UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata (FISPPA)

Corso di laurea magistrale in Psicologia Sociale, del Lavoro e della Comunicazione

Tesi di laurea magistrale

Abbreviare test per la valutazione delle abilità tramite la metodologia competence-based test development

Shortening test for skill assessment through the competence-based test development methodology

Relatore:
Prof. Pasquale Anselmi

Laureando: **Alessandro Modena**
Matricola: **2018820**

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Questo lavoro verterà sulla metodologia Competence-based Test Development (CbTD; Anselmi et al., 2022), un approccio innovativo per lo sviluppo di test più informativi possibile riguardo gli stati di competenza, ovvero l'insieme di abilità o tratti relativi ad un dominio di interesse posseduti da un individuo.

La metodologia CbTD ha tre possibili ambiti di applicazione: la creazione di un test da zero, il miglioramento di un test esistente e l'accorciamento di un test esistente.

In questo lavoro, la metodologia CbTD verrà utilizzata per l'abbreviazione di un test già esistente, il Fraction Subtraction Test (Tatsuoka, 1990).

Il Capitolo 1 verte sulla cornice teorica a cui si è ispirata la metodologia CbTD, ovvero la Knowledge Space Theory (KST), sviluppata da Doignon e Falmagne nel 1985. Il capitolo presenta gli elementi chiave della KST, importanti per, successivamente, capire il funzionamento della CbTD.

Il Capitolo 2 verte sulla CbTD. Vengono illustrati gli elementi base e le proprietà che caratterizzano la metodologia, con un'enfasi particolare sulla funzione di discernibilità (che permette di individuare gli insiemi di abilità in grado di discenere gli stati di competenza uno dall'altro) e sull'irriducibilità di un modello di competenza (grazie alla quale ogni item presente nel test è necessario per la rilevazione degli stati di competenza). Nel capitolo 2 viene presentata anche una procedura iterativa tramite cui è possibile ricavare modelli di competenza irriducibili e con lo stesso livello di informatività circa gli stati di competenza dei modelli di competenza iniziali.

Il Capitolo 3 presenta un esempio toy relativo ad un test astratto. Questo consente di illustrare ogni passaggio necessario per poter rilevare gli stati di competenza.

Inoltre, il capitolo presenta l'applicazione della metodologia allo sviluppo della forma breve di un test esistente, il Fraction Subtraction Test.

Come detto all'inizio, lo stato di competenza è l'insieme delle abilità di un soggetto in un dominio di interesse. Il termine abilità si riferisce alle variabili latenti considerate. Questo termine è particolarmente appropriato nelle valutazioni in campo educativo, mentre potrebbe non esserlo in altre aree in cui è possibile applicare la metodologia CbTD. Un esempio è dato dalle valutazioni in campo clinico e diagnostico, in cui, anziché abilità, è più corretto riferirsi a queste variabili latenti come i criteri diagnostici legati ad un particolare disordine mentale (ovvero, si parla di tratti e non di abilità).

Capitolo 1

Knowledge Space Theory, valutare le abilità sottostanti a un dominio di interesse

Questo capitolo è volto a fornire informazioni sulla cornice teorica in cui si colloca la metodologia CbTD. Questa cornice teorica è la Knowledge Space Theory, ideata da Doignon e Falmagne nel 1985. La Knowledge Space Theory è un approccio per la valutazione della conoscenza di un individuo in un determinato dominio, ideale nella valutazione in campo formativo. Verranno introdotte le informazioni e gli elementi base di questo quadro teorico. Gli elementi chiave sono gli stati di conoscenza e la struttura di conoscenza. Gli stati di conoscenza sono l'insieme di problemi all'interno di un determinato dominio che un individuo è in grado di risolvere. La struttura di conoscenza è una collezione di tutti gli stati di conoscenza presenti in una data popolazione. Verrà spiegato come costruire quest'ultima tramite l'introduzione di due metodi che considerano le abilità sottostanti le risposte a determinati problemi. Verranno introdotte due tipologie di metodi che permettono di creare una relazione tra abilità e problemi, ovvero i test congiuntivi e quelli disgiuntivi. Questi due metodi verranno usati per la creazione di forme abbreviate di test, e i limiti derivanti da questi due metodi verranno eliminati tramite l'utilizzo della metodologia CbTD.

1.1 Gli elementi chiave della Knowledge Space Theory.

La knowledge space theory (KST) è un approccio per la valutazione della conoscenza sviluppato da Doignon e Falmagne nel 1985. Questo approccio fornisce una rappresentazione non numerica, ma allo stesso tempo accurata, della conoscenza di un individuo riguardo un dominio di interesse. La KST si discosta, quindi, dalla tradizionale valutazione numerica di determinate attitudini. Infatti, l'approccio tradizionale viene usato per la valutazione sommativa della conoscenza, mentre la KST è valida per la valutazione in campo formativo.

La valutazione in campo formativo ha il vantaggio di guidare l'insegnamento man mano che viene fornito, mentre nell'approccio tradizionale la valutazione è solo al termine dell'insegnamento.

All'interno della knowledge space theory, la conoscenza dell'individuo può essere suddivisa in un insieme più ampio di unità di conoscenza. Ognuna di queste unità può essere identificata come un dato problema. L'insieme di tutti i problemi Q definisce il dominio di conoscenza.

Un primo concetto chiave è quello di stato di conoscenza, che è l'insieme $K \subseteq Q$ di tutti i problemi nel dominio Q che un individuo è in grado di risolvere. Lo stato di conoscenza rappresenta il comportamento risolutivo in condizioni ideali, per esempio in assenza di errori di distrazione (un individuo sbaglia un item in grado di risolvere) e lucky guess (un individuo risponde correttamente ad un item che non è in grado di risolvere) (figura 1.1).

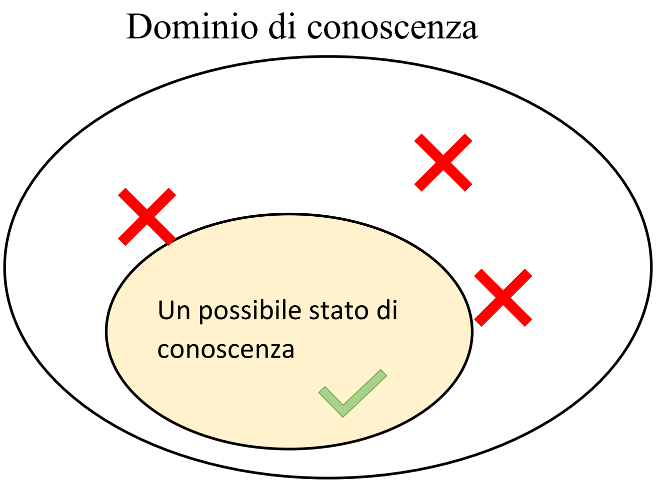

Figura 1.1

L'immagine rappresenta lo stato di conoscenza posseduto da un soggetto rispetto all'intero dominio di conoscenza. In assenza di errori di distrazione e lucky guess, il soggetto sarà in grado di risolvere unicamente gli item che richiedono le abilità presenti nel suo stato di conoscenza e non sarà in grado di risolvere gli item che richiedono abilità all'infuori del suo stato di conoscenza.

Si consideri che non tutte le combinazioni possibili di problemi in 2^Q, sono stati di conoscenza plausibili. Infatti, possono esistere dipendenze tra i comportamenti che portano alla soluzione del problema in un dominio di conoscenza. Queste dipendenze nel comportamento risolutivo determinano quali sottoinsiemi di Q sono possibili stati di conoscenza (Anselmi et al., 2017; Battista, 2004; Sternberg & Ben-Zeev, 1996).

Il secondo elemento base della KST è la struttura di conoscenza. La struttura di conoscenza è una collezione $\mathcal{K}$ di tutti gli stati di conoscenza K all'interno di una popolazione. La struttura di conoscenza è una coppia (Q, $\mathcal{K}$). $\mathcal{K}$ è una collezione di stati di conoscenza contenenti almeno l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme Q (Doignon & Falmagne, 1985): sono sempre possibili le due possibilità che tutti i problemi Q siano risolti oppure che nessuno di questi venga risolto.

La Competence-based Knowledge Space Theory (CbKST), un'estensione della KST, aggiunge ulteriori due elementi base, lo stato di competenza e la struttura di competenza. Assieme allo stato di conoscenza e alla struttura di conoscenza, questi elementi vengono ripresi anche dalla metodologia CbTD. Si possono trovare applicazioni della CbKST nei lavori di Albert & Lukas (1999), Anselmi et al. (2012), Heller, Augustin, et al. (2013), Heller et al. (2006), e Robusto et al. (2010)

Sia S un insieme finito, non vuoto delle abilità rilevanti a risolvere gli item in Q. Lo stato di competenza di una persona è l'insieme $C \subseteq S$ di tutte le abilità che la persona possiede. La struttura di competenza è una coppia (Q, $\mathcal{C}$). La struttura di competenza $\mathcal{C}$ è un insieme di stati di competenza contente almeno l'insieme vuoto $\emptyset$ ed S (Korossy, 1999).

Per maggior scorrevolezza, la struttura di conoscenza verrà chiamata anche semplicemente $\mathcal{K}$, mentre la struttura di competenza semplicemente $\mathcal{C}$. L'insieme Q verrà chiamato a volte test.

Ritornando alla struttura di conoscenza, se questa è chiusa sotto l'intersezione è chiamata spazio di chiusura (l'intersezione di due stati di conoscenza in $\mathcal{K}$ è a sua volta uno stato di conoscenza contenuto in $\mathcal{K}$. Analogamente, la chiusura sotto l'unione è quando l'unione degli stati di conoscenza in $\mathcal{K}$ è anch'essa uno stato di conoscenza in $\mathcal{K}$).

Per esempio, consideriamo un dominio Q contenente quattro problemi. Definiamo la struttura di conoscenza seguente:

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, Q\}$$

La rappresentazione grafica di questa struttura di conoscenza $\mathcal{K}$ è come data in Figura 1.2. La rappresentazione grafica si ottiene utilizzando i diagrammi di Hasse. In questo esempio i sottoinsiemi K di Q sono meno di 16: si ricorda infatti che non tutti i sottoinsiemi possibili devono essere necessariamente stati di conoscenza. Infatti, in questo caso specifico, non è possibile risolvere l'item 4 se non si è in grado di risolvere l'item 2. Per questo motivo non esiste lo stato di conoscenza contenente unicamente l'item 4. In questo esempio, la struttura di conoscenza è uno spazio di chiusura. Infatti, è chiusa sotto l'intersezione, ma non sotto l'unione ({1} ∪ {2,3} non è uno stato di conoscenza di $\mathcal{K}$).

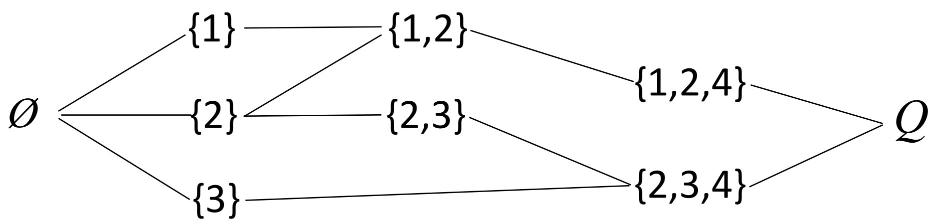

Figura 1.2.

Esempio di spazio di chiusura. {1} ∪ {2,3} *non è uno stato di conoscenza di* $\mathcal{K}$*, quindi non è chiusa sotto l'unione. Invece, ogni possibile intersezione tra gli stati di conoscenza presenti risulta in uno stato di conoscenza già presente all'interno della struttura. La struttura di conoscenza è, quindi, chiusa sotto l'intersezione.*

Se, invece, la struttura di conoscenza è chiusa sotto l'unione, è chiamata knowledge space. Per esempio, la struttura di conoscenza di un dominio *Q* di quattro problemi è la seguente:

$\mathcal{K}$= { Ø, {1}, {2}, {1,2}, {2,3}, {1,2,3} {1,3,4}, *Q*}

Questa struttura di conoscenza (figura 1.3) è chiusa sotto unione ma non necessariamente sotto l'intersezione ({2,3} ∩ {1,3,4} non è uno stato di conoscenza che fa parte di $\mathcal{K}$).

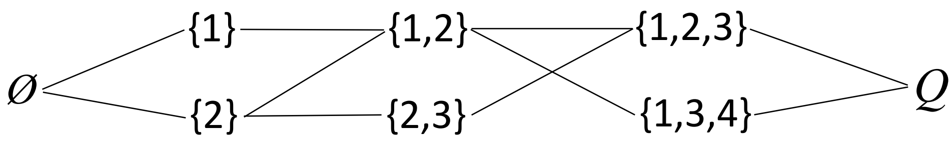

Figura 1.3. Esempio di knowledge space.

({2,3} ∩ {1,3,4} *non è uno stato di conoscenza che fa parte di* $\mathcal{K}$*. Invece, ogni possibile unione tra gli stati di conoscenza presenti risulta in uno stato di conoscenza già presente all'interno della struttura. La struttura di conoscenza è, quindi, chiusa sotto l'unione.*

Una struttura di conoscenza che è chiusa sia sotto unione che sotto intersezione (Figura 1.3) si definisce spazio quasi ordinale. Per esempio, la struttura di conoscenza di un dominio *Q* di tre problemi è la seguente:

$$\mathcal{K} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, Q\}$$

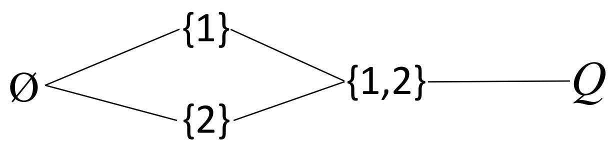

Figura 1.3. Esempio di spazio quasi ordinale. L'intersezione di ogni stato di conoscenza presente nella struttura di conoscenza risulta in uno stato di conoscenza già presente in $\mathcal{K}$*. Lo stesso vale anche per l'unione.*

Per costruire una struttura di conoscenza bisogna individuare gli stati di conoscenza che la compongono. La struttura di conoscenza, quindi, rappresenta l'elemento chiave che determina la qualità della valutazione della conoscenza. Esistono vari metodi per costruire una struttura di conoscenza. Questo lavoro verterà sul metodo che analizza i processi cognitivi sottostanti le risposte date ai problemi.

Esistono due modi per condurre tale analisi: il primo si basa su un'analisi dei problemi, tramite l'estrazione delle componenti rilevanti a partire dall'osservazione e analisi del contenuto dei problemi. Si suppone che ogni componente rilevante contribuisca alla difficoltà del problema. Vengono formulati i principi che regolano la combinazione di queste componenti. Si costruisce la struttura di conoscenza basandosi su questi principi. Questo metodo è stato studiato e applicato da Albert & Held (1994), Albert & Lukas (1999), e Lukas & Albert (1993). Il secondo metodo consiste nell'associare ogni problema con le abilità considerate utili o strumentali per risolverlo. Da questa associazione si derivano gli stati di conoscenza, con i quali è possibile costruire la struttura di conoscenza (Albert e Lukas, 1999; Düntsch & Gediga, 1995; Gediga & Düntsch, 2002).

Il secondo metodo, quello che si basa sui processi cognitivi sottostanti le risposte ai dati problemi per costruire una struttura di conoscenza, si basa su due funzioni, che permettono di mettere in relazione le abilità a disposizione e il comportamento risolutivo: la skill function μ e la problem function p (Düntsch & Gediga, 1995).

La skill function è una skill multimap (Q, S, μ) in cui le competenze in ogni $\mu(q)$ sono pairwise incomparable per inclusione insiemistica (ovvero, sono coppie di competenze in cui la prima competenza non è un sottoinsieme della seconda, e viceversa, la seconda competenza non è un sottoinsieme della prima) (Düntsch & Gediga, 1995).

La skill multimap è una tripla (Q, S, μ), in cui μ è una funzione che assegna ad ogni item $q \in Q$ una collezione non vuota di sottoinsiemi non vuoti di S.

La skill function assegna ad ogni item uno o più sottoinsiemi T di abilità, ognuno dei quali è sufficiente per risolvere l'item.

Più nel dettaglio, μ è una funzione da Q all'insieme potenza di 2^S, in cui si associa ad ogni item $q \in Q$ un insieme non vuoto di sottoinsiemi di S non vuoti e pairwise incomparable per inclusione insiemistica (tabella 1.1).

$q \in Q$	$\mu_1\ (q)$	$\mu_2\ (q)$
1	$\{\{a\}\}$	$\{\{a\}\}$
2	$\{\{c\}\}$	$\{\{c\}\}$
3	$\{\{a,b\}\}$	$\{\{b\},\{a,b\}\}$
4	$\{\{b\}, \{a, c\}\}$	$\{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$

5	$\{\{a\},\{b,c\}\}$	$\{\{a\},\{b,c\}\}$

Tabella 1.1

La skill multimap μ_1 *è una skill function: non presenta coppie di competenze in cui una di queste è un sottoinsieme dell'altra. La skill multimap* μ_2 *presenta competenze che non sono pairwise incomparable per inclusione insiemistica (per esempio, relativamente all'item 3, la competenza {b} è un sottoinsieme della competenza {a,b}); quindi, la skill multimap a destra non è una skill function.*

In una skill function, ogni competenza $T \in \mu(q)$ è un insieme minimo di abilità sufficienti a risolvere l'item q. Ogni sottoinsieme $T \in \mu(q)$ è definito competenza per q. Le competenze sono metodi o strategie per risolvere q (tabella 1.2).

$q \in Q$	$\mu_1(q)$
1	$\{\{a\}\}$
2	$\{\{c\}\}$
3	$\{\{a,b\}\}$
4	$\{\{b\}, \{a, c\}\}$
5	$\{\{a\},\{b,c\}\}$

Tabella 1.2

Esempio di una possibile skill function. Ad ogni item corrisponde una o più competenze, ognuna delle quali è sufficiente per risolvere l'item. Prendendo come esempio l'item 2, un soggetto che non possiede la competenza {c} non sarà in grado di risolvere tale item.

La problem function è indotta dalla skill function (Q, S, μ) (Düntsch & Gediga, 1995). La problem function è la funzione p: $2^S \rightarrow 2^Q$. La definizione di problem function è la seguente:

$$p(C): \{q \in Q : \text{esiste una competenza } T \in \mu\,(q) \text{ tale che } T \subseteq C\}$$

La problem function p assegna ad ogni insieme di abilità, l'insieme di tutti gli item che, secondo la skill function, possono essere risolti da queste abilità. Questo insieme di item è lo stato di conoscenza delineato dall'insieme di abilità (tabella 1.3).

$C \in 2^S$	$p(C)$
Ø	Ø
$\{a\}$	$\{1\}$
$\{b\}$	$\{4\}$
$\{c\}$	$\{2\}$
$\{a, b\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$

$\{a, c\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{b. c\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
$\{a, b, c\}$	Q

tabella 1.3

La problem function presentata in questa tabella deriva dalla skill function nella tabella 1.2. Per ogni competenza (colonna sinistra) vengono assegnati gli item risolvibili tramite essa. Prendendo come esempio la competenza {a, b}, questa permette di risolvere gli item 1,3,4,5.

Per capire quali problemi sono risolvibili da un individuo che possiede un dato sottoinsieme di abilità, bisogna sapere quale metodo viene utilizzato.

Partendo dalla skill function, esistono tre metodi per formalizzare la relazione tra abilità e problemi: i modelli congiuntivi, i modelli disgiuntivi e i competence model.

Nel modello congiuntivo, tutte le competenze in $\tau(Q)$ sono necessarie per risolvere un problema $Q \in Q$. Più specificatamente, la skill function (Q, S, μ) è congiuntiva quando , per ogni $q \in Q$, $\mu(q)$ contiene una singola competenza.

Per esempio, la capacità di leggere è una nozione che include la capacità di riflettere su testi scritti e di utilizzare questi testi come strumenti per raggiungere obiettivi individuali e sociali, noto anche come "leggere per fare" (Stiggins, 1982). Più nel dettaglio, leggere implica comprendere il testo, e la comprensione della lettura è determinata da due abilità sottostanti: la decodificazione e la comprensione del linguaggio (Gough & Tunmer, 1986). Se viene a mancare anche solo una di queste abilità, la lettura è impossibile.

Nel modello disgiuntivo, invece, è sufficiente una sola delle competenze in $\tau(Q)$ per risolvere il problema ad esse associato. Più specificatamente, La skill function (Q, S, μ) è detta disgiuntiva quando, per ogni $q \in Q$, ogni competenza è un singoletto.

Per esempio, la shared leadership è un processo dinamico di influenza interattiva tra membri di un gruppo. Tramite questa influenza interattiva, ogni componente del gruppo guida l'altro verso il successo degli obbiettivi del gruppo, organizzativi o entrambi (Pearce & Conger, 2002). Secondo Pearce e Conger, si hanno all'interno tre tipi di influenza: l'influenza tra pari, o laterale, l'influenza gerarchica dal basso e l'influenza gerarchica dall'alto. Perché ci sia shared leadership è sufficiente una sola di queste influenze.

Data questa distinzione, i test congiuntivi sono particolarmente appropriati nel campo educativo, dove un problema può essere scomposto in una serie di step, ognuno dei quali deve essere svolto in maniera corretta al fine di risolvere il problema. I test disgiuntivi, invece, sono particolarmente adatti per le diagnosi cliniche e psicologiche, in cui le valutazioni si basano sulla rilevazione di solo alcuni tra i sintomi possibili.

A livello teorico, si supponga che $C \subseteq S$ sia un sottoinsieme di competenze possedute da un individuo. Nei modelli congiuntivi, un problema $q \in Q$ può essere risolto da un individuo se tutte le competenze richieste da Q sono presenti in C:

$$\tau\,(q) \subseteq C$$

La struttura di conoscenza delineata da C tramite il modello congiuntivo corrisponde al sottoinsieme di problemi $K \subseteq Q$, se K è l'insieme di tutti i problemi che soddisfano $\tau\,(q) \subseteq C$:

$$K = \{q \in Q\colon \tau\,(q) \subseteq C\}$$

La tabella 1.4 sottostante raffigura un esempio di struttura di conoscenza.

Problemi $q \in Q$	Sottoinsiemi di abilità s $\in S$
1	$\{\{a\}\}$
2	$\{\{b\}\}$
3	$\{\{c\}\}$
4	$\{\{a,b\}\}$
5	$\{\{b,c\}\}$
6	$\{\{a,b,d\}\}$
7	$\{\{b,c,d\}\}$
8	Q

Tabella 1.4

Esempio di struttura di conoscenza. Ad ogni item sono associate le abilità da utilizzare per riuscire a risolverlo. Per ogni item, ogni sottoinsiemi di abilità s ad esso associato è necessario per risolvere l'item

Prendiamo come sottoinsieme C il seguente:

$$C = \{a,b,c\}$$

I problemi risolvibili da un soggetto che possiede queste abilità di C, tramite il modello congiuntivo, sono {1, 2, 3, 4, 5}.

L'insieme di tutti gli stati di conoscenza delineati dai sottoinsiemi delle competenze di S tramite il modello congiuntivo è la struttura di conoscenza delineata dalla skill map (Q, S, τ). Le strutture di conoscenza ricavabili tramite il modello congiuntivo sono chiuse sotto l'intersezione.

Analogamente, nel modello disgiuntivo, un problema $q \in Q$ è risolvibile da un individuo se almeno una competenza richiesta da q è presente in C:

$$\tau\,(q) \cap C \neq \emptyset$$

Il knowledge space delineato da C tramite il modello disgiuntivo corrisponde al sottoinsieme di problemi $K \subseteq Q$ se K è l'insieme di tutti i problemi che soddisfano $\tau\,(q) \cap C \neq \emptyset$:

$$K = \{q \in Q\colon \tau\,(q) \cap C \neq \emptyset\}$$

Per fornire un esempio, consideriamo la seguente skill function (Q, S, μ), in cui $Q = \{1,2,3,4,5\}$, $S = \{a,b,c\}$ e μ: $Q \rightarrow 2^S \setminus \emptyset$. La tabella 1.5 presenta la seguente struttura di conoscenza.

Problemi $q \in Q$	Sottoinsiemi di abilità s $\in S$
1	$\{\{a\}, \{b\}\}$
2	$\{\{b\}, \{c\}\}$
3	$\{\{a\}\ \{c\}\}$
4	$\{\{c\}\}$
5	$\{\{a\}, \{b\}.\{c\}\}$

Tabella 1.5

Esempio di struttura di conoscenza. Per ogni item, ogni sottoinsieme di abilità s ad esso associato è sufficiente a risolvere l'item.

Dato il sottoinsieme di abilità $C = \{a\}$ possedute da un soggetto, questo sarà in grado di risolvere tutti i problemi che contengono l'abilità $\{a\}$, ovvero gli item 1,3 e 5.

Le struttura di conoscenza definite tramite il modello disgiuntivo sono chiuse sotto unione, ovvero sono knowledge space. Le struttura di conoscenza trovate con questi due metodi sono duali l'una all'altra (figura 1.5).

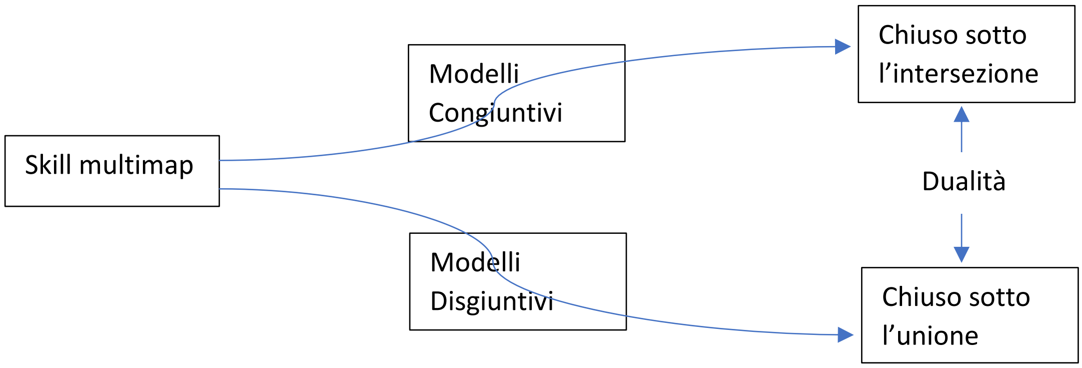

Figura 1.5

La skill multimap va a delineare la struttura di conoscenza riguardo un certo dominio di interesse. A seconda del dominio è più appropriato utilizzare dei modelli congiuntivi rispetto a quelli disgiuntivi e viceversa. La scelta dipende dalla proprietà della struttura di conoscenza, a seconda che sia chiusa sotto l'intersezione o sotto l'unione.

In questo lavoro ci focalizzeremo sulla potenzialità della metodologia CbTD per l'accorciamento di test già esistenti, uno dei suoi tre principali ambiti di applicazione. Infatti, la metodologia CbTD permette di sviluppare test, di migliorarli, oppure di abbreviarli, basandosi sull'individuazione delle abilità possedute da un individuo in uno specifico dominio disciplinare a partire dalle risposte fornite agli item di un test. Ci sono due vantaggi principali riguardo la creazione di forme brevi di test: innanzitutto, alcuni test possono essere molto lunghi e troppo dispendiosi in termine di tempo ed energie per i soggetti (cosa che può potenzialmente intaccare la validità del test), oppure, viceversa, certi soggetti non hanno le capacità di rispondere a questionari lunghi. Ad esempio, il Minnesota Multiphasic Personality Inventory (MMPI) è uno degli strumenti per la misurazione della personalità più usati sia in ambito psicologico che clinico. Tuttavia, la sua utilità potrebbe essere intaccata dal grande numero di item presenti (oltre 500) e dal tempo necessario per completarlo. Questo è valido, ad esempio, per le categorie di persone che presentano disabilità o malattie (Butcher & Hostetler, 1990). Il secondo vantaggio di disporre di forme abbreviate di test consiste nella possibilità di effettuare più test. Ad esempio, nel campo della selezione del personale, le forme abbreviate permettono per prima cosa una riduzione dei costi e dei tempi rispetto al sottoporre i candidati alle forme originali dei test. Inoltre, offre la possibilità di fornire un maggiore numero di test a parità di tempo e costi della selezione originale. Ciò aumenta la varietà di informazioni raccoglibili sui candidati, e quindi comporta una maggiore accuratezza nella selezione.

Perché sia possibile abbreviare un test esistente, è necessario che l'informatività del test non venga ridotta. La metodologia CbTD, argomento principale del secondo capitolo, permette proprio questo: le sue due caratteristiche principali sono la funzione di discernibilità e l'irriducibilità. La funzione di discernibilità permette di individuare gli insiemi di abilità in grado di discernere gli stati di competenza uno dall'altro. Questo significa che, nel caso di applicazione della metodologia CbTD per l'abbreviazione di un test esistente, il livello di informatività del nuovo test non calerà. L'irriducibilità ha come conseguenza la necessità di ogni singolo item nel test per l'individuazione degli stati di competenza sottostanti.

Capitolo 2

La metodologia Competence-based Test Development.

Questo capitolo verte sulla metodologia Competence-based Test Development. La parte 2.1 introduce i concetti base della CbKST e della CbTD.

Nella parte 2.2 vengono presentati i concetti propedeutici all'introduzione della funzione di discernibilità e all'irriducibilità, due concetti fondamentali della CbTD: il primo, la funzione di discernibilità, permette di individuare gli insiemi di abilità in grado di discernere gli stati di competenza uno dall'altro; il secondo è relativo all'irriducibilità dei modelli di competenza, che comporta la necessità di ogni singolo item nel test per poter discernere gli stati di competenza.

La parte 2.3 presenta la funzione di discernibilità. La parte 2.4 presenta il concetto di irriducibilità di un modello di competenza.

La parte 2.5 si concentra su una procedura iterativa per lo sviluppo dei test. Questa procedura permette di eliminare le competenze superflue (le competenze sono metodi o strategie per risolvere l'item q). La parte 2.6 illustra alcune regole per la scelta delle competenze eliminabili tramite la procedura descritta nel paragrafo 2.5.

Tutto il capitolo riguarderà lo sviluppo di test congiuntivi e il linguaggio utilizzato sarà idoneo per questi.

2.1 Elementi base della metodologia CbTD.

La metodologia CbTD è pensata per lo sviluppo di test che permettano di individuare le abilità possedute da un individuo in uno specifico dominio disciplinare a partire dalle risposte fornite agli item di un test. Questo insieme di abilità è chiamato stato di competenza. La CbTD deriva dalla Competence-based Knowledge Space Theory (CbKST), un'estensione della knowledge space theory (CbKST; Doignon, 1994; Düntsch & Gediga, 1995; Falmagne et al., 1990; Gediga & Düntsch, 2002; Heller et al., 2013; Korossy, 1999).

Nella CbKST, la relazione tra le abilità possedute da un individuo e il comportamento risolutivo agli item è caratterizzata da due funzioni: la skill function μ e la problem function p (Düntsch & Gediga, 1995), come già detto nel capitolo precedente.

Per individuare le abilità possedute da un individuo (cioè il suo stato di competenza), a partire dalle risposte date agli item, sono necessari due processi: prima è necessario derivare lo stato di conoscenza dell'individuo (cioè l'insieme degli item che l'individuo è in grado di risolvere in condizioni ideali) a partire dalle risposte date agli item e in seguito è necessario derivare lo stato di competenza sottostante lo stato di conoscenza.

Il processo di inferire lo stato di conoscenza latente dalle risposte agli item, si basa, in generale, su un framework probabilistico (Falmagne & Doignon, 1988a, 1988b) definito sulla struttura di conoscenza, cioè sull'insieme di tutti gli stati di conoscenza osservabili in una popolazione di individui.

Il secondo processo, quello di derivare lo stato di conoscenza dell'individuo a partire dalle risposte date agli item, è deterministico e si basa sulla problem function. Lo stato di conoscenza può essere delineato da un unico stato di competenza oppure da più stati di competenza diversi. Un test è buono quando permette di distinguere gli stati di competenza sottostanti agli stati di conoscenza con un livello di incertezza il più piccolo possibile.

Heller et al. (2015, 2016, 2017) hanno identificato le proprietà di test che permettono di ricavare in modo univoco lo stato di competenza a partire dallo stato di conoscenza. A partire dal loro lavoro, è stata sviluppata la metodologia Competence-based Test Development i cui ambiti principali di applicazione sono tre: innanzitutto, tramite la CbTD è possibile migliorare l'informatività di test esistenti. Questo è valido per tutti i test che non permettono valutazioni uniche sugli stati di competenza sottostanti (tramite la creazione e aggiunta di item che permettono di risalire in maniera univoca alle competenze di interesse). Il secondo ambito di applicazione è relativo alla creazione di forme abbreviate di un test. Ciò è possibile tramite l'eliminazione di item che permettono di risalire a competenze già note tramite altri item. L'ultimo ambito di applicazione è quello relativo alla creazione di un test da zero. Basandosi sulle competenze di un dominio di interesse, vengono costruiti degli item necessari a individuarle.

Data una collezione di abilità relative a un determinato campo disciplinare, vengono costruiti test che siano il più informativi possibile riguardo gli stati di competenza di un individuo. La metodologia CbTD permette lo sviluppo di due tipi di test, quelli congiuntivi e quelli disgiuntivi.

La cornice teorica su cui si basa la metodologia CbTD è la CbKST. La metodologia CbTD ricava i suoi concetti base e la notazione matematica basata sulla teoria degli insiemi dalla CbKST. La Rough Set Theory (RST; Pawlak, 1982, Pawlak, 1991), una teoria con un ampio spazio di applicazione nel campo dell'analisi dei dati, del data mining e del machine learning, è stata fonte di ispirazione per altri concetti e idee della metodologia CbTD.

2.2 Proprietà inerenti alla metodologia CbTD.

La metodologia CbTD riprende molti termini della Knowledge Space theory. Le unità base sono lo stato di conoscenza (e, di conseguenza, la struttura di conoscenza) e lo stato di competenza (e, di conseguenza, la struttura di competenza).

Il comportamento osservabile è in relazione con le abilità latenti tramite la tripla (Q, S, μ), ovvero la skill function.

Ogni skill function (Q, S, μ) induce una funzione p: $2^S \rightarrow 2^Q$, ovvero la problem function.

L'insieme $p(C)$ è lo stato di conoscenza delineato dall'insieme di abilità C. Il dominio di p è dato dall'insieme 2^S.

Dato $C \subseteq 2^S$, se si integrano la skill function (Q, S, μ) e la struttura di competenza C, si ottiene il modello di competenza. Il modello di competenza è una quadrupla (Q, S, C, μ). La problem function che corrisponde al modello di competenza (Q, S, C, μ) è una funzione che ha per dominio C.

Un modello di competenza è congiuntivo se include una skill function congiuntiva. Viceversa, un modello di competenza è disgiuntivo se include una skill function disgiuntiva. In questo lavoro, l'insieme di item inclusi in un modello di competenza congiuntivo verrà definito anche come test congiuntivo. Viceversa, l'insieme di item inclusi in un modello di competenza disgiuntivo sarà anche chiamato test disgiuntivo.

I due concetti chiave relativi alla metodologia CbTD sono l'irriducibilità di un modello di competenza (permette di stabilire che ogni item presente nel test sia necessario per la rilevazione dello stato di competenza sottostante) e la funzione di discernibilità (permette di individuare quali insiemi di competenza consentono di distinguere gli stati di competenza).

Prima di introdurre questi due concetti è necessario presentare altre proprietà precedenti a questo passaggio: la restrizione del dominio di un modello di competenza, le classi di equivalenza e i livelli di informatività dei modelli di competenza.

2.2.1 Proprietà dei modelli di competenza: Restrizione del dominio di un modello di competenza.

Un modello di competenza (Q^*, S, C, μ^*) è detto essere una restrizione del dominio del modello di competenza (Q, S, C, μ) qualora $\emptyset \subseteq Q^* \subseteq Q$ e $\mu^*(q) = \mu(q)$ per tutti i $q \in Q^*$ (Heller et al., 2017). Si ha una restrizione del dominio propria se l'inclusione $Q^* \subset Q$ è stretta, ovvero se Q^* presenta un numero di item inferiore rispetto al test Q di partenza.

Per qualsiasi struttura di competenza C, la problem function p: $C \rightarrow 2^Q$ indotta da (Q, S, C, μ) e la problem function $p^*(C) \rightarrow 2^{Q^*}$ indotta da (Q^*, S, C, μ) soddisfano

$$p^*(C) = Q^* \cap p(C)$$

per tutti gli stati di competenza $C \in \mathcal{C}$. L’iniettività di p^* implica l’iniettività di p.

2.2. 2 Proprietà dei modelli di competenza: classi di equivalenza e livelli di informatività.

Questa sezione presenta proprietà base dei modelli di competenza. Queste proprietà vengono definite sulla base delle classi di equivalenza (le classi di equivalenza di un dato insieme sono partizioni degli elementi di quell’insieme in sottoinsiemi. Questi sottoinsiemi contengono solo tutti gli elementi tra loro equivalenti secondo la relazione considerata. La figura 2.1 è un esempio di partizione di un insieme contenete 6 figure geometriche in due classe di equivalenza).

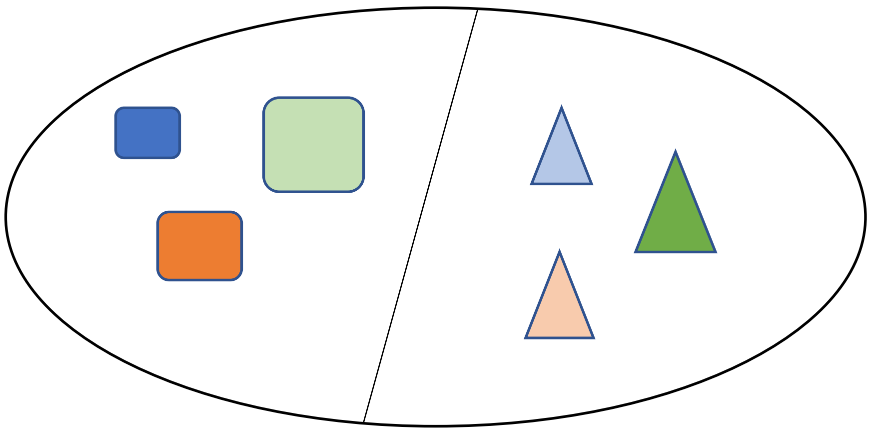

Figura 2.1

L’insieme è stato ripartito in due classi di equivalenza. Per ognuna delle due classi di equivalenza, ogni elemento è equivalente all’altro per la proprietà di essere, rispettivamente, dei parallelepipedi e dei triangoli.

Le classi di equivalenza vengono indotte dalle rispettive problem function. La definizione di classe di equivalenza tra modelli di competenza è la seguente:

Dato un modello di competenza (Q, S, $\mathcal{C}$, μ), la relazione di equivalenza $\sim_p$ sulla struttura di competenza $\mathcal{C}$ è definita da:

$$C \sim_p C' \text{ se e solo se } p(C) = p(C')$$

per tutti i C, $C' \in \mathcal{C}$.

Sia $\mathcal{C}/\sim_p$ l'insieme quoziente (ovvero l'insieme delle classi di equivalenza di C formate dalla relazione di equivalenza $\sim_p$) delle classi di equivalenza $[C]_p = \{U \in \mathcal{C}: U \sim_p C\}$.

La prima proprietà basata sulle classi di equivalenza è quella relativa al confronto tra i livelli di informatività dei modelli di competenza.

Infatti, un modello di competenza può essere maggiormente informativo, strettamente maggiormente informativo oppure egualmente informativo rispetto ad un altro modello di competenza. Siano $M_1 = (Q_1, S, \mathcal{C}, \mu_1)$ and $M_2 = (Q_2, S, \mathcal{C}, \mu_2)$ due modelli di competenza definiti sugli stessi insiemi S e $\mathcal{C}$, e siano p_1 e p_2 le problem function indotte da M_1 e M_2, rispettivamente. Inoltre, sia $\mathcal{C}/\sim p_1$ l'insieme quoziente delle classi di equivalenza $[C]p_1$ indotte da p_1, e $\mathcal{C}/\sim p_2$ l'insieme quoziente di classi di equivalenza $[C]p_2$ indotte da p_2.

Il modello di competenza M_1 è detto essere maggiormente informativo rispetto al modello di competenza M_2 ($M_1 \gtrsim M_2$) se

$$[C]p_1 \subseteq [C]p_2$$

per tutti I $C \in \mathcal{C}$.

Il modello di competenza M_1 è detto strettamente più informativo del modello di competenza M_2 ($M_1 > M_2$) se

$$M_1 \gtrsim M_2 \text{ e } \mathcal{C}/\sim p_1 \neq \mathcal{C}/\sim p_2$$

Il modello di competenza M_1 è detto egualmente informativo rispetto al modello di competenza M_2 ($M_1 \sim M_2$) se:

$$M_1 \gtrsim M_2 \text{ e } M_2 \gtrsim M_1$$

Utilizzando un linguaggio più intuitivo, un modello di competenza è più informativo di un altro modello di competenza se la sua capacità di scoprire uno stato di competenza dalle risposte fornite agli item è superiore o uguale a quella del secondo modello di competenza.

Un modello di competenza è strettamente più informativo di un altro modello di competenza se la sua capacità di scoprire uno stato di competenza dalle risposte fornite agli item è maggiore rispetto a quella del secondo modello di competenza.

Un modello di competenza è ugualmente informativo ad un altro modello di competenza se questi due modelli hanno la stessa capacità di scoprire gli stati di competenza dalle risposte agli item osservabili.

Oltre al confronto tra i livelli di informatività tra modelli di competenza, è necessario anche sapere il livello di informatività di ogni modello di competenza riguardo gli stati di competenza latenti agli item. In caso contrario, non sarebbe possibile conoscere quali modelli di competenza consentono di individuare in maniera univoca lo stato di competenza sottostante le risposte agli item. Per questo, la seconda proprietà dei modelli di competenza riguarda la capacità di individuare i modelli di competenza fully informative.

Un modello di competenza si dice fully informative se tutte le classi di equivalenza sono dei singoletti. Un modello di competenza fully informative consente di individuare in maniera univoca lo stato di competenza sottostante le risposte agli item.

Se un modello di competenza è fully informative, ciò implica che è possibile scoprire in maniera univoca lo stato di competenza della persona in esame in base alle risposte agli item osservabili. Ciò vale per qualsiasi stato di competenza.

L'ultima proprietà dei modelli di competenza è l'irriducibilità. È un concetto chiave molto importante, poiché, se un modello fully informative è in grado di rilevare ogni stato di competenza in maniera univoca, l'irriducibilità di un modello di competenza implica la necessità di ogni item $q \in Q$ per la rilevazione degli stati di competenza di interesse. In altre parole, permette la creazione di test senza item in eccesso.

Un modello di competenza è detto irriducibile se è strettamente più informativo di qualsiasi sua altra restrizione di dominio.

Un modello di competenza irriducibile implica che ciascuno degli item in Q è necessario per distinguere due stati di competenza qualsiasi dalle risposte agli item osservabili.

2.2.3 Proprietà dei modelli di competenza: esempi.

L'esempio seguente illustra i modelli di competenza descritti nella sezione precedente. Una notazione abbreviata viene utilizzata per denotare ogni insieme non vuoto di abilità che è uno stato di competenza o una competenza. Per fare solo un esempio, *ab* sta per $\{a, b\}$.

Esempio 1. Consideriamo i quattro modelli di competenza $M_1 = (Q_1, S, C, \mu_1)$, $M_2 = (Q_2, S, C, \mu_2)$, $M_3 = (Q_3, S, C, \mu_3)$ e $M_4 = (Q_4, S, C, \mu_4)$, con $S = \{a, b, c\}$, $\mathcal{C} = \{\emptyset, a, b, ab, bc, abc\}$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Q_4 = \{1,2\}$ e le funzioni μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 definite come visibile nella tabella 2.1:

$q \in Q$	$\mu_1(q)$	$\mu_2(q)$	$\mu_3(q)$	$\mu_4(q)$
1	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a\}$
2	$\{b\}$	$\{ab\}$	$\{ab\}$	$\{bc\}$
3	$\{ab\}$	$\{bc\}$	$\{bc\}$	
4	$\{bc\}$	$\{abc\}$	$\{abc\}$	

Tabella 2.1

Nella colonna a sinistra sono presentati gli item di un test. Nelle restanti colonne, le rispettive funzioni μ_i.

I modelli di competenza M_1,M_2, M_3 e M_4 inducono le problem function p_1, p_2, p_3 e p_4 rispettivamente. Le classi di equivalenza definite a partire dalle problem function sono rappresentate nella tabella 2.2:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, a, b, ab, bc, abc\}$$

$C \in C$	$[C]p_1$	$[C]p_2$	$[C]p_3$	$[C]p_4$
Ø	{Ø}	{Ø, b}	{Ø, a}	{Ø , b}
a	{a}	{a}	{Ø, a}	{a}
b	{b}	{Ø, b}	{b}	{Ø, b}
ab	{ab}	{ab}	{ab}	{ab}
bc	{bc}	{bc}	{bc}	{bc}
abc	{abc}	{abc}	{abc}	{abc}

Tabella 2.2

La tabella illustra le classi di equivalenza definite a partire dalle rispettive problem function. Prendendo come esempio $[C]p_2$*, {b} è equivalente a Ø, poiché tramite* $\mu_2(q)$ *entrambi gli stati di competenza delineano lo stato di conoscenza Ø.*

Inoltre, M_1 è fully informative e strettamente più informativo di M_2, M_3 e M_4. Infatti, permette di risalire a tutti gli stati di competenza sottostanti le risposte agli item, come si vede nella tabella 2.2 (ogni classe di equivalenza $[C]p_1$ è un singoletto). I modelli di competenza M_2 e M_3 sono incomparabili per quanto riguarda l'informatività (differiscono alcune delle loro classi di equivalenza). Il modello di competenza M_4 è irriducibile.

Per dimostrare l'irriducibilità di M_4 è sufficiente creare delle restrizioni del suo dominio nelle quali viene eliminato uno solo degli item. Se eliminando un item il nuovo modello di competenza perde capacità informativa nell'individuare gli stati di competenza sottostanti le risposte agli item, significa che quell'item è necessario per trovare un determinato stato di competenza. Se questa perdita di informazione è presente per qualsiasi item eliminato, allora il modello di competenza iniziale è irriducibile.

Le possibili restrizioni di dominio di M_4 sono

$M_4^* = (Q_4^*, S, C, \mu_4^*)$

$M_4^\circ = (Q_4^\circ, S, C, \mu_4^\circ)$,

dove $Q_4^* = Q_4 \setminus \{1\} = \{2\}$, e $Q_4^\circ = Q_4 \setminus \{2\} = \{1\}$. M_4^* e M_4° inducono le funzioni problema p^* e p°, rispettivamente. Le classi di equivalenza ricavate dalle problem function sono le seguenti presentate nella tabella 2.3:

$C \in C$	$[C]p_4$	$[C]p_4^*$	$[C]p_4^\circ$
∅	$\{Ø, b\}$	$\{Ø, a, b, ab\}$	$\{Ø, b, bc\}$
a	$\{a\}$	$\{Ø, a, b, ab\}$	$\{a\}$
b	$\{Ø, b\}$	$\{Ø, a, b, ab\}$	$\{Ø, b, bc\}$
ab	$\{ab\}$	$\{Ø, a, b, ab\}$	$\{ab\}$
bc	$\{bc\}$	$\{bc, abc\}$	$\{Ø, b, bc\}$
abc	$\{abc\}$	$\{bc, abc\}$	$\{abc\}$

Tabella 2.3

Il modello di competenza M_4^*, rispetto al modello di competenza di partenza M_4, non è più in grado di trovare in modo univoco la competenza {a} e la competenza {ab}.

Il nuovo modello di competenza M_4° non è più in grado di rilevare la competenza {bc}.

Il modello di competenza M_4 è più informativo di M_4^* e M_4° e quindi è irriducibile. Inoltre, essendo M_4 più informativo di una qualsiasi sua restrizione in cui viene eliminato un solo item, di conseguenza rimane più informativo di una qualsiasi sua restrizione in cui venga eliminato più di un item.

Ritornando ai modelli di competenza M_1, M_2 e M_3, questi non sono irriducibili. Ad esempio, la restrizione di dominio $M_1^*= (Q_1^*, S, C, \mu_1^*)$ di $M_1= (Q_1, S, C, \mu_1)$, con $Q_1^*= Q_1 \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$ è tanto informativa quanto M_1.

2.3 Funzione di discernibilità

Dato un'insieme finito non vuoto S di abilità, sia $\mathcal{D} \subseteq 2^S \times 2^S$ un insieme non vuoto di coppie non ordinate di sottoinsiemi $C \subseteq S$, ciascuna delle quali deve essere interpretata come uno stato di competenza. Sia $\mathcal{T} \subseteq 2^S \setminus \{\emptyset\}$ un insieme non vuoto di sottoinsiemi non vuoti $T \subseteq S$, ciascuno dei quali deve essere interpretato come competenza. Per ogni coppia di stati di competenza

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$, si dice che una competenza $T \in \mathcal{T}$ discerne la coppia $\{C, C'\}$ se

$$T \subseteq C \text{ se e solo se } T \not\subseteq C'.$$

(Anselmi et al., 2022).

L'insieme vuoto non è un elemento di $\mathcal{T}$ poichè non consente di discernere nessuna coppia di stati di competenza in $\mathcal{D}$.

Definizione 4 (funzione di discernibilità). Una funzione di discernibilità è una quadrupla $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ dove S è una collezione finita non vuota di abilità, $\mathcal{D} \subseteq 2^S \times 2^S$ è una collezione non vuota di coppie di stati di competenza non ordinate, $\mathcal{T} \subseteq 2^S \setminus \{\emptyset\}$ è una collezione non vuota di competenze non vuote $\mathcal{T} \subseteq S$, e δ è una funzione da $\mathcal{D} \to 2^{\mathcal{T}}$ che associa a ciascuna coppia $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ di stati di competenza, l'insieme di tutte le competenze in $\mathcal{T}$ che discernono la coppia $\{C, C'\}$. Ponendo $\mathcal{T}_C = \{T \in \mathcal{T} : T \subseteq C\}$ per ogni $C \in \mathcal{C}$ allora, per ogni coppia $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$, la funzione δ è definita da

$$\delta(C, C') = (\mathcal{T}_C \setminus \mathcal{T}_{C'}) \cup (\mathcal{T}_{C'} \setminus \mathcal{T}_C)$$

dove \ denota la differenza insiemistica e $\delta(C, C')$ è una forma abbreviata per $\delta(\{C, C'\})$ (Anselmi et al., 2022).

L'insieme $\delta(C, C')$ è chiamato bag di competenze della coppia $\{C, C'\}$, o semplicemente bag.

La definizione di funzione di discernibilità implica due cose. Innanzitutto, è possibile discernere una coppia $\{C, C'\}$ se e solo se la sua bag non è vuota, cioè se $\delta(C, C') \neq \emptyset$.

La tabella 2.4 contiene un esempio pratico di funzione di discernibilità. Consideriamo la funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ dove:

$S = \{a, b, c\}$.

$\mathcal{D} = \{\{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{\emptyset, c\}, \{\emptyset, ab\}, \{a, abc\}, \{b, ab\}, \{c, bc\}, \{ab, ac\}, \{bc, abc\}\}$.

$\mathcal{T} = \{a, b, c, ab, bc, abc\}$.

La funzione δ è rappresentata nella tabella 2.4.

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta(C, C')$
$\{\emptyset, a\}$	$\{a\}$
$\{\emptyset, b\}$	$\{b\}$

$\{\emptyset, c\}$	$\{c\}$
$\{\emptyset, ab\}$	$\{a, b, ab\}$
$\{a, abc\}$	$\{b, c, ab, bc, abc\}$
$\{b, ab\}$	$\{a, ab\}$
$\{c, bc\}$	$\{b, bc\}$
$\{ab, ac\}$	$\{b, c, ab\}$
$\{bc, abc\}$	$\{a, ab, abc\}$

Tabella 2.4

Un esempio di funzione di funzione di discernibilità. Sulla sinistra sono presentate le bag di competenza di $\mathcal{D}$, mentre sulla destra si ha l'insieme T delle competenze in grado di discernere le corrispettive bag di competenza.

Per fornire alcuni esempi, consideriamo la coppia $\{c, bc\}$ in $\mathcal{D}$. Le competenze *b* e *bc* in $\mathcal{T}$ appartengono alla bag di $\{c, bc\}$ perché entrambe sono sottoinsiemi di *bc* ma non di *c*. La competenza *c* in $\mathcal{T}$ non appartiene alla bag di $\{c, bc\}$ perché è un sottoinsieme sia di *c* che di *bc*, mentre le competenze a, *ab* e *abc* in $\mathcal{T}$ non appartengono a questa bag perché non sono sottoinsiemi né di *c* né di *bc*.

Cambiando bag di esempio, la bag della coppia $\{\emptyset, a\}$ contiene solo la competenza a. Ciò significa che a è l'unica competenza in T che consente di discernere questi due stati di competenza.

Per quanto riguarda le bag delle coppie che contengono più di una competenza, ognuna di queste competenze è sufficiente per discernere quella coppia. Per esempio, per discernere la coppia $\{c, bc\}$ è sufficiente solo b o solo bc.

Viceversa, nel caso di una bag di competenze che contiene l'insieme vuoto solamente, questo significa che non c'è alcuna competenza in $\mathcal{T}$ che consente di discernere questa coppia.

Il prossimo paragrafo spiega come ottenere un modello di competenza irriducibile tramite le semplificazioni e le riduzioni. Tramite queste, infatti, è possibile ricavare un sottoinsieme di competenze che contenga il numero minimo di competenze in $\mathcal{T}$ che consente la stessa discriminazione tra le coppie $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ di $\mathcal{T}$.

2.4 Semplificazioni e Riduzioni

La definizione di semplificazione è la seguente: si considerino le funzioni di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ e $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}^{\diamond}, \delta^{\diamond})$ definite sulle stesse collezioni S e

$\mathcal{D}$. La funzione di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}^{\diamond}$, $\delta^{\diamond}$) si dice una semplificazione della funzione di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, δ) ogni volta che $\mathcal{T}^{\diamond} \subseteq \mathcal{T}$ e per ogni coppia $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$,

$$\delta(C, C') \neq \emptyset \Rightarrow \delta^{\diamond} (C, C') \neq \emptyset$$

(Anselmi et al., 2022).

La definizione di riduzione è la seguente: una funzione di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}^{\diamond}$, $\delta^{\diamond}$) è detta essere una riduzione della funzione di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, δ) se è una semplificazione di (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, δ) e, per ogni $T \in \mathcal{T}^{\diamond}$, esiste una coppia $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ tale che

$$\delta^{\diamond} (C, C') \neq \emptyset \text{ e } ((\mathcal{T}^{\diamond} \setminus \{T\}) \cap \delta(C, C') = \emptyset)$$

(Anselmi, et al., 2022).

La semplificazione di una funzione di discernibilità comporta che le coppie che possono essere distinte usando le competenze in $\mathcal{T}$ possono ancora essere distinte usando le competenze in $\mathcal{T}^{\diamond}$.

La riduzione di una funzione di discernibilità comporta la necessità di ciascuna competenza in $\mathcal{T}^{\diamond}$. Questa necessità non era presente in $\mathcal{T}$: esistono coppie che non possono essere distinte da $\mathcal{T}^{\diamond}\setminus\{T\}$ (ovvero, l'eliminazione di una qualsiasi $\{T\}$ da $\mathcal{T}^{\diamond}$ comporta una perdita di informatività) ma possono essere distinte da $\mathcal{T}$ (ovvero, esiste almeno una competenza T che, se eliminata, non comporta nessuna perdita di informatività).

Dire che $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}^{\diamond}, \delta^{\diamond})$ è una riduzione di $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ equivale a dire che $\mathcal{T}^{\diamond}$ è un insieme minimo di competenze che consente la stessa discriminazione tra le coppie $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ come $\mathcal{T}$.

Per fornire un esempio, si consideri la seguente funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ dove (tabella 2.5):

$S = \{a, b, c\}$.

$\mathcal{D} = \{\{\emptyset, a\}, \{\emptyset, b\}, \{b, ab\}, \{b, bc\}, \{c, bc\}, \{ab, ac\}, \{ab, abc\}\}$.

$\mathcal{T} = \{a, b, ab, bc, abc\}$.

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta(C, C')$
$\{\emptyset, a\}$	$\{a\}$
$\{\emptyset, b\}$	$\{b\}$
$\{b, ab\}$	$\{a, ab\}$
$\{b, bc\}$	$\{bc\}$

$\{c, bc\}$	$\{b, bc\}$
$\{ab, ac\}$	$\{b, ab\}$
$\{ab, abc\}$	$\{bc, abc\}$

Tabella 2.5

Un esempio di funzione di discernibilità. Sulla sinistra sono presentate le coppie di stati di competenza contenute in $\mathcal{D}$, mentre sulla destra si hanno le bag di ciascuna coppia.

Di seguito sono mostrati alcuni esempi di semplificazioni e riduzioni di (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, δ).

La funzione di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_1$, δ_1) con $\mathcal{T}_1 = \{a, b, bc\}$ (tabella 2.6) è una riduzione di (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$, δ).

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta_1(C, C')$
$\{\emptyset, a\}$	$\{a\}$
$\{\emptyset, b\}$	$\{b\}$
$\{b, ab\}$	$\{a\}$
$\{b, bc\}$	$\{bc\}$
$\{c, bc\}$	$\{b, bc\}$

$\{ab, ac\}$	$\{b\}$
$\{ab, abc\}$	$\{bc\}$

Tabella 2.6

δ_1 è una riduzione di δ. Infatti, δ_1 è in grado discernere ogni bag di competenza che δ è in grado di discernere. Inoltre, l'eliminazione di una sua qualsiasi competenza porterebbe a non poter discernere più almeno una coppia di competenze.

$\mathcal{T}_1 = \{a, b, bc\}$

Infatti, se si elimina una qualsiasi competenza in $\mathcal{T}_1$ almeno una bag $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ sarà impossibile da discernere: $\mathcal{T}_1 \setminus\{a\} \cap \delta(b, ab) = \emptyset$; $(\mathcal{T}_1\setminus\{b\}) \cap \delta(ab, ac) = \emptyset$; $(\mathcal{T}_1 \setminus\{bc\}) \cap \delta(ab, abc) = \emptyset$.

La funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_2, \delta_2)$ con $\mathcal{T}_2 = \{a, b, bc, abc\}$ è una semplificazione di $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ ma non una sua riduzione: per tutti i $\{C, C'\} \in \mathcal{D}$ con $\delta(C, C') \neq \emptyset$, $(\mathcal{T}_2 \setminus\{abc\}) \cap \delta(C, C') \neq \emptyset$ (tabella 2.7).

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta_2(C, C')$
$\{\emptyset, a\}$	$\{a\}$
$\{\emptyset, b\}$	$\{b\}$

$\{b, ab\}$	$\{a\}$
$\{b, bc\}$	$\{bc\}$
$\{c, bc\}$	$\{b, bc\}$
$\{ab, ac\}$	$\{b\}$
$\{ab, abc\}$	$\{bc, abc\}$

Tabella 2.7

δ_2 è una semplificazione di δ, poiché è in grado discernere ogni bag di competenza che δ è in grado di discernere. δ_2 non è una riduzione perché è possibile eliminare la competenza {abc} senza perdere la capacità di discernere alcuna coppia di stati di competenza.

La funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_3, \delta_3)$ con $\mathcal{T}_3 = \{a, bc, abc\}$ non è una semplificazione di $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$: per la coppia $\{ab, ac\} \in \mathcal{D}$, $\delta(ab, ac) \neq \emptyset$ mentre $\delta_3(ab, ac) = \emptyset$ (tabella 2.8).

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta_2(C, C')$
$\{\emptyset, a\}$	$\{a\}$
$\{\emptyset, b\}$	$\emptyset$
$\{b, ab\}$	$\{a\}$

$\{b, bc\}$	$\{bc\}$
$\{c, bc\}$	$\{bc\}$
$\{ab, ac\}$	$\emptyset$
$\{ab, abc\}$	$\{abc\}$

Tabella 2.8

Come si vede nelle bag di competenze $\{\emptyset, b\}$ e $\{ab\}$, δ_3 non è in grado discernere queste coppie, mentre δ ne è in grado. Questo implica che δ_3 non è una semplificazione di δ.

Nel prossimo paragrafo viene descritta una procedura che permette di costruire una riduzione di una data funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$.

2.5 Una procedura di eliminazione delle competenze per la costruzione di una riduzione.

La procedura di eliminazione delle competenze è una procedura iterativa che, data una funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$, ne costruisce una riduzione eliminando una competenza alla volta da $\mathcal{T}$. La procedura è illustrata nella figura 2.2.

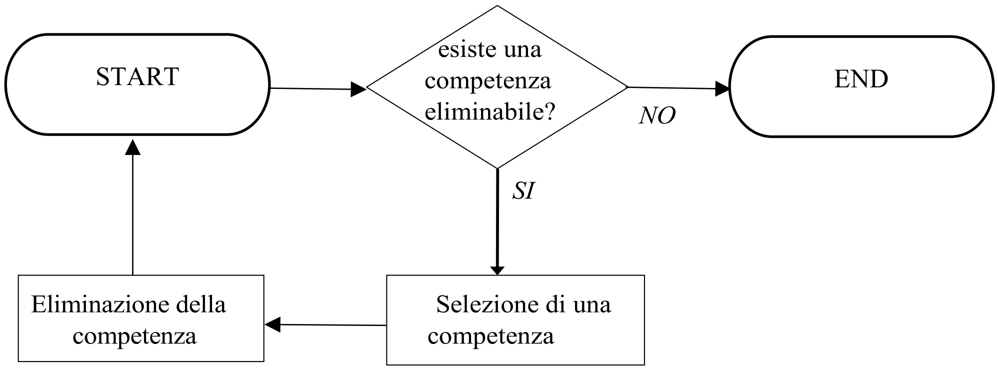

Figura 2.2

Rappresentazione grafica della procedura di eliminazione delle competenze per la costruzione di una riduzione. In ogni passaggio, vengono identificate tutte le competenze eliminabili. Se esiste una competenza eliminabile, questa viene selezionata ed eliminata. Quando non esistono più competenze eliminabili, la procedura termina.

Come si vede dalla figura 2.2, la procedura è caratterizzata dalle seguenti fasi:

1) Identificazione della competenza da eliminare.
2) Criterio di terminazione.
3) Selezione della competenza da eliminare.
4) Eliminazione della competenza selezionata.

Sia k uno scalare che denota una qualsiasi iterazione della procedura iterativa. Sia $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_k, \delta_k)$ la funzione di discernibilità all'iterazione k. La funzione di discernibilità all'inizio ($k = 0$) è $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_0, \delta_0)$.

1) Identificazione della competenza da eliminare

La collezione $\varepsilon_k \subseteq \mathcal{T}_k$ di tutte le competenze che possono essere eliminate all'iterazione k si ottiene con

$$\varepsilon_k = \{T \in \mathcal{T}_k : \{T\} \text{ non appartiene al range di } \delta_k\}.$$

(Anselmi et al., 2022).

Questo significa che ε_k è l'insieme delle competenze di $\mathcal{T}_k$ che possono essere eliminate senza che venga a meno la possibilità di discernere una qualunque coppia di stati di competenza.

2) Criterio di terminazione

La procedura si ferma all'iterazione k se non *c*'è nessuna competenza eliminabile, cioè se $\varepsilon_k = \emptyset$.

3) Selezione della competenza da eliminare

Se il criterio di terminazione non è soddisfatto all'iterazione k, allora la competenza da eliminare a tale iterazione deve essere selezionata da ε_k.

Di seguito, la competenza selezionata è indicata con E.

4) Eliminazione della competenza selezionata

La competenza E selezionata viene eliminata da $\mathcal{T}_k$. Ciò porta alla creazione della collezione

$$\mathcal{T}_{k+1} = \mathcal{T}_k \setminus \{E\}$$

di competenze disponibili all'iterazione $k + 1$.

La funzione di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_{k+1}, \delta_{k+1})$ è una semplificazione di $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_k, \delta_k)$ e, quindi, è anche una semplificazione di $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}, \delta)$ (Anselmi et al., 2022).

Si precisa che la riduzione risultante dall'applicazione della procedura di cancellazione delle competenze non è unica ma dipende dall'ordine di selezione delle competenze da eliminare.

2.6 Ordine di selezione della competenza eliminabile.

Esistono diverse opzioni che regolano l'ordine di selezione della competenza eliminabile. La selezione della competenza da eliminare da ε_k si può basare sul tipo di relazione di preferenza $\succsim$ definita sulle competenze in $\mathcal{T}$. La regola più semplice è la selezione casuale di una competenza in ε_k. In base alle specificità della situazione in cui viene utilizzata la procedura e alle caratteristiche del test che si vuole ottenere è possibile anche definire regole più sofisticate.

Di seguito vengono presentate cinque possibili opzioni.

1. Few skills preferred (FSP).

La relazione di preferenza $\gtrsim_{\mathrm{FSP}}$ è la seguente:

$$T \gtrsim_{\mathrm{FSP}} T' \text{ sse (se e solo se) } |T| \leq |T'|$$

per tutti i $T, T' \in \mathcal{T}$. Vengono selezione per essere eliminare le competenze che presentano il numero più grande di abilità. Quindi, il test basato sulle riduzioni ottenibili con questa relazione di preferenza sarà caratterizzato da item che richiedono poche abilità per essere risolti.

2. Many skills preferred (MSP)

La relazione di preferenza $\gtrsim_{\mathrm{MSP}}$ è la seguente:

$$T \gtrsim_{\mathrm{MSP}} T' \text{ sse } |T| \geq |T'|$$

per tutti i $T, T' \in \mathcal{T}$. La relazione $\gtrsim_{\mathrm{MSP}}$ è l'inverso della relazione $\gtrsim_{\mathrm{FSP}}$. Quindi, vengono selezione per essere eliminate le competenze che presentano il numerò minore di abilità. Il test basato sulle riduzioni ottenibili sarà caratterizzato da item che richiedono molte abilità per essere risolti.

3. Many bags preferred (MBP)

La relazione di preferenza $\gtrsim_{\mathrm{MBP}}$ è la seguente:

$$T \gtrsim_{\mathrm{MBP}} T' \text{ sse } |T \in \delta(C, C')| \geq |T' \in \delta(C, C')|$$

per tutti i $T, T' \in \mathcal{T}$. La priorità di eliminazione è data alle competenze incluse nel numero più piccolo di bag. Il test basato sulle riduzioni ottenibili conterrà il numero più piccolo possibile di item.

4. Low noise preferred (LNP).

Supponiamo che le probabilità di commettere lucky guess ed errori di distrazione nel rispondere ai diversi item siano note. Queste stime possono derivare da considerazioni teoriche (per esempio, nel caso di un test a risposte multiple, la probabilità di commettere una lucky guess è pari a 1 diviso il numero di alternative plausibili) o tramite l'applicazione di modelli statistici, per esempio il modello DINA (de la Torre & Douglas, 2008) o il BLIM (Falmagne & Doignon, 1988a, 1988b).

La priorità di eliminazione è data alle competenze associate ad item con i livelli più elevati di rumore, ovvero che presentano maggiori probabilità di lucky guess e errori di distrazione. Il test che viene ricavato in questo modo presenta item con minor rumore possibile.

5. No strict preference (NSP)

La relazione di preferenza $\gtrsim_{NSP}$ è la seguente:

$$T \gtrsim_{NSP} T'$$

per tutte le competenze $T, T' \in \mathcal{T}$. È la relazione più semplice, poiché la scelta della competenza da eliminare è casuale. Quindi, non si hanno preferenze nelle riduzioni ottenibili possibili. Il test, quindi, non mostrerà alcuna caratteristica particolare.

Nel seguente capitolo sono illustrati un esempio toy e un esempio su un test esistente di applicazione della CbTD per abbreviare un test esistente. La selezione della competenza da eliminare ad ogni passaggio sarà casuale.

Capitolo 3

Introduzione

Questo capitolo illustra, nel paragrafo 3.1, un esempio toy, ovvero un piccolo esempio semplificato (si prende in considerazione un ipotetico test con un numero basso di item e di abilità) di applicazione della metodologia CbTD nello sviluppo di forme abbreviate di test. Questo esempio viene fatto per illustrare ogni singolo passaggio di sviluppo della forma breve di un test che sia tanto informativa quanto la forma originale nell'individuare gli stati di competenza dei soggetti a partire dagli stati di conoscenza.

Nel paragrafo 3.2 viene applicata la medesima procedura di abbreviazione di un test ad un test già esistente in letteratura, il Fraction Subtraction Test (Tatsuoka, 1990, un test volto a valutare la capacità di risolvere problemi di sottrazione tra numeri misti).

3.1 Toy example (esempio giocattolo) di applicazione della procedura di eliminazione delle competenze

Consideriamo un test congiuntivo Q costituito da 10 item.

Consideriamo il seguente modello di competenza congiuntivo $\mathcal{M}= (Q, S, \mathcal{C}, \mu)$, in cui Q è il test contenente 10 item in relazione alle 3 abilità in $S = \{a, b, c\}$ (tabella 3.1), e $\mathcal{C}$ è la seguente struttura di competenza:

$$\mathcal{C}= \{Ø ,\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

n. item $q \in Q$	$\mu(q)$	n. item $q \in Q$	$\mu(q)$
1	$\{c\}$	6	$\{bc\}$
2	$\{ac\}$	7	$\{c\}$
3	$\{c\}$	8	$\{abc\}$
4	$\{abc\}$	9	$\{ac\}$
5	$\{ac\}$	10	$\{c\}$

Tabella 3.1

La tabella mostra, per ogni item, quali competenze sono necessarie a risolverlo.

Le classi di equivalenza definite a partire dalle problem function sono rappresentate nella tabella 3.2:

$$C = \{Ø ,\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$C \in \mathcal{C}$	$[C]p$
$\emptyset$	$\{\emptyset, a\}$
a	$\{\emptyset, a\}$
c	$\{c\}$
ac	$\{ac\}$
bc	$\{bc\}$
abc	$\{abc\}$

Tabella 3.2

La tabella illustra le classi di equivalenza definite a partire dalla problem function p.

Come si vede dalla tabella, il modello di competenza $\mathcal{M}$ non è fully informative ($p(\emptyset) = p(a) = \emptyset$).

Tramite la CbTD verrà sviluppata una forma abbreviata di questo test che sia tanto informativa sugli stati di competenza degli individui quanto il test iniziale. Ciò implica che, se $(Q, S, \mathcal{C}, \mu)$ è il modello di competenza congiuntivo che include il test Q, si svilupperà una restrizione di dominio $(Q^*, S, \mathcal{C}, \mu^*)$ di $(Q, S, \mathcal{C}, \mu)$ con lo stesso livello di informatività del modello iniziale $(Q, S, \mathcal{C}, \mu)$. L'insieme delle abilità S è dato da: $S = \{a, b, c\}$. $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le coppie non ordinate di stati di competenza in $\mathcal{C}$ e $\mathcal{T}$ è l'insieme di tutte le competenze associate agli item in Q, ovvero:

$\mathcal{T} = \cup\, \mu\ (q) = \{c, ac, bc, abc\}$

Bisogna costruire un modello di competenza che sia ugualmente informativo di $\mathcal{M}$ e irriducibile.

Il sistema di discernibilità iniziale (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, δ_0) è illustrato nella tabella 3.3:

$\{C, C'\} \in D$	$\delta_0(C, C')$	$\{C, C'\} \in D$	$\delta_0(C, C')$
$\{Ø, a\}$	$\{\}$	$\{a, abc\}$	$\{c, ac, bc, abc\}$
$\{Ø, c\}$	$\{c\}$	$\{c, ac\}$	$\{ac\}$
$\{Ø, ac\}$	$\{c, ac\}$	$\{c, bc\}$	$\{bc\}$
$\{Ø, bc\}$	$\{c, bc\}$	$\{c, abc\}$	$\{ac, bc, abc\}$
$\{Ø, abc\}$	$\{c, ac, bc, abc\}$	$\{ac, bc\}$	$\{ac, bc\}$
$\{a, c\}$	$\{c\}$	$\{ac, abc\}$	$\{bc, abc\}$
$\{a, ac\}$	$\{c, ac\}$	$\{bc, abc\}$	$\{ac, abc\}$
$\{a, bc\}$	$\{c, bc\}$		

Tabella 3.3

Dalla tabella risalta che i δ_0 che posseggono una sola abilità, sono quelli che presentano la competenza {c}, la competenza {ac} e la competenza {bc}. Ciò implica che ε_0 avrà al suo interno tutte le competenze in $\mathcal{T}$ eccetto le competenze {c}, {ac} e {bc}.

Si ha il seguente ε_0:

$$\varepsilon_0 = \{abc\}$$

Si assume che la selezione della competenza di ε_0 da eliminare avviene in maniera casuale. Nel nostro esempio si elimina la competenza $\{abc\}$. La funzione di discernibilità che risulta al passaggio k = 1 è $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_1, \delta_1)$ in cui $\mathcal{T}_1$ risulta essere il seguente insieme:

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \setminus \{abc\} = \{c, ac, bc\}$$

δ_1 è illustrato nella tabella 3.4:

$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta_1(C, C')$	$\{C, C'\} \in \mathcal{D}$	$\delta_1(C, C')$
$\{Ø, a\}$	$\{\}$	$\{a, abc\}$	$\{c, ac, bc\}$
$\{Ø, c\}$	$\{c\}$	$\{c, ac\}$	$\{ac\}$
$\{Ø, ac\}$	$\{c, ac\}$	$\{c, bc\}$	$\{bc\}$
$\{Ø, bc\}$	$\{c, bc\}$	$\{c, abc\}$	$\{ac, bc\}$
$\{Ø, abc\}$	$\{c, ac, bc\}$	$\{ac, bc\}$	$\{ac, bc\}$
$\{a, c\}$	$\{c\}$	$\{ac, abc\}$	$\{bc\}$
$\{a, ac\}$	$\{c, ac\}$	$\{bc, abc\}$	{ac}
$\{a, bc\}$	$\{c, bc\}$		

Tabella 3.4

Il nuovo sistema di discernibilità $(S, \mathcal{D}, \mathcal{T}_1, \delta_1)$ *non presenta più* δ_1 *con all'interno la competenza {abc}.*

Se venisse eliminata una qualsiasi competenza da $\mathcal{T}_1$ non sarebbe più possibile discernere molte coppie di competenza (prendiamo come esempio la coppia di competenze {bc, abc}; se si eliminasse la competenza {ac}, δ(bc, abc) risulterebbe vuoto. Lo stesso è valido nel caso si eliminasse la competenza {c} (ad esempio, δ(a,c) risulterebbe vuoto) oppure la competenza {bc} (ad esempio, δ(ac,abc) risulterebbe vuoto) . Questo implica che ε_2 è vuoto, quindi la procedura di eliminazione delle competenze giunge al termine.

$\varepsilon_2 = \{\}$. Questo implica che il criterio di terminazione è soddisfatto.

Il sistema di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_1$, δ_1) è, quindi, una riduzione di (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_0$, δ_0).

Dal sistema di discernibilità (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_1$, δ_1) vengono ricavati i modelli di competenza (Q^*, S, $\mathcal{C}$, μ^*). Questi modelli presentano uguale informatività tra loro e un qualsiasi modello di competenza (Q, S, $\mathcal{C}$, μ) ricavabile da (S, $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}_0$, δ_0). Inoltre, ogni (Q^*, S, $\mathcal{C}$, μ^*) è irriducibile.

Infatti, dato il modello di competenza (Q, S, $\mathcal{C}$, μ), qualsiasi modello di competenza (Q^*, S, $\mathcal{C}$, μ^*), con $Q^* \subseteq Q$ e tale che, per ogni T $\in \mathcal{T}_1$, ci sia qualche $q \in Q^*$ con T $\in \mu(q)$, è una restrizione di dominio di (Q, S, $\mathcal{C}$, μ) che è tanto informativa quanto (Q, S, $\mathcal{C}$, μ). Inoltre, ogniqualvolta (Q^*, S, $\mathcal{C}$, μ^*)

non contiene item ridondanti, allora (Q^*, S, C, μ^*) è una restrizione di dominio irriducibile (Anselmi et al., 2022).

3.2 Sviluppo di una forma abbreviata del Fraction Subtraction test tramite la metodologia CbTD

In questo paragrafo verrà applicata la CbTD per lo sviluppo di una forma abbreviata su un test esistente. Il test in questione è il Fraction Subtraction Test (Tatsuoka, 1990) che valuta le competenze relative alla sottrazione tra numeri misti.

È stato scelto questo test poiché, nella letteratura, i dati raccolti da Tatsuoka sul Fraction Subtraction Test sono stati analizzati da vari ricercatori mediante i CDM (Cognitive Diagnostic Models; e.g., de la Torre, 2009; de la Torre & Douglas, 2004, 2008; Henson, Templin, & Willse, 2009; Templin, Henson, & Douglas, 2006). I CDM, analogamente ai modelli della competence-based knowledge space theory, si propongono di rilevare le abilità sottostanti necessarie a risolvere correttamente gli item di un test. Un esempio di CDM è il modello DINA (determinist input, noisy "and" gate model; de la Torre & Douglas, 2008). Il modello DINA è un modello congiuntivo.

Il test presenta 20 item. Le abilità identificate come necessarie per la sottrazione tra frazioni sono 8 (DeCarlo, 2011):

a) Convertire un numero intero in una frazione

b) Ricavare un numero intero da una frazione

c) Semplificare prima di applicare la sottrazione

d) Trovare un denominatore comune

e) Prendere a prestito dalla parte intera (ovvero, nella sottrazione matematica, prendere 1 da una cifra del diminuendo per aggiungere 10 alla cifra presente nell'ordine direttamente inferiore)

f) Prendere a prestito dalla colonna (per sottrarre il primo numeratore con il secondo)

g) Sottrarre i numeratori

h) Semplificare la soluzione alla sua forma più semplice

La tabella 3.5 illustra gli item del Fraction Subtraction Test e le competenze necessarie a risolverli.

n. item	Item	Competenza	n. item	Item	Competenza
1	${}^{5}/_{3} - {}^{3}/_{4}$	$\{dfg\}$	11	$4\,{}^{1}/_{3} - 2\,{}^{4}/_{3}$	$\{beg\}$
2	${}^{3}/_{4} - {}^{3}/_{8}$	$\{dg\}$	12	$1\,{}^{1}/_{8} - {}^{1}/_{8}$	$\{gh\}$
3	${}^{5}/_{6} - {}^{1}/_{9}$	$\{dg\}$	13	$3\,{}^{3}/_{8} - 2\,{}^{5}/_{6}$	$\{bdeg\}$
4	$3\,{}^{1}/_{2} - 2\,{}^{3}/_{2}$	$\{bceg\}$	14	$3\,{}^{4}/_{5} - 3\,{}^{2}/_{5}$	$\{bg\}$
5	$4\,{}^{3}/_{5} - 3\,{}^{4}/_{10}$	$\{bdgh\}$	15	$2 - {}^{1}/_{3}$	$\{ag\}$

6	$^6/_7$ - $^4/_7$	$\{g\}$	16	$4\,^5/_7$ - $1\,^4/_7$	$\{bg\}$
7	3 – 2 1/5	$\{abg\}$	17	$7\,^3/_5$ - $^4/_5$	$\{beg\}$
8	$^2/_3$ – $^2/_3$	$\{g\}$	18	$4\,^1/_{10}$ - $2\,^8/_{10}$	$\{befg\}$
9	$3\,^7/_8$ – 2	$\{b\}$	19	4 – $1\,^4/_3$	$\{abceg\}$
10	$4\,^4/_{12}$ - $2\,^7/_{12}$	$\{begh\}$	20	$4\,^1/_3 - 1\,^5/_3$	$\{bceg\}$

Tabella 3.5

Come si può vedere nella tabella, gli item non valutano insiemi di abilità diversi: gli insiemi di competenza diversi individuabili sono meno di 20 e, più precisamente, 15 in totale. Per esempio, gli item 2 e 3 (evidenziati in arancio) sono risolvibili a partire dallo stesso insieme di abilità.

La tabella 3.5 mostra 15 competenze diverse presenti nel test. Si applica, quindi, la procedura di riduzione sulla collezione formata da queste 15 competenze.

Al termine della procedura rimangono 9 competenze che permettono lo stesso grado di informatività tra gli stati di competenza rispetto alle 15 competenze iniziali. Le 9 competenze rimaste sono presentate nella tabella 3.6.

n. item	Item	Competenza	n. item	Item	Competenza

1	$^5/_3$ - $^3/_4$	$\{dfg\}$	11	$4\ ^1/_3$ - $2\ ^4/_3$	$\{beg\}$
2	$^3/_4$ - $^3/_8$	$\{dg\}$	12	$1\ ^1/_8$ - $^1/_8$	$\{gh\}$
3	$^5/_6$ - $^1/_9$	$\{dg\}$	13	$3\ ^3/_8$ - $2\ ^5/_6$	$\{bdeg\}$
4	$3\ ^1/_2$ - $2\ ^3/_2$	$\{bceg\}$	14	$3\ ^4/_5$ - $3\ ^2/_5$	$\{bg\}$
5	$4\ ^3/_5$ - $3\ ^4/_{10}$	$\{bdgh\}$	15	2 - $^1/_3$	$\{ag\}$
6	$^6/_7$ - $^4/_7$	$\{g\}$	16	$4\ ^5/_7$ - $1\ ^4/_7$	$\{bg\}$
7	3 – 2 1/5	$\{abg\}$	17	$7\ ^3/_5$ - $^4/_5$	$\{beg\}$
8	$^2/_3 - ^2/_3$	$\{g\}$	18	$4\ ^1/_{10}$ - $2\ ^8/_{10}$	$\{befg\}$
9	$3\ ^7/_8 - 2$	$\{b\}$	19	$4 - 1\ ^4/_3$	$\{abceg\}$
10	$4\ ^4/_{12}$ - $2\ ^7/_{12}$	$\{begh\}$	20	$4\ ^1/_3 - 1\ ^5/_3$	$\{bceg\}$

Tabella 3.6

La procedura di riduzione ha eliminato 6 delle 15 competenze iniziali (evidenziate in arancio). Ciò ha eliminato automaticamente sette item. È possibile ancora eliminare gli item ridondanti, ovvero quelli che vengono risolti a partire dallo stesso insieme di abilità (cioè, usando la stessa competenza).

Il modello di competenza ridotto (Q^*, S, $\mathcal{C}$, μ^*) presenta le seguenti competenze:

$$\mathcal{T} = \{b, g, ag, dg, gh, beg, dfg, bceg, befg\}.$$

Poiché la stessa competenza è necessaria per risolvere sia l'item 2 che l'item 3 (cioè, la competenza *dg*), è possibile eliminare uno dei due item dalla versione finale del test senza perdere capacità informativa sugli stati di competenza. In maniera analoga è possibile scartare uno degli item tra gli item 4 e 20, gli item 6 e 8, e gli item 11 e 17. Supponendo di scartare gli item 3, 20, 8 e 17, il nuovo test ridotto tramite la CbTD è il seguente presentato nella tabella 3.7:

n. item	Item	Competenza
1	$^5/_3$ - $^3/_4$	$\{dfg\}$
2	$^3/_4$ - $^3/_8$	$\{dg\}$
3	$3\ ^1/_2$ - $2\ ^3/_2$	$\{bceg\}$
4	$^6/_7$ - $^4/_7$	$\{g\}$
5	$3\ ^7/_8 - 2$	$\{b\}$
6	$4\ ^1/_3$ - $2\ ^4/_3$	$\{beg\}$
7	$1\ ^1/_8$ - $^1/_8$	$\{gh\}$
8	2 - $^1/_3$	$\{ag\}$

9	$4\ ^{1}/_{10}$ - $2\ ^{8}/_{10}$	$\{befg\}$

Tabella 3.7

Tramite la procedura di riduzione è stato possibile trovare un modello di competenza con un numero ridotto di competenze rispetto all'originale. Inoltre, sono stati eliminati gli item ridondanti rispetto alle competenze sottostanti. Il risultato è un test contenente un item per ogni competenza rimasta.

Si è partiti da un test di 20 item. Applicando la procedura si è ottenuto una sua forma abbreviata di 9 item. Questo nuovo test è informativo tanto quanto quello originale.

Capitolo 4

Conclusioni

Questo lavoro tratta della metodologia Competence based Test Development (CbTD; Anselmi et al., 2022), la quale si propone come un nuovo metodo per costruire test che consentano di derivare gli stati di competenza (ovvero l'insieme delle abilità possedute da un soggetto in un determinato dominio di interesse) sottostanti agli item di un test. Questa procedura prende spunto dalla cornice teorica della Knowledge Space Theory (KST; Doignon & Falmagne, 1985). La metodologia CbTD si propone tre obbiettivi: sviluppare un test da zero, migliorare un test già esistente e, infine, abbreviare un test già esistente.

Il Capitolo 1 ha introdotto gli elementi della KST che vengono ripresi anche dalla metodologia CbTD. Il capitolo 2 ha mostrato gli elementi e le proprietà caratteristiche della metodologia CbTD, con particolare enfasi sulla funzione di discernibilità (che permette di individuare gli insiemi di abilità in grado di discenere gli stati di competenza uno dall'altro) e sull'irriducibilità di un modello di competenza (grazie alla quale ogni item presente nel test è necessario per la rilevazione degli stati di competenza).

Il Capitolo 3 ha mostrato degli esempi relativi all'abbreviazione di un test già esistente. L'esempio toy del capitolo 3 è stato creato con lo scopo di illustrare l’applicazione e la procedura su un ipotetico test semplificato. L’esempio successivo applica la metodologia CbTD al Fraction Subtraction Test (Tatsuoka, 1990). Tramite la metodologia CbTD è stato possibile ridurre la lunghezza del test da 20 item a 9 item, mantenendo lo stesso livello di informatività del test iniziale. Questo risultato è puramente teorico, poiché in un caso reale gli stati di conoscenza, necessari per ricavare gli stati di competenza, non sono noti a priori, ma emergono dal pattern di risposte. Il pattern di risposte, però, è contaminato da lucky guess (la risposta all’item è corretta anche se il soggetto non è in realtà in grado di risolvere l’item) e da errori di distrazione (la risposta all’item è sbagliata nonostante il soggetto sia in realtà in grado di risolvere correttamente l’item). Una ricerca futura potrebbe confrontare gli stati di competenza derivati a partire dalle risposte fornite dagli individui agli item della forma completa del Fraction Subtraction Test con quelli derivati a partire dalle risposte agli item della forma ridotta del test.

Bibliografia

Albert, $\mathcal{D}$., & Held, T. (1994). Establishing knowledge spaces by systematical problem construction. In $\mathcal{D}$. Albert (A *c*. Di), *Knowledge Structures* (pp. 81–115). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-52064-8_3

Albert, $\mathcal{D}$., & Lukas, J. (1999). *Knowledge Spaces: Theories, Empirical Research, and Applications*. Psychology Press.

Anselmi, P., Heller, J., Stefanutti, L., & Robusto, E. (2022). Constructing, improving, and shortening tests for skill assessment. *Journal of Mathematical Psychology*, *106*, 102621. https://doi.org/10.1016/j.jmp.2021.102621

Anselmi, P., Robusto, E., & Stefanutti, L. (2012). Uncovering the Best Skill Multimap by Constraining the Error Probabilities of the Gain-Loss Model. *Psychometrika*, *77*(4), 763–781. https://doi.org/10.1007/s11336-012-9286-0

Anselmi, P., Stefanutti, L., de Chiusole, $\mathcal{D}$., & Robusto, E. (2017). The assessment of knowledge and learning in competence spaces: The gain-loss model for dependent skills. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *70*(3), 457–479. https://doi.org/10.1111/bmsp.12095

Battista, M. T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6

Butcher, J. N., & Hostetler, K. (1990). Abbreviating MMPI item administration: What can be learned from the MMPI for the MMPI—2? *Psychological Assessment: A Journal of Consulting and Clinical Psychology*, *2*(1), 12–21. https://doi.org/10.1037/1040-3590.2.1.12

de la Torre, J., & Douglas, J. A. (2008). Model Evaluation and Multiple Strategies in Cognitive Diagnosis: An Analysis of Fraction Subtraction Data.

Psychometrika, *73*(4), 595–624. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9063-2

DeCarlo, L. T. (2011). On the Analysis of Fraction Subtraction Data: The DINA Model, Classification, Latent Class Sizes, and the Q-Matrix. *Applied Psychological Measurement*, *35*(1), 8–26. https://doi.org/10.1177/0146621610377081

Doignon, J.-P. (1994). Knowledge Spaces and Skill Assignments. In G. H. Fischer & 𝒟. Laming (A *c*. Di), *Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology* (pp. 111–121). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4308-3_8

Doignon, J.-P., & Falmagne, J.-C. (1985). Spaces for the assessment of knowledge. *International Journal of Man-Machine Studies*, *23*(2), 175–196. https://doi.org/10.1016/S0020-7373(85)80031-6

Doignon, J.-P., & Falmagne, J.-C. (1999). Building the Knowledge Structure in Practice. In J.-P. Doignon & J.-C. Falmagne, *Knowledge Spaces* (pp. 274–309). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58625-5_13

Düntsch, I., & Gediga, G. (1995). Skills and knowledge structures†. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *48*(1), 9–27. https://doi.org/10.1111/j.2044-8317.1995.tb01047.x

Falmagne, J.-C., Koppen, M., Villano, M., Doignon, J.-P., & Johannesen, L. (1990). Introduction to knowledge spaces: How to build, test, and search them. *Psychological Review*, *97*(2), 201–224. https://doi.org/10.1037/0033-295X.97.2.201

Falmagne, J.-Cl., & Doignon, J.-P. (1988a). A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *41*(1), 1–23. https://doi.org/10.1111/j.2044-8317.1988.tb00884.x

Falmagne, J.-Cl., & Doignon, J.-P. (1988b). A markovian procedure for assessing the state of a system. *Journal of Mathematical Psychology*, *32*(3), 232–258. https://doi.org/10.1016/0022-2496(88)90011-9

Gediga, G., & Düntsch, I. (2002). Skill set analysis in knowledge structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *55*(2), 361–384. https://doi.org/10.1348/000711002760554516

Gough, P. B., & Tunmer, W. E. (1986). Decoding, Reading, and Reading Disability. *Remedial and Special Education*, *7*(1), 6–10. https://doi.org/10.1177/074193258600700104

Heller, J., Anselmi, P., Stefanutti, L., & Robusto, E. (2017). A necessary and sufficient condition for unique skill assessment. *Journal of Mathematical Psychology*, *79*, 23–28. https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.05.004

Heller, J., Augustin, T., Hockemeyer, C., Stefanutti, L., & Albert, 𝒟. (2013). Recent Developments in Competence-based Knowledge Space Theory. In J.-C. Falmagne, 𝒟. Albert, C. Doble, 𝒟. Eppstein, & X. Hu (A *c*. Di), *Knowledge Spaces* (pp. 243–286). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35329-1_12

Heller, J., Ünlü, A., & Albert, 𝒟. (2013). Skills, Competencies and Knowledge Structures. In J.-C. Falmagne, 𝒟. Albert, C. Doble, 𝒟. Eppstein, & X. Hu (A *c*. Di), *Knowledge Spaces: Applications in Education* (pp. 229–242). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35329-1_11

Korossy, K. (1999). Modeling Knowledge as Competence and Performance. In *Knowledge Spaces*. Psychology Press.

Lukas, J., & Albert, 𝒟. (1993). Chapter 7 Knowledge Assessment Based on Skill Assignment and Psychological Task Analysis. In *Advances in Psychology* (Vol. 101, pp. 139–159). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0166-4115(08)62656-4

Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences*, *11*(5), 341–356. https://doi.org/10.1007/BF01001956

Pawlak, Z. (1991). *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Springer Science & Business Media.

Pearce, C. L., & Conger, J. A. (2002). *Shared Leadership: Reframing the Hows and Whys of Leadership*. SAGE Publications.

Robusto, E., Stefanutti, L., & Anselmi, P. (2010). The Gain-Loss Model: A Probabilistic Skill Multimap Model for Assessing Learning Processes: Gain-Loss Model. *Journal of Educational Measurement*, *47*(3), 373–394. https://doi.org/10.1111/j.1745-3984.2010.00119.x

Sternberg, R. J., & Ben-Zeev, T. (1996). *The Nature of Mathematical Thinking*. Routledge.

Stiggins, R. J. (1982). An analysis of the dimensions of job-related reading∗. *Reading World*, *21*(3), 237–247. https://doi.org/10.1080/19388078209557650

Tatsuoka, K. K. (1990). Toward an Integration of IteD1-Response Theory and Cognitive Error Diagnosis. In *Diagnostic Monitoring of Skill and Knowledge Acquisition*. Routledge.

Ringraziamenti

La realizzazione di questo lavoro non sarebbe stata possibile senza la presenza del mio relatore, il Professore Pasquale Anselmi, di cui ringrazio per la sempre presente disponibilità e per la grande attenzione prestata sui dettagli di questa tesi.

Ringrazio la mamma e il babbo, sempre disponibili a supportarmi e a sopportarmi.

Ringrazio Lucia, che, al contrario di me, è sempre stata convinta che ce la potessi fare, e per la spinta che mi ha sempre dato per andare avanti.

Ringrazio i miei coinquilini Eli e Jacopo, per l'anno speciale che mi hanno donato con la loro presenza in appartamento, e per tutto il divertimento e il karaoke che ha avvolto via Santa Rosa.

Ringrazio la Marti, nonostante sia di Livorno, perché, anche nei suoi momenti di crisi, mi stava vicina. Forse le piaceva ignorare i suoi problemi o forse è proprio una brava amica. E la ringrazio anche per aver scritto al posto mio i ringraziamenti per lei.

Ringrazio la Sicily town che mi ha accolto nel gruppo dopo un anno di pandemia in cui non sapevo più cosa significasse vita sociale.

Ringrazio i miei amici e compagni di corso non coinquilini, specialmente per tutte le serate di giochi da tavolo e per la compagnia in generale, che mi ha fatto sentire accolto fin da subito.

Ringrazio tutti i compagni di corso della triennale con cui sono rimasto in contatto, perché è quando c'è la distanza prolungata che si capisce il valore del legame stretto.

E sempre su questo versante, per ultimo ma non di importanza, ringrazio i miei amici della Brianza, e della Lombardia in generale, perchè, nonostante torni indietro 4 volte all'anno, mi fanno subito sentire di essere nuovamente a casa.