemma 2.5, possiamo affermare la seguente proposizione.

Proposizione 2.12 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in]0, 1]$, allora le mappe $\tilde{\tau}_n[\cdot]$ e $\tilde{\sigma}_n[\cdot]$ di $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ in $C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, ed in $C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n)$, che mandano ϕ in $\tilde{\tau}_n[\phi]$ ed in $\tilde{\sigma}_n[\phi]$, rispettivamente, sono reali analitiche.*

Nella prossima Proposizione calcoliamo i differenziali di V e W. Poiché V e W sono lineari nella seconda variabile, è sufficente considerare il differenziale rispetto alla prima variabile ϕ.

Proposizione 2.13 *Siano $m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0, 1[$. Indichiamo con G_k il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, k\}$. Sia $d^k\Gamma(\eta)[\cdot]$ il differenziale k-esimo di Γ in $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Allora:*

(i) *Se* $(\phi_0, f_0) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, *il* k*-esimo differenziale di* $V[\cdot,\cdot]$ *in* (ϕ_0, f_0) *rispetto alla variabile* ϕ *è dato dalla formula*

$$\begin{aligned} &\partial_\phi^k V[\phi_0, f_0][h_1, \dots, h_k](x) \qquad (2.28)\\ &\quad = \int_{\partial\mathbb{B}_n} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} \sum_{\gamma \in G_k} d^j\Gamma\left(\phi_0(x) - \phi_0(y)\right)[h_{\gamma(1)}(x) - h_{\gamma(1)}(y),\\ &\qquad \dots, h_{\gamma(j)}(x) - h_{\gamma(j)}(y)] d^{k-j}\tilde{\sigma}_n[\phi_0][h_{\gamma(j+1)}, \dots, h_{\gamma(k)}] f_0(y)\, d\sigma_y\,, \end{aligned}$$

per ogni $x \in \partial\mathbb{B}_n$, *e per ogni* $(h_1, \dots, h_k) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n))^k$.

(ii) *Se* $(\phi_0, f_0) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}) \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, *allora il* k*-esimo differenziale di* $W[\cdot,\cdot]$ *in* (ϕ_0, f_0) *rispetto alla variablile* ϕ *è dato, per ogni* $x \in \partial\mathbb{B}_n$, *e per ogni* $(h_1, \dots, h_k) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n))^k$, *dalla formula*

$$\begin{aligned} \partial_\phi^k W[\phi_0, f_0][h_1, \dots, h_k](x) &= \int_{\partial\mathbb{B}_n} \sum_{j=0}^{k} \sum_{\gamma \in G_k} \frac{(f_0(y) - f_0(x))}{j!(k-j)!} \qquad (2.29)\\ &\cdot \Big(\mathbf{T}\, d\big(d^j\Gamma^{(i)}\left(\phi_0(x) - \phi_0(y)\right)[h_{\gamma(1)}(y) - h_{\gamma(1)}(x),\\ &\dots, h_{\gamma(j)}(y) - h_{\gamma(j)}(x)]\big)\Big) \left[d^{k-j}\tilde{\tau}_n[\phi_0][h_{\gamma(j+1)}, \dots, h_{\gamma(k)}]\right] d\sigma_y\,, \end{aligned}$$

dove si è posto $\Gamma^{(i)} \equiv (\Gamma_{ij})_{j=1,\dots,n}$.

Dimostrazione. Proviamo per prima la proposizione (i). Poiché le funzioni k-lineari simmetriche sono determinate dai loro valori sulla diagonale, iniziamo col calcolare $\partial_\phi^k V[\phi_0, f_0][h, \dots, h]$ per $h \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Per abbreviare le nostre notazioni scriveremo h^k invece di $\overbrace{h, \dots, h}^{k \text{ termini}}$. Per la definizione di $\tilde{\sigma}_n$ e per il calcolo standard in spazi di Banach, si ha

$$\begin{aligned} &\partial_\phi^k V[\phi_0, f_0][h^k](x) \qquad (2.30)\\ &\quad = \frac{d^k}{d\varepsilon^k}_{|\varepsilon=0} \left\{ \int_{\partial\mathbb{B}_n} \Gamma\left((\phi_0(x) - \phi_0(y)) + \varepsilon(h(x) - h(y))\right) \right.\\ &\qquad \left. \cdot\, \tilde{\sigma}_n[\phi_0 + \varepsilon h](y) f_0(y)\, d\sigma_y \right\} \qquad \forall x \in \partial\mathbb{B}_n\,, \end{aligned}$$

e vorremmo poter portare la derivata sotto il segno di integrale. Per giustificare questo passo si possono sfruttare le parametrizzazioni locali di $\partial\mathbb{B}_n$ oppure si possono estendere le funzioni che compaiono nell'integrando in un intorno di $\partial\mathbb{B}_n$. Scegliamo quest'ultimo metodo. Siano $\mathcal{W}_0$, δ, $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{E}_0$ come nella Proposizione 1.8, ed R l'operatore di restrizione definiti da $C^{m,\alpha}\left(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+\right)$ in $C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n)$. Per i Teoremi 2.1 e 2.4, si ha

$$V[\phi, f] = v^+[\phi, f] \circ \phi = R\left[v^+[\phi, f] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+}\right]$$

per ogni $(\phi, f) \in \mathcal{W}_0 \times C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Per le regole note di calcolo negli spazi di Banach e per il Lemma 2.5, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\partial^k_{|\phi=\phi_0}\left(v^+[\phi, f_0] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right)[h^k](x) \qquad (2.31)\\
&= \frac{d^k}{d\varepsilon^k}_{|\varepsilon=0}\left\{\int_{\partial\mathbb{B}_n} \Gamma\left(\mathbf{E}_0[\phi_0+\varepsilon h](x) - \mathbf{E}_0[\phi_0+\varepsilon h](y)\right)\right.\\
&\left.\qquad \cdot\, \sigma_n[\mathbf{E}_0[\phi_0+\varepsilon h]](y)\mathbf{F}_0[f_0](y)\, d\sigma_y\right\} \qquad \forall x \in \mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta\,.
\end{aligned}$$

Chiaramente la parte a destra dell'uguale in (2.30) non è altro che la restrizione a $\partial\mathbb{B}_n$ della parte a destra dell'uguale di (2.31). Osserviamo ora che, per $x \in \mathbb{A}^+_\delta$, l'integrando che compare in (2.31) non è singolare. Allora, per un risultato ben noto sulla differenziazione degli integrali dipendenti da parametri, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\partial^k_{|\phi=\phi_0}\left(v^+[\phi, f_0] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right)[h^k](x) \qquad (2.32)\\
&= \int_{\partial\mathbb{B}_n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\{d^j\Gamma\left(\mathbf{E}_0[\phi_0](x) - \mathbf{E}_0[\phi_0](y)\right)\left[(\mathbf{F}_0[h](x) - \mathbf{F}_0[h](y))^j\right]\right\}\\
&\qquad \cdot \frac{d^{k-j}}{d\varepsilon^{k-j}}_{|\varepsilon=0}\left\{\sigma_n[\mathbf{E}_0[\phi_0] + \varepsilon\mathbf{F}_0[h]](y)\right\}\mathbf{F}_0[f_0](y)\, d\sigma_y \qquad \forall x \in \mathbb{A}^+_\delta\,.
\end{aligned}$$

Per la Proposizione 1.8, e per il Lemma 2.5, la mappa $\sigma_n[\mathbf{E}_0[\cdot]]$ è reale analitica da $\mathcal{W}_0$ in $C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta)$, e perciò la funzione $\frac{d^{k-j}}{d\varepsilon^{k-j}}_{|\varepsilon=0}\left\{\sigma_n[\mathbf{E}_0[\phi_0] + \varepsilon\mathbf{F}_0[h]](y)\right\}$ è continua in $y \in \partial\mathbb{B}_n$. Si può mostrare che, per $j \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $v_1, \ldots, v_j \in \mathbb{R}^n$

$$d^j\Gamma(ty)[v_1, \ldots, v_j] = t^{2-n-j} d^j\Gamma(y)[v_1, \ldots, v_j]$$

e quindi esiste $c > 0$ tale che, per ogni $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v_1, \ldots, v_j \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&|d^j\Gamma(y)[v_1, \ldots, v_j]|\\
&\quad \leq |y|^{2-n-j} \sup_{y \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \left|d^j\Gamma\left(\frac{y}{|y|}\right)[v_1, \ldots, v_j]\right| \leq c\,|y|^{2-n-j}|v_1|\ldots|v_j|\,.
\end{aligned}$$

Per il Lemma 1.1 (ii), $\mathbf{F}_0[h]$ è Lipschitziana su $\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta$, e per la Proposizione 1.8, $l_{\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}[\mathbf{E}_0[\phi_0]] > 0$. Allora, per il Teorema di Vitali-Lebesgue, si può facilmente far vedere che il secondo membro di (2.32) dipende con continuità da $x \in \mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta$. Poiché il primo membro di (2.32) è continuo per $x \in \mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta$, possiamo affermare che

$$\begin{aligned}
&\partial^k_{|\phi=\phi_0} V[\phi_0, f_0][h^k](x) \qquad (2.33)\\
&= \int_{\partial\mathbb{B}_n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\{d^j\Gamma\left(\phi_0(x) - \phi_0(y)\right)\left[(h(x) - h(y))^j\right]\right\}\\
&\qquad \cdot \frac{d^{k-j}}{d\varepsilon^{k-j}}_{|\varepsilon=0}\left\{\tilde{\sigma}_n[\phi_0 + \varepsilon h](y)\right\} f_0(y)\, d\sigma_y \qquad \forall x \in \partial\mathbb{B}_n\,.
\end{aligned}$$

Per la (2.33), per la Lipschitzianità di $h_1, \ldots, h_n$ e per la disugualianza $l_{\partial\mathbb{B}_n}[\phi_0] > 0$, possiamo affermare che il secondo membro di (2.28), che denoteremo con $H[h_1, \ldots, h_n](x)$, definisce una forma k-lineare simmetrica su $(C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n))^k$ per ogni $x \in \partial\mathbb{B}_n$. Ovviamente, $\partial^k_{|\phi=\phi_0} V[\phi_0, f_0][h^k] = H[h^k]$ per ogni $h \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Poichè le forme k-lineari simmetriche sono univocamente determinate dai loro valori sulla diagonale, possiamo concludere la validità della proposizione (i).

Proviamo ora la proposizione (ii). È immediato osservare che, per la proposizione (iii) del Teorema 2.1 si ha,

$$\begin{aligned}\partial^k_\phi W[\phi_0, f_0][h_1, \ldots, h_k](x) &= \partial^k_\phi \tilde{W}[\phi_0, f_0][h_1, \ldots, h_k](x) \\ &-\partial^k_\phi \tilde{V}[\phi_0, \mathscr{M} f_0][h_1, \ldots, h_k](x) + 2\mu \partial^k_\phi V[\phi_0, \mathscr{M} f_0][h_1, \ldots, h_k](x)\end{aligned}$$

per ogni $x \in \partial\mathbb{B}_n$ e per ogni $(h_1, \ldots, h_k) \in (C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n))^k$. Il differenziale di V è già stato calcolato nella proposizione (i), quelli di $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ sono stati calcolati da Lanza e Rossi in [LR, Prop. 3.14]. Avremmo così ottenuto una formula esplicita per il differenziale di W ma per averla nella forma (2.29) è conveniente seguire un'altra strada. Come per la proposizione (i), calcoliamo prima $\partial^k_\phi W[\phi_0, f_0][h^k](x)$ per $h \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$, e ci mettiamo nella situazione di differenziare un integrale simile a quello di (2.30). Per affrontare questo problema notiamo che, per il Teorema 2.1 (ii) e (2.24), abbiamo

$$\begin{aligned}W[\phi, f] &= w^+[\phi, f] \circ \phi - \frac{1}{2} f = R\left[w^+[\phi, f] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta} - \mathbf{F}_0[f]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right] + \frac{1}{2} f \\ &= R\left[w^+[\phi, f] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta} - \left(w^+[\phi, \mathbf{1}_n] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right) \mathbf{F}_0[f]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right] + \frac{1}{2} f\end{aligned}$$

per ogni $(\phi, f) \in \mathcal{W}_0 \times C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Per brevità poniamo

$$\tau_n[\phi] \equiv |\det(D(\mathbf{E}_0[\phi]))| \left((D(\mathbf{E}_0[\phi]))^{-t} \nu_{\mathbb{B}_n}\right) \qquad \forall \phi \in \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}.$$

Ora possiamo provare, con lo stesso argomento usato nella dimostrazione della proposizione (i), la validità, per ogni $i = 1, \ldots, n$ della seguente

$$\begin{aligned}&\partial^k_{|\phi=\phi_0}\left(w^+_i[\phi, f] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta} - \left(w^+[\phi, \mathbf{1}_n] \circ \mathbf{E}_0[\phi]_{|\mathrm{cl}\mathbf{A}^+_\delta} \mathbf{F}_0[f]_{|\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta}\right)_i\right)[h^k](x) \\ &= -\int_{\partial\mathbb{B}_n} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\mathbf{F}_0[f_0](y) - \mathbf{F}_0[f_0](x)) \\ &\cdot \Big(\mathbf{T}\, d\Big(d^j \Gamma^{(i)}(\mathbf{E}_0[\phi_0](y) - \mathbf{E}_0[\phi_0](x)) \left[(\mathbf{F}_0[h](x) - \mathbf{F}_0[h](y))^j\right]\Big)\Big) \\ &\qquad \left[\frac{d^{k-j}}{d\varepsilon^{k-j}}_{|\varepsilon=0} \tau_n(\phi_0 + \varepsilon h)(y)\right] d\sigma_y \qquad (2.34)\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{A}^+_\delta$. Poiché la mappa di $\mathcal{W}_0$ in $C^{m-1,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$ che manda ϕ in $\tau_n[\phi]$ è reale analitica la funzione $\frac{d^{k-j}}{d\varepsilon^{k-j}}_{|\varepsilon=0}(\tau_n[\phi_0 + \varepsilon h])$ è continua su $\partial\mathbb{B}_n$. Per il Lemma 1.1 (ii), (iii), $\mathbf{F}_0[h]$ è Lipschitz continua su $\mathrm{cl}\mathbb{A}^+_\delta$, e $\mathbf{F}_0[f_0]$ è Hölder continua con esponente α su $\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$, per il Lemma 1.8 si ha $l_{\mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+}[\mathbf{E}_0[\phi_0]] > 0$; $(D(\mathbf{E}_0[\phi_0]))^{-t}\,\nu_{\mathbf{B}_n}$ è continua e limitata. Ricordando la definizione (2.4) di $\mathbf{T}$ è facile mostrare che l'integrando di (2.34) è maggiorato da $c\,|y-x|^\alpha |y-x|^{2-n-j-1}|y-x|^j = c\,|y-x|^{\alpha+1-n}$, per qualche $c > 0$. Allora, per il Teorema di Vitali-Lebesgue, si può facilmente mostrare che la parte a destra dell'uguale in (2.34) dipende con continuità da $x \in \mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$. Poiché la parte a sinistra in (2.34) è continua per $x \in \mathrm{cl}\mathbb{A}_\delta^+$, possiamo dedurre che (2.34) vale anche per $x \in \partial\mathbb{B}_n$. Lo stesso argomento implica che la parte a destra dell'uguale in (2.29) definisce una forma k-lineare simmetrica su $(C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n))^k$ per ogni $x \in \partial\mathbb{B}_n$. Non resta che concludere come già fatto nella proposizione (i). $\square$

Nella Proposizione 2.13 si vede che, per calcolare i differenziali di V, W è necessario conoscere i differenziali delle funzioni $\tilde\sigma_n[\cdot]$, $\tilde\tau_n[\cdot]$. A tal proposito riportiamo qui sotto il Lemma 2.14 ed la Proposizione 2.15 (vedi Lanza e Rossi [LR, Lemma 3.15, Prop. 3.16] per le dimostrazioni). Denoteremo con $\wedge$ il prodotto vettoriale standard di $n-1$ vettori in $\mathbb{R}^n$ (vedi ad esempio Schwartz [Sch, 22, p. 250]). Se $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ considereremo $\phi(\partial\mathbb{B}_n)$ orientata dalla normale esterna ν_ϕ, e $\partial\mathbb{B}_n$ orientatata da $\nu_{\partial\mathbb{B}_n}$. Allora diremo che ϕ ha indice 1 se ϕ preserva l'orientazione, e che ϕ ha indice -1 se ϕ cambia l'orientazione. Il prossimo Lemma formalizza le note proprietà di questo indice.

Lemma 2.14 *Sia $\{e_1,\ldots,e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $v_1(y),\ldots,v_{n-1}(y)$ una base ortonormale dello spazio $T_y\partial\mathbb{B}_n$ tangente a $\partial\mathbb{B}_n$ in y e tale che*

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbb{B}_2}(y) &= (v_1(y)\cdot e_2)e_1 - (v_1(y)\cdot e_1)e_2\,, \\ \nu_{\mathbb{B}_n}(y) &= v_1(y)\wedge\cdots\wedge v_{n-1}(y) \qquad \text{se } n>2\,, \end{aligned} \tag{2.35}$$

per ogni $y \in \partial\mathbb{B}_n$. Se $\phi \in \mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$, allora esistono $\mathrm{ind}[\phi] \in \{-1,1\}$ *tali che*

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}[\phi] &= \mathrm{sgn}\,\{\nu_\phi(\phi(y))\cdot((d\phi(y)[v_1(y)]\cdot e_2)e_1 - (d\phi(y)[v_1(y)]\cdot e_1)e_2)\} \\ &\qquad \text{se } n=2\,, \\ \mathrm{ind}[\phi] &= \mathrm{sgn}\,\{\nu_\phi(\phi(y))\cdot(d\phi(y)[v_1(y)]\wedge\cdots\wedge d\phi(y)[v_{n-1}(y)])\} \\ &\qquad \text{se } n>2\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

per ogni $y \in \partial\mathbb{B}_n$, dove si è posto $\mathrm{sgn}(t) = 1$ *per* $t>0$, $\mathrm{sgn}(t) = -1$ *per* $t<0$. *Inoltre, la funzione* $\mathrm{ind}[\cdot]$ *di $\mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$ in $\{-1,1\}$ che manda ϕ in* $\mathrm{ind}[\phi]$ *è continua.*

Proposizione 2.15 *Siano $e_1,\ldots,e_n$, e $v_1(y),\ldots,v_{n-1}(y)$ per ogni $y\in\partial\mathbb{B}_n$ come nel Lemma 2.14. Allora si avrà*

$$\begin{aligned} &\tilde\tau_2[\phi](y) = \mathrm{ind}[\phi]\,\{(d\phi(y)[v_1(y)]\cdot e_2)e_1 - (d\phi(y)[v_1(y)]\cdot e_1)e_2\} \\ e \qquad &\tilde\tau_n[\phi](y) = \mathrm{ind}[\phi]\,\{d\phi(y)[v_1(y)]\wedge\cdots\wedge d\phi(y)[v_{n-1}(y)]\} \qquad \text{se } n>2\,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

per ogni $y\in\partial\mathbb{B}_n$, e per ogni $\phi\in\mathcal{A}_{\partial\mathbb{B}_n}$.

Notiamo che i differenziali di $\tilde{\tau}_n$ di ordine $k \geq n$ sono tutti nulli, e che, per ottenere differenziali di ordine minore di k si può usare la regola di Leibniz. In particolare, per $k = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} d\tilde{\tau}_2[\phi][h](y) &= \mathrm{ind}[\phi]\left\{(dh(y)[v_1(y)] \cdot e_2)e_1 - (dh(y)[v_1(y)] \cdot e_1)e_2\right\} \\ d\tilde{\tau}_n[\phi][h](y) &= \mathrm{ind}[\phi]\left\{dh(y)[v_1(y)] \wedge d\phi(y)[v_2(y)] \wedge \cdots \wedge d\phi(y)[v_{n-1}(y)] + \dots\right. \\ &\quad \left.\cdots + d\phi(y)[v_1(y)] \wedge \cdots \wedge d\phi(y)[v_{n-2}(y)] \wedge dh(y)[v_{n-1}(y)]\right\} \qquad \text{se } n > 2\,, \end{aligned}$$

per ogni $h \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$. Infine, notiamo che

$$d\tilde{\sigma}_n[\phi][h] = (\nu_\phi \circ \phi) \cdot d\tilde{\tau}_n[\phi][h]$$

per ogni $h \in C^{m,\alpha}(\partial\mathbb{B}_n, \mathbb{R}^n)$.

Appendice A

Teoria del potenziale per le equazioni dell'elastostatica

In questa appendice introdurremo i potenziali elastici di semplice e doppio strato tramite una formula di rappresentazione per ogni $u \in C^2(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dimostreremo poi le proprietà di regolarità Hölderiana del potenziale di strato semplice e quindi, grazie ad una importante formula che lega il potenziale di strato doppio al potenziale di strato semplice e ai potenziali relativi all'operatore di Laplace (vedi Teorema A.11), mostreremo la regolarità interna ed esterna del potenziale di doppio strato e ne calcoleremo la discontinuità al bordo. Ricaveremo poi la formula (A.28) che servirà ad impostare in modo corretto il problema accoppiato con dati al bordo utilizzato nella parte principale della Tesi (vedi Teorema 2.4). Molta importanza avrà anche il Teorema A.2, una specie di Formula di Green-Stokes per l'operatore dell'elastostatica.

Teorema A.1 *Siano, per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ e per ogni scelta possibile di costanti di Lamé μ e λ (vedi Teorema A.2),*

$$\Gamma_{ij}(\xi) \equiv \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\delta_{ij}S_n(\xi) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\frac{1}{\sigma_n}\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^n} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{A.1}$$

allora $\mathbf{A}(\partial_x)\Gamma = \delta_0 \mathbf{1}_n$ in $(\mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n))'$, dove δ_0 è la distribuzione delta di Dirac.

Dimostrazione. Siano, per ogni $j = 1, \ldots, n$, $\psi^{(j)} = \frac{1}{\mu}(0, \ldots, 0, S_n, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{\mu}(\delta_{ij}S_n)_{i=1,\ldots,n}$ e $\Gamma^{(j)} \equiv \psi^{(j)} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\nabla(x \cdot \psi^{(j)})$, con un facile calcolo si verifica che $\mathbf{A}(\partial_x)\Gamma^{(j)} = (\delta_{ij}\delta_0)_{i=1,\ldots,n}$ (vedi Villaggio [Vi, §1, 3.4, p. 53]). Poniamo, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, $\Gamma_{ij} \equiv \Gamma_i^{(j)}$, Γ è allora la funzione cercata. $\square$

La dimostrazione per $n = 3$ del seguente Teorema la si può trovare in [KGBB, III, Teorema 1.1, p. 110], è immediato trasformarla in una dimostrazione che funziona per n qualsiasi.

Teorema A.2 *Siano* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* C^1, $u \in C^1(\mathrm{cl}\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $\mathbf{A}(\partial_x)u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \in C^1(\mathrm{cl}\Omega)$. *Allora*

$$\int_\Omega v\mathbf{A}\,(\partial_x)\,u + \mathrm{E}(v,u)\ dx = \int_{\partial\Omega} v\,(\mathbf{T}du)[\nu(y)]\ d\sigma_y, \tag{A.2}$$

dove $\mathrm{E} : C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \times C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \to C^0(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ *definito da*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(v,u) \equiv \frac{2\mu + n\lambda}{n}\operatorname{div} v\ \operatorname{div} u &+ \frac{\mu}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &+ \frac{\mu}{n}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right),\end{aligned} \tag{A.3}$$

per ogni $(v,u) \in C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \times C^1(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$, *è continuo, lineare, simmetrico e, poiché* μ *e* λ *soddisfano le condizioni (2.2)* ($\mu > 0$ *e* $2\mu + n\lambda > 0$) *positivo, ovvero* $\mathrm{E}(u,u)(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathrm{cl}\Omega$ *e per ogni* $u \in C^1(\mathrm{cl}\Omega)$ [1].

Dimostrazione.(*Traccia*) Basta osservare che, nelle ipotesi del Teorema,

$$v\mathbf{A}(\partial_x)u + \mathrm{E}(v,u) = \operatorname{div}\bigl(v\,\mathscr{T}(u)\bigr)\,,$$

con $\mathscr{T}(u) \equiv \lambda(\operatorname{div} u)\mathbf{1}_n + \mu(Du + Du^t)$ e quindi $\operatorname{div}(v\mathscr{T}(u)) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Con un argomento basato sulla convoluzione con una famiglia di mollificatori e sul Teorema della Divergenza, possiamo allora concludere la dimostrazione. □

Dal Teorema A.2 seguono immediatamente i seguenti Corollari A.3 e A.4 .il

Corollario A.3 *Sia* $x \in \mathbb{R}^n$ *ed* Ω *un intorno di* x *in* $\mathbb{R}^n$, *sia* $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e* $\mathrm{E}(v,v)(x) = 0$. *Allora, per ogni* $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mathrm{E}(v,u)(x) = 0$.

Corollario A.4 *Siano* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* C^1, $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \cap C^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega)$, $\mathbf{A}(\partial_x)u \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \mathbb{R}^n)$, $v \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ *e, per ogni* $j = 1, \ldots, n$,

$$\left|v(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right| \in o\Bigl(\frac{1}{|x|^{n-1}}\Bigr)\,,$$

per $|x|$ *in un intorno di* ∞. *Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} v\mathbf{A}\,(\partial_x)\,u + \mathrm{E}(v,u)\ dx = -\int_{\partial\Omega} v\,(\mathbf{T}du)[\nu(y)]\ d\sigma_y,$$

Dimostrazione. La dimostrazione del primo Corollario si ottiene facilmente dalla definizione (A.3), per il secondo notiamo che, se $R > 0$ e $\mathrm{cl}\Omega \subset \mathbb{B}_n(0,R)$, allora

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n(0,R)\setminus\Omega} v\mathbf{A}\,(\partial_x)\,u + \mathrm{E}(v,u)\ dx \\ &\quad= \int_{\partial\mathbb{B}_n(0,R)} v\,(\mathbf{T}du)[\nu_{\mathbb{B}_n(0,R)}(y)]\ d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} v\,(\mathbf{T}du)[\nu_\Omega(y)]\ d\sigma_y,\end{aligned}$$

[1] Vedi ad esempio Villaggio [Vi, 1, §2], Kupradze [KGBB, I, §6] per il significato fisico.

ed il modulo del primo integrale a secondo membro tende a 0 per R tendente a infinito. $\square$

Come annunciato proveremo ora una formula di rappresentazione per ogni funzione u sufficentemente regolare su clΩ, in essa compaiono entrambi i potenziali elastici di semplice e doppio strato ed è evidente l'analogia con la formula di rappresentazione di Green per l'operatore Laplaciano (vedi ad esempio Gilbarg e Trudinger [GT, §2.4]). Qui e nel seguito dell'Appendice indicheremo con $\Gamma^{(i)}$ la i-esima riga di Γ, ovvero, $\Gamma^{(i)} \equiv (\Gamma_{ij})_{j=1,\dots,n}$.

Proposizione A.5 *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1 e $u \in C^1(\mathrm{cl}\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $\mathbf{A}(\partial_x)u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora, per ogni $x \in \Omega$,*

$$
\begin{aligned}
u(x) = & \int_\Omega \Gamma(y-x)\ \mathbf{A}(\partial_y)u(y)\ dy \\
& + \left(\int_{\partial\Omega} u(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]\ d\sigma_y \right)_{i=1,\dots,n} \\
& - \int_{\partial\Omega} \Gamma(y-x)\ (\mathbf{T}du(y))[\nu(y)]\ d\sigma_y\ .
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Dimostrazione. Con una semplice applicazione del Teorema A.2 si vede che, per ogni $x \in \Omega$, per ogni $i = 1, \dots, n$ e per $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u(y)\ \mathbf{A}(\partial_y)\Gamma^{(i)}(y-x) - \Gamma^{(i)}(y-x)\ \mathbf{A}(\partial_y)u(y)\, dy \\
& \quad = \int_{\partial\Omega} u(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_\Omega(y)]\ -\ \Gamma^{(i)}(y-x)\ (\mathbf{T}du(y))[\nu_\Omega(y)]\, d\sigma_y \\
& \quad - \int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_{\mathbb{B}_n}(y)]\ -\ \Gamma^{(i)}(y-x)\ (\mathbf{T}du(y))[\nu_{\mathbb{B}_n}(y)]\, d\sigma_y\ ,
\end{aligned}
$$

dove ν_Ω e $\nu_{\mathbb{B}_n}$ sono la normale esterna di Ω e di $\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)$, rispettivamente.
Si verifica facilmente che

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} \Gamma^{(i)}(y-x)\ (\mathbf{T}du(y))[\nu_{\mathbb{B}_n}(y)]\, d\sigma_y = 0
$$

e quindi, passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \Gamma^{(i)}(y-x)\ \mathbf{A}(\partial_y)u(y)\, dy \\
& \quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_{\mathbb{B}_n}(y)]\, d\sigma_y \\
& \quad - \int_{\partial\Omega} u(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_\Omega(y)] -\ \Gamma^{(i)}(y-x)\ (\mathbf{T}du(y))[\nu_\Omega(y)]\, d\sigma_y\ ,
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Per avere la (A.4) basterà allora verificare che, per ogni $x \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u(y)\ (\mathbf{T} d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_{\mathbb{B}_n}(y)]\ d\sigma_y = u_i(x).$$

Notiamo che, per ogni vettore $\nu \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, e per ogni $i, k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}(2\mu+\lambda)&\Big(\mathbf{T} d\Gamma^{(i)}(y-x)[\nu]\Big)_k \\ &= \frac{1}{\sigma_n}\mu\frac{\nu_i(y-x)_k - \nu_k(y-x)_i}{|y-x|^n} + \left\{n(\mu+\lambda)\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^2} + \mu\delta_{ik}\right\}\frac{\partial}{\partial\nu}S_n,\end{aligned} \tag{A.6}$$

ed il termine a destra dell'uguale per $\nu = \nu_{\mathbb{B}_n(y)} = \frac{y-x}{|y-x|}$ diventa

$$\frac{n}{\sigma_n}(\mu+\lambda)\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n-1}} + \mu\delta_{ik}\frac{\partial}{\partial\nu}S_n.$$

Occupiamoci del primo addendo: per la continuità di u e poiché, per ogni $y \in \mathbb{B}_n(x,\varepsilon)$,

$$\left|\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\right| \leq \varepsilon^{n-1}\,,$$

possiamo mostrare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u_k(y)\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y = \lim_{\varepsilon\to 0} u_k(x)\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)}\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y$$

Per alcune facili considerazioni che si possono fare sulla simmetria dell'integrado, mostrare poi che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_n} u_k(x) &\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)}\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y \\ &= \sum_{k=1}^n u_k(x)\frac{1}{|\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)|}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)}(\nu_{\mathbb{B}_n})_i(y)\ (\nu_{\mathbb{B}_n})_k(y)\ d\sigma_y \\ &= u_i(x)\frac{1}{|\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)|}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)}|(\nu_{\mathbb{B}_n})_i(y)|^2\ d\sigma_y = \frac{1}{n}u_i(x).\end{aligned}$$

Sarà perciò, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n}{\sigma_n}(\mu+\lambda)\sum_{k=1}^n\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u_k(y)\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y = (\mu+\lambda)\ u_i(x)$$

e, poiché sappiamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,\varepsilon)} u_i(y)\frac{\partial}{\partial\nu}S_n\ d\sigma_y = \mu\ u_i(x)$$

(vedi ad esempio Gilbarg e Trudinger [GT, §2.4]) non resta che concludere inserendo nella (A.5) i risultati ottenuti. $\square$

Sia Ω un aperto C^1 di $\mathbb{R}^n$, diremo *potenziale elastico di semplice strato di densità* φ *e supporto* $\partial\Omega$ la mappa definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ da

$$v[\varphi](x) \equiv \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\Gamma(y-x)\ d\sigma_y \tag{A.7}$$

e diremo *potenziale elastico di doppio strato di densità* φ *e supporto* $\partial\Omega$ la mappa di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (vedi Teorema A.7) e per ogni $i = 1, \ldots, n$ da

$$w_i[\varphi](x) \equiv \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu_\Omega(y)]\ d\sigma_y. \tag{A.8}$$

Teorema A.6 *Siano* $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, Ω *un aperto di classe* $C^{m,\alpha}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$*. Allora, se* $v[\varphi]$ *è definita come in (A.7),* $v[\varphi]$ *è continua su tutto* $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}(\partial_x)v[\varphi] \equiv 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$*, la funzione* $v^+ \equiv v[\varphi]_{|\mathrm{cl}\Omega}$ *appartiene a* $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e la funzione* $v^- \equiv v[\varphi]_{|\mathbb{R}^n\setminus\Omega}$ *appartiene a* $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\mathbb{B}_n(0,R)\setminus\Omega, \mathbb{R}^n)$ *per tutti gli* $R > 0$ *tali che* $\mathrm{cl}\Omega \subseteq \mathbb{B}_n(0,R)$.

Dimostrazione. La dimostrazione della continuità di $v[\varphi]$ è del tutto simile a quella della continuità del potenziale di semplice strato relativo all'operatore Laplaciano (vedi Cialdea [C, Teorema 14]).
Si tratta essenzialmente di osservare che, scelto un opportuno intorno $\mathcal{U}$ di x in $\mathbb{R}^n$, la famiglia di funzioni $\{\partial\Omega \cap \mathcal{U} \ni y \mapsto \varphi(y)\Gamma(y-x') \in \mathbb{R}^n\}_{x'\in\mathcal{U}}$ è uniformamente integrabile e quindi applicare il Teorema di Vitali-Lebesgue.
Osserviamo poi che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$ e per ogni t reale,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(tx) = \frac{1}{t^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x)$$

e che, per ogni iperpiano Π passante per l'origine,

$$\int_{\Pi\cap\partial\mathbb{B}_n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x)\ d\sigma_{n-1}(x) = 0.$$

Grazie ad un teorema ottenuto da Miranda (vedi [Mi, Teorema 2.I]), possiamo allora affermare che $(\frac{\partial}{\partial x_i}v[\varphi])_{|\Omega}$ si estende ad una funzione $(\frac{\partial}{\partial x_i}v[\varphi])^+ \in C^{m-1,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $(\frac{\partial}{\partial x_i}v[\varphi])_{|\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{cl}\Omega}$ si estende a $(\frac{\partial}{\partial x_i}v[\varphi])^+ \in C^{m-1,\alpha}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega, \mathbb{R}^n)$. Con questo è facile concludere la dimostrazione. $\square$

Introduciamo ora alune notazioni che ci saranno molto utili nel seguito. Siano $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $\alpha \in]0,1]$, sia Ω è un aperto di classe $C^{m,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \partial\Omega$ Diremo che $C(x, R, r, \delta)$ è un *cilindro coordinato attorno ad* x e che γ è la *funzione ad esso associata* se $R \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale (cioè una rotazione), r e δ sono reali positivi, $C(x,R,r,\delta) \equiv x + R^t\,(\mathbb{B}_{n-1}(0,r)\times]-\delta,\delta[)$, $\gamma \in C^{m,\alpha}(\mathbb{B}_{n-1}(0,r),]-\delta,\delta[)$ e valgono le seguenti

$$C(x,R,r,\delta) \cap \Omega = x + R^t\big\{(\eta,y) \in \mathbb{B}_{n-1}(0,r)\times]-\delta,\delta[\mid y > \gamma(\eta)\big\},$$
$$C(x,R,r,\delta) \cap \partial\Omega = x + R^t\big\{(\eta,y) \in \mathbb{B}_{n-1}(0,r)\times]-\delta,\delta[\mid y = \gamma(\eta)\big\},$$
$$\gamma(0) = 0\,, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_i}(0) = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n\ .$$

È facile verificare per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un cilindro coordinato e che, se $C(x,R,r,\delta)$ è un cilindro coordinato attorno ad x e γ è la funzione ad esso associata, la funzione ψ che manda $\eta \in \mathbb{B}_{n-1}(0,r)$ in $x + R^t(\eta,\gamma(\eta))$ è una parametrizzazione di $\partial\Omega$ in un intorno di x e che $\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}}\,R^t(\nabla\gamma(\eta),-1)$ è la normale esterna ad Ω in $\psi(\eta)$.

Teorema A.7 *Siano $\alpha \in]0,1]$, Ω un aperto $C^{1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Allora, per ogni $x \in \partial\Omega$, $i = 1,\ldots,n$ esiste l'integrale singolare*

$$\int^*_{\partial\Omega} \varphi(y)\ \Big(\mathbf{T} d\Gamma^{(i)}(y-x)\Big)\,[\nu(y)]\ d\sigma_y\ . \tag{A.9}$$

Dimostrazione. Chiameremo, per ogni $x, y \in \partial\Omega$, $x \neq y$, e per ogni $i, k = 1,\ldots,n$,

$$\Gamma^a_{ik}(x,y) = \frac{\nu_i(y)(y-x)_k}{|y-x|^n},$$
$$\Gamma^b_{ik}(x,y) = \frac{\nu_k(y)(y-x)_i}{|y-x|^n},$$
$$\Gamma^c_{ik} = \delta_{ik}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x),$$
$$\Gamma^d_{ik}(x,y) = \frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^2}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x),$$

allora, ricordando la (A.6), si avrà

$$\begin{aligned}(2\mu+\lambda)&\Big((\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]\Big)_k\\ &= \frac{\mu}{\sigma_n}\Big[\Gamma^a_{ik}(x,y) - \Gamma^b_{ik}(x,y)\Big] + \mu\Gamma^c_{ik}(x,y) + n(\mu+\lambda)\Gamma^d_{ik}(x,y)\ .\end{aligned}$$

Per prima cosa mostriamo che, per ogni $i, k = 1,\ldots,n$ esiste l'integrale singolare $\int^*_{\partial\Omega}\varphi_k(y)\Gamma^a_{ik}(x,y)\ d\sigma_y$. A tal scopo osserviamo che, se $C(x,R,r,\delta)$ è un cilindro coordinato attorno ad x e γ è la funzione ad esso associata,

$$\begin{aligned}&\int_{C(x,R,r,\delta)\cap\partial\Omega} \frac{(y-x)_i}{|y-x|^n}\ d\sigma_y\\ &\quad= \int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{\big(R^t(\eta,\gamma(\eta))\big)_i}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\ d\eta\\ &\quad= \int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{R_{1i}\ \eta_1 + \cdots + R_{(n-1)i}\ \eta_{n-1} + R_{ni}\ \gamma(\eta)}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\ d\eta\ .\end{aligned}$$

È immediato verificare che esiste $c > 0$ tale che

$$|\gamma(\eta)|\,|(\eta,\gamma(\eta))|^{-n}\,\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\;\leq c|\eta|^{\alpha+1-n}\,,$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,\varepsilon)}\frac{R_{ni}\;\gamma(\eta)}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\;d\eta = 0\;.$$

Invece, per vedere che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,\varepsilon)}\frac{R_{ji}\;\eta_j}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\;d\eta = 0\;,$$

si deve usare la *quasi disparità* dell'integrando e scrivere,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,\varepsilon)}\frac{\eta_j}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\;d\eta\\&\quad=\int_{\substack{\mathbb{B}_{n-1}(0,\varepsilon)\\ \eta_j\geq 0}}\eta_j\left(\frac{\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}}{|(\eta,\gamma(\eta))|^n}-\frac{\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta')|^2}}{|(\eta',\gamma(\eta'))|^n}\right)\;d\eta\;,\end{aligned}$$

dove $\eta' = (\eta_1,\ldots,\eta_{j-1},-\eta_j,\eta_{j+1},\ldots,\eta_{n-1})$; l'ultimo integrando è maggiorato da un multiplo di $|\eta|^{\alpha+1-n}$ e perciò l'integrale va a 0 per ε piccolo. Per concludere questo primo punto non resta che ricordare che $\nu\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ e quindi $\varphi_k\nu_k\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, ma allora, per Cialdea [C, Teorema 24], l'esistenza dell'integrale singolare $\int^*_{\partial\Omega}\varphi_k(y)\Gamma^a_{ik}(x,y)\;d\sigma_y$ è provata.
L'estenza di $\int^*_{\partial\Omega}\varphi_k(y)\Gamma^b_{ik}(x,y)\;d\sigma_y$ si mostra in modo del tutto analogo. Per Γ^c e Γ^d dobbiamo invece osservare che, per [C, Teorema 7], $\varphi_k(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x)\in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$ e, poiché poi $\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^2}\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$, si avrà anche $\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^2}\varphi_k(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x)\in \mathrm{L}^1(\partial\Omega)$. □

Introduciamo ora due operatori tangenziali che saranno utili nel seguito: $\mathscr{D}_j$ e $\mathscr{M}_{ij}$. Si potrà pensare al primo come ad una derivata parziale tangente, mentre il secondo sarà facilmente associato ad una forma esatta. Sia dunque Ω un aperto C^1 di $\mathbb{R}^n$, ν la normale esterna di Ω e ψ una mappa C^1 definita in un intorno di $\partial\Omega$, allora, per ogni $y\in\partial\Omega$ e per ogni $i,j=1,\ldots,n$, saranno

$$\mathscr{D}_j(\partial_y,\nu(y))\psi(y) = \frac{\partial}{\partial y_j}\psi(y)-\nu_j(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\psi(y)\;, \tag{A.10}$$

$$\mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))\psi(y) = \nu_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\psi(y)-\nu_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\psi(y)\;. \tag{A.11}$$

Se poi $\varphi\in C^1(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ e $\psi\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ è un'estensione di φ (che esiste per il Lemma 1.3) si definiscono, per ogni $y\in\partial\Omega$ e per ogni $i,j=1,\ldots,n$,

$$\mathscr{D}_j(\partial_y,\nu(y))\phi(y) = \mathscr{D}_j(\partial_y,\nu(y))\psi(y)\;, \tag{A.12}$$

$$\mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))\phi(y) = \mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))\psi(y). \tag{A.13}$$

Notiamo che $\mathscr{D}_j(\partial_y, \nu(y))\phi(y)$ risulta indipendente dall'estensione ψ scelta per φ, infatti: se $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $v_j(y) \equiv e_j - \nu_j(y)\nu(y)$, allora $v_j(y)$ è tangente a $\partial\Omega$ in y e $\mathscr{D}_j(\partial_y, \nu(y))\psi(y) = \frac{\partial}{\partial v_j(y)}\psi(y)$, usando un opportuno sistema di coordinate locali per $\partial\Omega$ in un intorno di y è facile mostrare che quest'ultima derivata dipende solo da φ.
Ora, $\mathscr{D}_j$ e $\mathscr{M}_{ij}$ sono legati fra loro da queste relazioni

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y)) &= \nu_j(v)\mathscr{D}_i(\partial_y, \nu(y)) - \nu_i(y)\mathscr{D}_j(\partial_y, \nu(y)) \ , \\ \mathscr{D}_j(\partial_y, \nu(y)) &= \sum_{i=1}^{n} \nu_i(y)\mathscr{M}_{ji}(\partial_y, \nu(y)) \ ,\end{aligned}$$

e quindi anche la definizione di $\mathscr{M}_{ij}$ non dipende dall'estensione scelta per φ.

Lemma A.8 *Se Ω è un aperto C^1 di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ allora, per ogni $i, j = 1, \dots$ $\dots, n$,*

$$\int_{\partial\Omega} \mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))\varphi(y) \ d\sigma_y = 0 \ .$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))\varphi(y) \ d\sigma_y$ è il differenziale esterno della $(n-2)$-forma $(-1)^{i+j}\varphi(y)dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$ e quindi, poiché $\partial\Omega$ non ha bordo, concludere con il Teorema di Stokes. □

Teorema A.9 *Sia $\alpha \in]0, 1]$, Ω un aperto $C^{1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$, allora, per ogni $i, k = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{\partial\Omega}^{*} \mathscr{M}_{ik}(\partial_y, \nu(y)) \left(S_n(y - x)\varphi(y)\right) \ d\sigma_y = 0 \, , \tag{A.14}$$

$$\int_{\partial\Omega}^{*} \sum_{j=1}^{n} \mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y)) \left(\Gamma_{jk}(y - x)\varphi(y)\right) \ d\sigma_y = 0 \ . \tag{A.15}$$

Dimostrazione. Per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ l'enunciato è immediata conseguenza del Lemma A.8. Sia dunque $x \in \partial\Omega$ e siano $i, k = 1, \dots, n$ ed $r > 0$. Allora, poiché l'enunciato del Lemma A.8 rimane vero se Ω è un aperto con frontiera di classe C^1 a pezzi (vedi De Marco [DM, VII, §12]), per r sufficentemente piccolo si avrà,

$$\int_{\partial(\Omega \cup \mathbb{B}_n(x,r))} \mathscr{M}_{ik}(\partial_y, \nu(y)) \left(K(y - x)\varphi(y)\right) \ d\sigma_y = 0 \ ,$$

(dove K stà per S_n o Γ_{jk}) e perciò, se proveremo che

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r) \setminus \Omega} \mathscr{M}_{ik}(\partial_y, \nu(y)) \left(S_n(y - x)\varphi(y)\right) \ d\sigma_y = 0 \tag{A.16}$$

e

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))\left(\Gamma_{jk}(y-x)\varphi(y)\right)\ d\sigma_y = 0\ , \tag{A.17}$$

potremo concludere che anche

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\Omega\setminus\mathbb{B}_n(x,r)}\mathscr{M}_{ik}(\partial_y,\nu(y))\left(S_n(y-x)\varphi(y)\right)\ d\sigma_y = 0$$

e

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\Omega\setminus\mathbb{B}_n(x,r)}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))\left(\Gamma_{jk}(y-x)\varphi(y)\right)\ d\sigma_y = 0\ ,$$

e con questo completare la dimostrazione del teorema.
Proviamo allora (A.16) e (A.17), per brevità nel seguito scriveremo $\mathscr{M}_{ij}$ invece di $\mathscr{M}_{ij}(\partial_y,\nu(y))$. Per prima cosa osserviamo che

$$\mathscr{M}_{ik}\left(K(y-x)\varphi(y)\right) = \mathscr{M}_{ik}(K(y-x))\ \varphi(y) + K(y-x)\ \mathscr{M}_{ik}\varphi(y)$$

e

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}K(y-x)\mathscr{M}_{ik}\varphi(y)\ d\sigma_y = 0$$

perché, se r è sufficentemente piccolo esisterà $c>0$ tale che

$$\begin{aligned}|K(y-x)| &\le c|y-x|^{n-2} \quad \text{se } n\ge 3\,,\\ |K(y-x)| &\le c\,|\log|y-x|| \quad \text{se } n=2\,,\end{aligned}$$

per ogni $y\in\partial\mathbb{B}_n(x,r)$ e quindi esisterà $c'>0$ tale che

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}|K(y-x)\mathscr{M}_{ik}\varphi(y)|\ d\sigma_y &\le c'r \quad \text{se } n\ge 3\,,\\ \int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}|K(y-x)\mathscr{M}_{ik}\varphi(y)|\ d\sigma_y &\le c'r\log(r) \quad \text{se } n=2\,.\end{aligned}$$

Sarà così sufficente mostrare che

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}\mathscr{M}_{ik}\left(S_n(y-x)\right)\ \varphi(y)\ d\sigma_y = 0 \tag{A.18}$$

e

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)\ \varphi(y)\ d\sigma_y = 0\ , \tag{A.19}$$

ma la (A.18) è immediata perché, per $y\in\partial\mathbb{B}_n(x,r)$, $\mathscr{M}_{ik}(\partial_y,\nu(y))S_n(y-x) = \mathscr{M}_{ik}(\partial_y,\frac{y-x}{|y-x|})S_n(y-x)$ si annulla identicamente. Sia

$$\partial\mathbb{B}_n^+(x,r) = \left\{y\in\partial\mathbb{B}_n(x,r)\ \middle|\ \nu_\Omega(x)\cdot(y-x)>0\right\}$$

la semisfera rivolta verso l'esterno di Ω. Il prossimo passo sarà mostrare che (A.19) equivale a

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)\ \varphi(y)\ d\sigma_y = 0\ . \tag{A.20}$$

Per farlo osserviamo che, essendo φ continua e $|\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)| \in O(|y-x|^{1-n})$, per $|y-x|$ tendente a 0, si avrà

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega} &\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)\ \varphi(y)\ d\sigma_y\\ &= \lim_{r\to 0}\varphi(x)\int_{\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega}\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)\ d\sigma_y\ ,\end{aligned}$$

e quest'ultimo limite, per r piccolo, coincide con il corrispondente limite dell'integrale sulla semisfera $\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)$. Infatti, se $\triangle$ è la differenza simmetrica di insiemi, esiste sicuramente $c>0$ tale che

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)\triangle(\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega)} &|\mathscr{M}_{ij}\left(\Gamma_{jk}(y-x)\right)|\ d\sigma_y\\ &\le \frac{c}{r^{n-1}}\left|\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)\triangle(\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega)\right|\ .\end{aligned} \tag{A.21}$$

Per la regolarità $C^{1,\alpha}$ di $\partial\Omega$ si calcola $|\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)\triangle(\partial\mathbb{B}_n(x,r)\setminus\Omega)| \le c' r^{n-1+\alpha}$, con c' reale positivo, e quindi il termine a destra dell'uguale in (A.21) è minore od uguale a $c'' r^{\alpha}$, per qualche $c''>0$.
Non resta che verificare (A.20): notiamo che per la (A.1) possiamo concentrarci su

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)}\sum_{j=1}^{n}\mathscr{M}_{ij}\left(\frac{(y-x)_j(y-x)_k}{|y-x|^n}\right)\ d\sigma_y\ ,$$

ovvero su

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)} &\frac{\delta_{ik}}{|y-x|^{n-1}} - n\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y\\ &= \frac{\sigma_n}{2}\delta_{ik} - n\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)}\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y\ .\end{aligned} \tag{A.22}$$

Sia $C(x,R,r',\delta)$ un cilindro coordinato attorno ad x con $r'>r$, allora $\partial\mathbb{B}_n^+(x,r) = x + R^t\left\{(\eta,\eta_n)\in\partial\mathbb{B}_n(0,r)\mid \eta_n>0\right\}$ (qui $\eta\equiv(\eta_1,\dots,\eta_{n-1})$), e quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)} &\frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\ d\sigma_y\\ &= \int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)}\frac{\left(R^t\left(\eta,\sqrt{r^2-|\eta|^2}\right)\right)_i\left(R^t\left(\eta,\sqrt{r^2-|\eta|^2}\right)\right)_k}{r^{n+1}}\frac{r}{\sqrt{r^2-|\eta|^2}}\ d\eta\\ &= \sum_{l=1}^{n-1}\frac{R_{li}R_{lk}}{r^n}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)}\frac{\eta_l^2}{\sqrt{r^2-|\eta|^2}}\ d\eta\ +\ \frac{R_{ni}R_{nk}}{r^n}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)}\sqrt{r^2-|\eta|^2}\ d\eta\ ,\end{aligned} \tag{A.23}$$

(per ottenere quest'ultima ugualianza basta osservare che tutti i termini dispari si annullano per simmetria). Per calcolare gli ultimi due integrali che compaiono in (A.23) ci servirà aver osservarato che:

$$\frac{\sigma_n}{2} = \int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\, d\eta = \sigma_{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sigma_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\vartheta \, d\vartheta \ .$$

Si trova così

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{\eta_l^2}{\sqrt{r^2-|\eta|^2}}\, d\eta &= \frac{1}{n-1}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{|\eta|^2}{\sqrt{r^2-|\eta|^2}}\, d\eta = \\ &= \frac{r^n}{n-1}\sigma_{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{r^n}{n-1}\sigma_{n-1}\int_o^{\pi/2} \sin^n\vartheta \, d\vartheta = \frac{r^n}{n}\frac{\sigma_n}{2}\ ,\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \sqrt{r^2-|\eta|^2}\, d\eta = r^n\sigma_{n-1}\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{r^n}{n}\frac{\sigma_n}{2}\ .$$

Sostituendo questi risultati in (A.23) e ricordando che $R^tR = \mathbf{1}_n$ si ottiene

$$\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)} \frac{(y-x)_i(y-x)_k}{|y-x|^{n+1}}\, d\sigma_y = \frac{\sigma_n}{2n}\left(\sum_{l=1}^n R_{li}R_{lk}\right) = \frac{\sigma_n}{2n}\delta_{ik}\ ,$$

e così, per la (A.22), si conclude che

$$\lim_{r\to 0}\int_{\partial\mathbb{B}_n^+(x,r)} \sum_{j=1}^n \mathscr{M}_{ij}\left(\frac{(y-x)_j(y-x)_k}{|y-x|^n}\right)\, d\sigma_y = 0\ .$$

□

Corollario A.10 *Se $\alpha\in]0,1]$, Ω è un aperto $C^{1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi\in C^1(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$, allora,*

$$\begin{aligned}&\int^*_{\partial\Omega} \varphi(y)\mathscr{M}(\partial_y,\nu(y))\left(\mathbf{1}_nS_n(y-x)\right)\, d\sigma_y \\ &\qquad = \int^*_{\partial\Omega} S_n(y-x)\mathscr{M}(\partial_y,\nu(y))\varphi(y)\, d\sigma_y\ ,\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}&\int^*_{\partial\Omega} \varphi(y)\mathscr{M}(\partial_y,\nu(y))\Gamma(y-x)\, d\sigma_y \\ &\qquad = \int^*_{\partial\Omega} \Gamma(y-x)\mathscr{M}(\partial_y,\nu(y))\varphi(y)\, d\sigma_y\ ,\end{aligned} \tag{A.25}$$

per ogni $x\in\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $K = \mathbf{1}_n S_n$ oppure $K = \Gamma$, allora, per ogni $k = 1, \dots, n$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(y)\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))K(y-x) - K(y-x)\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))\varphi(y) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i(y)\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))K_{jk}(y-x) - K_{kj}(y-x)\mathscr{M}_{ji}(\partial_y, \nu(y))\varphi_i(y) \\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i(y)\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))K_{jk}(y-x) + K_{jk}(y-x)\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))\varphi_i(y) \\
&\qquad\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} \mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))\left(K_{jk}(y-x)\varphi_i(y)\right) \ ,
\end{aligned}$$

ed immediatamente si conclude per il Teorema A.9. □

Teorema A.11 *Sia $\alpha \in]0,1]$, Ω un aperto $C^{1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$. Siano poi, per ogni $i = 1, \dots, n$ ed $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_i[\varphi](x) &\equiv \int_{\partial\Omega} S_n(y-x)\varphi_i(y)\, d\sigma_y \,, \\
\tilde{w}_i[\varphi](x) &\equiv \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu_\Omega(y)}\left[S_n(y-x)\right]\varphi_i(y)\, d\sigma_y \,.
\end{aligned}$$

Allora, se $v[\varphi]$ e $w[\varphi]$ sono definite come in (A.7) e (A.8), sarà, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$w[\varphi](x) = \tilde{w}[\varphi](x) - \tilde{v}\left[\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))\varphi\right](x) + 2\mu\, v\left[\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))\varphi\right](x) \ . \tag{A.26}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, per ogni $i, k = 1, \dots, n$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
&\left((\mathbf{T} d\Gamma^{(k)}(y-x))[\nu(y)]\right)_i \\
&\quad = \delta_{ik}\tfrac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathscr{M}_{ij}\left[\tfrac{\mu}{2\mu+\lambda}\delta_{jk}S_n(y-x) - \tfrac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\tfrac{1}{\sigma_n}\tfrac{(y-x)_j(y-x)_k}{|y-x|^n}\right] \\
&\quad = \delta_{ik}\tfrac{\partial}{\partial\nu(y)}S_n(y-x) - \left[\mathscr{M}\left(\mathbf{1}_n S_n(y-x)\right)\right]_{ik} + 2\mu\left[\mathscr{M}\Gamma(y-x)\right]_{ik} \ ,
\end{aligned}$$

dove si è scritto $\mathscr{M}_{ij}$ e $\mathscr{M}$ per $\mathscr{M}_{ij}(\partial_y, \nu(y))$ e $\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))$, rispettivamente. Per concludere è quindi sufficiente ricordare la definizione di $w[\varphi]$ ed usare il Corollario A.10. □

Siamo ora pronti ad enuciare per il potenziale elastico di doppio strato $w[\varphi]$ l'analogo del Teorema A.6 che descriveva alcune proprietà del potenziale di strato semplice $v[\varphi]$.

Teorema A.12 *Siano* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, Ω *un aperto* $C^{m,\alpha}$ *di* $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e* $w[\varphi]$ *il potenziale elastico di doppio strato definito in (A.8). Allora:* $\mathbf{A}(\partial_x)w[\varphi] \equiv 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$, $w[\varphi]_{|\Omega}$ *si estende in modo unico ad una funzione* $w^+[\varphi] \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e* $w[\varphi]_{|\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega}$ *si estende in modo unico ad una funzione* $w^-[\varphi] \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \mathbb{R}^n)$. *Inoltre, per ogni* $x \in \partial\Omega$, $i = 1, \dots, n$,

$$w_i^{\pm}[\varphi](x) = \pm\frac{1}{2}\varphi_i(x) + \int_{\partial\Omega}^{*} \varphi(y)\ (\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]\ d\sigma_y\ . \tag{A.27}$$

Dimostrazione. Ovviamente si ha $\mathscr{M}(\partial_y, \nu(y))\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ e quindi, per il Teorema A.6 e per le note proprietà di regolarità dei potenziali relativi all'operatore Laplaciano (vedi ad esempio Lanza e Rossi [LR, Teorema 3.1]), esisteranno estensioni a $\mathrm{cl}\Omega$ ed a $\mathbb{B}_n(0,R) \setminus \Omega$ uniche e regolari per ogni termine a secondo membro dell'equazione (A.26), di conseguenza anche per $w[\varphi]_{|\Omega}$ e $w[\varphi]_{|\mathbb{B}_n(0,R)\setminus \mathrm{cl}\Omega}$. La (A.27) viene da (A.26) osservando che $v[\mathscr{M}\varphi]$, $\tilde{v}[\mathscr{M}\varphi]$ sono definite e continue su tutto $\mathbb{R}^n$ e ricordando che

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in \nu^{\pm}(x_0)}} \tilde{w}[\varphi](x) = \pm\frac{1}{2}\varphi(x_0) + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)} S_n(y-x_0)\ d\sigma_y\ ,$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ (vedi Teorema A.6 e, ad esempio, [C, Teoremi 8 e 12]). □

Il risultato del prossimo Teorema A.13 sarà necessario per impostare in modo corretto il problema accopiato con dati al bordo (2.17). Nel seguito indicheremo con $\nu^+(x_0)$ e $\nu^-(x_0)$ gli insiemi definiti per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ da

$$\nu^+(x_0) \equiv \{x_0 - d\nu(x_0) \mid d > 0 \text{ e } x_0 - t\nu(x_0) \in \Omega \text{ per ogni } 0 < t \le d\}\,,$$
$$\nu^-(x_0) \equiv \{x_0 + d\nu(x_0) \mid d > 0 \text{ e } x_0 + t\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega \text{ per ogni } 0 < t \le d\}\,,$$

dove $\nu(x_0)$ è la normale esterna di Ω in x_0.

Teorema A.13 *Siano* $\alpha \in]0,1]$, Ω *un aperto* $C^{1,\alpha}$ *di* $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ *ed* $x_0 \in \partial\Omega$, *allora*

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu^{\pm}(x_0)}} (\mathbf{T}dv[\varphi](x))[\nu(x_0)] \\ &\qquad = \mp\frac{1}{2}\varphi(x_0) + \int_{\partial\Omega}^{*} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\,(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x_0-y))[\nu(x_0)]\ d\sigma_y\ . \end{aligned} \tag{A.28}$$

Dimostrazione.*(Traccia)* Si ha, per ogni $x \in \nu^{\pm}(x_0)$,

$$(\mathbf{T}dv[\varphi])\,[\nu(x_0)] = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\,(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x-y))[\nu(x_0)]\ d\sigma_y\ ,$$

e, per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}(2\mu+\lambda)&\Big(\big(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x-y)\big)[\nu(x_0)]\big)\Big)_i \\ &= \left\{ n(\mu+\lambda)\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|y-x|^2} + \mu\delta_{ij}\right\}\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x-y) \\ &\qquad + \frac{\mu}{\sigma_n}\left\{\nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n} - \nu_i(x_0)\frac{(x-y)_j}{|x-y|^n}\right\}\ .\end{aligned} \tag{A.29}$$

Sia ora $C(x_0, R, r, \delta)$ un cilindro coordinato attorno ad x_0 e γ la funzione ad esso associata, chiaramente si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} &\int_{\partial\Omega\setminus C(x_0,R,r,\delta)} \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x-y))[\nu(x_0)]\ d\sigma_y \\ &= \int_{\partial\Omega\setminus C(x_0,R,r,\delta)} \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x_0-y))[\nu(x_0)]\ d\sigma_y\ ,\end{aligned}$$

e possiamo limitarci a studiare l'integrale su $\partial\Omega\cap C(x_0, R, r, \delta)$. Si trova così

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} &\int_{\partial\Omega\cap C(x_0,R,r,\delta)} \nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\ d\sigma_y \\ &= \lim_{d\to 0^{\pm}} -\nu_j(x_0)\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{\big(R^t(\eta,\gamma(\eta)+d)\big)_i}{|(\eta,\gamma(\eta)+d)|^n}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\ d\eta\ .\end{aligned}$$

Grazie alla regolarità $C^{1,\alpha}$ di γ si riesce a mostrare che quest'ultimo limite è uguale a

$$\lim_{d\to 0^{\pm}} \mp\nu_j(x_0)\nu_i(x_0)\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} |d|\,|(\eta,d)|^{-n}\ d\eta\ + O(r^\alpha)\ ,$$

con un opportuno cambio di variabili si calcola $\lim_{d\to 0^{\pm}}\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} |d|\,|(\eta,d)|^{-n} = \frac{\sigma_n}{2}$, e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} &\int_{\partial\Omega} \nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\ d\sigma_y \\ &= \mp\frac{\sigma_n}{2}\nu_j(x_0)\nu_i(x_0) + \int^*_{\partial\Omega}\nu_j(x_0)\frac{(x_0-y)_i}{|x_0-y|^n}\ d\sigma_y\ .\end{aligned}$$

Allora banalmente si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} &\int_{\partial\Omega} \varphi_j(x_0)\nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\ d\sigma_y \\ &= \mp\frac{\sigma_n}{2}\varphi_j(x_0)\nu_j(x_0)\nu_i(x_0) + \int^*_{\partial\Omega}\varphi_j(x_0)\nu_j(x_0)\frac{(x_0-y)_i}{|x_0-y|^n}\ d\sigma_y\ ,\end{aligned}$$

ma $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ e quindi l'integrale di $(\varphi_j(y) - \varphi_j(x_0))\,\nu_j(x_0)\frac{(y-x_0)_i}{|y-x_0|^n}$ su un opportuno intorno di x_0 può essere reso arbitrariamente piccolo, uniformemente per x. È facile allora dedurre che

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n}\ d\sigma_y$$

$$= \mp\frac{\sigma_n}{2}\varphi_j(x_0)\nu_j(x_0)\nu_i(x_0) + \int_{\partial\Omega}^{*} \varphi_j(y)\nu_j(x_0)\frac{(x_0-y)_i}{|x_0-y|^n}\ d\sigma_y\ .$$

Con la stessa argomentazione si trova poi che

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} \int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\nu_i(x_0)\frac{(x-y)_j}{|x-y|^n}\ d\sigma_y$$

$$= \mp\frac{\sigma_n}{2}\varphi_j(x_0)\nu_j(x_0)\nu_i(x_0) + \int_{\partial\Omega}^{*} \varphi_j(y)\nu_i(x_0)\frac{(x_0-y)_j}{|x_0-y|^n}\ d\sigma_y\ ,$$

e quindi la mappa che manda $x \in \mathbb{R}^n$ in

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_j(y)\left\{\nu_j(x_0)\frac{(x-y)_i}{|x-y|^n} - \nu_i(x_0)\frac{(x-y)_j}{|x-y|^n}\right\}\ d\sigma_y$$

è continua (l'integrale per $x \in \partial\Omega$ si intende in senso singolare).

Occupiamoci ora del primo addendo del secondo membro di (A.29). Si trova

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} \sigma_n \int_{\partial\Omega\cap C(x_0,R,r,\delta)} \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2}\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x-y)\ d\sigma_y$$

$$= \lim_{d\to 0^{\pm}} -\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{\big(R^t(\eta,\gamma(\eta)+d)\big)_i\big(R^t(\eta,\gamma(\eta)+d)\big)_j(\gamma(\eta)+d)}{|(\eta,\gamma(\eta)+d)|^{n+2}}\sqrt{1+|\nabla\gamma(\eta)|^2}\ d\eta$$

$$= \lim_{d\to 0^{\pm}} \mp\int_{\mathbb{B}_{n-1}(0,r)} \frac{\big(R^t(\eta,d)\big)_i\big(R^t(\eta,d)\big)_j|d|}{|(\eta,d)|^{n+2}}\ d\eta\ + O(r^\alpha) = \mp\frac{\sigma_n}{2n}\delta_{ij} + O(r^\alpha)\ ,$$

e quindi

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} \sigma_n \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2}\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x-y)\ d\sigma_y =$$

$$\mp\frac{\sigma_n}{2n}\varphi_i(x_0) + \int_{\partial\Omega}^{*} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\frac{(x_0-y)_i(x_0-y)_j}{|x_0-y|^2}\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x_0-y)\ d\sigma_y\ .$$

Che sia

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu^{\pm}(x_0)}} \int_{\partial\Omega} \varphi_i(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x-y)\ d\sigma_y =$$

$$\mp\frac{1}{2}\varphi_i(x_0) + \int_{\partial\Omega} \varphi_i(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x_0)}S_n(x_0-y)\ d\sigma_y\ ,$$

è un risultato noto (vedi Cialdea [C, Teorema 13]) e quindi, grazie a (A.29) e ai limiti fin qui calcolati possiamo concludere l'enunciato del teorema. □

Appendice B

Il problema di Dirichlet

Vogliamo mostrare che il problema di Dirichlet omogeneo definito su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$ con dato al bordo $g \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ ammette un' unica soluzione $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ovvero che esiste ed è unica una soluzione $u \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ per il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{B.1}$$

Abbiamo già visto che questo è vero se $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (vedi Lemma 2.3), ora ci interessa provarlo anche per $m = 1$.

Il Teorema A.12 ci permette di ridurre il problema (B.1) alla soluzione di un'equazione integrale singolare, infatti se riuscissimo a mostrare che esiste $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che

$$\mathbf{K}[\varphi](x) \equiv \left(\varphi_i(x) + 2\int_{\partial\Omega}^{*} \varphi(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]\ d\sigma_y\right)_{i=1,\dots,n} = 2\,g(x)\,, \tag{B.2}$$

per ogni $x \in \partial\Omega$, il potenziale elastico di doppio strato $w[\varphi]$ sarebbe allora una soluzione di (B.1) (vedremo che (B.1) può però essere risolubile anche anche se (B.2) non lo è). Per (A.6) si riconosce facilmente che, per ogni $x \in \partial\Omega$,

$$\mathbf{K}[\varphi](x) = \varphi(x) + \frac{1}{\sigma_n}\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\int_{\partial\Omega}^{*} k(x, y-x)\varphi(y)\ d\sigma_y + \mathbf{B}[\varphi](x)\,, \tag{B.3}$$

dove $\mathbf{B}$ è un operatore integrale debolmente singolare, e quindi completamente continuo di $L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ $(p > 1)$ in se stesso (vedi ad esempio [C, Teorema 3]) e, per ogni $x \in \partial\Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $i, j = 1, \dots, n$,

$$k_{ij}(x, \eta) = \frac{\nu_i(x)\eta_j - \nu_j(x)\eta_i}{|\eta|^n}$$

dove $\nu(x)$ è la normale esterna di Ω nel punto x [1]. Si verifica immediatamente che k è un nucleo singolare di classe $Z(n-1,m,\alpha)$ (una definizione di $Z(r,s,\alpha)$ si trova ad esempio in Kupradze [KGBB, IV, Definizione 1.10]). $\mathbf{K}$ è un operatore limitato di $L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ in se stesso (vedi ad esempio Mikhlin [M, Teorema 2.1]) e si calcola grazie ad (A.29) che l'operatore $\mathbf{K}^*$, aggiunto di $\mathbf{K}$, è della forma

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^*[\varphi](x) &= \varphi(x) + 2\int_{\partial\Omega}^{*}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x-y))[\nu(x)]\;d\sigma_y\\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\sigma_n}\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\int_{\partial\Omega}^{*}k(x,y-x)\varphi(y)\;d\sigma_y + \mathbf{B}^*[\varphi](x)\,,\end{aligned}$$

con k definito come sopra e $\mathbf{B}^*$ debolmente singolare.
Inoltre, se $\varphi\in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ risolve l'equazione

$$\mathbf{K}^*[\varphi] = 2f\,,$$

con $f\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ (e $\int_{\partial\Omega} f\,d\sigma_y = 0$, se $n=2$), allora la funzione che estende il potenziale di semplice strato $v[\varphi]_{|\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{cl}\Omega}$ a $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ (vedi Teorema A.6 e Lemma B.4) è una soluzione in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega,\mathbb{R}^n)$ del problema di Neumann esterno

$$\begin{cases}\mathbf{A}(\partial_x)v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n\setminus\Omega\,,\\ (\mathbf{T}dv)[\nu_\Omega] = f & \text{su } \partial\Omega\,,\end{cases}$$

con $|v|(x)\in O(|x|^{2-n})$ e $|Dv|(x)\in o(|x|^{2-n})$ in un intorno di ∞.

Il nostro obbiettivo è dimostrare che l'esistenza e l'unicità di una soluzione $\varphi\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ di (B.2) può essere provata tramite il Teorema dell'Alternativa di Fredholm e quindi di verificare l'esistenza e la regolarità di questa soluzione. Per farlo vogliamo mostrare che $\mathbf{K}$ si può regolarizzare, ovvero che esiste un operatore $\mathbf{K}'$ di $L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ in se stesso, tale che

$$\mathbf{K}'[\varphi](x) = a'(x)\varphi(x) + \int_{\partial\Omega}^{*}k'(x,y-x)\varphi(y)\;d\sigma_y + \mathbf{B}'[\varphi](x)\,,$$

con $a'\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, k' nucleo singolare di classe $Z(n-1,m,\alpha)$ e $\mathbf{B}'$ operatore integrale debolmente singolare, e tale che

$$\mathbf{K}'\mathbf{K}[\varphi] = \varphi + \mathbf{C}[\varphi] \qquad \forall\varphi\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)\,,$$

dove $\mathbf{C}$ è un operatore integrale debolmente singolare con nucleo di classe $Z(n-1-\alpha,m,\alpha)$. Questo problema è di immediata soluzione se Ω è un aperto del piano $\mathbb{R}^2$ (vedi Kupradze [KGBB, IV, §5]) ed è già stato risolto da Mikhlin in [M, §45] se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^3$. Il metodo usato da Mikhlin può però essere facilmente

[1] Per verificare che $\mathbf{K}[\varphi]$ si può scrivere nella forma (B.3) è utile notare che il termine $\frac{\nu_i(y)(y-x)_j-\nu_j(y)(y-x)_i}{|y-x|^n}$ che compare nello sviluppo di $(\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]_j$ differisce da $\frac{\nu_i(x)(y-x)_j-\nu_j(x)(y-x)_i}{|y-x|^n}$ per un $O(|y-x|^{n-1-\alpha})$.

generalizzato ad $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$. Dobbiamo, seguendo Mikhlin, calcolare il simbolo matriciale σ di $\mathbf{K}$ e verificare che

$$\inf_{\substack{x\in\partial\Omega\\ \zeta\in\mathbb{B}_{n-1}}} |\det\sigma(x,\zeta)| > 0\,, \tag{B.4}$$

(vedi [M, §13, §40] per le definizioni di simbolo e simbolo matriciale). Per farlo scegliamo un $\bar{x} \in \partial\Omega$ ed operiamo un cambio di variabile nel nostro problema tramite una rototraslazione in modo che, nel nuovo sistema, $\bar{x} \equiv 0$, i vettori $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 0)$ risultino tutti tangenti ad Ω in $\bar{x}$ e $(0, \dots, 0, -1)$ sia la normale uscente di Ω in $\bar{x}$. Mikhlin in [M, §21] mostra che, come conseguenza del cambio di variabile, ogni elemento del simbolo matriciale subisce una trasformazione lineare del secondo termine del suo argomento e quindi la stessa trasformazione subirà il secondo termine dell'argometo del determinante del simbolo matriciale. Nel caso di una rototraslazione la trasformazione lineare è data dalla rotazione. Ma allora l'insieme dei valori assunti dal determinante del simbolo matriciale è invariante per questo cambio di variabile e possiamo dedurre la validità di (B.4) calcolando il simbolo $\sigma(\bar{x}, \zeta)$ nel nuovo sistema $(\eta_1, \dots, \eta_n)$. In queste coordinate l'equazione (B.2) diventa, per $x = \bar{x}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\bar{x}) + \frac{1}{\sigma_n}\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\int^*_{\partial\Omega}\frac{\eta_1}{|\eta|^n}\varphi_n(y)\; d\sigma_y + \widehat{\mathbf{B}}_1[\varphi](\bar{x}) &= 2g_1(\bar{x})\,,\\
&\vdots\\
\varphi_{n-1}(\bar{x}) + \frac{1}{\sigma_n}\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\int^*_{\partial\Omega}\frac{\eta_{n-1}}{|\eta|^n}\varphi_n(y)\; d\sigma_y + \widehat{\mathbf{B}}_{n-1}[\varphi](\bar{x}) &= 2g_{n-1}(\bar{x})\,,\\
\varphi_n(\bar{x}) - \frac{1}{\sigma_n}\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\int^*_{\partial\Omega}\frac{1}{|\eta|^n}(\eta', 0)\cdot\varphi(y)\; d\sigma_y + \widehat{\mathbf{B}}_n[\varphi](\bar{x}) &= 2g_n(\bar{x})\,,
\end{aligned}$$

dove η' sta per $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$, $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$, $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ sono le componenti di φ e g nel nuovo sistema, $\widehat{\mathbf{B}}$ è un operatore debolmente singolare.
Possiamo porre, per ogni $i = 1, \dots, n-1$, $\frac{\eta_i}{|\eta|} = Y_i(\vartheta)$, dove $\vartheta \in \partial\mathbb{B}_{n-1}$ e Y_i è la i-esima armonica sferica $(n-1)$-dimensionale di grado 1 (vedi ad esempio Folland [F, p. 126] o Stein e Weiss [SW, IV, §2]). Denotiamo per brevità con $Y(\vartheta)$ il vettore $(Y_1(\vartheta), \dots, Y_{n-1}(\vartheta))$ e con h il valore $\frac{\mu}{2\mu+\lambda}$, risulterà allora

$$\widehat{\sigma}(\bar{x}, \vartheta) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & ihY(\vartheta) \\ -ihY^t(\vartheta) & 1 \end{pmatrix},$$

(vedi [M, §13, §40]) e quindi $|\det\widehat{\sigma}(\bar{x}, \vartheta)| = \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)^2}$ che è sicuramente diverso da 0 per i valori di λ e μ consentiti (deve essere $\mu > 0$ e $2\mu + n\lambda > 0$, vedi (2.2)). Ora, la matrice inversa di $\widehat{\sigma}(\bar{x}, \vartheta)$ si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}(\bar{x}, \vartheta)^{-1} = \mathbf{1}_n &+ \frac{h^2}{1-h^2}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 1 \end{pmatrix}\\
&+ h\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & -iY(\vartheta) \\ iY^t(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} + h^2\begin{pmatrix} Y(\vartheta)\otimes Y(\vartheta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^t & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{0}_{n-1}$ è l'elemento nullo di $\mathrm{M}_{n-1\times n-1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{0}$ è il vettore nullo $n-1$-dimensionale e $\otimes$ indica il prodotto tensore di vettori. Quindi, poiché alla somma di operatori singolari corrisponde la somma dei loro simboli e alla composizione di operatori singolari il prodotto dei simboli (vedi [M, §13]), $\widehat{\sigma}(\bar{x},\vartheta)^{-1}$ è il simbolo dell'operatore $\mathbf{K}'$ definito da

$$\mathbf{K}'[\varphi](x) \equiv \varphi(x) + \frac{h^2}{1-h^2}(\nu(x)\cdot\varphi(x))\nu(x)$$
$$+\frac{2}{\sigma_n}h\int_{\partial\Omega}^{*} k(x,y-x)\varphi(y)\,d\sigma_y + \frac{4}{\sigma_n^2}h^2\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial\Omega}^{*}\frac{(z-x)_i}{|z-x|^n}\int_{\partial\Omega}^{*}\frac{(y-z)_j}{|y-z|^n}\varphi_j(y)\,d\sigma_y\,d\sigma_z\,,$$

per ogni $\varphi \in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ e per ogni $x\in\partial\Omega$ (ν è la normale uscente di Ω).
$\mathbf{K}'$ così definito è l'operatore che regolarizza $\mathbf{K}$ (vedi anche Maz'ya [MN, II, Capitolo 2, Teorema 3]). Osserviamo che, grazie al teorema di Miranda [Mi, Teorema 2.I], si avrà $\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ se Ω è un aperto di classe $C^{m+1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ ed $f\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Allora, se $\mathbf{K}[\varphi]=f$ con $\varphi\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$, si avrà anche

$$\mathbf{K}'\mathbf{K}[\varphi] = \varphi + \mathbf{C}[\varphi] = \mathbf{K}'[f] \tag{B.5}$$

con $\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Possiamo ora enunciare il seguente

Lemma B.1 *Siano $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in]0,1[$ ed Ω un aperto di classe $C^{m+1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $f\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Allora ogni soluzione $\varphi\in L^p(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ dell'equazione $K[\varphi]=f$ appartiene a $C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Grazie al teorema [Mi, Teorema 2.I], $\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Notato questo, per $m=1$ il Lemma si dimostra esattamente come [KGBB, IV, Teorema 6.12]. Per $m>1$ osservarviamo che, dalla (B.5), possiamo dedurre che, per ogni $j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\varphi + (-1)^j\mathbf{C}^j[\varphi] = \mathbf{K}'[f] - \mathbf{C}\mathbf{K}'[f] + \cdots + (-1)^{j-1}\mathbf{C}^{j-1}\mathbf{K}'[f]\,, \tag{B.6}$$

dove, per ogni $i\in\mathbb{N}$, abbiamo indicato con $\mathbf{C}^i$ la composizione dell'operatore $\mathbf{C}$ con se stesso i volte. Osserviamo ora che $\mathbf{C}^j$ è un operatore debolmente singolare con nucleo di classe $Z(n-1-j\alpha,m,\alpha)$ (vedi [C, Teorema 4, Dimostrazione]) e quindi, se $j>m\alpha^{-1}$, $\mathbf{C}^j[\varphi]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ (vedi ad esempio [C, Teorema 22] o [KGBB, IV, Teorema 2.7]). Occupiamoci ora del secondo membro di (B.6). Possiamo mostrare che ogni termine della somma deve appartenere a $C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Infatti, per ogni $i\in\mathbb{N}$, abbiamo

$$\mathbf{C}^i\mathbf{K}'[f] + \mathbf{C}\mathbf{C}^i\mathbf{K}'[f] = \mathbf{K}'\mathbf{K}\mathbf{C}^i\mathbf{K}'[f]\,,$$

e quindi, se $\mathbf{C}^i\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ per [Mi, Teorema 2.I] anche il secondo membro di quest'ultima equazione deve appartenere a $C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$, ma allora $\mathbf{C}^{i+1}\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Poichè abbiamo già osservato che $\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ si conclude per induzione che $\mathbf{C}^i\mathbf{K}'[f]\in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ per ogni $i\in\mathbb{N}$.

Ora dedurre che $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ è immediato. □

Un risultato analogo a questo si può dimostrare anche per $\mathbf{K}^*$, infatti il simbolo di $\mathbf{K}^*$ è il coniugato del simbolo di $\mathbf{K}$ (vedi [M, §34]). Inoltre il simbolo di $\mathbf{K}$ è hermitiano e quindi, per [M, Teorema 4.40] l'indice di $\mathbf{K}$ è nullo, ovvero le dimensioni degli spazi nulli di $\mathbf{K}$ e di $\mathbf{K}^*$ sono identiche. È facile allora verificare il seguente

Lemma B.2 *Siano $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$, Ω un aperto di classe $C^{m+1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora per le equazioni $\mathbf{K}[\varphi] = f$ e $\mathbf{K}^*[\varphi] = f$ vale il Teorema di Fredholm in $C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

(vedi Kupradze [KGBB, VI, Definizione 3.5]) e possiamo risolvere il problema (B.1) con lo stesso tipo di analisi con cui si risolvono questi problemi nella teoria classica del potenziale. Si può trovare questo lavoro svolto per $n = 3$ in Kupradze [KGBB, VI, §5] e vedremo qui sotto come ottenere gli stessi risultati per $n \geq 2$ qualsiasi. Avremo bisogno di poter usare il Teorema A.2 anche su insiemi non limitati (vedi Teorema B.5) e per poterlo fare in dimensione $n = 2$ dobbiamo prima dimostrare i due seguenti Lemmi tecnici.

Lemma B.3 *Se $\varphi \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) e $\mathbf{K}^*[\varphi] = 2f$ allora $\int_{\partial\Omega} \varphi(y)\, d\sigma_y = \int_{\partial\Omega} f(y)\, d\sigma_y$.*

Lemma B.4 *Sia $n = 2$, sia $\varphi \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) e sia $\mathbf{K}^*[\varphi] = 2f$. Allora il potenziale elastico di semplice strato $v[\varphi]$ si annulla all'infinito se e solo se $\int_{\partial\Omega} f(y)\, d\sigma_y = 0$.*

Dimostrazione. *(Traccia)* Il primo Lemma si dimostra direttamente grazie alla definizione di $\mathbf{K}^*$ ed al Teorema A.13. Per il secondo, dopo aver scritto per esteso l'espressione di $v[\varphi]$ usando la (A.1), osserviamo che basta dimostrare che $\int_{\partial\Omega} \log(y-x)\varphi(y)\, d\sigma_y$ è infinitesimo per $|x| \to \infty$ se e solo se $\int_{\partial\Omega} f(y)\, d\sigma_y = 0$. Questo non è altro che Folland [F, 3.35]. □

Possiamo così dedurre dal Corollario A.4 il seguente Teorema.

Teorema B.5 *Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{K}^*[\varphi] = 2f$. Allora, se $n \geq 3$ oppure $n = 2$ e $\int_{\partial\Omega} f(y)\, d\sigma_y = 0$, si ha*

$$\int_{\Omega} \mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi])\, dx = -\int_{\partial\Omega} v[\varphi](\mathbf{T}dv[\varphi])[\nu_\Omega]\, d\sigma_y,$$

E con questo siamo pronti a mostrare che

Lemma B.6 *Siano $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in]0,1[$, sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m+1,\alpha}$ e sia $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ costituito da un'unica componente connessa. Allora se $\varphi \in L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) e $\mathbf{K}^*[\varphi] = 0$, $\varphi \equiv 0$.*

Dimostrazione. Per i Teoremi A.13 e B.5 si ha $\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi])\, dx = 0$, e quindi $\mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi]) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$. Ma allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n\setminus\Omega$, $v_i[\varphi](x) = \sum_j a_{ij}x_j + b_i$, con a_{ij}, b_i reali, costanti e $a_{ij} = -a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ (vedi Kupradze [KGBB, III, §1, 2]). Poiché sappiamo che $v[\varphi](x) \to 0$ per $|x| \to \infty$ deve essere $a_{ij} = 0$ e $b_i = 0$, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Quindi $v[\varphi]_{|\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \equiv 0$ identicamente su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Allora, per il Lemma 2.2, anche $v[\varphi]_{|\Omega} \equiv 0$ (infatti $v[\varphi]$ è continua, nulla su $\partial\Omega$ e vale $\mathbf{A}(\partial_x)v[\varphi] \equiv 0$ in Ω). Ora

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\nu^+_\Omega(x_0)}} (\mathbf{T}dv[\phi](x))[\nu_\Omega(x_0)] - \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in\nu^-_\Omega(x_0)}} (\mathbf{T}dv[\phi](x))[\nu_\Omega(x_0)] = -\varphi(x_0)$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, e sarà perciò $\varphi \equiv 0$. □

Abbiamo così mostrato che lo spazio nullo di $\mathbf{K}^*$ è banale e quindi, per il Lemma B.2 e per il Teorema di Fredholm possiamo affermare che

Teorema B.7 *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m+1,\alpha}$, $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ è connesso ed $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora esiste ed è unica $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbf{K}[\varphi] = f$.*

Abbiamo già visto che lo spazio nullo di $\mathbf{K}$ ha la stessa dimensione di quello di $\mathbf{K}^*$, è quindi chiaro che dovrà anche essere

Teorema B.8 *Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m+1,\alpha}$, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è connesso ed $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora esiste ed è unica $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbf{K}^*[\varphi] = f$.*

Siano ora $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^*$ gli operatori definiti, per ogni $\varphi \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, da

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}[\varphi](x) \;&\equiv\; \varphi(x) - 2\int^*_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \varphi_j(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(x-y))[\nu(x)]\; d\sigma_y\,, \\
\mathbf{H}^*[\varphi](x) \;&\equiv\; \left(\varphi_i(x) - 2\int^*_{\partial\Omega} \varphi(y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(i)}(y-x))[\nu(y)]\; d\sigma_y\right)_{i=1,\ldots,n}.
\end{aligned}$$

Allora, con le stesse argomentazioni usate dimostrare il Lemma B.2 possiamo provare il seguente.

Lemma B.9 *Sia Ω un aperto di classe $C^{m+1,\alpha}$ di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora per le equazioni $\mathbf{H}^*[\varphi] = f$ e $\mathbf{H}[\varphi] = f$ vale il Teorema di Fredholm in $C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$.*

Inoltre notiamo che, se $\varphi \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ risolve l'equazione $\mathbf{H}[\varphi] = -2f$, con $f \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, allora la funzione che si ottiene estendendo il potenziale di semplice strato $v[\varphi]_{|\Omega}$ a $\mathrm{cl}\Omega$ (vedi Teorema A.6) è una soluzione in $C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n)$ del problema di Neumann interno

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)v = 0 & \text{in } \mathrm{cl}\Omega\,, \\ (\mathbf{T}dv)[\nu_\Omega] = f & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Nel seguito ci sarà utile considerare $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^*$ come operatori definiti da $L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ in se stesso (vedi Mikhlin [M, Teorema 2.1]). Se $\mathbf{M}$ è un operatore di $L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ in se stesso chiameremo $N(\mathbf{M})$ lo spazio nullo di $\mathbf{M}$ e $R(\mathbf{M})$ la sua immagine. Inoltre se A e B sono sottospazi di $L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ indicheremo con con $\mathrm{A}^\perp$ il sottospazio di $L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ ortogonale ad A e con $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ è il sottospazio generato da $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. Si avrà allora

Lemma B.10 *La mappa che a $\varphi \in L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ associa il potenziale elastico di strato semplice $v[\varphi]$ e un isomorfismo tra $N(\mathbf{K}^*)$ e $N(\mathbf{K})$.*

Dimostrazione. Per prima cosa proviamo che, se $\varphi \in N(\mathbf{K}^*)$, allora $v[\varphi] \in N(\mathbf{K})$. Infatti, per il Lemma B.3 ed il Teorema B.5, si avrà

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi])\, dx = -\int_{\partial\Omega} v[\varphi](\mathbf{T}dv[\varphi])[\nu_\Omega]\, d\sigma_y = 0\,.$$

e quindi, poiché $\mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi])$ è positivo, $\mathrm{E}(v[\varphi], v[\varphi]) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$. Per il Corollario A.3 dovrà allora essere $\mathrm{E}(v[\varphi], u) \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, per ogni $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \mathbb{R}^n)$. Ma allora per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$,

$$-\int_{\partial\Omega} v[\varphi](y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(y-x))[\nu_\Omega(y)]\, d\sigma_y = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \mathrm{E}(v[\varphi](y), \Gamma^{(j)}(y-x))\, dy = 0\,,$$

(vedi Corollario A.4) e quindi

$$\mathbf{K}\,[v[\varphi]]\,(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu_\Omega^+(x)}} 2\int_{\partial\Omega} \Big(v[\varphi](y)(\mathbf{T}d\Gamma^{(j)}(y-x))[\nu_\Omega(y)]\Big)_{j=1,\ldots,n} d\sigma_y = 0\,,$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$. Questo equivale a $v[\varphi] \in N(\mathbf{K})$.
Ora, abbiamo già osservato che $N(\mathbf{K})$ e $N(\mathbf{K}^*)$ hanno la stessa dimensione. Per concludere la dimostrazione del Lemma sarà perciò sufficente osservare che, per il Teorema A.13,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu_\Omega^+(x_0)}} (\mathbf{T}dv[\phi](x))[\nu_\Omega(x_0)] - \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\nu_\Omega^-(x_0)}} (\mathbf{T}dv[\phi](x))[\nu_\Omega(x_0)] = -\varphi(x_0)$$

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, e questo implica che se $v[\varphi]$ è nulla, così deve essere φ. La mappa $\varphi \mapsto v[\varphi]$ è perciò iniettiva, quindi un isomorfismo. $\square$

Analogamente si prova che

Lemma B.11 *La mappa che a $\varphi \in L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ associa il potenziale elastico di strato semplice $v[\varphi]$ e un isomorfismo tra $N(\mathbf{H})$ e $N(\mathbf{H}^*)$.*

Seguendo quanto fatto da Kupradze in [KGBB, VI, §5, Teorema 5.9], siamo ora in grado di provare la seguente

Proposizione B.12 *Siano $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ed $\alpha \in]0,1[$, sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$, sia $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ connesso e sia $g \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora esiste ed è unica $u \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. La soluzione u non è altro che il potenziale di strato doppio $w[\varphi]$ con densità φ soluzione di (B.2), dobbiamo verificarne la regolarità.
Consideriamo il potenziale $w[g]$. Per Kupradze [KGBB, V, §8] si avrà, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_\Omega^+(x_0)}} (\mathbf{T}dw[g](x))[\nu_\Omega(x_0)] - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \nu_\Omega^-(x_0)}} (\mathbf{T}dw[g](x))[\nu_\Omega(x_0)] = 0\,.$$

Inoltre la funzione $(\mathbf{T}dw[g])[\nu_\Omega]$ appartiene a $C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ ed è sicuramente ortogonale a $N(\mathbf{K})$ (che è banale). Proviamo che è ortogonale anche allo spazio nullo di $\mathbf{H}^*$. Sia $f \in N(\mathbf{H}^*)$, allora per il Lemma B.11 esiste $\psi \in N(\mathbf{H})$ tale che $v[\psi] = f$, ma allora, per il Teorema A.2,

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot (\mathbf{T}dw[g])[\nu_\Omega]\, d\sigma_y = \int_{\Omega} \mathrm{E}(v[\psi], w[g])\, dx$$

e, poiché è facile verificare che $\mathrm{E}(v[\psi], v[\psi]) \equiv 0$ in Ω, per il Corollario A.3, l'ultimo integrale scritto è nullo.
Per i Lemmi B.2 e B.9 esisteranno allora due funzioni g_1, $g_2 \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ tali che i potenziali di semplice strato $v[g_1]$ e $v[g_2]$ siano rispettivamente la soluzione del problema di Neumann interno ed esterno con dato al bordo $(\mathbf{T}dw[g])[\nu_\Omega]$. In particolare avremo allora $w[g]_{|\Omega} - v[g_1]_{|\Omega} \in N(\mathbf{H})$ e $w[g]_{|\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega} - v[g_2]_{|\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega} \in N(\mathbf{K}^*)$. Esisteranno quindi $(a_{ij})_{ij=1,\dots,n}$, $(b_i)_{i=1,\dots,n}$, $(c_{ij})_{ij=1,\dots,n}$ e $(d_i)_{i=1,\dots,n}$ reali, costanti e tali che

$$\begin{aligned} w[g](x) &= v[g_1](x) + (\sum_j a_{ij}x_j + b_i)_{i=1,\dots,n} \qquad \forall\, x \in \mathrm{cl}\Omega\,, \\ w[g](x) &= v[g_2](x) + (\sum_j c_{ij}x_j + d_i)_{i=1,\dots,n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{aligned}$$

(vedi Kupradze [KGBB, III, §1, 2]).
Poniamo $v_1(x) \equiv v[g_1](x) + (\sum_j a_{ij}x_j + b_i)_{i=1,\dots,n}$ $(x \in \mathrm{cl}\Omega)$ e $v_2 \equiv v[g_1]_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}$ (notiamo che c_{ij}, d_i devono essere nulli per ogni $i, j = 1, \dots, n$, infatti $w[g]_{|\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega} - v[g_2]_{|\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\Omega}$ è infinitesimo per $|x| \to \infty$). Sia poi $v \equiv v_1 - v_2$. Allora $v \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ e risolve il problema di Dirichlet interno con dato al bordo g. Per verificarlo basta osservare che, per Teorema A.12, sarà, per ogni $x \in \partial\Omega$,

$$v(x) = v_1(x) - v_2(x) = w^+[g](x) - w^-[g](x) = g(x)\,.$$

Per il Lemma 2.2, v deve quindi coincidere con $w[\varphi]$. Questo prova il nostro asserto.
□

La Proposizione B.12 non é ancora il risultato che cercavamo, vorremo infatti poter indebolire le ipotesi su Ω e dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione in $C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ anche nel caso in cui Ω è un aperto limitato di classe $C^{m,\alpha}$ e $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ è costituito da più componenti connesse, una delle quali necessariamente illimitata. Lo faremo seguendo Folland [F, 3, §E]. Ci servirà a tale scopo il prossimo Lemma B.13, la cui dimostrazione si puó facilmente ottenere adattando al nostro caso quella di [F, Proposizione 3.39, Corollario 3.40].

Lemma B.13 $L^2(\partial\Omega,\mathbb{R}^n) = (N(\mathbf{K}))^\perp \oplus N(\mathbf{K}^*) = R(\mathbf{K}) \oplus N(\mathbf{K})$.

Siamo ora pronti per dedurre nel prossimo Teorema il risultato principale di questa Appendice.

Teorema B.14 *Siano $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed $\alpha \in]0,1[$, sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{m,\alpha}$ e sia $g \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Allora esiste ed è unica $u \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega,\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Basta infatti osservare che deve essere $g = g_1+g_2$ con $g_1 \in R(\mathbf{K})$ e $g_2 \in N(\mathbf{K})$. La soluzione è allora $u \equiv w[\varphi_1]+v[\varphi_2]$ con $\mathbf{K}[\varphi_1] = g_1$ e $v[\varphi_2] = g_2$, $\varphi_2 \in N(\mathbf{K}^*)$ (vedi Lemma B.10) e non rimane che verificarne la regolarità.
Poiché $\varphi_2 \in N(\mathbf{K}^*)$ si avrà, per il Lemma B.1, $\varphi_2 \in C^{m-1,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ e quindi per le proprietà del potenziale di semplice strato dimostrate nel Teorema A.6, $v[\varphi_2] \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega,\mathbb{R}^n)$. In particolare sarà allora $g_2 \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$ e perciò $g_1 \in C^{m,\alpha}(\partial\Omega,\mathbb{R}^n)$. Sia ora $\mathbb{R}^n\setminus\Omega = \Omega_0\cup\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_r$ la scomposizione di $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ in componenti aperte e connesse e sia Ω_0 la componente illimitata (notiamo che per la regolarità e limitatezza di Ω la scomposizione è sicuramente finita e la componente illimitata è unica). Sia poi, per ogni $i = 1,\ldots,r$, $u_i \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega_i,\mathbb{R}^n)$ l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u_i = 0 & \text{in } \Omega_i\,, \\ u_i = g_{1\,|\partial\Omega_i} & \text{su } \partial\Omega_i\,, \end{cases}$$

che esiste per la Proposizione B.12. Sia quindi $\tilde{w}$ la funzione definita su $\mathbb{R}^n\setminus\Omega_0$ che coincide con $w[\varphi_1]$ su $\mathrm{cl}\Omega$ e con u_i su $\mathrm{cl}\Omega_i$ $(i = 1,\ldots,r)$. Allora $\tilde{w}$ è continua e si verifica con un argomento basato sul Teorema A.2 che risolve il problema

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\partial_x)u = 0 & \text{in } [\mathcal{D}^n(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_0)]'\,, \\ u = g_{1\,|\partial\Omega_0} & \text{su } \partial\Omega_0\,. \end{cases} \tag{B.7}$$

Dovrà quindi coincidere con l'unica soluzione $u_0 \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_0,\mathbb{R}^n)$ di (B.7), altrimenti $\tilde{w}-u_0$ sarebbe una soluzione non nulla del problema omogeneo associato, e questo non può essere per il Lemma 2.2. Si conclude allora che anche $w[\varphi_1] \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega,\mathbb{R}^n)$ e perciò $u \equiv w[\varphi_1]+v[\varphi_2] \in C^{m,\alpha}(\mathrm{cl}\Omega,\mathbb{R}^n)$. $\square$

Bibliografia

[B] H. Brezis, *Analisi Funzionale. Teoria e Applicazioni*, Liguori Editore, 1986.

[C] A. Cialdea *Appunti di Teoria del Potenziale*, (A.A. 2001-2002), Dip. di Matematica, Università della Basilicata.

[D] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, *etc.*, 1985.

[DM] G. De Marco, *Analisi Due/2*, Decibel editrice, Padova, 1993.

[F] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[GT] D. Gilbarg e N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 1983.

[KGBB] V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Basheleishvili e T.V. Burchuladze, *Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, North-Holland Publ. Co., 1979.

[L] M. Lanza de Cristoforis, *Properties and Pathologies of the Composition and Inversion Operators in Schauder Spaces*, Acc. Naz. delle Sci. detta dei XL, **15**, (1991), pp. 93–109.

[LP] M. Lanza de Cristoforis e L. Preciso, *On the Analyticity of the Cauchy Integral in Schauder Spaces*, Journal of Integral Equations and Applications, **11**, (1999), 363–391.

[LR] M. Lanza de Cristoforis e L. Rossi, *Real analytic dependence of simple and double layer potential upon perturbation of the support and of the density*, Journal of Integral Equations and Applications, **16**, (2004), 137–174.

[MN] V.G. Maz'ya e S.M. Nikol'skiĭ, *Analysis. IV. Linear and boundary integral equations*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, **27**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[M] S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford, *etc.*, 1965.

[Mi] C. Miranda, *Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali*, Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei, **7**, (1965), 303–336.

[PA] G. Prodi e A. Ambrosetti, *Analisi non lineare*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1973.

[SW] E. M. Stein e G. Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[Sch] L. Schwarz, *Analyse IV, Applications de la théorie de la mesure*, Hermann, Parigi, 1993.

[T] G.M. Troianiello, *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, Plenum Press, New York and London, 1987.

[V] T. Valent, *Boundary Value Problems of Finite Elasticity*, Springer-Verlag, Berlin, *etc.*, 1988.

[Vi] P. Villaggio, *Qualitative methods in elasticity*, Noordhorff Iternational Publishing, Leyden, 1977.

Altri ringraziamenti

Per testimoniare loro la mia profonda e sincera gratitudine voglio che i nomi delle seguenti persone compaiano nella mia Tesi di Laurea: Nonno Valente, Nonna Itrene, Gigi, Tita, Giulio, Andrea, Dario Benetti, Stefano Marchioro, David Facchini, Massimo Cerquetani, Misa, Carlo Morello, Carla Pamato, Cristiano Filippi Farmar, Lavinia, Patrizia Laquidara, Sorin Victor Martoiu, Luca Prelli, Andrea Isella, Paolo Scavazza, Marco Sancio, Silvana, Willy, Giordano, Ernesto e Berto, Alberto Lovison, Lucia Rossi, Clara, Blandina, Sara, Roberta Trovato, Roberta Sartori, Mr.Atoz, cugina Valentina, Tobia, Attila, F.Tomizza, il mosegagno, Nagata, Santini, Giumbolo, sig. Bruna, Carlo, Bruno, Giorgio, Marco, Eleonora, Agnese, Raffaella, Luca Mertens, il canarino Pippo, Sara S. , Sara D. , la Moscona, Raffaele Marigo, Andrea Dalbianco, Riky, Micia, Tamara, Filippo Gatto, Daniele Chinellato, Nicola, Silvia, Davide, Nereo, Ivano P. , Giorgio C. , Mingus, Valter V. , Gelindo, quelli della Sala Studio, Filippo, Davide M. , Checheto, Loita, Moreno Mencato, Manlio, Michele, Cristian, Marco, Neno, M.Vianello, Angelo, Wong, Mario, Simone, Matteo, Davide, David Gugliemoni, Sona Bena! , Gnagni, il cammello Camillo con tre gobbe,. . . . . .