

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

## **Vortici quantizzati nei superfluidi bosonici: correzioni all'equazione di Gross-Pitaevskii**

Candidato:  
**Mattia Udina**  
Matricola 1052139

Relatore:  
**Prof. Luca Salasnich**



# Indice

1	Introduzione	4
2	L'equazione di Hartree	6
3	L'equazione di Gross-Pitaevskii	8
4	Correzioni all'equazione di Gross-Pitaevskii	9
5	Vortici quantizzati nei superfluidi bosonici	12
6	Soluzione vorticoso per la GPE	14
7	Soluzione vorticoso per la MGPE	16
8	Riduzione unidimensionale: solitoni <i>dark</i>	19
9	Conclusioni	21
	Riferimenti bibliografici	22

# 1 Introduzione

A partire dal modello proposto da Bose ed Einstein negli anni venti del Novecento per la descrizione dei condensati bosonici non interagenti, la meccanica statistica quantistica ha permesso la comprensione di fenomeni macroscopici non classici, associati al comportamento della materia al di sotto della temperatura critica di degenerazione, supermateria, e riscontrati sperimentalmente nel corso del secolo scorso. Nel 1937 Kapitza introdusse il termine superfluidità, in analogia con il fenomeno elettro-magnetico della superconduttività, per identificare la peculiare e totale assenza di viscosità riscontrata nell'elio 4 a basse temperature. London propose quindi una prima interpretazione del fenomeno sull'idea della condensazione di Bose-Einstein (BEC), introducendo il concetto di funzione d'onda macroscopica [1], riproposto negli anni cinquanta da Landau e Ginzburg per la descrizione della superconduttività. Un ulteriore punto di svolta si ebbe nel 1957 con la formulazione della teoria BCS, capace di generalizzare l'idea di condensazione al caso fermionico attraverso l'introduzione delle coppie di Cooper.

Nel corso degli anni ottanta e novanta, grazie all'implementazione dei metodi laser e allo sviluppo di tecniche di raffreddamento e confinamento degli atomi neutri in reticoli ottici per mezzo di trappole magnetiche, è stato possibile il raggiungimento di temperature (nK) e densità ( $10^{13} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ) tali da garantire la realizzazione di vapori atomici gassosi fino allo zero assoluto, con comportamento superfluidico. L'ottenimento di gas diluiti di atomi alcalini con evidenza di condensazione [2] valse il Premio Nobel a Cornell, Wieman e Ketterle nel 2001 e costituì un importante banco di prova per lo studio diretto degli effetti quantistici sulla materia, alimentando il forte interesse per la fisica degli atomi ultrafreddi degli ultimi anni.

Il presente lavoro si propone di analizzare il comportamento di tali sistemi debolmente interagenti, a partire dalla derivazione dell'equazione integro-differenziale di Hartree per i bosoni a temperatura nulla e dell'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), limitatamente al caso stazionario, strumento adatto alla descrizione di condensati estremamente diluiti nell'ipotesi di un potenziale di contatto tra le particelle. Con un approccio sostanzialmente diverso rispetto a quanto riportato in letteratura, ci si ripropone di ricavare dei termini correttivi, di range finito, a tale potenziale per ottenere l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata (MGPE).

L'analisi della MGPE permetterà quindi di evidenziare come gli effetti di range finito influenzino le proprietà dei condensati di Bose-Einstein, in relazione al

manifestarsi dei vortici quantizzati nei superfluidi in rotazione. Nello specifico si cercherà di ottenere una descrizione teorica più completa del fenomeno studiando aspetti finora trascurati, come le variazioni nella dimensione del vortice, con approccio numerico, ed eventuali condizioni di instabilità. Verrà infine impostato un parallelismo con il caso noto in letteratura dei solitoni *dark*, reinterpretati come versione unidimensionale e risolubile analiticamente del problema, al fine di evidenziare analogie e differenze con i risultati ottenuti.

## 2 L'equazione di Hartree

La teoria dei gas di Bose debolmente interagenti, sviluppata originariamente da Bogoliubov alla fine degli anni quaranta [3], ricalca la descrizione superfluidica dell'elio, pur trattandosi di un sistema soggetto a interazioni interatomiche significative. Tale approccio non permette di riprodurre molti degli aspetti qualitativi, ma l'accordo con i dati raccolti risulta soddisfacente per la descrizione dei BEC atomici, riscontrati sperimentalmente a temperature vicine allo zero assoluto. In queste condizioni il sistema è prossimo al *ground state* e può essere descritto come uno stato coerente a molte particelle, caratterizzato da una funzione d'onda  $\Psi_0$ , dove lo stato quantico con momento nullo ( $\mathbf{k} = 0$ ) è soggetto a occupazione macroscopica. Le proprietà degli stati coerenti permettono quindi di ricondurre la trattazione ad un problema di particella singola [4].

Senza dover ricorrere alla *quantum field theory* e agli operatori di campo quantistici, è possibile sfruttare l'approssimazione di Hartree [5] per  $N$  bosoni identici e interagenti appartenenti allo stesso stato, al fine di ottenere una funzione d'onda a molti corpi del tipo

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \varphi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2) \cdots \varphi(\mathbf{r}_N) \quad (2.1)$$

dove  $\varphi(\mathbf{r})$  rappresenta la funzione d'onda di singola particella normalizzata, ignota e che deve essere ricavata in modo autoconsistente. Anche in questo caso è necessario supporre che le particelle siano caratterizzate dal medesimo valore del momento angolare, ossia che il condensato di Bose-Einstein sia puro, assunzione forte ma consistente nel caso di gas ultrafreddi diluiti, debolmente interagenti, e che deve essere invece rivista nel caso di sistemi fortemente interagenti come l'elio liquido. Introduciamo quindi l'hamiltoniana del sistema a molti corpi:

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (2.2)$$

dove  $U(\mathbf{r}_i)$  rappresenta il potenziale di confinamento e  $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  il potenziale di mutua interazione, che rende l'hamiltoniana non separabile. Punto fondamentale per lo sviluppo della teoria sarà la ricerca dell'approssimazione più opportuna per  $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ .

L'idea di Hartree prevede di adottare un approccio variazionale al fine di determinare  $\varphi(\mathbf{r})$  minimizzando il valore di aspettazione di  $H$  sullo stato

macroscopico normalizzato  $\Psi$  e sfruttando la (2.1):

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \Psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) H \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) \\
&= N \int d\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right) \varphi(\mathbf{r}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} N(N-1) \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\varphi(\mathbf{r})|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}')|^2 = E[\varphi, \varphi^*]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

dove  $E[\varphi, \varphi^*]$  rappresenta il funzionale energia non lineare della funzione d'onda di particella singola, che deve essere minimizzato nel rispetto del vincolo di normalizzazione

$$\int d\mathbf{r} |\varphi(\mathbf{r})|^2 = 1. \tag{2.4}$$

Applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange

$$\delta E[\varphi, \varphi^*] - \varepsilon \delta \left( \int d\mathbf{r} |\varphi(\mathbf{r})|^2 - 1 \right) = 0 \tag{2.5}$$

dove  $\varepsilon$  rappresenta il moltiplicatore e  $\delta E$  la variazione del funzionale, la condizione di minimizzazione porta all'equazione di Hartree:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1) \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}')|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon \varphi(\mathbf{r}). \tag{2.6}$$

Il parametro  $\varepsilon$  risulta uguale al potenziale chimico  $\mu$  mentre il termine integrale fornisce il potenziale di campo medio del sistema. L'equazione di Hartree per i bosoni a temperatura nulla è quindi un'equazione integro-differenziale non lineare di Schroedinger e rappresenta il punto di partenza per l'introduzione della teoria di Gross-Pitaevskii, adatta a descrivere i condensati nei sistemi atomici di nostro interesse, in particolare nei gas alcalini diluiti ultrafreddi puri, ossia privi di componente termica.

### 3 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Al fine di superare i problemi legati alla presenza del termine non lineare nella ricerca delle soluzioni all'equazione di Hartree, è opportuno ricorrere al concetto di pseudopotenziale, introdotto da Fermi [6], Breit, Blatt e Weisskopf, capace di ricondurre l'interazione a un problema di scattering quantistico a due corpi. Tale assunzione, che ha origine dalle condizioni al contorno fissate sulla funzione d'onda complessiva, nel caso di interesse permette infatti di ottenere risultati esatti, sostituendo al potenziale  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  nella (2.6) un'espressione che non porti a divergenze nel calcolo dell'integrale. Lo pseudopotenziale assume la forma di un'interazione a contatto

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.1)$$

dove

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (3.2)$$

con  $a_s$  lunghezza di scattering. Adottando tale convenzione e passando al limite  $(N - 1) \sim N$  la (2.6) porta all'equazione di Gross-Pitaevskii standard:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + Ng|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Tale risultato, conseguenza di un'approssimazione piuttosto grezza, risulta in prima analisi soddisfacente. In particolare il successo della GPE è dovuto al fatto che i parametri  $na_s^3$  e  $a_s/a_\perp$ , dove  $n$  rappresenta la densità delle particelle e  $a_\perp$  la lunghezza caratteristica del potenziale di confinamento, sono sufficientemente piccoli. Le condizioni di validità della GPE richiedono infatti che il sistema sia diluito e debolmente interagente, rispettivamente  $na_s^3 \ll 1$  e  $a_s/a_\perp \ll 1$ .

Tuttavia recenti esperimenti [7] portano a riesaminare attentamente l'approssimazione insita nell'utilizzo dello pseudopotenziale di *shape-independence*: l'interazione tra le particelle è supposta indipendente dalla forma, definita dal raggio effettivo  $r_e$ , e legata soltanto alla lunghezza di scattering  $a_s$ , che descrive il processo di diffusione cui sono soggetti i bosoni a causa del potenziale di contatto. Si assume quindi implicitamente che l'ampiezza di scattering rimanga costante e indipendente da  $r_e$  anche al di sopra del range energetico di interesse. Tuttavia, sperimentalmente si osserva che al crescere dei parametri  $na_s^3$  e  $a_s/a_\perp$  e conseguentemente dell'energia associata al sistema tale approssimazione non è più applicabile e le variazioni dell'ampiezza di scattering non sono trascurabili. Si evidenzia quindi la necessità di apportare alcune modifiche alla teoria.

## 4 Correzioni all'equazione di Gross-Pitaevskii

Al fine di rendere esplicita la dipendenza dalla forma dell'interazione è necessario ricorrere a un'approssimazione più accurata per descrivere il potenziale d'interazione nell'equazione di Hartree, affinando l'assunzione di Fermi e introducendo esplicitamente il legame con il raggio  $r_e$ . Una prima opzione, nota in letteratura, consiste nell'introduzione di un **potenziale effettivo** che incorpori la dipendenza dell'ampiezza di scattering dall'energia per mezzo di un'espansione del raggio efficace [8].

L'alternativa proposta nel presente lavoro prevede invece di affrontare il problema nello **spazio reciproco**, sottolineando il fatto che per atomi debolmente interagenti la condensazione si verifica proprio nello spazio dei momenti, ottenendo gli stessi risultati ma in modo più immediato. Ricordando che esplicitamente si ha

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.1)$$

con  $\bar{V}$  funzione radiale, si riconosce nel termine non lineare della (2.6) un prodotto convolutorio, la cui trasformata di Fourier, indicata di seguito con  $\mathcal{F}$ , è pari a

$$\mathcal{F} \left[ \int d\mathbf{r}' \bar{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}')|^2 \right] (\mathbf{k}) = \mathcal{F} [\bar{V}] (\mathbf{k}) \mathcal{F} [|\varphi|^2] (\mathbf{k}). \quad (4.2)$$

Per semplificare la notazione si pone

$$\mathcal{F} [\bar{V}] (\mathbf{k}) \mathcal{F} [|\varphi|^2] (\mathbf{k}) = \tilde{V}(\mathbf{k}) |\tilde{\varphi}|^2(\mathbf{k}). \quad (4.3)$$

La trasformata di Fourier del termine non lineare dell'equazione di Hartree è quindi pari al prodotto delle trasformate dei fattori che costituiscono l'integrando.

Ricordando che i sistemi fisici descritti sono caratterizzati da energie sufficientemente basse e che si ha occupazione macroscopica e quindi condensazione per  $\mathbf{k} = 0$ , è possibile sviluppare il primo termine nella (4.3) in serie di Taylor, troncata al secondo ordine, attorno a tale valore:

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \tilde{V}(0) + (\nabla \tilde{V}(0))^T \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T (H \tilde{V}(0)) \mathbf{k} \quad (4.4)$$

dove  $H$  rappresenta l'hessiana. Si noti che  $\tilde{V}(\mathbf{k}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione radiale essendo la trasformata di Fourier di una funzione radiale. Conseguentemente lo sviluppo della (4.4) si riduce a  $\tilde{V}(\mathbf{k}) = \tilde{V}(0) + \frac{1}{2} \tilde{V}''(0) k^2$ , poiché il

gradiente di una funzione radiale è nullo in 0 e il suo hessiano è una matrice multiplo dell'identità<sup>1</sup>. La (4.2) può essere riscritta come segue

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int d\mathbf{r}'\bar{V}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')|\varphi(\mathbf{r}')|^2\right](\mathbf{k}) &= \left(\tilde{V}(0) + \frac{1}{2}\tilde{V}''(0)k^2\right)\widetilde{|\varphi|^2}(\mathbf{k}) \\ &= \tilde{V}(0)\widetilde{|\varphi|^2}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\tilde{V}''(0)k^2\widetilde{|\varphi|^2}(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Ritornando allo spazio delle configurazioni per mezzo dell'antitrasformata di Fourier si ottiene rispettivamente per i due termini in (4.5)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{V}(0)\widetilde{|\varphi|^2}(\mathbf{k})\right] = \tilde{V}(0)|\varphi(\mathbf{r})|^2 \quad (4.6)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\tilde{V}''(0)k^2\widetilde{|\varphi|^2}(\mathbf{k})\right] = -\frac{1}{2}\tilde{V}''(0)(\nabla^2|\varphi(\mathbf{r})|^2) \quad (4.7)$$

ricordando la linearità dell'operatore e la definizione di momento angolare  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = -i\hbar\nabla$ . Dopo aver riscritto la (2.6) con le dovute sostituzioni si ottiene una versione preliminare dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata (MGPE):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + N\left(\tilde{V}(0)|\varphi(\mathbf{r})|^2 - \frac{1}{2}\tilde{V}''(0)(\nabla^2|\varphi(\mathbf{r})|^2)\right)\right]\varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}). \quad (4.8)$$

Ricorrendo alla teoria dello scattering quantistico a basse energie è possibile ricavare in modo esplicito i coefficienti dei termini correttivi.

Nell'approssimazione di Born [9] la funzione d'onda di scattering è rappresentata da un'onda piana incidente imperturbata, assimilabile ad una particella libera. Dato che gli effetti d'interazione nel processo di scattering sono significativi in una regione di spazio limitata, si considera il potenziale di interazione come una perturbazione il cui valore medio è calcolato, fuori dalla regione di potenziale effettivo, a partire da tale funzione d'onda. In queste condizioni è possibile semplificare l'espressione dell'ampiezza di scattering, di cui si considera solo la parte reale, pari a

$$\begin{aligned}\text{Re}[f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')] &= -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}'e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}'}\bar{V}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{m}{4\pi\hbar^2}\tilde{V}(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned}\quad (4.9)$$

---

<sup>1</sup>É possibile aggiungere ulteriori termini per un'approssimazione migliore. Lo sviluppo ridotto completo è pari a  $\tilde{V}(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{V}^{2j}(0)}{(2j)!} k^{2j}$ . Si è deciso di considerare lo sviluppo troncato al secondo ordine per non appesantire troppo i conti.

Si riconosce quindi nell'ampiezza di scattering la trasformata di Fourier del potenziale di interazione. Dopo aver ridefinito  $\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , è lecito considerare  $f(\mathbf{k})$  come funzione del solo modulo  $k$  ( $f(k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) per  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , data la dipendenza di  $\tilde{V}(\mathbf{k})$  dal solo termine scalare  $k^2$ .

Ricordando poi che le energie in gioco sono molto piccole e che nelle collisioni ultrafredde solo la componente  $s$  dell'onda diffusa è rilevante<sup>2</sup>, è possibile esprimere l'ampiezza di scattering come ampiezza dell'onda  $s$  [10], pari a

$$k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \dots \quad (4.10)$$

dove  $\delta_0$  rappresenta la fase di scattering relativa all'onda  $s$ . Per  $k$  piccoli l'espressione dell'ampiezza di scattering diventa quindi

$$f(k) = \frac{1}{k \cot(\delta_0) - i k} = \frac{1}{\frac{1}{a_s} + r_e \frac{k^2}{2} - i k}. \quad (4.11)$$

Dall'eguaglianza tra la (4.9) e la parte reale della (4.11) si ottiene immediatamente

$$\tilde{V}(0) = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \text{Re}[f](0) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \quad (4.12)$$

ritrovando l'espressione di  $g$  che compare nell'equazione di Gross-Pitaevskii standard (3.3). Il coefficiente relativo al secondo termine si ottiene derivando due volte la (4.9) e la parte reale della (4.11) in 0:

$$\tilde{V}''(0) = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} \text{Re}[f]''(0) = -\frac{8\pi\hbar^2}{m} a_s^2 \left( a_s - \frac{1}{2} r_e \right) = -g_2. \quad (4.13)$$

Si è quindi introdotta una dipendenza esplicita dalla forma dell'interazione per mezzo del range effettivo nell'espressione di  $g_2$ , che porta, a seguito delle dovute sostituzioni, all'equazione modificata di Gross-Pitaevskii (MGPE), in grado di fornire una descrizione più accurata dei condensati bosonici ultrafreddi:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + Ng |\varphi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N}{2} g_2 \left( \nabla^2 |\varphi(\mathbf{r})|^2 \right) \right] \varphi(\mathbf{r}) = \mu \varphi(\mathbf{r}). \quad (4.14)$$

È opportuno sottolineare come la dipendenza di  $g_2$  dall'ampiezza di scattering e dal raggio effettivo non sia univoca a causa dell'approssimazione insita nella (4.9). Espressioni leggermente differenti sono presenti in letteratura [11], [12].

---

<sup>2</sup>L'onda diffusa è formata da più componenti caratterizzate da differenti valori del momento angolare. L'onda  $s$ , a simmetria sferica, è caratterizzata da momento angolare nullo. Se le energie in gioco sono maggiori compaiono le componenti successive, onde  $p$ , con momento unitario, onde  $d$ , con momento pari a due, etc.

## 5 Vortici quantizzati nei superfluidi bosonici

I vortici quantizzati sono singolarità topologiche tipiche dei superfluidi in rotazione. Si tratta in sostanza di nodi della funzione d'onda macroscopica che descrive il sistema. L'esistenza dei vortici nell'elio 4 superfluido venne teorizzata da Onsager nel 1947 e osservata sperimentalmente negli anni cinquanta [13].

Riprendendo l'idea delineata nel corso dell'introduzione e delle sezioni precedenti è possibile mostrare come gli stessi gas diluiti ultrafreddi al centro della trattazione manifestino, sotto rotazione, il medesimo comportamento dell'elio liquido, rispetto al quale presentano però un sostanziale vantaggio: si può descrivere il comportamento dei gas di Bose sfruttando la teoria di Gross-Piteavskii e individuare, nel caso specifico, la soluzione vorticosa dell'equazione, capace di fornire una descrizione teorica del fenomeno. Si prenderà in considerazione soltanto il caso stazionario.

Resta da chiarire per quale motivo è possibile considerare superfluidi i gas di Bose diluiti, debolmente imperfetti. In tal senso è necessario ricorrere alla teoria della superfluidità sviluppata da Landau negli anni quaranta [14]. È noto come l'eventuale dissipazione cui è soggetto un fluido debba essere legata alla creazione spontanea di una eccitazione con momento associato  $\mathbf{p}$  non arbitraria, ma soggetta a una specifica legge di dispersione  $\varepsilon(\mathbf{p})$ , detta anche spettro di eccitazione. Si dimostra che tale eccitazione può avvenire spontaneamente solo se la velocità  $v$  del fluido è maggiore della velocità critica  $v_c$

$$v > v_c = \min_{\mathbf{p}} \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}. \quad (5.1)$$

Per un gas ideale  $v_c = 0$ , l'eccitazione è sempre spontanea e si ha quindi dissipazione. In tal senso il gas ideale non può avere comportamento superfluidico. È necessaria l'aggiunta di un'interazione tra le particelle capace di modificare  $\varepsilon(\mathbf{p})$  in modo che la velocità critica risulti maggiore di zero.

Le soluzioni linearizzate della GPE sono descritte dalla teoria delle eccitazioni elementari di Bogoliubov. Conseguentemente per un gas di Bose diluito lo spettro di eccitazione è rappresentato dalla relazione di dispersione di Bogoliubov:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)^2 + \frac{gn}{m}\mathbf{p}^2}. \quad (5.2)$$

La velocità critica diventa quindi

$$v_c = \sqrt{\frac{gn}{m}} \quad (5.3)$$

pari alla velocità del suono  $c$  nel condensato [15]. Al di sotto di tale valore i gas di Bose diluiti presentano comportamento superfluidico, ossia completa assenza di viscosità. Nel caso della MGPE l'espressione (5.2) risulta modificata, ma la (5.3) rimane invariata.

Analizzando il comportamento dei gas di Bose sotto rotazione è possibile riscontrare delle profonde differenze rispetto al caso classico. Un fluido normale confinato in un recipiente in rotazione con velocità  $\Omega$  ruota rigidamente con velocità  $v_n = \Omega r$ , dove  $r$  rappresenta la distanza dall'asse di rotazione. Il momento angolare è trasferito dal recipiente al fluido grazie alla condizione al contorno di non scivolamento (*no slip*).

Nel caso superfluidico, come anticipato, la descrizione del fenomeno richiede di richiamare la teoria di Gross-Pitaevskii. Verrà quindi presentata la trattazione, nota in letteratura, del caso standard per la GPE e si otterrà in seguito una generalizzazione valida per l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata (4.14).

In entrambi i casi la funzione d'onda del condensato è caratterizzata dal modulo  $\sqrt{n(\mathbf{r})}$  e dalla fase  $S(\mathbf{r})$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})} e^{iS(\mathbf{r})} \quad (5.4)$$

che definiscono rispettivamente la densità  $n$  del condensato e la velocità del superfluido  $\mathbf{v}_s$ . Se la fase non è costante si genera un flusso con velocità pari a

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (5.5)$$

che evidenzia la natura irrotazionale del sistema ( $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ ). Ne consegue un comportamento profondamente differente rispetto al caso classico. Ad esempio, nel caso specifico del confinamento cilindrico, di nostro interesse, la fase assume nelle nuove coordinate la forma  $S = s\vartheta$  e il momento angolare associato alla circolazione  $l_z = s\hbar$  risulta quantizzato. La velocità (5.5) diventa inversamente proporzionale al raggio

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar s}{mr} \quad (5.6)$$

e diverge quindi per  $r \rightarrow 0$ . Conseguentemente per  $r = 0$  la densità del condensato deve annullarsi per evitare la divergenza dell'energia cinetica. Si individua quindi nell'origine il nucleo del vortice.

## 6 Soluzione vorticososa per la GPE

Come anticipato nella sezione precedente, il condensato nel gas di Bose imperfetto, soggetto ad un potenziale di interazione, può essere descritto per mezzo di una funzione d'onda macroscopica  $\Psi$  la cui normalizzazione fornisce il numero totale di particelle condensate [16]. Si può dimostrare che per un sistema a molte particelle lo stato di energia minima corrisponde a una distribuzione uniforme, descritta da una funzione d'onda a molti corpi costante nello spazio [17]. Tale premessa permette di trascurare gli effetti di bordo dovuti al confinamento spaziale del sistema in analisi ed è quindi possibile considerare nullo il potenziale di confinamento stesso. L'equazione di Gross-Pitaevskii può essere riscritta

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + g|\Psi|^2 \right] \Psi = \mu\Psi \quad (6.1)$$

tenendo conto del nuovo vincolo di normalizzazione a  $N$  e non più a 1. Sfruttando la simmetria cilindrica del problema, si vuole trattare infatti un superfluido in rotazione attorno all'asse  $z$ , si pone

$$\Psi(\varrho, z, \vartheta) = \varphi(\varrho, z)e^{is\vartheta} \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (6.2)$$

Sostituendo in (6.1) e riscrivendo il laplaciano in coordinate cilindriche si ottiene

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\perp}^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2m\varrho^2} + g|\varphi(\varrho, z)|^2 \right] \varphi(\varrho, z) = \mu\varphi(\varrho, z) \quad (6.3)$$

dove  $\nabla_{\perp}^2$  racchiude soltanto le componenti radiale e assiale. Considerando la componente radiale e ricordando che  $|\Psi|^2 = |\varphi|^2 = n$ , per  $\varrho \rightarrow \infty$  si trova

$$\mu = gn. \quad (6.4)$$

Introducendo la variabile adimensionale  $x = \frac{\varrho}{\xi}$ , con  $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\mu}}$  corrispondente alla *healing length*, e ponendo  $s = 1$ , si cercano soluzioni normalizzate del tipo

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\varphi(\frac{\varrho}{\xi})}{\sqrt{n}}. \quad (6.5)$$

La (6.3), con le nuove variabili e sviluppando il laplaciano, diventa

$$\bar{\varphi}''(x) + \frac{\bar{\varphi}'(x)}{x} - \frac{\bar{\varphi}(x)}{x^2} + \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(x)^3 = 0 \quad (6.6)$$

equazione differenziale del secondo ordine con coefficienti non lineari che non può essere risolta analiticamente [18]. Le condizioni al contorno richiedono

$$\bar{\varphi}(0) = 0 \qquad \bar{\varphi}(\infty) = 1 \qquad (6.7)$$

al fine di evitare la divergenza dell'energia nel centro del vortice corrispondente all'origine e di rispettare la condizione di normalizzazione per la distribuzione uniforme del *ground state* [19]. La *healing length* rappresenta quindi la dimensione caratteristica per passare dalla singolarità allo stato uniforme. In tal senso fornisce una stima del raggio del nucleo del vortice. Si noti che tale raggio risulta effettivamente grande rispetto alle distanze interatomiche se il parametro gassoso, pari a  $\eta = a_s n^{1/3}$ , è sufficientemente piccolo [14].

L'equazione (6.6) è stata risolta numericamente con un approccio di tipo *Shooting-method*, al fine di riportare il problema alla Dirichlet con condizioni al contorno a un problema con definiti valori iniziali, tali da garantire alla soluzione l'andamento desiderato (Figura 1).

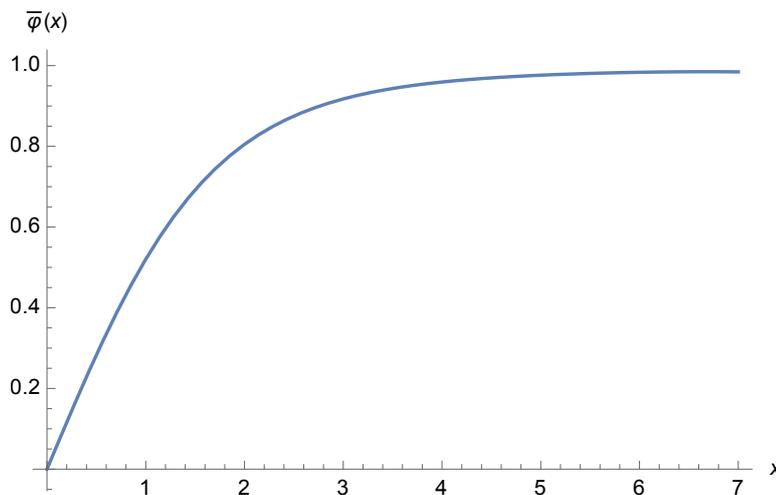


Figura 1: Andamento di  $\bar{\varphi}(x)$ , soluzione della (6.6), al variare della distanza radiale. Si noti come la funzione, monotona, sia proporzionale a  $x$  per  $x \rightarrow 0$  e tenda asintoticamente a 1 per  $x \rightarrow \infty$ .

## 7 Soluzione vorticoso per la MGPE

Il procedimento applicato nella sezione precedente può essere banalmente generalizzato per l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g |\Psi|^2 + \frac{g_2}{2} \nabla^2 (|\Psi|^2) \right] \Psi = \mu \Psi. \quad (7.1)$$

Adottando nuovamente le coordinate cilindriche e ricordando la condizione di normalizzazione, la (6.4) risulta verificata anche in questo caso e nella (6.6) compare un termine ulteriore, dovuto alla presenza della correzione al secondo ordine in (7.1), dipendente dal parametro  $k$ :

$$f(k) = -k \frac{\bar{\varphi}(x) [2x\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}''(x) + 2x(\bar{\varphi}'(x))^2 + 2\bar{\varphi}(x)\bar{\varphi}'(x)]}{x}. \quad (7.2)$$

La nuova equazione differenziale non lineare del secondo ordine da risolvere con le medesime condizioni al contorno (6.7) è quindi

$$\bar{\varphi}''(x) + \frac{\bar{\varphi}'(x)}{x} - \frac{\bar{\varphi}(x)}{x^2} + \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(x)^3 + f(k) = 0 \quad (7.3)$$

dove

$$k = \frac{ng_2m}{\hbar^2}. \quad (7.4)$$

La soluzione numerica (Figura 2) evidenzia le variazioni nel profilo del vortice al crescere del parametro  $k$ . Le curve presentano lo stesso andamento riportato in Figura 1 e relativo alla GPE, pur risultando debolmente deformate dalla presenza del termine correttivo (7.2).

In particolare le funzioni sono ancora proporzionali a  $x$  per  $x \rightarrow 0$  e la costante di proporzionalità, il valore di  $\bar{\varphi}'(0)$ , risulta inversamente proporzionale a  $k$ . Per quanto concerne il comportamento per  $x \rightarrow \infty$  si noti come per  $k < 0$  la soluzione raggiunga l'andamento asintotico più lentamente, per  $k = 0$  si ritrovi l'andamento relativo alla GPE, per  $0 < k < \frac{1}{2}$  il raggio del vortice diminuisca (Figura 3, dettaglio). Se  $k \geq \frac{1}{2}$  la soluzione non è definita: il metodo non permette più di trovare condizioni iniziali in grado di soddisfare l'andamento asintotico per  $x \rightarrow \infty$  e la soluzione diverge.

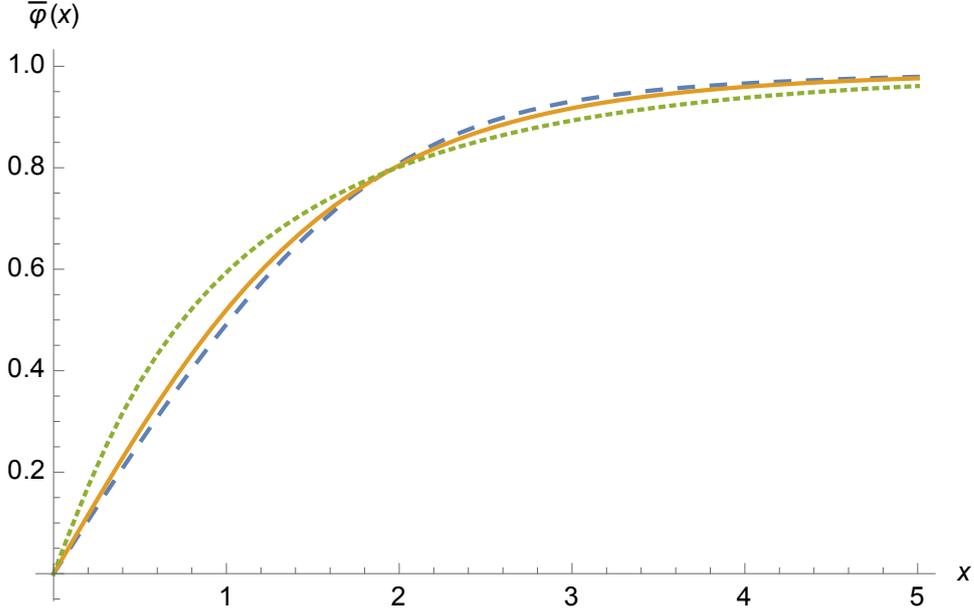


Figura 2: Andamento di  $\bar{\varphi}(x)$ , soluzione della (7.3), al variare del parametro  $k$  (7.4). La curva blu (tratteggiata) corrisponde a  $k = 0.4$ , la gialla (piana) a  $k = 0$  (GPE), la verde (punteggiata) a  $k = -2.0$ . Le funzioni presentano derivata in  $x = 0$  rispettivamente pari a  $\bar{\varphi}'(0) = 1.05$  (blu),  $\bar{\varphi}'(0) = 1.17$  (gialla) e  $\bar{\varphi}'(0) = 1.78$  (verde).

Per spiegare le variazioni nella dimensione del vortice è opportuno richiamare il concetto di *healing length* precedentemente introdotto. Tale parametro, che fornisce una stima del raggio del vortice, pari a

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\mu}}, \quad (7.5)$$

è ottenuto dalla GPE bilanciando il termine cinetico con il termine potenziale. Per la MGPE, nella (7.1) si pone  $\nabla^2 \rightarrow \frac{1}{\xi_c^2}$ , dimensionalmente coerente essendo il laplaciano l'inverso di una lunghezza al quadrato, e ricordando che  $|\Psi|^2 = n$  si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_c^2} + gn + \frac{g_2 n}{2} \frac{1}{\xi_c^2} = 0 \quad (7.6)$$

che fornisce una stima corretta della *healing length*, pari a

$$\xi_c = \sqrt{\frac{\hbar^2 - ng_2 m}{2ngm}} = \sqrt{\frac{\hbar^2(1-k)}{2ngm}}. \quad (7.7)$$

Si noti quindi come al crescere di  $k$ ,  $\xi_c$  diminuisca progressivamente e con essa il raggio del nucleo del vortice. Al contrario, per  $k$  piccoli o negativi, il profilo vorticoso si dilata e il sistema si avvicina progressivamente al comportamento di un fluido non interagente [20].

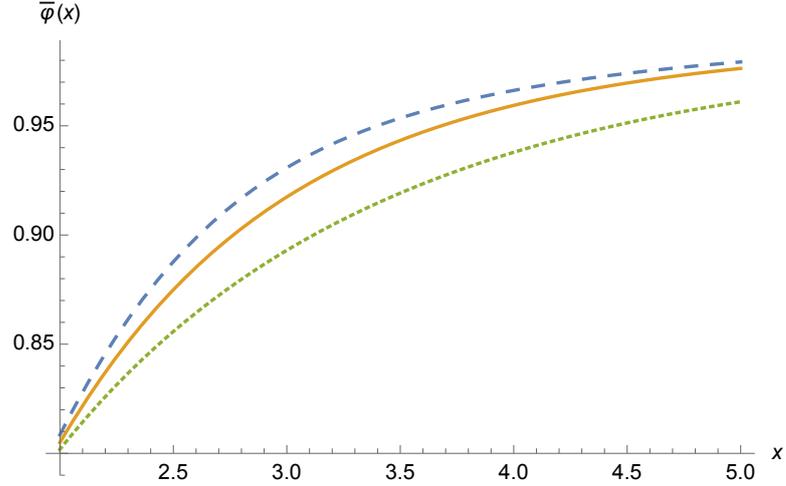


Figura 3: Dettaglio Figura 2, con gli stessi valori di  $k$  (7.4), per  $2 < x < 5$  e  $0.8 < \bar{\varphi}(x) < 1$ , proposto per evidenziare maggiormente le differenze tra le curve nel raggiungimento dell'andamento asintotico, altrimenti difficili da apprezzare visivamente.

Per fornire una giustificazione alla condizione di instabilità del vortice per  $k \geq \frac{1}{2}$  è necessario impostare uno studio qualitativo dell'equazione differenziale per  $x \rightarrow \infty$ . Si noti come l'andamento desiderato richieda di imporre un limite superiore al valore del parametro  $k$ . A partire dalla (7.3), imponendo  $\bar{\varphi}(x)' = 0$  per  $x \rightarrow \infty$  e trascurando tutti i termini inversamente proporzionali a  $x$ , si ottiene

$$\bar{\varphi}''(x)(1 - 2k\bar{\varphi}(x)^2) + \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(x)^3 = 0. \quad (7.8)$$

L'equazione è risolvibile analiticamente e la soluzione, posto  $0 < \bar{\varphi}(x) < 1$ , è definita per  $k < \frac{1}{2}$ .

## 8 Riduzione unidimensionale: solitoni *dark*

Per valutare differenze e analogie con i risultati ottenuti, è possibile impostare un confronto con il caso noto in letteratura [21] dei solitoni *dark*, interpretabili come versione unidimensionale del problema, risolubile analiticamente. Si tratta di onde stabili, osservate per la prima volta nel 1987 [22], soluzioni stazionarie della versione unidimensionale dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata dipendente dal tempo (*time-dependent* MGPE 1D), che non si disperdono grazie alla presenza del termine non lineare, in grado di compensare il termine cinetico dispersivo. Le soluzioni solitoniche possono essere riviste come singolarità topologiche proprie del condensato di Bose-Einstein caratterizzate dall'annullamento della funzione d'onda nell'origine, dove si immagina la presenza di una barriera infinita [23], soggette a un potenziale di confinamento armonico a simmetria cilindrica rispetto all'asse  $z$  tale da rendere il problema quasi-1D

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2). \quad (8.1)$$

Si ottiene un sistema non uniforme, stazionario, confinato in un dominio semi-infinito e quasi-1D. Si cercano funzioni d'onda per il condensato del tipo

$$\varphi(z, t) = f(z - vt)e^{iv(z-vt)}e^{-i(\frac{1}{2}v^2 - \mu)t}, \quad (8.2)$$

poste uguali a zero la densità in corrispondenza della barriera e la velocità  $v$ .

La funzione reale  $f$  soddisfa l'equazione

$$-\frac{1}{2}f'' + \gamma f^3 + \frac{1}{2}\gamma_2 (f^2)'' f = \mu f \quad (8.3)$$

con  $\gamma = 2\bar{a}_s \left(1 - \bar{a}_s \left(\frac{1}{3}\bar{a}_s - \frac{1}{2}\bar{r}_e\right)\right)$  e  $\gamma_2 = 2\bar{a}_s^2 \left(\frac{1}{3}\bar{a}_s - \frac{1}{2}\bar{r}_e\right)$ , dove  $\bar{a}_s = a_s/a_{\perp}$ ,  $\bar{r}_e = r_e/a_{\perp}$  e  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(mw_{\perp})}$ , ottenuta sostituendo la (8.2) nella versione adimensionalizzata della *time-dependent* MGPE 1D

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2} + \gamma|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\gamma_2\frac{d^2}{dz^2}|\varphi|^2\right]\varphi(z, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z, t). \quad (8.4)$$

Anche in questo caso si impone  $f = 1$  per  $z \rightarrow \infty$ . L'equazione (8.3) è risolvibile analiticamente [21] e, posto  $\gamma = 1/2$ , porta a

$$\sqrt{1 - 2\gamma_2 f(z)^2} \operatorname{arctanh}(f(z)) = \frac{z}{\sqrt{2}}. \quad (8.5)$$

Come per la (7.8), stabilito  $0 < |f(z)|^2 < 1$ , è necessario imporre un limite superiore a  $\gamma_2 < \frac{1}{2}$  per rispettare le condizioni di esistenza della radice.

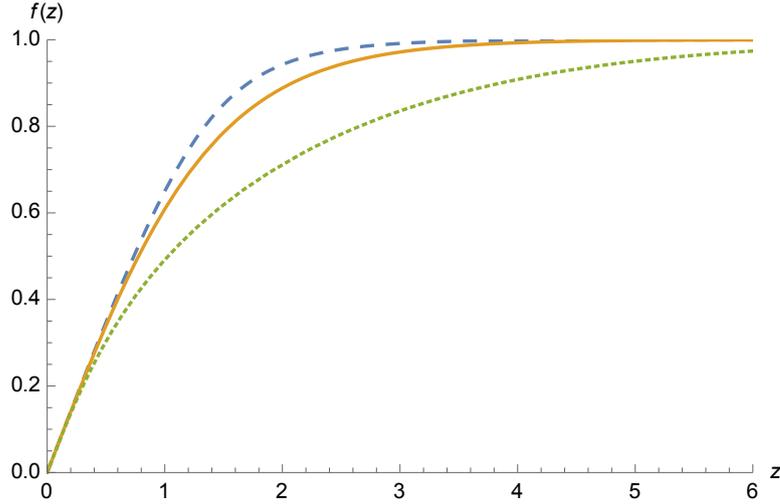


Figura 4: Andamento di  $f(z)$ , soluzione della (8.3), al variare del parametro  $\gamma_2 = 2\bar{a}_s^2 \left( \frac{1}{3}\bar{a}_s - \frac{1}{2}\bar{r}_e \right)$ . La curva blu (tratteggiata) corrisponde a  $\gamma_2 = 0.2$ , la gialla (piana) a  $\gamma_2 = 0$ , la verde (punteggiata) a  $\gamma_2 = -1.5$ . Le funzioni, monotone, come per la soluzione vorticoso sono proporzionali a  $z$  per  $z \rightarrow 0$  e tendono asintoticamente a 1 per  $z \rightarrow \infty$ .

Il comportamento della soluzione al variare del parametro  $\gamma_2$  (Figura 4) risulta compatibile con le variazioni del profilo vorticoso, presentate in Figura 2 e Figura 3 in funzione di  $k$ , per quanto concerne l'andamento asintotico: al crescere di  $\gamma_2$  la soluzione tende a 1 più velocemente. Una sostanziale differenza si riscontra invece analizzando il comportamento delle curve per  $z \rightarrow 0$ . Nel caso solitonico è infatti evidente che per  $z \rightarrow 0$  la dipendenza di  $f'(z)$  da  $\gamma_2$  diventa trascurabile. Analizzando per comodità la funzione inversa  $z(q) : q = f(z) \rightarrow z$  che si ottiene per banale inversione degli assi, si nota come il limite in zero della derivata prima risulta indipendente da  $\gamma_2$ :

$$\lim_{q \rightarrow 0} z'(q) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-2\gamma_2 q^2}}{1-q^2} - \frac{2\sqrt{2}\gamma_2 q \operatorname{arctanh}(q)}{\sqrt{1-2\gamma_2 q^2}} = \sqrt{2}. \quad (8.6)$$

## 9 Conclusioni

Il lavoro svolto ha permesso di evidenziare come gli effetti di range finito, dovuti alla presenza di termini correttivi nell'equazione di Gross-Pitaevskii, influenzino il comportamento dei condensati di Bose nei gas alcalini ultrafreddi. Grazie all'analisi specifica del fenomeno della vorticità quantizzata, è stato possibile mettere in luce interessanti ripercussioni dal punto di vista fisico non apprezzabili nella teorizzazione standard e ad ora trascurate in letteratura. Oltre ai fenomeni evidenziati, come le variazioni nella dimensione del raggio del vortice, la condizione di instabilità della funzione d'onda e la forte dipendenza dai valori iniziali, si potrebbero individuare altre peculiarità nel comportamento dei superfluidi affinando ulteriormente l'analisi, con una modellizzazione ancor più precisa del potenziale interatomico [24] e una procedura più raffinata per introdurre il legame con la teoria dello scattering quantistico. Il modello, punto di partenza per la descrizione dei sistemi diluiti a molti corpi, rivela quindi anche in questo contesto le proprie potenzialità, che giustificano il grande successo e il profondo interesse suscitato nel corso degli ultimi decenni.

## Riferimenti bibliografici

- [1] F. London, *The  $\lambda$ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy*, Nature **141**, 643 (1938)
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995)
- [3] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. (URSS), **11**, 23 (1947)
- [4] J. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates* (Oxford University Press, Bristol, 2003)
- [5] L. Salasnich, *Quantum Physics of Light and Matter* (Springer, Berlin, 2014)
- [6] E. Fermi, *Motion of neutrons in hydrogenous substances*, Ricerca Scientifica **7**, 13 (1936)
- [7] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate* Nature **392**, 151 (1998)
- [8] H. Fu, Y. Wang, B. Gao, *Beyond the Fermi pseudopotential: A modified Gross-Pitaevskii equation*, Phys. Rev., A **67**, 053612 (2003)
- [9] S. Blügel, *Scattering Methods for Condensed Matter Research* (Forschungszentrum Jülich, 2012)
- [10] F. Serwane, *Deterministic Preparation of a Tunable Few-Fermion System* (Heidelberg, 2011)
- [11] A. Collin, P. Massignan, C. J. Pethick, *Energy-dependent effective interactions for dilute many-body systems*, Phys. Rev., A **75**, 013615 (2007)
- [12] H. Veksler, S. Fishman, *Simple model for interactions and correlations to the Gross-Pitaevskii equation*, Phys. Rev., A **90**, 023620 (2014)
- [13] H. E. Hall, W. F. Vinen, *The rotation of Helium II*, The Royal Society **238**, 1213 (1956)

- [14] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Fisica statistica, Teoria dello stato condensato* (Editori Riuniti, Roma, 1997)
- [15] C. Roman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, W. Ketterle, *Evidence for a Critical Velocity in a Bose-Einstein Condensated Gas*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999)
- [16] N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. (URSS) **11**, 23 (1947)
- [17] A. L. Fetter, *Vortices in an Imperfect Bose Gas. I. The Condensate*, Phys. Rev. **138**, number 2A (1965)
- [18] M. P. Kawatra, P. K. Pathria, *Quantized Vortices in an Imperfect Bose Gas and the Breakdown of Superfluidity in Liquid Helium II*, Phys. Rev. **151**, number 1 (1966)
- [19] L. P. Pitaevskii. *Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas*, J. Exptl. Theoret. Phys. (URSS) **40**, 646-651 (1961)
- [20] S. Heupts, *Quantized vortices in dilute Bose gases* (Heidelberg, 2013)
- [21] F. Sgarlata, G. Mazzeola, L. Salasnich, *Effective-range signatures in quasi-1D matter waves: sound velocity and solitons*, J. Phys. B, **48**, 115301 (2015)
- [22] A. M. Weiner, J. P. Heritage, R. J. Hawkins, R. N. Thurston, E. M. Kirschner, D. E. Leaird, W. J. Tomlinson, *Experimental Observation of the Fundamental Dark Soliton in Optical Fibers*, Phys. Rev. Lett **61**, 2445 (1988)
- [23] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill Book Company, New York, 2003)
- [24] L. Salasnich, F. Toigo, *Nonlocal effects in the one-loop field theory of interaction Bose gases*, 03.75.Ss 03.70.+k 05.70.Fh 03.65.Yz (2015)