



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Sistemi quantistici con spettro singolarmente continuo

Candidato:
Tommaso Macrelli
matr. 1069146

Relatore:
Prof. Pieralberto Marchetti

Sommario

Nella tesi si studiano sistemi di particelle quantistiche che presentano uno spettro dell'energia singolarmente continuo. In particolare, prendiamo in esame due esempi fisici: quasicristalli unidimensionali ed elettroni in un reticolo bidimensionale periodico soggetti ad un campo magnetico uniforme ortogonale al reticolo. L'ultima parte del lavoro è dedicata allo studio delle proprietà spettrali dell'operatore almost Mathieu, il quale emerge dalla descrizione matematica del secondo esempio considerato.

Indice

1	Presupposti Teorici	4
1.1	Richiami di Teoria della Misura	4
1.1.1	Decomposizione di Lebesgue per misure finite	5
1.1.2	Misure Boreliane su \mathbb{R}	5
1.1.3	Integrale di Lebesgue-Stieltjes	6
1.2	Richiami di Teoria Spettrale	10
1.2.1	Spettro di un Operatore limitato. Definizione e Proprietà	10
1.2.2	Il Teorema Spettrale	11
1.2.3	Decomposizione dello Spettro di un Operatore limitato autoaggiunto	13
2	Quasicristalli	15
2.1	Definizione di Cristallo	16
2.2	Elettroni in quasicristalli unidimensionali	20
3	Elettroni di Bloch in un Campo Magnetico Uniforme	22
3.1	Descrizione matematica del modello fisico	23
4	L'Operatore Almost Mathieu	26
4.1	Struttura dello spettro di $H_{\omega,\lambda,\theta}$. La farfalla di Hofstadter	26
4.2	Il "Ten Martini Problem"	31
4.3	Decomposizione spettrale. Transizione metallo-isolante e spettro singolarmente continuo	32

Prefazione

Dicono che colui che per primo
divulgò la natura della
commensurabilità e
dell'incommensurabilità a uomini
che non meritavano d'essere messi
a parte di queste conoscenze,
venne in tal odio agli altri
Pitagorici, che questi non solo lo
cacciarono dalla comunità, ma
anche gli costruirono un sepolcro
come se fosse morto, lui che una
volta era stato loro amico.

De vita pythagorica
GIAMBlico

Agli occhi di un uomo del Ventunesimo secolo, la speciale avversione che i Pitagorici riservavano ai numeri irrazionali appare oltremodo eccessiva. Superate le idiosincrasie filosofiche del passato, oggi non c'è alcuna ragione di credere che i numeri irrazionali "non siano degni" di descrivere la Natura al pari dei numeri razionali. Proprio per questo motivo troviamo sorprendenti e forse "controintuitivi" i sistemi fisici il cui comportamento qualitativo dipenda in modo *critico* dalla razionalità o irrazionalità di un qualche parametro caratteristico. In tempi recenti, simili modelli sono emersi dallo studio di alcuni problemi di Fisica dello Stato Solido, tipicamente associati a particelle soggette ad un potenziale *quasi periodico* (in Inglese, *almost periodic*). Lo spettro dell'energia di tali sistemi può esibire proprietà spettrali "insolite" [1]. Un primo fenomeno è la tendenza dei *gap* dello spettro dell'energia ad essere densi. Una seconda caratteristica si manifesta nella decomposizione spettrale, ed è la propensione di questi sistemi ad avere *spettro singolarmente continuo*, un tipo di spettro in un certo senso intermedio tra lo spettro assolutamente continuo e lo spettro puramente puntuale.

Diverse sono le motivazioni fisiche alla base dello studio degli operatori di Schrödinger con potenziali quasi periodici, noi ne prenderemo in esame due: la scoperta dei *quasicristalli* e lo studio di un elettrone di Bloch in un campo magnetico uniforme.

I quasicristalli sono sistemi non periodici di atomi che producono figura di diffrazione puntuale. Scoperti nel 1982, hanno inaugurato un nuovo paradigma in cristallografia e hanno sollevato domande fondamentali su quale distribuzione di materia produca una figura di diffrazione puntuale. Il Capitolo 2 è principal-

mente dedicato alla definizione di questi sistemi.

Il Capitolo 3 tratta il moto di un elettrone in un reticolo bidimensionale periodico soggetto ad un campo magnetico uniforme, ortogonale al reticolo. In questo sistema, l'incommensurabilità compare nel rapporto tra il flusso magnetico attraverso una cella del reticolo e il quanto di flusso magnetico: se tale rapporto è irrazionale, il sistema manifesta una notevole ricchezza di proprietà spettrali interessanti. Pur essendo un problema classico di Fisica dello Stato Solido, questo argomento è stato preso in esame in un gran numero di pubblicazioni recenti, e continua ad essere un campo attivo di ricerca. Dallo studio di un elettrone di Bloch in un campo magnetico uniforme emerge infatti uno degli operatori di Schrödinger unidimensionali più studiati, l'*operatore almost Mathieu*, il cui studio occuperà la parte conclusiva di questo lavoro (Capitolo 4).

La descrizione matematica di questi sistemi fisici richiede la conoscenza di diverse nozioni di Teoria della Misura e di Teoria Spettrale: per questa ragione, nel Capitolo 1 richiameremo brevemente alcuni risultati matematici importanti per lo sviluppo della trattazione.

Il proposito che ha guidato questo lavoro è quello di coniugare intuizione fisica e rigore matematico, nella convinzione che rappresentino aspetti complementari della ricerca teorica. L'autore desidera esprimere la propria gratitudine al Professor Peralberto Marchetti e al Professor Pier Domenico Lamberti per i contributi, diretti e indiretti, a questo lavoro. Voglio inoltre ringraziare i miei genitori, Doriana Silvi e Guglielmo Macrelli, per tutto il supporto morale ricevuto.

Capitolo 1

Presupposti Teorici

In questo primo Capitolo ci proponiamo di introdurre rigorosamente la nozione di *spettro singolarmente continuo* per un operatore limitato autoaggiunto in uno spazio di Hilbert. Presupponendo che il lettore abbia familiarità con i concetti elementari della Teoria della Misura e dell'Integrazione, richiameremo in modo sintetico definizioni e risultati fondamentali per le parti successive del lavoro. Per una discussione approfondita sulle nozioni di base della Teoria della Misura, nonché per una trattazione più ampia degli argomenti trattati nella Sezione 1.1, si rimanda alla lettura di [2], principale testo di riferimento per quanto riguarda questa prima Sezione. Enunceremo il *Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym* (Teorema 1), che ci fornirà una prima decomposizione (la *decomposizione di Lebesgue*) per generiche misure positive finite.

Ci restringeremo poi al caso delle *misure positive Boreliane limitate* su \mathbb{R} , per le quali esiste una decomposizione più fine di quella di Lebesgue. Mostriamo come sia possibile decomporre tale misura in una parte *puramente puntuale* e in una parte *continua*, la quale sarà a sua volta decomposta – grazie al Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym – in una parte *assolutamente continua* e in una parte *singolarmente continua*. Ciò costituisce il principale risultato della Sezione 1.1. A fare da *liaison* con la *Teoria Spettrale* (Sezione 1.2) sarà la nozione di *Integrale di Lebesgue-Stieltjes*, introdotta nella Sottosezione 1.1.3 di questo primo Capitolo.

Nella Sezione 1.2 saranno richiamate importanti nozioni di Teoria Spettrale, che ci consentiranno di studiare lo spettro di un operatore lineare limitato in uno spazio di Hilbert. La trattazione seguirà principalmente [3] e [4]. Presenteremo alcune proprietà dello spettro di un operatore (Sottosezione 1.2.1), enunceremo il *Teorema spettrale* (Teorema 7) e daremo la definizione di *misura spettrale*. Infine (Definizione 11), forniremo la descrizione dello spettro di un operatore in termini di *spettro puramente puntuale*, *spettro assolutamente continuo* e *spettro singolarmente continuo*.

1.1 Richiami di Teoria della Misura

Introduciamo brevemente alcuni elementi di Teoria della Misura a cui in seguito faremo riferimento.

1.1.1 Decomposizione di Lebesgue per misure finite

In questa Sottosezione forniremo un primo risultato di decomposizione valido per misure positive finite. Ricordiamo che uno *spazio misurabile* è una coppia (X, \mathcal{M}) dove X è un insieme non vuoto e \mathcal{M} è una σ -algebra di parti di X .

Sia (X, \mathcal{M}) spazio misurabile.

Definizione 1. Due misure positive finite μ e ν su (X, \mathcal{M}) si dicono *mutuamente singolari* se esistono $E, F \in \mathcal{M}$ tali che $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = X$, $\nu(E) = 0$, $\mu(F) = 0$. Indicheremo tale relazione come: $\mu \perp \nu$.

Parlando in modo euristico, dire che ν e μ sono mutuamente singolari significa che ν e μ "vivono su insiemi disgiunti".

Definizione 2. Siano μ e ν misure positive finite su (X, \mathcal{M}) . Diremo che μ è *assolutamente continua* rispetto a ν se $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{M}$ tale che $\nu(E) = 0$, e scriveremo $\mu \ll \nu$.

Le nozioni di mutua singolarità e assoluta continuità sono in un certo senso antitetiche: più precisamente, se $\mu \perp \nu$ e $\mu \ll \nu$, allora $\mu = 0$ (la dimostrazione è quasi immediata).

Enunciamo ora il fondamentale

Teorema 1 (di Lebesgue-Radon-Nikodym). *Siano μ e ν misure positive finite su (X, \mathcal{M}) . Allora esistono uniche λ, ρ misure positive finite su (X, \mathcal{M}) tali che*

$$\lambda \perp \nu, \quad \rho \ll \nu \quad e \quad \mu = \lambda + \rho.$$

Inoltre, esiste una funzione non negativa f su X ν -integrabile tale che $d\rho = f d\nu$, e due funzioni di questo tipo sono uguali quasi ovunque rispetto alla misura ν .

Dim. [Omessa, vedi: [2]]. □

La decomposizione $\mu = \lambda + \rho$ dove $\lambda \perp \nu$ e $\rho \ll \nu$ è detta *decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a ν* .

Tale risultato può essere generalizzato sia a misure con segno σ -finite che a misure complesse: ciononostante, ai nostri fini sarà sufficiente l'enunciato presentato.

1.1.2 Misure Boreliane su \mathbb{R}

Ricordiamo la definizione di misura complessa.

Definizione 3. Sia (X, \mathcal{M}) spazio misurabile. Una *misura complessa* su (X, \mathcal{M}) è una funzione $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

- $\nu(\emptyset) = 0$
- se $\{E_j\}$ è una successione disgiunta di sottoinsiemi in \mathcal{M} , allora $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$, dove la somma al secondo membro converge assolutamente.

In particolare, i valori $\pm\infty$ non sono ammessi. Una misura positiva è una misura complessa se e solo se è finita. Definiamo *variazione totale* di una misura complessa ν la misura positiva $|\nu|$ definita da

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_1^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ disgiunti}, \bigcup_{j=1}^n E_j \subseteq E \right\}.$$

Di qui in avanti, focalizzeremo la nostra attenzione sulle misure (positive o complesse) su \mathbb{R} il cui dominio è la σ -algebra di Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; tali misure sono dette *misure Boreliane su \mathbb{R}* . Nel seguito, indicheremo con m la *misura di Lebesgue su \mathbb{R}* e la notazione *quasi ovunque* (q.o.) sarà, ove non diversamente specificato, riferita ad essa.

Definizione 4. Sia μ una misura positiva Boreliana su \mathbb{R} .

- μ è detta *puramente puntuale* se esistono un insieme numerabile $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$ e numeri positivi c_j tali che $\sum_j c_j < \infty$ e $\mu = \sum_j c_j \delta_{x_j}$, dove δ_x è la misura di Dirac centrata in x .
- μ è detta *continua* se $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ovviamente, se μ è puramente puntuale allora $\mu \perp m$. Altrettanto ovviamente, se $\mu \ll m$ allora μ è continua.

Enunciamo e dimostriamo ora il seguente teorema di decomposizione:

Proposizione 1. *Ogni misura positiva Boreliana su \mathbb{R} può essere scritta in modo unico come $\mu = \mu_{pp} + \mu_c$, dove μ_{pp} è puramente puntuale e μ_c è continua.*

Dim. Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ e $E_k = \{x \in E : \mu(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Facilmente si ha: $E = \bigcup_k E_k$. Unioni numerabili di insiemi numerabili sono numerabili, quindi basta dimostrare che gli insiemi E_k sono finiti. Supponiamo per assurdo che esista k tale che E_k sia infinito. Allora esiste una successione di singoletti disgiunti $\{x_j\}$ tale che $x_j \in E_k$ per ogni j . La serie $\sum_j \mu(\{x_j\})$ deve convergere, ma $\sum_j \mu(\{x_j\}) \geq \frac{1}{k} \sum_j 1 = +\infty$, assurdo. Quindi E_k è finito per ogni $k \in \mathbb{N}$ e E è numerabile. Abbiamo pertanto che $\mu_{pp}(A) = \mu(A \cap E)$ è puramente puntuale e $\mu_c(A) = \mu(A \setminus E)$ è continua. L'unicità è immediata. \square

Notiamo inoltre che $\mu_{pp} \perp \mu_c$, giacchè E è nullo per μ_c e $\mathbb{R} \setminus E$ è nullo per μ_{pp} .

Ora siamo pronti per mostrare il risultato principale di questa sezione. Sia $\mu = \mu_{pp} + \mu_c$ una misura positiva Boreliana su \mathbb{R} . Applicando il Teorema 1 a μ_c , possiamo scrivere in modo unico $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$, con $\mu_{ac} \ll m$ e $\mu_{sc} \perp m$. Possiamo pertanto scrivere in modo unico:

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc} \tag{1.1}$$

dove μ_{pp} è puramente puntuale, μ_{ac} è assolutamente continua rispetto a m e μ_{sc} è una misura *singolarmente continua*, cioè continua ma singolare rispetto alla misura di Lebesgue, $\mu_{sc} \perp m$.

Torneremo a commentare questo importante risultato alla fine della prossima Sezione.

1.1.3 Integrale di Lebesgue-Stieltjes

Scopo di questa Sottosezione è fornire un'importante caratterizzazione per le misure Boreliane *regolari* su \mathbb{R} . Ciò consentirà di definire la nozione di *integrale di Lebesgue-Stieltjes*, una generalizzazione del familiare integrale di Lebesgue, oltre a offrire una possibile rilettura della decomposizione (1.1) appena introdotta.

Definizione 5. Una misura positiva Boreliana su \mathbb{R} si dice *regolare* se è finita sugli intervalli limitati.

Una misura con segno o complessa Boreliana su \mathbb{R} , ν , si dice *regolare* se $|\nu|$ è regolare.

Partiamo come sempre dal caso delle misure positive: per fissare le idee, consideriamo la misura di Lebesgue m . Come noto, dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $m((a, b]) = b - a$. Ora, potremmo voler definire una misura positiva Boreliana finita sugli intervalli, μ , richiedendo che $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$, dove $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un'opportuna funzione. In particolare, F dovrà essere monotona crescente e continua a destra, in quanto, per la continuità dall'alto della misura,

$$F(b) - F(a) = \mu((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((a, b + n^{-1}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(b + n^{-1}) - F(a),$$

da cui $F(b) = F(b^+)$. Rendiamo questo discorso rigoroso enunciando il seguente

Teorema 2. Sia F una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} , limitata monotona crescente e continua a destra. Allora esiste un'unica misura positiva Boreliana regolare finita μ_F tale che $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Inoltre, se μ è una misura positiva Boreliana regolare finita, allora la funzione F di \mathbb{R} in \mathbb{R} definita da

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è limitata monotona crescente e continua a destra, e tale che $\mu = \mu_F$. Infine, $\mu_{F_1} = \mu_{F_2}$ se e solo se $F_1 - F_2$ è costante.

Dim. [Omessa, vedi: [2]]. □

Abbiamo quindi una corrispondenza tra misure positive Boreliane regolari finite e funzioni monotone crescenti continue a destra. Non si tratta di una corrispondenza biunivoca, in quanto funzioni che differiscono per una costante additiva generano la stessa misura. Tuttavia, possiamo rimuovere questa ambiguità sulla scelta di F imponendo $F(-\infty) = 0$ (il limite esiste per la monotonia ed è finito per la limitatezza). In questo caso, diremo che F è *normalizzata*. Ora abbiamo una corrispondenza biunivoca, e possiamo scrivere $\mu_F((-\infty, x]) = F(x)$. Passiamo alle misure complesse. Il ruolo giocato dalle funzioni monotone crescenti continue a destra nel caso delle misure positive sarà ora ricoperto dalle funzioni a *variazione limitata* (in Inglese, *bounded variation*). Intuitivamente, se F è una funzione regolare che rappresenta la posizione di un punto materiale che si muove lungo la retta reale al variare del tempo, la *variazione totale* di F nell'intervallo $[a, b]$ è la distanza che il punto percorre dal tempo a al tempo b , ovvero l'integrale del modulo della sua velocità: $\int_a^b F'(t) dt$. Vogliamo generalizzare questa idea al caso di funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{C} e senza nessuna ipotesi di regolarità, pertanto introduciamo la seguente

Definizione 6. Sia F funzione di \mathbb{R} in \mathbb{C} . La *variazione totale* di F è una funzione V_F di \mathbb{R} in $[0, +\infty]$ definita da:

$$V_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, -\infty < x_0 < \dots < x_n = x \right\}.$$

V_F è una funzione monotona crescente, pertanto esiste (eventualmente infinito) $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_F(x)$. Se tale limite è finito, diremo che F è a *variazione limitata* su \mathbb{R} , e denoteremo lo spazio di queste funzioni con BV . Raccogliamo alcuni risultati nella seguente

Proposizione 2. *Se $F, G \in BV$ e $a, b \in \mathbb{C}$, allora $aF + bG \in BV$. Inoltre:*

- se $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e crescente, allora $F \in BV$;
- se $F \in BV$, allora $F(x \pm) = \lim_{t \rightarrow x^\pm} F(t)$ esistono per ogni $x \in \mathbb{R}$, come esistono $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$. Inoltre, detta $G(x) = F(x+)$, F e G sono derivabili q.o. e $F' = G'$ q.o.

Dim. [Omessa, vedi: [2]]. □

Similmente al caso delle misure positive finite, dove abbiamo potuto stabilire una corrispondenza biunivoca con le funzioni limitate monotone crescenti e continue a destra introducendo una *normalizzazione*, anche qui dovremo fare qualcosa di analogo. Rigorosamente, ciò si concretizza nella seguente

Definizione 7.

$$NBV = \{F \in BV : F \text{ è continua a destra e } F(-\infty) = 0\}$$

è detto spazio delle funzioni a *variazione limitata normalizzate*.

Teorema 3. *Se μ è una misura complessa Boreliana su \mathbb{R} e $F(x) = \mu((-\infty, x])$, allora $F \in NBV$. Viceversa, se $F \in NBV$, allora esiste un'unica misura complessa Boreliana su \mathbb{R} , μ_F , tale che $F(x) = \mu((-\infty, x])$; inoltre, $|\mu_F| = \mu_{V_F}$.*

Dim. [Omessa, vedi: [2]]. □

Se $F \in NBV$, si usa denotare l'integrale di una funzione misurabile $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ rispetto alla misura μ_F con $\int g dF$ o $\int g(x) dF(x)$. Questi integrali sono detti *integrali di Lebesgue-Stieltjes*.

Come preannunciato, chiudiamo questo lungo preambolo di Teoria della Misura ritornando alla decomposizione (1.1). Forti del Teorema 2, ci chiediamo come caratterizzare μ_{pp} , μ_{ac} e μ_{sc} in termini di funzioni reali di variabile reale limitate monotone crescenti continue a destra e normalizzate. Per le misure puramente puntuali vale la seguente

Proposizione 3. *Sia F funzione reale di variabile reale limitata monotona crescente continua a destra e normalizzata. μ_F è puramente puntuale se e solo se esistono un insieme numerabile $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$ e numeri positivi c_j tali che $\sum_j c_j < \infty$ e $F(x) = \sum_j c_j H(x - x_j)$, dove H è la funzione gradino di Heaviside:*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dim. Basta notare che la misura μ_F è tale che:

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x) = \sum_j c_j H(x - x_j) = \sum_j c_j \delta_{x_j}((-\infty, x])$$

e ricordare la Definizione 4. □

Passiamo alle misure continue. Iniziamo con la seguente

Proposizione 4. *Se F è funzione reale di variabile reale limitata monotona e continua a destra, allora $\mu_F(\{x\}) = F(x) - F(x-)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

Dim. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $\bigcap_k (x - k^{-1}, x] = \{x\}$, $k > 0$, quindi per la continuità dall'alto della misura:

$$\begin{aligned}\mu_F(\{x\}) &= \mu_F\left(\bigcap_k (x - k^{-1}, x]\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_F((x - k^{-1}, x]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (F(x) - F(x - k^{-1})) = F(x) - F(x-).\end{aligned}$$

□

Ricordando che F è continua a destra, la misura del singoletto $\{x\}$ è quindi il salto $F(x+) - F(x-)$ di F in x . Possiamo dunque caratterizzare subito le misure continue:

Proposizione 5. *Sia F funzione reale di variabile reale limitata monotona continua a destra e normalizzata. μ_F è continua se e solo se F è continua.*

Dim. Se F è continua, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $F(x) = F(x-)$, da cui $\mu_F(\{x\}) = 0$ per la Proposizione 4.

Viceversa, se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\mu_F(\{x\}) = 0$, allora $F(x) = F(x-)$ per la Proposizione 4. F è continua da destra, $F(x+) = F(x)$, da cui $F(x-) = F(x+)$ e pertanto F è continua. □

Per finire, enunciamo senza dimostrare la seguente

Proposizione 6. *Se F è funzione reale di variabile reale limitata monotona continua a destra e normalizzata, allora $F' \in L^1(m)$. Inoltre:*

- $\mu \perp m$ se e solo se $F' = 0$ q.o.
- $\mu \ll m$ se e solo se $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$.
- $\mu \ll m$ se e solo se $F(x)$ è assolutamente continua.

Dim. [Omessa, vedi: [2]]. □

Consideriamo una misura positiva Boreliana su \mathbb{R} , $\mu = \mu_{pp} + \mu_c = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}$, e la funzione reale di variabile reale limitata monotona continua a destra e normalizzata F , tale che $\mu = \mu_F$. Caratterizziamo le funzioni F_{pp} , F_c , F_{ac} , F_{sc} normalizzate che corrispondono rispettivamente a μ_{pp} , μ_c , μ_{ac} , μ_{sc} tramite il Teorema 2.

- F_{pp} è discontinua esattamente in $E = \{x \in \mathbb{R} : \mu(x) \neq 0\}$ e tale che $F'_{pp} = 0$ q.o.
- F_c è continua.
- F_{ac} è assolutamente continua e tale che $F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^x F'_{ac}(t) dt$.
- F_{sc} è continua e tale che $F'_{sc} = 0$ q.o.

Si ha che $F = F_{pp} + F_c = F_{pp} + F_{ac} + F_{sc}$.

Non è banale trovare una funzione F non identicamente nulla su \mathbb{R} tale che F sia continua e con derivata nulla quasi ovunque: un noto esempio è la *funzione di Cantor*.

1.2 Richiami di Teoria Spettrale

In questa Sezione verranno presentate alcune nozioni di Teoria Spettrale, che troveranno concreta applicazione nel Capitolo 4. Arriveremo ad enunciare la decomposizione spettrale per un operatore limitato autoaggiunto e a definire lo *spettro singolarmente continuo*. Riassumiamo di seguito le nostre notazioni.

Consideriamo uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , dotato del prodotto scalare che denoteremo con $\langle u, v \rangle$ per ogni $u, v \in \mathcal{H}$. Adottiamo la convenzione per la quale il prodotto scalare è antilineare rispetto al primo argomento e lineare rispetto al secondo. Ricordiamo che \mathcal{H} munito della norma $\mathcal{H} \ni u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ è spazio normato completo, ovvero spazio di Banach. Supporremo sempre che \mathcal{H} sia separabile.

Un operatore (lineare) T in \mathcal{H} è una mappa lineare a valori in \mathcal{H} , $u \mapsto Tu$, definita in un sottospazio \mathcal{H}_0 di \mathcal{H} . Indichiamo il dominio di T con $D(T)$ e l'immagine di T con $R(T)$. Diremo che T è limitato se è continuo da $D(T)$ a \mathcal{H} . Se $D(T) = \mathcal{H}$, denotiamo lo spazio degli operatori lineari continui in \mathcal{H} con $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tale spazio, munito della norma operatoriale

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$$

è spazio normato completo. Qualora $D(T) \neq \mathcal{H}$, supporremo sempre che $D(T)$ sia denso in \mathcal{H} . Ricordiamo che, sotto questa ipotesi di densità, se T è limitato allora ammette un'unica estensione continua a \mathcal{H} .

Indichiamo con T^* l'operatore aggiunto di T . Diremo che T è autoaggiunto se $T = T^*$.

1.2.1 Spettro di un Operatore limitato. Definizione e Proprietà

Ci limiteremo a considerare lo spettro di operatori limitati, in quanto sarà proprio questo il caso degli esempi che incontreremo nei prossimi Capitoli.

Definizione 8. Sia T un operatore limitato in \mathcal{H} .

- Il *risolvente* di T è definito da

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ è biiettiva e } (T - \lambda I)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(T) \text{ è continua}\}.$$

- Lo *spettro* di T è definito da $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Ricordiamo che se T è limitato e se $T - \lambda I$ è biiettiva allora $(T - \lambda I)^{-1}$ è continua. Riportiamo (senza dimostrazione) alcuni risultati:

Teorema 4. *Sia T operatore limitato in \mathcal{H} . Allora $\rho(T)$ è un insieme aperto e $\sigma(T)$ è un insieme chiuso. Inoltre $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{C}}(0, \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})})$, quindi in particolare $\sigma(T)$ è compatto.*

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Teorema 5. *Sia T operatore limitato e autoaggiunto in \mathcal{H} . Allora $\sigma(T)$ è un sottoinsieme di \mathbb{R} .*

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Il seguente risultato tornerà utile nella dimostrazione della Proposizione 11 del Capitolo 4.

Proposizione 7. *Sia $\{T_n\}$ una successione di operatori limitati in \mathcal{H} che converge in norma operatoriale ad un operatore limitato T . Si ha che*

$$\begin{aligned}\rho(T) \subset \liminf \rho(T_n) &= \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \rho(T_k) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{esiste } n \text{ tale per cui } \lambda \in \rho(T_k) \text{ per ogni } k \geq n\}.\end{aligned}$$

Dim. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Mostriamo che esiste n tale per cui $\lambda \in \rho(T_k)$ per ogni $k \geq n$. $(T - \lambda I)$ è invertibile per definizione di risolvente. Ricordiamo che l'insieme degli elementi invertibili dell'algebra di Banach degli operatori limitati su \mathcal{H} è un insieme aperto. Esiste pertanto $\delta > 0$ tale per cui se un operatore $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è tale che $\|A - (T - \lambda I)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \delta$ allora A è invertibile. Abbiamo che

$$\|(T_k - \lambda I) - (T - \lambda I)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T_k - T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \delta$$

per k maggiore o uguale ad un certo n , da cui $(T_k - \lambda I)$ è invertibile per ogni $k \geq n$, e quindi per definizione $\lambda \in \rho(T_k)$ per ogni $k \geq n$. □

Si può provare che se in aggiunta per ogni $\lambda \in \liminf \rho(T_n)$ la successione $\|(T_n - \lambda I)^{-1}\|$ (che notiamo essere ben definita per n maggiore di un certo N_λ) è limitata, allora $\rho(T) = \liminf \rho(T_n)$. Tuttavia, ai nostri fini sarà sufficiente provare la sola inclusione. Notiamo infine che se $\rho(T_n) = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ per ogni n , si ha banalmente $\liminf \rho(T_n) = \mathbb{C} \setminus \Sigma$ e quindi $\sigma(T) \supset \Sigma$.

1.2.2 Il Teorema Spettrale

Ricordiamo che $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è un proiettore ortogonale se $E^2 = E$ e $E = E^*$.

Definizione 9. Una famiglia di proiettori ortogonali $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ si dice *famiglia spettrale* (o *risoluzione dell'identità*) se:

- $E_\lambda \circ E_\mu = E_{\min(\lambda, \mu)}$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- $E_{-\infty}x = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda x = 0$ e $E_{+\infty}x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda x = x$ per ogni $x \in \mathcal{H}$;
- $E_{\lambda^+}x = \lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$ per ogni $x \in \mathcal{H}$.

Se $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ è una famiglia spettrale, si ha che $E_{] \alpha, \beta]} = E_\beta - E_\alpha$ è un proiettore ortogonale per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notiamo inoltre che la funzione $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \|E_\lambda x\|$ è crescente.

Il risultato-chiave è il seguente:

Lemma 1. *Sia $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ famiglia spettrale, $x, y \in \mathcal{H}$. Allora la funzione $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle x, E_\lambda y \rangle \in \mathbb{C}$ è una funzione normalizzata a variazione limitata. Inoltre, detta $V(x, y)$ la variazione totale di tale funzione, si ha:*

$$V(x, y) = \sup_{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n} \sum_{j=2}^n |\langle x, E_{] \lambda_{j-1}, \lambda_j]} y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Ricordando quanto visto nella sottosezione 1.1.3, sappiamo che ad ogni $F \in NBV$ corrisponde un'unica misura complessa Boreliana μ su \mathbb{R} tale per cui $F(\lambda) = \mu(] - \infty, \lambda])$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi, data una famiglia spettrale $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, dati $x, y \in \mathcal{H}$, esiste un'unica misura complessa Boreliana su \mathbb{R} , che chiameremo $d\langle x, E_\lambda y \rangle$, tale per cui

$$d\langle x, E_\lambda y \rangle(] \alpha, \beta]) = \langle x, E_\beta y \rangle - \langle x, E_\alpha y \rangle = \langle x, E_{] \alpha, \beta]} y \rangle.$$

Data quindi una funzione Boreliana limitata, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dati $x, y \in \mathcal{H}$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ è sempre ben definito l'integrale $\int_{] \alpha, \beta]} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle$. Se esiste il limite di $\int_{] \alpha, \beta]} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle$ per $\alpha \rightarrow -\infty$ e $\beta \rightarrow +\infty$, si pone:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{] \alpha, \beta]} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle.$$

In particolare, se $y = x$, la funzione $\lambda \mapsto \langle x, E_\lambda x \rangle = \|E_\lambda x\|^2$ è associata ad una misura positiva, che chiameremo *misura spettrale associata al vettore $x \in \mathcal{H}$* e indicheremo con μ_x . Tale concetto sarà fondamentale per trattare la decomposizione spettrale di un operatore limitato autoaggiunto.

Ora, abbiamo per ogni $x, y \in \mathcal{H}$ una misura diversa, e quindi una diversa nozione di integrale. Vorremmo dare una nozione di integrale a valori in \mathcal{H} , per dare senso a "scritture" del tipo " $\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x$ ". Per questo, diamo la seguente

Definizione 10. Siano f una funzione Boreliana su \mathbb{R} , $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ una famiglia spettrale, $x \in \mathcal{H}$. f si dice *integrabile rispetto a $dE_\lambda x$* se l'integrale $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle$ esiste per ogni $y \in \mathcal{H}$ e la funzione $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle x, E_\lambda y \rangle$ è lineare e continua. Inoltre abbiamo che $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x$ è definito univocamente dall'uguaglianza

$$\left\langle y, \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle y, E_\lambda x \rangle.$$

Infine, poniamo per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dE_\lambda x = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \chi_{] \alpha, \beta]}(\lambda) dE_\lambda x$$

Forniamo ora due risultati sull'integrabilità di alcune classi di funzioni.

Lemma 2. Sia $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ famiglia spettrale. Se f è una funzione Boreliana limitata allora $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x$ esiste per ogni $x \in \mathcal{H}$ e la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x$ è lineare e continua. In particolare $\int_{\alpha}^{\beta} 1 dE_\lambda x = E_{] \alpha, \beta]} x$.

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Lemma 3. Siano $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ famiglia spettrale, $x \in \mathcal{H}$. Se f è una funzione continua, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- f è integrabile rispetto a $dE_\lambda x$;
- $\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$;

- esiste il limite $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{] \alpha, \beta]} f(\lambda) dE_\lambda x$

Inoltre, se valgono tali affermazioni si ha che

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{] \alpha, \beta]} f(\lambda) dE_\lambda x$$

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Enunciamo ora due importanti teoremi, tra cui una versione del *Teorema spettrale* che, nel contesto del formalismo matematico della Meccanica Quantistica, ha una chiara interpretazione fisica.

Teorema 6. *Sia f una funzione continua su \mathbb{R} a valori reali. Poniamo*

$$D_f = \{x \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty\},$$

$$T_f : D_f \rightarrow \mathcal{H}, \quad Tx = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

Allora D_f è denso in \mathcal{H} e l'operatore T_f è autoaggiunto.

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

Teorema 7 (Teorema spettrale). *Sia T un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} . Allora esiste un'unica famiglia spettrale $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che*

$$Tx = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x$$

per ogni $x \in \mathcal{H}$

Dim. [Omessa, vedi: [3]]. □

1.2.3 Decomposizione dello Spettro di un Operatore limitato autoaggiunto

Siamo pronti ad affrontare il tema centrale di questa trattazione, la decomposizione dello spettro di un operatore limitato autoaggiunto.

Sia T un operatore limitato autoaggiunto su \mathcal{H} . Per il Teorema 7, esiste una famiglia spettrale $E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda \psi$ per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Definiamo i seguenti sottospazi di \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{pp} &= \{\psi \in \mathcal{H} : \mu_\psi \text{ è puramente puntuale}\} \\ \mathcal{H}_{ac} &= \{\psi \in \mathcal{H} : \mu_\psi \text{ è assolutamente continua}\} \\ \mathcal{H}_{sc} &= \{\psi \in \mathcal{H} : \mu_\psi \text{ è singolarmente continua}\} \\ \mathcal{H}_c &= \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}. \end{aligned}$$

Teorema 8. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$. *Ognuno di questi sottospazi è invariante sotto T . $T|_{\mathcal{H}_{pp}}$ ha un insieme completo di autovettori, $T|_{\mathcal{H}_{ac}}$ ha solo misure spettrali assolutamente continue e $T|_{\mathcal{H}_{sc}}$ ha solo misure spettrali singolarmente continue.*

Dim. [Omessa, vedi: [4]].

□

Definizione 11.

$$\begin{aligned}\sigma_{pp}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ è autovalore di } T\} \\ \sigma_{ac}(T) &= \sigma(T|_{\mathcal{H}_{ac}}) \\ \sigma_{sc}(T) &= \sigma(T|_{\mathcal{H}_{sc}}) \\ \sigma_c(T) &= \sigma(T|_{\mathcal{H}_c}).\end{aligned}$$

Questi insiemi sono chiamati rispettivamente *spettro puramente puntuale*, *spettro assolutamente continuo*, *spettro singolarmente continuo*, *spettro continuo* di T .

Proposizione 8.

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) &= \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T) \\ \sigma(T) &= \overline{\sigma_{pp}(T)} \cup \sigma_c(T) = \overline{\sigma_{pp}(T)} \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T).\end{aligned}$$

Dim. [Omessa, vedi: [4]].

□

In generale $\sigma_{pp}(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T) \neq \sigma(T)$. Questo perchè abbiamo definito lo spettro puramente puntuale di T come l'insieme degli autovalori, e non come $\sigma(T|_{\mathcal{H}_{pp}})$.

Osserviamo che è possibile costruire un operatore T tale che $\sigma_{sc}(T)$ abbia misura di Lebesgue non nulla.

Capitolo 2

Quasicristalli

La nascita della cristallografia moderna può essere datata al 1912, quando Max von Laue effettuò il primo esperimento di diffrazione ai raggi x, esperimento che gli valse il premio Nobel per la Fisica nel 1914. I risultati ottenuti da von Laue sembravano lasciare intuire che la natura *ordinata* della figura di diffrazione dovesse necessariamente implicare il carattere *periodico* del cristallo. Basato su numerosissime ossevazioni sperimentali compiute nell'arco di settanta anni, questo paradigma rimase apparentemente inviolato e diffusamente accettato dalla comunità scientifica fino al 1982.

La definizione di cristallo come *sistema periodico* pone delle restrizioni alle possibili simmetrie rotazionali del cristallo stesso. In particolare, per un sistema periodico bidimensionale o tridimensionale, è possibile dimostrare con argomenti geometrici elementari che non sono ammesse simmetrie di ordine $n = 5$ o $n > 6$. È quindi facile immaginare la portata delle implicazioni della scoperta, avvenuta nel 1982 da parte di Daniel Shechtman e colleghi, di leghe Al-Mn rapidamente solidificate che presentavano figura di diffrazione compatibile con simmetrie di ordine $n = 5$, tipiche dell'icosaedro e proibite per un reticolo periodico [5]. Dalla loro scoperta originale, sono stati individuati centinaia di nuovi esempi di cristalli non periodici, chiamati *quasicristalli*, alcuni persino termodinamicamente stabili. I risultati di Shechtman vennero riconosciuti con il premio Nobel per la Chimica nel 2011.

La scoperta dei quasicristalli ha aperto nuove prospettive in Fisica e Matematica: se da un lato vengono studiati per le loro proprietà cristallografiche, dall'altro hanno inaugurato un nuovo filone di ricerca, che attraversa Fisica Matematica, Geometria, Analisi e Teoria dei Numeri. In particolare, diversi modelli matematici proposti per questi sistemi presentano spettro singolarmente continuo per l'energia.

In questo Capitolo cercheremo di capire cos'è un cristallo. La ricerca delle strutture fisiche che producono una figura di diffrazione puntuale è un argomento delicato e matematicamente complesso: per questa ragione, la nostra discussione potrà essere solo parzialmente rigorosa.

Passeremo poi a considerare una possibile Hamiltoniana per un cristallo non periodico unidimensionale. In questo contesto, introdurremo l'operatore almost Mathieu quale esempio di operatore di Schrödinger con potenziale quasi periodico. Come già affermato, la teoria dei quasicristalli è un ambiente enormemente più ampio e generale di ciò di cui parleremo: ciononostante, crediamo che anche

la trattazione presentata possa cogliere aspetti significativi e problematiche di questi sistemi fisici.

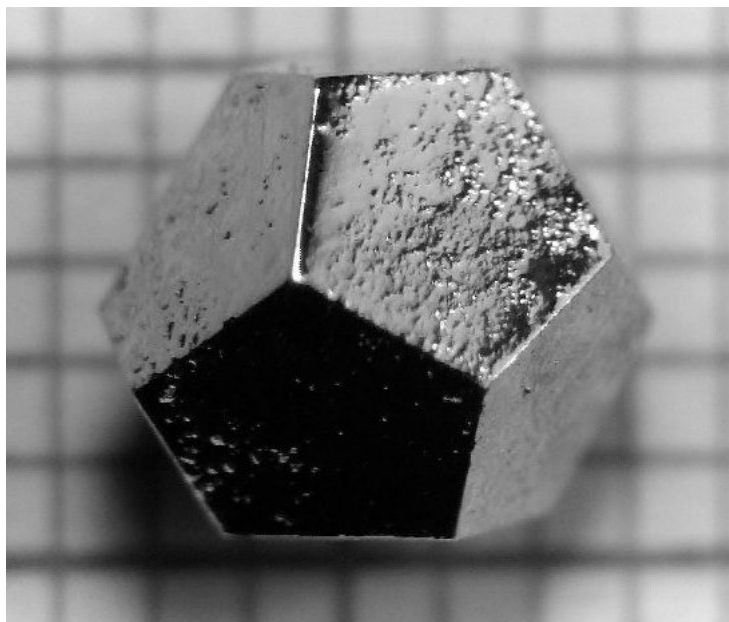


Figura 2.1: Fotografia di un quasicristallo di Ho-Mg-Zn. Posto su una griglia millimetrica, gli spigoli sono lunghi 2,2 mm. Notiamo chiaramente la forma dodecaedrica (il dodecaedro è il solido duale dell'icosaedro).

2.1 Definizione di Cristallo

La prima domanda che ha senso porsi è: che cos'è un cristallo? Alla luce dei fatti sperimentali appena riassunti, risulta chiaro che l'idea che un cristallo sia necessariamente un sistema periodico è molto restrittiva, e vada abbandonata in favore di una definizione più generale. La ricerca di una soddisfacente definizione di cristallo è stata storicamente affrontata a partire dagli anni '30 dal matematico russo B. N. Delone che, assieme al suo gruppo di colleghi e studenti, si pose lo scopo di ricostruire la cristallografia classica a partire da principi primi. Le proprietà fisiche fondamentali e irrinunciabili che Delone pose alla base della sua descrizione matematica dei cristalli sono la *discretezza* e l'*omogeneità*. La discretezza caratterizza il vincolo che i centri degli atomi che costituiscono la materia non possano trovarsi arbitrariamente vicini gli uni agli altri, mentre la condizione di omogeneità deriva dal fatto che gli atomi che compongono i cristalli tendano a distribuirsi in modo approssimativamente uniforme. Notiamo tuttavia che queste due proprietà fisiche non sono prerogativa esclusiva dei cristalli, ma modellizzano una grande quantità di sistemi fisici (non solo solidi ma anche liquidi e gas), e non danno indicazione alcuna su quanto sia ordinata la struttura del sistema fisico. Un possibile criterio per caratterizzare i cristalli dagli altri sistemi fisici proviene direttamente dall'indagine cristallografica sperimentale e dal suo strumento principe, la diffrazione. Sappiamo

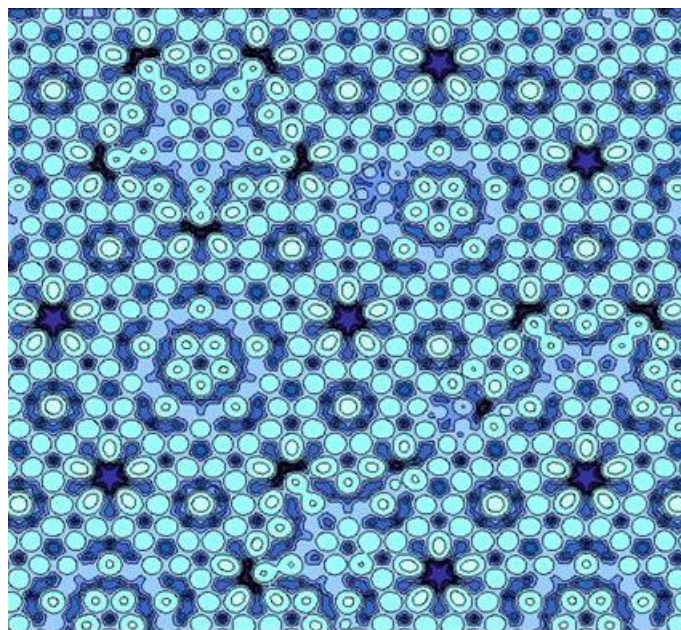


Figura 2.2: Modello atomico per la superficie di un quasicristallo icosaedrico di Al-Pd-Mn.

infatti che investendo un cristallo periodico con radiazione di lunghezza d'onda paragonabile alle distanze interatomiche otteniamo una figura di diffrazione con picchi definiti (*picchi di Bragg*), assenti nella figura di diffrazione prodotta da un insieme "completamente disordinato" di particelle puntiformi. Elevando questa caratteristica dei sistemi periodici a proprietà fondamentale per un cristallo generico, possiamo affermare che ciò che distingue i cristalli dai sistemi fisici "disordinati" è una struttura *sufficientemente ordinata* da generare una figura di diffrazione con picchi definiti, ovvero una *figura di diffrazione puntuale*. La domanda fondamentale quindi è: quali distribuzioni di materia producono una figura di diffrazione puntuale? Questo quesito presenta notevoli difficoltà matematiche, ed è stato oggetto di recenti contributi in letteratura: [6] [7] [8] [9].

Da un punto di vista euristico, l'intuizione fisica suggerisce quindi che un cristallo sia un insieme "ragionevole" *sufficientemente ordinato da generare una figura di diffrazione puntuale*. In questa Sezione cercheremo di rendere rigorosa questa nozione di "cristallo".

La definizione di *insieme di Delone* dà un significato preciso alla nostra richiesta di *insieme "ragionevole"*:

Definizione 12. Un sottoinsieme Λ di \mathbb{R}^N è detto un insieme di Delone se esistono $r, R > 0$ tali che

- $\overline{B(x, r)} \cap \Lambda = \{x\}$ per ogni $x \in \Lambda$;
- $\overline{B(x, R)} \cap \Lambda \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Si usa anche dire che un insieme di Delone è *uniformemente discreto* e *relativamente denso*. Concretamente, un insieme di Delone è un insieme di punti

la cui distanza reciproca è maggiore di una costante positiva e senza "buchi" arbitrariamente grandi.

Vogliamo definire un cristallo come un insieme di Delone "sufficientemente ordinato da generare una figura di diffrazione puntuale", perciò il prossimo passo sarà affrontare il problema della diffrazione. Un insieme di Delone è, per definizione, infinito (numerabile) e illimitato: ciò costituisce il primo ostacolo ad una trattazione rigorosa del problema. Cercheremo per prima cosa di inquadrare la questione in un contesto fisico, sorvolando sui dettagli matematici, che saranno tuttavia discussi in seguito. Per semplicità, supporremo inizialmente che Λ sia un insieme finito di n elementi, che indichiamo con a_j , $j = 1, \dots, n$. Da un punto di vista fisico, pensiamo Λ come un insieme di centri di scattering investiti da un'onda piana monocromatica: ogni centro di scattering diventa sorgente di un'onda sferica, con ampiezza proporzionale al campo incidente. Siamo interessati a calcolare l'intensità dell'onda diffusa in un punto P posto a grande distanza da Λ (diffrazione Fraunhofer). Chiamiamo ρ la densità numerica di centri di scattering, ω la pulsazione dell'onda incidente, k il vettore d'onda dell'onda incidente e k' il vettore d'onda dell'onda diffusa nella direzione di vista. Supponiamo che si tratti di scattering elastico: abbiamo quindi che $|k| = |k'| = \frac{\omega}{c}$, dove c è la velocità della luce. Dalla Fisica Classica è noto che l'intensità dell'onda diffusa in P , I , è direttamente proporzionale al quadrato del modulo della trasformata di Fourier di ρ calcolata in $k' - k$: a meno di una costante moltiplicativa, abbiamo che:

$$I(k' - k) = \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \rho(x) \exp(-ix \cdot (k' - k)) dx \right|^2 = |\hat{\rho}(k' - k)|^2, \quad (2.1)$$

dove con $\hat{\rho}$ abbiamo indicato la trasformata di Fourier di ρ . Se indichiamo con $\tilde{\rho}$ la funzione $x \mapsto \overline{\rho(-x)}$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} I &= \hat{\rho}(k' - k) \overline{\hat{\rho}(k' - k)} = \hat{\rho}(k' - k) \hat{\tilde{\rho}}(k' - k) \\ &= \widehat{\rho * \tilde{\rho}}(k' - k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove $\rho * \tilde{\rho}$ indica la convoluzione di ρ e $\tilde{\rho}$: $\rho * \tilde{\rho}(x) = \int \rho(y) \tilde{\rho}(x - y) dy$.

Possiamo rappresentare la densità di centri di scattering associata a Λ come una somma di delta di Dirac centrate nei punti di Λ : $\rho = \sum_{j=1}^n \delta_{a_j}$. Abbiamo quindi che:

$$I(k - k') = \left| \sum_{j=1}^n \exp(-ia_j \cdot (k' - k)) \right|^2 \quad (2.3)$$

È abbastanza chiaro quale sia il problema che sorge nell'estendere questa formula al caso in cui Λ sia infinito: la serie $\sum_{j=1}^n \exp(-ia_j \cdot (k' - k))$ non è mai convergente, in quanto il termine generale della serie $\exp(-ia_j \cdot (k' - k))$ non è mai infinitesimo. L'intuizione fisica ci suggerisce tuttavia che la grandezza rilevante nel contesto dei sistemi infiniti debba essere il limite per $n \rightarrow \infty$ di $\frac{I}{n}$, ovvero l'intensità dell'onda diffusa per atomo. Ciò è analogo al fatto che per un sistema infinito abbia solo senso parlare di energia per unità di volume o per particella.

Cerchiamo ora di affrontare il problema in modo più rigoroso, seguendo l'approccio di [9]: finora abbiamo impropriamente considerato ρ e I come funzioni

su \mathbb{R}^N .

Per semplificare la trattazione e in vista dell'esempio che discuteremo nella prossima Sezione, ci limiteremo a studiare il caso unidimensionale. Sia $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un insieme di Delone. In particolare, Λ è numerabile: pertanto

$$\rho = \sum_{a \in \Lambda} \delta_a \quad (2.4)$$

è una misura Boreliana positiva. Infatti:

- $\rho(\emptyset) = \sum_{a \in \Lambda} \delta_a(\emptyset) = \sum_{a \in \Lambda} 0 = 0$;
- se $\{A_j\}$ è una successione disgiunta di Boreliani allora

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{a \in \Lambda} \delta_a\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{a \in \Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_a(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{a \in \Lambda} \delta_a(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) \end{aligned}$$

per la proprietà commutativa delle serie a termini positivi.

È inoltre una misura Boreliana regolare, in quanto Λ è localmente finito, nel senso che ogni compatto di \mathbb{R} contiene un numero finito di punti di Λ . Più precisamente, Λ è uniformemente discreto: ciò si ripercuote sulla proprietà di ρ di essere *translation bounded*, ovvero per ogni compatto K di \mathbb{R} esiste una costante C_K tale che:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \rho(K + x) \leq C_K.$$

ρ non è una misura finita. Definiamo allora

$$\rho_n = \sum_{a \in \Lambda \cap [-n, n]} \delta_a \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

ρ_n è chiaramente una misura finita, in quanto Λ è localmente finito. Ricordiamo inoltre la seguente

Definizione 13. Siano μ, ν misure complesse Boreliane su \mathbb{R} . Definiamo la loro *convoluzione* $\mu * \nu$ come

$$\mu * \nu(E) = \iint \chi_E(x + y) d\mu(x) d\nu(y) \quad \text{per ogni } E \text{ Boreliano.}$$

Data una misura complessa Boreliana ν su \mathbb{R} , abbiamo univocamente definita un'altra misura Boreliana $\tilde{\nu}$ tale che $\tilde{\nu}(E) = \overline{\nu(-E)}$ per ogni E Boreliano, ove $-E = \{x \in \mathbb{R} : -x \in E\}$.

Ciò di cui abbiamo bisogno ora è un oggetto matematico che rappresenti la figura di diffrazione: iniziamo a cercarlo definendo

$$\gamma_n = \frac{1}{2n} \rho_n * \tilde{\rho}_n = \frac{1}{2n} \sum_{x, y \in \Lambda \cap [-n, n]} \delta_{x-y}$$

Per proseguire in questa direzione, dovremmo introdurre una "adeguata" nozione di limite per γ_n . Questo passaggio è piuttosto tecnico e presuppone la conoscenza di alcuni risultati di Analisi Funzionale, ci limitiamo perciò a tracciarne un'idea. Un primo problema è quello di estendere la definizione di misura complessa Boreliana regolare al caso illimitato. L'argomento fondamentale è la possibilità di identificare tali misure complesse con i funzionali lineari μ sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su \mathbb{R} , $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, tali per cui $\mu(f) \leq \alpha_K \|f\|$ per ogni f continua con supporto nel compatto K , ove con $\|\cdot\|$ abbiamo indicato la norma del sup. Diremo che una successione di funzionali lineari su $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\{\mu_n\}$, converge al funzionale μ se $\mu_n(f)$ converge a $\mu(f)$ per ogni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Chiameremo *autocorrelazione di Λ* ogni limite di γ_n .

Per concretizzare quanto l'intuizione fisica ci suggerisce, l'ultimo passo è applicare la trasformata di Fourier all'autocorrelazione. Se γ è autocorrelazione di Λ , allora è anch'esso *translation bounded*, e può per questo essere interpretato come una *distribuzione temperata* sullo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida: è pertanto definita la sua trasformata di Fourier $\hat{\gamma}$, che in generale è a sua volta una distribuzione temperata. Si può mostrare che la trasformata di Fourier di un'autocorrelazione è sempre una misura positiva.

La trasformata di Fourier dell'autocorrelazione è la nozione matematica che descrive la figura di diffrazione: in particolare, identifichiamo i picchi di Bragg con gli $\{x\}$ tali per cui $\hat{\gamma}(\{x\}) \neq 0$. A questo punto, possiamo definire (coerentemente con [7]) un *crystallo* come un insieme di Delone il cui spettro di diffrazione presenti un'infinità numerabile di picchi di Bragg.

Chiameremo *quasicristallo* ogni crystallo non periodico.

2.2 Elettroni in quasicristalli unidimensionali

Siamo ora interessati a studiare, in un'ottica di particella singola, il problema di un elettrone in un quasicristallo unidimensionale. Una scelta ragionevole sarebbe quella di considerare una Hamiltoniana H del tipo:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta \sum_{a \in \Lambda} \delta(x - a)$$

che rappresenta una versione generalizzata del modello di Kronig-Penney, e può essere in linea di principio utilizzata per descrivere ogni modello di crystallo. In alternativa (ed è questa la strada che seguiremo), possiamo costruire un modello *tight-binding*, ipotizzando che l'elettrone possa essere localizzato esclusivamente sui nodi del reticolo: detta $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(H_\omega u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V(\omega n)u(n), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

con il potenziale V periodico tale che $V(t+1) = V(t)$. Se ω è razionale, abbiamo quindi un potenziale periodico in n . Se invece ω è irrazionale, il potenziale non è periodico: in questo modo "mimiamo" la non periodicità del potenziale a cui è sottoposto un elettrone in un quasicristallo unidimensionale. Un semplice potenziale che soddisfa le nostre richieste è $V(\cdot) = 2\lambda \cos(2\pi \cdot + \theta)$, che dà vita all'importante operatore *almost Mathieu*, $H_{\omega, \lambda, \theta}$, con $\omega, \lambda, \theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, definito da:

$$(H_{\lambda, \omega, \theta} u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n). \quad (2.5)$$

Nel prossimo Capitolo avremo modo di incontrare nuovamente questo operatore, in un contesto fisico completamente diverso.
Rimandiamo lo studio delle proprietà matematiche dell'operatore almost Mathieu al Capitolo 4.

Capitolo 3

Elettroni di Bloch in un Campo Magnetico Uniforme

Lo studio di un elettrone in un reticolo cristallino periodico soggetto ad un campo magnetico è un problema che ha mobilitato alcuni tra i più illustri esponenti della Fisica dello Stato Solido del secolo scorso [10]. Per quanto la letteratura relativa a questo soggetto sia vasta e la fisica di questo sistema sia stata largamente esplorata, questo argomento costituisce ancora oggi un campo di ricerca fertile e attivo.

Il primo contributo alla sua comprensione proviene da Landau [11], che nel 1930 per primo calcolò lo spettro dell'energia di un elettrone libero in un campo magnetico uniforme. Tre anni dopo, Peierls [12] affrontò il problema degli elettroni in un reticolo cristallino soggetti ad un campo magnetico uniforme. In assenza di campo magnetico, in un solido cristallino gli elettroni di conduzione sono rappresentati come particelle indipendenti per le quali vale l'equazione di Schrödinger stazionaria

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right]\psi_{n,\mathbf{k}} = W_n(\mathbf{k})\psi_{n,\mathbf{k}},$$

dove n è l'indice di banda e \mathbf{k} è il momento cristallino dell'elettrone. W_n si dice *funzione di banda* e deve soddisfare $W_n(-\mathbf{k}) = W_n(\mathbf{k})$ (simmetria delle bande di energia rispetto al centro della zona di Brillouin).

In presenza di campo magnetico uniforme \mathbf{B} e in approssimazione di banda singola, Peierls propose di descrivere il moto degli elettroni sostituendo in $W(\mathbf{k})$ il momento cristallino \mathbf{k} con l'operatore:

$$\frac{\mathbf{P}}{\hbar} - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A} = -i\nabla - \frac{e}{\hbar c}\mathbf{A},$$

dove e è la carica elementare e \mathbf{A} è il potenziale vettore, legato al campo magnetico B da $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$. In tal modo, a partire da $W(\mathbf{k})$ si ottiene una Hamiltoniana effettiva di banda singola. Diversi lavori successivi, a partire dall'articolo di Luttinger [13], si occuparono di come rendere rigorosa la cosiddetta *sostituzione di Peierls*.

Nel 1955 Harper [14] presentò un modello semplificato del problema, considerando un reticolo cubico semplice, con il campo magnetico B lungo uno dei

tre assi cristallografici principali. Classicamente, il moto di una particella carica nella direzione del campo magnetico non è da questi influenzato; restringendosi ad un problema bidimensionale, Harper ricavò grazie alla sostituzione di Peierls una Hamiltoniana di banda singola in approssimazione *tight-binding*. La corrispondente equazione di Schrödinger si riduce ad un'equazione alle differenze finite, dalla quale emerge un operatore $H_{\omega,\theta}$ su $\ell^2(\mathbb{Z})$, con $\omega, \theta \in \mathbb{R}$, chiamato *operatore di Harper*: dato $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$(H_{\omega,\theta}u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + 2\cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n). \quad (3.1)$$

Come vedremo nella prossima Sezione, ω rappresenta il rapporto tra il flusso magnetico attraverso una cella del reticolo bidimensionale e il quanto di flusso magnetico $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

L'operatore di Harper è chiaramente un caso particolare del già citato operatore almost Mathieu. Come nel caso dell'operatore almost Mathieu, per ω razionale lo spettro dell'operatore di Harper può essere studiato tramite il Teorema di Bloch. Per ω irrazionale invece il potenziale descritto non è più periodico, e il Teorema di Bloch non si applica. Molti autori si sono occupati dello studio dello spettro di questo operatore, e fornirne una lista completa è difficile; avremo modo di fare riferimento ad alcuni lavori essenziali nel prossimo Capitolo. In particolare, D. R. Hofstadter [15] nel 1976 rappresentò in un famoso grafico, noto con il nome di *farfalla di Hofstadter*, la dipendenza dello spettro dell'operatore di Harper dal parametro ω .

La verifica sperimentale delle proprietà previste per questo sistema fisico è stata a lungo ostacolata dalle difficoltà di realizzazione di un reticolo di periodicità adeguata. I tipici reticoli cristallini hanno periodicità minori di un nanometro, e i campi magnetici necessari affinché il flusso del campo magnetico attraverso una cella del reticolo sia paragonabile al quanto di flusso magnetico sono troppo elevati per essere prodotti in laboratorio. D'altro canto, i reticoli di dimensione nanometrica artificiali hanno periodicità superiori a 100 nanometri, e in questo caso i campi magnetici richiesti sono troppo deboli per vincere completamente il disordine. La soluzione a questo problema è giunta in tempi recenti, grazie all'impiego di superreticoli in grado di fornire periodicità ideali di circa 10 nanometri. I risultati ottenuti hanno confermato diverse proprietà spettrali emerse dallo studio della farfalla di Hofstadter. I dettagli tecnici di questi esperimenti sono al di là degli scopi del presente Capitolo, rimandiamo pertanto alla lettura degli articoli originali: [16], [17].

Lungi dal voler fornire una visione completa ed esaustiva dell'argomento, in questo Capitolo studieremo il problema di un elettrone in un reticolo cristallino bidimensionale rettangolare in presenza di un campo magnetico uniforme ortogonale al reticolo, seguendo l'approccio degli articoli di Harper e Hofstadter, e mostreremo come questo modello fisico possa essere descritto dall'operatore almost Mathieu.

3.1 Descrizione matematica del modello fisico

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano costituito dagli assi x, y, z . Consideriamo il reticolo bidimensionale rettangolare di periodicità a lungo l'asse x e b lungo l'asse y , definito da

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x = na, y = mb, n, m \in \mathbb{Z}\},$$

immerso nel campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, ortogonale ad esso. Introduciamo le due principali assunzioni del modello:

- ci limitiamo a considerare ciò che accade ad una singola banda di Bloch quando il campo magnetico è applicato;
- supponiamo la seguente forma *tight-binding* per la funzione di banda:

$$W(\mathbf{k}) = 2E_0(\cos k_x a + \lambda \cos k_y b),$$

con $\lambda > 0$. Notiamo che:

$$W(\mathbf{k}) = E_0(\exp(ik_x a) + \exp(-ik_x a) + \lambda \exp(ik_y b) + \lambda \exp(-ik_y b)).$$

Ricorrendo alla *sostituzione di Peierls*, possiamo scrivere una Hamiltoniana effettiva a partire da $W(\mathbf{k})$,

$$\begin{aligned} W\left(\frac{\mathbf{P}}{\hbar} - \frac{e\mathbf{A}}{\hbar c}\right) &= E_0 \left[\exp\left(i\frac{aP_x}{\hbar} - i\frac{e}{\hbar c}aA_x\right) + \exp\left(-i\frac{aP_x}{\hbar} + i\frac{e}{\hbar c}aA_x\right) + \right. \\ &+ \lambda \exp\left(i\frac{bP_y}{\hbar} - i\frac{e}{\hbar c}bA_y\right) + \lambda \exp\left(-i\frac{bP_y}{\hbar} + i\frac{e}{\hbar c}bA_y\right) \left. \right] = \\ &= E_0 \left[\exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}aA_x\right) \exp\left(i\frac{aP_x}{\hbar}\right) + \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}aA_x\right) \exp\left(-i\frac{aP_x}{\hbar}\right) + \right. \\ &+ \lambda \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}bA_y\right) \exp\left(i\frac{bP_y}{\hbar}\right) + \lambda \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}bA_y\right) \exp\left(-i\frac{bP_y}{\hbar}\right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Riconosciamo gli operatori di traslazione $\exp\left(i\frac{aP_x}{\hbar}\right)$ e $\exp\left(i\frac{bP_y}{\hbar}\right)$:

$$\exp\left(i\frac{aP_x}{\hbar}\right)\psi(x, y) = \psi(x + a, y), \quad \exp\left(i\frac{bP_y}{\hbar}\right)\psi(x, y) = \psi(x, y + b).$$

A seconda della gauge scelta, compaiono fattori di fase che moltiplicano gli operatori di traslazione. Una gauge conveniente per il nostro problema è la *gauge di Landau*: $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$. La scelta della gauge di Landau ci consente di scrivere la seguente equazione di Schrödinger stazionaria:

$$\begin{aligned} E_0 \left[\psi(x + a, y) + \psi(x - a, y) + \lambda \exp\left(-i\frac{eBbx}{\hbar c}\right) \psi(x, y + b) + \right. \\ \left. + \lambda \exp\left(+i\frac{eBbx}{\hbar c}\right) \psi(x, y - b) \right] = E\psi(x, y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Grazie all'opportuna scelta della gauge, solo la traslazione lungo y è moltiplicata per un fattore di fase. È naturale procedere con le seguenti sostituzioni:

$$x = na, \quad y = mb, \quad \frac{E}{E_0} = \epsilon.$$

È altresì ragionevole supporre che ψ si comporti come un'onda piana lungo y , in quanto i fattori di fase nell'equazione 3.2 dipendono dalla sola x . Quindi fattorizziamo ψ come:

$$\psi(na, mb) = \exp(-2\pi i \theta m) u(n)$$

La nostra equazione si riduce a:

$$\begin{aligned} \exp(-2\pi i\theta m) \left[u(n+1) + u(n-1) + \lambda \exp\left(-i\left(\frac{eBab}{\hbar c}n + 2\pi\theta\right)\right) u(n) + \right. \\ \left. + \lambda \exp\left(i\left(\frac{eBab}{\hbar c}n + 2\pi\theta\right)\right) u(n) \right] = \epsilon \exp(-2\pi i\theta m) u(n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

da cui

$$\begin{aligned} u(n+1) + u(n-1) + \lambda \left[\exp\left(i\left(\frac{eBab}{\hbar c}n + 2\pi\theta\right)\right) + \right. \\ \left. + \exp\left(-i\left(\frac{eBab}{\hbar c}n + 2\pi\theta\right)\right) \right] u(n) = \epsilon u(n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introducendo il parametro adimensionale ω :

$$\omega = \frac{eBab}{2\pi\hbar c}$$

l'equazione 3.4 diventa finalmente:

$$u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta)) u(n) = \epsilon u(n). \quad (3.5)$$

Osserviamo che l'equazione 3.5 non è altro che l'equazione agli autovalori per l'operatore almost Mathieu. Se $a = b$ il reticolo è quadrato, ed è lecito porre $\lambda = 1$ con un ragionevole argomento di simmetria. In questo caso particolare, preso in esame negli articoli originali di Harper e Hofstadter, otteniamo l'operatore di Harper, definito dall'equazione 3.1.

Come già anticipato, ω è il rapporto tra il flusso magnetico attraverso una cella del reticolo e il quanto di flusso magnetico. Se consideriamo tipici reticoli cristallini (con a e b dell'ordine di 10^{-10} metri), per ottenere $\omega = 1$ abbiamo bisogno di grandissimi campi magnetici, dell'ordine di 10^5 Tesla.

θ è chiaramente il numero d'onda delle onde piane nella direzione di y , a meno di una costante moltiplicativa.

Lo studio delle numerose proprietà spettrali dell'operatore almost Mathieu è rimandato al prossimo Capitolo.

Capitolo 4

L'Operatore Almost Mathieu

L'operatore *almost Mathieu* è l'operatore $H_{\omega,\lambda,\theta}$ su $\ell^2(\mathbb{Z})$ definito da:

$$(H_{\omega,\lambda,\theta}u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n), \quad (4.1)$$

per ogni $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, con $\omega, \lambda, \theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Nel caso particolare in cui $\lambda = 1$, l'operatore almost Mathieu è anche detto *operatore di Harper*.

Si tratta di un operatore di Schrödinger unidimensionale discreto che, come abbiamo visto nei precedenti Capitoli, modella sistemi fisici molto diversi fra loro. Nel Capitolo 2 abbiamo osservato come $H_{\omega,\lambda,\theta}$ possa rappresentare una Hamiltoniana tight-binding per un elettrone in un reticolo unidimensionale soggetto ad un potenziale commensurabile (se ω è razionale) o incommensurabile (se ω è irrazionale) rispetto alla periodicità del reticolo. Abbiamo anche mostrato nel Capitolo 3 che $H_{\omega,\lambda,\theta}$ emerge dalla descrizione matematica di un elettrone di Bloch in un reticolo bidimensionale rettangolare soggetto ad un campo magnetico uniforme ortogonale al reticolo.

La ricchezza di proprietà interessanti dello spettro dell'operatore almost Mathieu ne fa uno degli operatori di Schrödinger unidimensionali più studiati e meglio compresi, anche al di là del contesto della Meccanica Quantistica e della Fisica Matematica. Questo Capitolo è dedicato allo studio delle proprietà spettrali dell'operatore almost Mathieu e alla ricerca di una loro possibile interpretazione fisica. Cercheremo in ultimo di capire quali conseguenze fisiche possano derivare dallo spettro singolarmente continuo.

4.1 Struttura dello spettro di $H_{\omega,\lambda,\theta}$. La farfalla di Hofstadter

Iniziamo a descrivere le proprietà dell'operatore almost Mathieu a partire dalle più immediate.

Proposizione 9. $H_{\omega,\lambda,\theta}$ è un operatore continuo e autoaggiunto. In particolare, si ha che

$$\|H_{\omega,\lambda,\theta}\| \leq 2 + 2\lambda. \quad (4.2)$$

Dim. Sia $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Allora

$$\begin{aligned}
\|H_{\omega,\lambda,\theta}u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{(H_{\omega,\lambda,\theta}u)(n)}(H_{\omega,\lambda,\theta}u)(n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n)|^2 \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|u(n+1)| + |u(n-1)| + 2\lambda |\cos(2\pi(\omega n + \theta))| |u(n)|)^2 \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|u(n+1)|^2 + |u(n-1)|^2 + 4\lambda^2 |u(n)|^2 + \\
&\quad + 2|u(n+1)||u(n-1)| + 4\lambda |u(n+1)||u(n)| + 4\lambda |u(n-1)||u(n)|) \\
&\leq (4 + 8\lambda + 4\lambda^2)\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = (2 + 2\lambda)^2\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2.
\end{aligned}$$

La prima disuguaglianza discende banalmente dalla disuguaglianza triangolare, la seconda disuguaglianza è stata ottenuta da $|\cos(2\pi(\omega n + \theta))| \leq 1$ e la terza disuguaglianza è un'applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n \pm 1)u(n)| \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n \pm 1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ricordando che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n \pm 1)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n)|^2$. Ciò prova la disuguaglianza 4.2 e pertanto la continuità di $H_{\omega,\lambda,\theta}$.

Per dimostrare che $H_{\omega,\lambda,\theta}$ è autoaggiunto basta quindi mostrare che è simmetrico. Utilizzando le proprietà delle somme, in particolare traslando opportunamente gli indici di somma, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\langle H_{\omega,\lambda,\theta}u, u \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\overline{u(n+1)}u(n) + \overline{u(n-1)}u(n) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))\overline{u(n)}u(n)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\overline{u(n)}u(n-1) + \overline{u(n)}u(n+1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))\overline{u(n)}u(n)) \\
&= \langle u, H_{\omega,\lambda,\theta}u \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})},
\end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Rivolgiamo ora la nostra attenzione allo spettro dell'operatore $H_{\omega,\lambda,\theta}$ che denoteremo con $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta}$, ed in particolare all'insieme $\Sigma_{\omega,\lambda}$ definito da:

$$\Sigma_{\omega,\lambda} = \bigcup_{\theta} \Sigma_{\omega,\lambda,\theta}.$$

In realtà, da un punto di vista fisico, l'insieme rilevante nel contesto di elettroni di Bloch sottoposti ad un campo magnetico uniforme è proprio $\Sigma_{\omega,\lambda}$. Infatti, se esiste θ per il quale ϵ è autovalore per $H_{\omega,\lambda,\theta}$ e u è un'autofunzione relativa a ϵ , allora ricordando la derivazione dell'operatore almost Mathieu nel Capitolo 2

sappiamo che $\psi(na, ma) = \exp(-2\pi i \theta m)u(n)$ è soluzione dell'equazione agli autovalori 3.3 relativa all'autovalore ϵ . Parlando euristicamente: a partire dal problema unidimensionale ottenuto per separazione delle variabili, riusciamo a "ricostruire" il problema bidimensionale originale considerando l'unione degli spettri $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ al variare di θ . La connessione profonda tra il problema bidimensionale e quello unidimensionale è stata studiata in modo matematicamente rigoroso: rimandiamo ad esempio alla lettura di [18]. Raccogliamo alcune proprietà notevoli nella seguente

Proposizione 10. *Lo spettro di $H_{\omega, \lambda, \theta}$ è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R} . Più precisamente, $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ è un insieme chiuso contenuto nell'intervallo reale $[-2 - 2\lambda, 2 + 2\lambda]$. In particolare, $\Sigma_{\omega, \lambda}$ è contenuto in $[-2 - 2\lambda, 2 + 2\lambda]$.*

1. per ogni intero k si ha che $\Sigma_{\omega+k, \lambda, \theta} = \Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ e quindi $\Sigma_{\omega+k, \lambda} = \Sigma_{\omega, \lambda}$;
2. $\Sigma_{-\omega, \lambda} = \Sigma_{\omega, \lambda}$;
3. Se ϵ appartiene a $\Sigma_{\omega, \lambda}$, allora $-\epsilon$ appartiene a $\Sigma_{\omega, \lambda}$.

Dim. Dai Teoremi 4 e 5 discende subito che $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ è un sottoinsieme chiuso contenuto in $[-2 - 2\lambda, 2 + 2\lambda]$.

1. Ovvio.
2. $H_{-\omega, \lambda, \theta} = H_{\omega, \lambda, -\theta}$, quindi se esiste θ per cui ϵ appartiene a $\Sigma_{-\omega, \lambda, \theta} = \Sigma_{\omega, \lambda, -\theta}$ allora ϵ appartiene anche a $\Sigma_{\omega, \lambda}$.
3. Mostriamo che se ϵ appartiene al risolvente di $H_{\omega, \lambda, \theta}$, allora $-\epsilon$ appartiene al risolvente di $H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}}$. Per definizione, ϵ appartiene al risolvente di $H_{\omega, \lambda, \theta}$ se e solo se $H_{\omega, \lambda, \theta} - \epsilon I$ è biettiva e con inversa continua. Consideriamo l'operatore lineare S su $\ell^2(\mathbb{Z})$ definito da:

$$(Su)(n) = \sigma(n)u(n)$$

per ogni $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, dove la funzione σ è la funzione parità:

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -1, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

S è chiaramente continua e biettiva, con norma unitaria e se stessa come inversa. Pertanto, se provassimo che $H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}} + \epsilon I = -S(H_{\omega, \lambda, \theta} - \epsilon I)S$ avremmo che $H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}} + \epsilon I$ è biettiva e continua e quindi $-\epsilon$ apparterebbe al risolvente di $H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}}$. Verifichiamolo: sia $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} & [(H_{\omega, \lambda, \theta} - \epsilon I)Su](n) = \\ & = \sigma(n+1)u(n+1) + \sigma(n-1)u(n-1) + \\ & + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))\sigma(n)u(n) - \epsilon\sigma(n)u(n) \\ & = -\sigma(n)u(n+1) - \sigma(n)u(n-1) + \\ & + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))\sigma(n)u(n) - \epsilon\sigma(n)u(n) \\ & = -\sigma(n)[u(n+1) + u(n-1) - 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n) + \epsilon u(n)] \\ & = -\sigma(n)[u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta) + \pi)u(n) + \epsilon u(n)] \\ & = -\sigma(n)(H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}}u + \epsilon u)(n) \\ & [-S(H_{\omega, \lambda, \theta} - \epsilon I)Su](n) = (H_{\omega, \lambda, \theta + \frac{1}{2}}u + \epsilon u)(n). \end{aligned}$$

A questo punto possiamo concludere, dal momento che quanto dimostrato implica che se ϵ appartiene a $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta}$ allora $-\epsilon$ appartiene a $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta+\frac{1}{2}}$, e pertanto se ϵ appartiene a $\Sigma_{\omega,\lambda}$ allora anche $-\epsilon$ appartiene a $\Sigma_{\omega,\lambda}$.

□

Per studiare l'insieme $\Sigma_{\omega,\lambda}$ al variare dei parametri possiamo quindi limitarci a considerare ω nell'intervallo chiuso $[0, 1]$. L'insieme nel piano $\{(\epsilon, \omega) : \epsilon \in \Sigma_{\omega,\lambda}, \omega \in [0, 1]\}$ è simmetrico per riflessione attorno agli assi $\epsilon = 0$ e $\omega = \frac{1}{2}$. L'esistenza della prima simmetria discende immediatamente dal punto 3 della Proposizione 10, mentre per mostrare la seconda occorre qualche ulteriore calcolo: sempre per la Proposizione 10, punti 1 e 2, abbiamo che

$$\Sigma_{\omega,\lambda} = \Sigma_{\omega-1,\lambda} = \Sigma_{1-\omega,\lambda}.$$

Un'importante proprietà dello spettro dell'operatore almost Mathieu è la *dualità di Aubry*:

Teorema 9. *Per ogni ω si ha che $\Sigma_{\omega,\lambda} = \lambda\Sigma_{\omega,\frac{1}{\lambda}}$.*

Dim. [Omessa, vedi: [19], [20]].

□

Nel Capitolo 3 abbiamo fissato la gauge di Landau in modo tale da avere il potenziale vettore lungo l'asse y . Una scelta fisicamente equivalente sarebbe stata fissare la gauge in modo tale da avere il potenziale vettore lungo l'asse x : infatti, sia $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ che $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ producono lo stesso campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Seguendo questa alternativa, avremmo ottenuto l'operatore $\lambda H_{\omega,\frac{1}{\lambda},\theta}$. Abbiamo allora che la dualità di Aubry si legge in modo naturale come l'indipendenza dello spettro dell'energia dell'elettrone di Bloch immerso nel campo magnetico dalla gauge scelta.

Ora che abbiamo mostrato le proprietà generali di simmetria di $\Sigma_{\omega,\lambda}$, valide per ogni ω e λ , passiamo a studiare le proprietà di $\Sigma_{\omega,\lambda}$ che dipendono dal parametro ω . Il fatto più sorprendente è che le proprietà dello spettro dell'operatore almost Mathieu dipendono in modo cruciale dall'aver ω razionale o meno. Se ω è razionale, tale che $\omega = \frac{p}{q}$ con p, q interi coprimi, allora $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta}$ è l'unione di q bande (ovvero, intervalli chiusi). Al variare di θ , tali bande non restano immutate, ma ciò avviene in modo tale che bande diverse non si sovrappongono mai, fatta eccezione al più per i loro estremi. Identificando le bande con il loro ordine di comparsa sulla retta reale, abbiamo che se una data energia è un punto interno di una certa banda per un certo valore di θ , tale energia non potrà appartenere ad un'altra banda per ogni valore di θ : da ciò deduciamo che anche $\Sigma_{\omega,\lambda}$ nel caso ω sia razionale, è un'unione di q bande che si sovrappongono al più agli estremi [21]. $\Sigma_{\omega,\lambda}$ può quindi presentare al più $(q - 1)$ *gap*: è stato dimostrato (da van Mouche [22] e, indipendentemente, da Choi, Elliott e Yui [23]) che tali *gap* sono sempre aperti, eccetto il *gap* centrale per q pari.

Nel caso ω sia irrazionale, vale la seguente notevole proprietà:

Proposizione 11. *Sia ω irrazionale. Allora lo spettro di $H_{\omega,\lambda,\theta}$, $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta}$, non dipende da θ .*

Dim. Ispirandoci ad alcune considerazioni presentate in [3, Exercise 6.1], articoliamo la nostra dimostrazione in cinque passi.

1. Mostriamo che per ogni k intero gli operatori $H_{\omega,\lambda,\theta}$ e $H_{\omega,\lambda,\theta+k\omega}$ sono unitariamente equivalenti, ovvero esiste un operatore unitario U_k tale che $H_{\omega,\lambda,\theta+k\omega} = U_k^{-1}H_{\omega,\lambda,\theta}U_k$. Consideriamo l'operatore di traslazione τ_k definito su $\ell^2(\mathbb{Z})$ come $(\tau_k u)(n) = u(n-k)$ per ogni $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, con k intero. τ_k è ovviamente una biiezione con τ_{-k} come inversa. Altrettanto ovviamente, τ_k è un'isometria e quindi un operatore unitario. Proviamo che si tratta dell'operatore unitario cercato:

$$\begin{aligned} [H_{\omega,\lambda,\theta}(\tau_k u)](n) &= \\ &= (\tau_k u)(n+1) + (\tau_k u)(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))(\tau_k u)(n) \\ &= u(n-k+1) + u(n-k-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta))u(n-k) \\ [\tau_{-k}(H_{\omega,\lambda,\theta}(\tau_k u))](n) &= [H_{\omega,\lambda,\theta}(\tau_k u)](n+k) \\ &= u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega n + \theta + k\omega))u(n) \\ &= (H_{\omega,\lambda,\theta+k\omega}u)(n), \end{aligned}$$

da cui $H_{\omega,\lambda,\theta+k\omega} = \tau_{-k}H_{\omega,\lambda,\theta}\tau_k$.

2. Se due operatori sono unitariamente equivalenti allora hanno lo stesso risolvente e quindi lo stesso spettro: infatti, se T e T' sono operatori limitati in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , U è un operatore unitario in \mathcal{H} e $T' = U^{-1}TU$, allora $(T' - \lambda I) = U^{-1}(T - \lambda I)U$ è invertibile se e solo se $(T - \lambda I)$ è invertibile, e quindi $\lambda \in \rho(T')$ se e solo se $\lambda \in \rho(T)$. Ritornando alla nostra Proposizione, abbiamo quindi che lo spettro di $H_{\omega,\lambda,\theta+k\omega} = \tau_{-k}H_{\omega,\lambda,\theta}\tau_k$ è uguale allo spettro di $H_{\omega,\lambda,\theta}$, $\Sigma_{\omega,\lambda,\theta}$.
3. L'insieme $\{\theta + k\omega + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$ è denso in \mathbb{R} . Questo è un argomento standard, è equivalente ad una nota proprietà della mappa circolare:

$$\phi_0 = \theta, \quad \phi_{n+1} = \phi_n + \omega \pmod{1}.$$

Se ω è irrazionale, allora $\{\theta_n\}$ riempie densamente l'intervallo $[0, 1]$. Abbiamo quindi che per ogni $\theta' \in \mathbb{R}$ esiste una successione $\{\theta_n\}$ in $\{\theta + k\omega + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$ tale che θ_n converge a θ' .

4. Proviamo la seguente disuguaglianza:

$$\|H_{\omega,\lambda,\theta} - H_{\omega,\lambda,\theta'}\| \leq 4\pi\lambda |\theta - \theta'| \quad \text{per ogni } \omega, \lambda, \theta, \theta', \quad (4.3)$$

dove con $\|\cdot\|$ si intende la norma operatoriale.

$$\begin{aligned} ((H_{\omega,\lambda,\theta} - H_{\omega,\lambda,\theta'})u)(n) &= 2\lambda[\cos(2\pi(\omega n + \theta)) - \cos(2\pi(\omega n + \theta'))]u(n) \\ &= -4\lambda \sin(\pi(2\omega n + \theta + \theta')) \sin(\pi(\theta - \theta'))u(n) \end{aligned}$$

per le formule di prostaferesi.

$$\begin{aligned} \|(H_{\omega,\lambda,\theta} - H_{\omega,\lambda,\theta'})u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 &= \\ &= 16\lambda^2 \sin^2(\pi(\theta - \theta')) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin^2(\pi(2\omega n + \theta + \theta')) |u(n)|^2 \\ &\leq 16\lambda^2 \sin^2(\pi(\theta - \theta')) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n)|^2 = 16\lambda^2 \sin^2(\pi(\theta - \theta')) \|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 \end{aligned}$$

$$\|H_{\omega,\lambda,\theta} - H_{\omega,\lambda,\theta'}\| \leq 4\lambda |\sin(\pi(\theta - \theta'))| \leq 4\pi\lambda |\theta - \theta'|.$$

Per l'ultimo passaggio è stata utilizzata la disuguaglianza $|\sin x| \leq |x|$.

5. Fissiamo $\omega, \lambda, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, ω irrazionale, $\lambda > 0$. Iniziamo col notare un fatto banale: se $m \in \mathbb{Z}$, $H_{\omega, \lambda, \theta+m} = H_{\omega, \lambda, \theta}$. Quindi, per i passi 1 e 2, abbiamo che per ogni k, m interi lo spettro di $H_{\omega, \lambda, \theta+k\omega+m}$ è uguale allo spettro di $H_{\omega, \lambda, \theta}$: $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta+k\omega+m} = \Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$. Per il passo 3, abbiamo che per ogni θ' in \mathbb{R} esiste una successione $\{\theta_n\}$ in $\{\theta + k\omega + m : k, m \in \mathbb{Z}\}$ che converge a θ' per n che tende a ∞ . Considerando la successione di operatori $\{H_{\omega, \lambda, \theta_n}\}$, abbiamo che questa converge in norma operatoriale a $H_{\omega, \lambda, \theta'}$: infatti per il passo 4

$$\|H_{\omega, \lambda, \theta_n} - H_{\omega, \lambda, \theta'}\| \leq 4\pi\lambda|\theta_n - \theta'| \rightarrow 0$$

per n che tende a ∞ . Gli operatori $H_{\omega, \lambda, \theta_n}$ hanno tutti lo stesso spettro e quindi lo stesso risolvente: risulta perciò che $\liminf \rho(H_{\omega, \lambda, \theta_n}) = \rho(H_{\omega, \lambda, \theta})$. Per la Proposizione 7 del Capitolo 1, abbiamo che $\rho(H_{\omega, \lambda, \theta'}) \subset \rho(H_{\omega, \lambda, \theta})$. Siccome ciò vale per ogni $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, anche l'inclusione opposta risulta automaticamente verificata, da cui $\rho(H_{\omega, \lambda, \theta'}) = \rho(H_{\omega, \lambda, \theta})$ e quindi $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta'} = \Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ per ogni $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Se ω è irrazionale allora lo spettro di $H_{\omega, \lambda, \theta}$ non dipende da θ .

□

Da ciò deduciamo subito che nel caso ω sia irrazionale abbiamo che $\Sigma_{\omega, \lambda} = \Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ per ogni θ .

Questi risultati ci forniscono diverse informazioni, qualitative e quantitative, sull'insieme $\{(\epsilon, \omega) : \epsilon \in \Sigma_{\omega, \lambda}, \omega \in [0, 1]\}$. A partire da Hofstadter [15], tale insieme è stato studiato con metodi numerici da diversi autori (citiamo [24], [25], [26], [27]), ed è diventato famoso con il nome di *farfalla di Hofstadter* per il suo peculiare aspetto.

4.2 Il "Ten Martini Problem"

Una delle questioni più interessanti emerse dallo studio dello spettro dell'operatore almost Mathieu è se questo sia un *insieme di Cantor* nel caso in cui ω sia irrazionale. Ricordiamo che un insieme di Cantor è un insieme chiuso, mai denso (cioè, la sua chiusura non ha punti interni) e privo di punti isolati. Questa congettura è stata formulata nel 1964 da Azbel [28]. Nel 1976, Hofstadter [15] trovò una ragionevole evidenza numerica che nel caso in cui $\lambda = 1$ lo spettro dell'operatore almost Mathieu sia un insieme di Cantor di misura di Lebesgue nulla. Nel 1981, Kac offrì dieci Martini a chiunque riuscisse a provare la congettura (facendo riferimento ad un enunciato più forte di quello presentato), il che portò Simon a rinominarla "Ten Martini Problem".

Il fatto che lo spettro dell'operatore almost Mathieu sia chiuso è ovvio, in quanto spettro di un operatore limitato, e anche l'assenza di punti isolati può essere dedotta da principi generali [29]. Pertanto, per risolvere il problema basterebbe dimostrare che lo spettro dell'operatore almost Mathieu è un insieme mai denso. Numerosi contributi in letteratura hanno fornito importanti risultati parziali: in particolare, nel 1994 Last [30] provò che per ogni λ e θ e per Lebesgue-q.o. ω la misura di Lebesgue di $\Sigma_{\omega, \lambda, \theta}$ è precisamente $|4 - 4\lambda|$. Ciò prova che per $\lambda = 1$ lo spettro abbia misura nulla per q.o. ω , e quindi in particolare abbia interno nullo.

Recentemente Avila e Jitomirskaya [31] hanno dimostrato completamente la congettura:

Teorema 10 (Avila, Jitomirskaya). *Lo spettro dell'operatore almost Mathieu è un insieme di Cantor per ogni ω irrazionale e per ogni $\lambda > 0$.*

Nel caso in cui ω è irrazionale si ha quindi che la struttura a bande è irrimediabilmente persa.

4.3 Decomposizione spettrale. Transizione metallo-isolante e spettro singolarmente continuo

Un'altra sorprendente proprietà dell'operatore almost Mathieu è la ricchezza esibita dalla sua decomposizione spettrale al variare dei parametri ω e λ . Il seguente Teorema è frutto dei contributi di diversi autori, si confronti [32] [33].

Teorema 11. *Se ω è razionale allora $H_{\omega,\lambda,\theta}$ ha solamente spettro assolutamente continuo per ogni λ, ω, θ .*

Sia ω irrazionale. Allora:

regime subcritico *se $0 < \lambda < 1$ allora $H_{\omega,\lambda,\theta}$ ha solamente spettro assolutamente continuo per ogni ω, θ .*

regime critico *se $\lambda = 1$ allora $H_{\omega,\lambda,\theta}$ ha solamente spettro singolarmente continuo per q.o. ω, θ .*

regime supercritico *se $\lambda > 1$ allora $H_{\omega,\lambda,\theta}$ ha solamente spettro puramente puntuale con autofunzioni che decadono esponenzialmente per q.o. ω, θ .*

I risultati per i regimi subcritico e supercritico erano stati congetturati da Aubry e André [19] come validi per ogni ω e θ . Avron e Simon [34] mostrarono che nel caso supercritico la congettura era sicuramente falsa, mentre recentemente Avila [33] ha dimostrato la validità della stessa nel caso subcritico, provando anzi che se ω è irrazionale allora le misure spettrali dell'operatore almost Mathieu sono assolutamente continue se e solo se $0 < \lambda < 1$.

Il regime critico corrisponde fisicamente alla descrizione di una particella alla *soglia di mobilità*, ovvero i parametri del modello sono tali che le funzioni d'onda hanno un comportamento tra il conduttivo e l'isolante, cioè tra l'essere estese e l'essere localizzate [35]. Come suggerito in [36], l'insorgere di questo tipo di spettro può essere indicativo del fatto che il potenziale considerato sia "intermedio" tra l'essere periodico (il che porterebbe allo spettro assolutamente continuo) e l'essere casuale (il che porterebbe allo spettro puramente puntuale).

Concludiamo presentando alcuni risultati sull'evoluzione temporale. La propagazione nel tempo di un pacchetto d'onda è un fenomeno complesso: per uno studio più approfondito sui legami tra dinamica quantistica e decomposizione spettrale rimandiamo alla lettura di [37].

Una delle più semplici quantità utili allo studio dell'evoluzione temporale è la *probabilità di sopravvivenza* al tempo t , ovvero la probabilità di trovare la particella nello stato iniziale $\psi_0 = \psi$ al tempo t : detta H l'Hamiltoniana del sistema, abbiamo che:

$$|\langle \psi_0, \psi_t \rangle|^2 = \left| \left\langle \psi, \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \psi \right\rangle \right|^2 = \left| \int_{\sigma(H)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} x t\right) d\mu_\psi(x) \right|^2$$

che a meno di riscalarare la variabile t , coincide con il valore assoluto elevato al quadrato della trasformata di Fourier della misura $\mu_\psi, |\hat{\mu}_\psi|^2$.

Teorema 12 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Se μ è una misura finita assolutamente continua allora $\hat{\mu}(t)$ converge a 0 per t che tende a ∞ .*

Da questo risultato segue immediatamente che se $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$ allora la probabilità di sopravvivenza di ψ si annulla per t che tende a ∞ .

Teorema 13 (Wiener, 1935).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle |\hat{\mu}|^2 \rangle_T = \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2.$$

Dove con $\langle |\hat{\mu}|^2 \rangle_T$ si è indicata la media temporale $\frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt$. Da ciò si deduce immediatamente che

Proposizione 12. $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle |\hat{\mu}_\psi|^2 \rangle_T = 0$ se e solo se $P_{pp}\psi = 0$, dove P_{pp} è il proiettore ortogonale su $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$.

Se lo stato iniziale ψ appartiene al sottospazio \mathcal{H}_{sc} , il limite della media della sua probabilità di sopravvivenza sarà nullo. Pertanto, se la probabilità di sopravvivenza ammette limite per t che tende all'infinito, tale limite deve essere nullo. Tuttavia, siccome il Lemma di Riemann-Lebesgue non è invertibile, non si può dire se tale limite esista. Ciò ammette diversi comportamenti possibili, anche "inusuali", per la propagazione del pacchetto d'onda. Questi risultati, per quanto elementari, sono sufficienti a fare intuire quanto possa essere anomala l'evoluzione di un pacchetto d'onda in caso di spettro singolarmente continuo.

Bibliografia

- [1] B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operator: A Review*, Adv. in Appl. Math., **3**, (1982), 463-490.
- [2] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications* (2nd ed.), John Wiley & Sons, 1999.
- [3] B. Helffer, *Spectral Theory and its Applications*, Cambridge University Press, 2013.
- [4] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- [5] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, Phys. Rev. Lett., **53**, (1984), 1951.
- [6] M. Baake, *A guide to mathematical quasicrystals*, in J.-B. Suck, P. Häussler, M. Schreiber (Eds.), *Quasicrystals-An Introduction to Structure, Physical Properties and Applications*, Springer, 2002.
- [7] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [8] E. Bombieri, J. E. Taylor, *Which distributions of matter diffract? An initial investigation*, J. Physique Colloque **47**, (1986), C3 19-28.
- [9] A. Hof, *On diffraction by aperiodic structures*, Commun Math. Phys., **169**, (1995), 25-43.
- [10] J. Bellissard, *Le papillon de Hofstadter [d'après B. Helffer et J. Sjöstrand]*, Séminaire Bourbaki, 1991-92, n 745, Novembre 1991.
- [11] L. D. Landau, *Diamagnetismus der Metalle*, Z. für Phys., **64**, (1930), 629-637.
- [12] R. E. Peierls, *Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen*, Z. für Phys., **80**, (1933), 763-791.
- [13] J. M. Luttinger, *The Effect of a Magnetic Field on Electrons in a Periodic Potential*, Phys. Rev., **84**, (1951), 814.
- [14] P. G. Harper, *Single Band Motion of Conduction Electrons in a Uniform Magnetic Field*, Proc. Phys. Soc. Lond., **A68**, (1955), 874-878.

- [15] D. R. Hofstadter, *Energy levels and wave functions of Bloch electrons in a rational or irrational magnetic field*, Phys. Rev., **B14**, (1976), 2239-2249.
- [16] C. R. Dean *et al.*, *Hofstadter's butterfly and the fractal quantum Hall effect in moiré superlattices*, Nature, **497**, (2013), 598-602.
- [17] L. A. Ponomarenko *et al.*, *Cloning of Dirac fermions in graphene superlattices*, Nature, **497**, (2013), 594-597.
- [18] M. A. Shubin, *Discrete magnetic Laplacian*, Commun. Math. Phys., **164**, (1994), 259-275.
- [19] S. Aubry, G. André, *Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices*, Ann. Israel Phys. Soc., **3**, (1980), 133-164.
- [20] J. Avron, B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operators. II. The integrated density of states*, Duke Math. J., **50**, (1983), 369-391.
- [21] Y. Last, *Almost Everything about the Almost Mathieu Operator I*, Proc. XI Internat. Congr. Math. Phys. (Paris, 1994), 366-372, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [22] P. M. H. van Mouche, *The coexistence problem for the discrete Mathieu operator*, Commun. Math. Phys., **122**, (1989), 23-34.
- [23] M. D. Choi, G. A. Elliott, N. Yui, *Gauss polynomials and the rotation algebra*, Invent. Math, **99**, (1990), 225-246.
- [24] F. H. Claro, W. H. Wannier, *Magnetic subband structure of electrons in hexagonal lattices*, Phys. Rev., **B19**, (1979), 6068-74.
- [25] M. Wilkinson, *Critical properties of electrons eigenstates in incommensurate systems*, Proc. R. Soc. London, **A391**, (1984), 305-350.
- [26] J. Bellissard, *C*-Algebras in solid State Physics. 2D Electrons in a uniform magnetic field* in D. E. Evans, M. Takesaki (Eds.), *Operator Algebras and Applications.*, Volume 2, Cambridge University Press, 1988.
- [27] J. P. Guillemin, B. Helffer, P. Trenton, *Walk inside Hofstadter's butterfly*, J. phys. France, **50**, (1989), 2019-2058.
- [28] M. Ya. Azbel, *Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field*, Sov. Phys. JETP, **19**, (1964), 634-645.
- [29] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators*, Springer, 1987.
- [30] Y. Last, *Zero measure spectrum for the Almost Mathieu operator*, Commun. Math. Phys., **164**, (1994), 421-432.
- [31] A. Avila, S. Jitomirskaya, *The Ten Martini Problem*, Ann. of Math., **170**, (2009), 303-342.
- [32] S. Jitomirskaya, *Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator*, Ann. of Math., **150**, (1999), 1159-1175.

- [33] A. Avila, *The absolutely continuous spectrum of the almost Mathieu operator*, preprint, arXiv.org: 0810.2965 [math.DS].
- [34] J. Avron, B. Simon, *Singular continuous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices*, Bull. A.M.S., **6**, (1982), 81-85.
- [35] S. Fishman, D. R. Grempel, R. E. Prange, *Wave functions at a mobility edge: An example of singular continuous spectrum*, Phys. Rev., **B28**, (1983), 7370-7372.
- [36] D. Damanik, *Singular continuous spectrum for class of substitution Hamiltonians*, Lett. Math. Phys., **46**, (1998), 303-311.
- [37] Y. Last, *Quantum Dynamics and Decompositions of Singular Continuous Spectra*, J. Funct. Anal., **142**, (1996), 406-445.