Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

A BUSCA POR UMA OU MAIS ESTRATÉGIAS GANHADORAS EM UM JOGO COMBINATÓRIO DE TABULEIRO

THE SEARCH FOR ONE OR MORE WINNERS STRATEGIES IN A COMBINATORIAL BOARD GAME

Paulo Jorge Magalhães Teixeira[1]

Resumo: Este trabalho objetiva tornar conhecida proposta ensino-aprendizagem acerca objetos de conhecimentos básicos de Combinatória por meio jogo combinatório de estratégia, em tabuleiro nomeado Grelha Quadrada 3 x 3, em consonância com indicações presentes Base Nacional Curricular Comum (BNCC) para estudantes a partir do 5º Ano Ensino Fundamental. A proposta visa fomentar a apropriação, exercício e desenvolvimento do raciocínio combinatório nas tomadas de decisão relativas à movimentação tampinhas garrafa pet sobre o tabuleiro consoante regras estabelecidas, de modo construir um diagrama de árvore que mostre todas as possibilidades do desenrolar de uma partida, desde o movimento inicial, de modo a avaliar a existência ou não uma ou mais estratégias ganhadoras, para cada jogador. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que culminou com a proposta do jogo, segunda a qual objetiva-se dimensionar qual importância e qual contribuição tal jogo representa para a melhoria do ensino-aprendizagem de Combinatória e disponibilizar material didático para uso dos professores.

Palavras-chave: Jogo; Raciocínio Combinatório; Diagrama de Árvore; Jogo combinatório.

Abstract: This work aims to make known the teaching-learning proposal about objects of basic knowledge of Combinatorics through a combinatorial game of strategy, on a board named Grid Quadrada 3 x 3, in line with the indications present in the Common National Curricular Base (BNCC) for students from the 5th Elementary School Year. The proposal aims to encourage the appropriation, exercise and development of combinatorial reasoning in decision-making regarding the movement of pet bottle caps on the board according to established rules, in order to construct a tree diagram that shows all the possibilities for the development of a match, from the initial movement, in order to evaluate the existence or not of one or more winning strategies, for each player. This is a bibliographical research that culminated in the proposal of the game, according to which the objective is to measure the importance and what contribution such a game represents for the improvement of teaching and learning of Combinatorics and to provide didactic material for use by teachers.

Keywords: Game; Combinatorial Reasoning; Tree Diagram; Combinatorial Game.

1 Introdução

Este trabalho é recorte de uma pesquisa que objetiva responder a seguinte questão principal: “Que situações de aprendizagem um professor de matemática precisa selecionar, propor e dirigir, em consonância com as orientações presentes na BNCC, aos seus estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental de modo a identificar e

[1] Doutor em Educacão Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense (UFF), Rua Sáo Paulo, s/nº, Niterói, Rio de Janeiro, Brasil, E-mail: paulojorge@id.uff.br.

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

conhecer como o raciocínio combinatório é apropriado, exercitado e desenvolvido pelos estudantes de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam e ajudá-los a superá-las, durante a resolução de problemas que são próprios da temática Combinatória?”.

De modo a encontrar subsídios que respondam à questão de pesquisa, começamos por fazer uma pesquisa bibliográfica acerca do objeto matemático e o uso de jogos no ensino e aprendizagem da Matemática básica e ela nos levou a conceber, a testar e a propor o jogo objeto deste recorte. Levando em conta aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os que estão presentes em Franco (2005), o estudo caracteriza-se como uma investigação de natureza qualitativa.

Assim, este trabalho tem o propósito de apresentar as regras e objetivos pedagógicos do jogo grelha quadrada 3 x 3 além de propor alguns problemas que têm relação direta com o jogo e o objeto matemático requerido, de maneira a prover condições aos estudantes para que estes os resolvem, tais como: o conhecimento, desenvolvimento e o exercício do raciocínio combinatório durante a construção de diagramas de árvores de possibilidades para que estas sejam suportes para as resoluções de tais problemas.

2 Referencial teórico

Alguns documentos curriculares nacionais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em Brasil (1997) e BNCC, em Brasil (2018) - e pesquisadores da educação matemática (GRANDO, 2000; MUNIZ, 2010; TEIXEIRA, 2021) defendem a utilização do jogo como um recurso didático que possibilita a mobilização de diferentes formas de pensamento, bem como a apropriação e o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos.

Contudo, para caracterizar o jogo como recurso de ensino faz-se necessário que ele apresente desafios às crianças, além da diversão. Assim, quando da proposição de um jogo didático por um professor, em sala de aula, ele estará possibilitando aos estudantes poderem elaborar estratégias variadas e compartilhá-las com os colegas. O professor permitirá, então, que os estudantes ampliem os seus conhecimentos a partir de reflexões conjuntas com os colegas de turma, e entre todos estes e o professor.

Os jogos didáticos possibilitam conexões e aprendizados matemáticos e extra matemáticos (quando se considera e valoriza contextos reais como motivadores e

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

geradores de conhecimento matemático, embora o desenvolvimento nem sempre seja justificado do ponto de vista epistemológico, em detrimento de possíveis dificuldades em considerar as conexões metafóricas) -, incluindo o levantamento e a testagem de hipóteses; a criação de estratégias; reflexão; análise; debate; argumentação; compreensão, exercício, apropriação e o desenvolvimento de um dado conceito.

O professor pode fazer bom uso dos jogos didáticos, uma vez que poderá observar os conhecimentos que tenham sido apropriados por seus estudantes a partir deles bem como uma ou outra fragilidade de um ou mais estudantes em relação aos conceitos que sejam subliminarmente ou diretamente apresentados e/ou tratados no decorrer de uma partida do jogo, isto é: poderá identificar os conceitos que possivelmente não tenham sido claramente compreendidos pelos estudantes.

A BNCC (BRASIL, 2018) orienta para a exploração de habilidades de natureza probabilística e estatística desde o 1º ano, e as habilidades de natureza Combinatória desde o 5º ano do ensino fundamental.

Inhelder e Piaget (1955) *apud* Navarro-Pelayo, Batanero e Godino apontam a maneira como o raciocínio combinatório opera com as possibilidades, embora o chamem de raciocínio hipotético-dedutivo, conforme a citação a seguir:

> [...] o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias. Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos (INHELDER; PIAGET, 1955 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 2).

De acordo com INHELDER e PIAGET (1955), o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia por meio de operações Combinatórias, ou seja

> Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos (INHELDER; PIAGET, 1955 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 2).

Ademais,

> [...] as operações combinatórias representam algo mais importante que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e a correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (estágio das operações formais, segundo Piaget). A

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

> capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação (INHELDER e PIAGET, 1955 *apud* BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1997, p. 27).

Resultados de uma pesquisa feita por Fischbein (1975, p.123) mostram que a “capacidade de resolver situações-problemas (problemas combinatórios) que envolvem o raciocínio combinatório nem sempre se alcança no nível das operações formais se um ensino específico do assunto não for oferecido”. Ou seja, ainda que de forma indireta, Fischbein (1975) aponta-nos que o raciocínio combinatório precisa ser exercitado, estimulado e desenvolvido pelo professor enquanto ele propõe que os seus estudantes resolvam problemas de contagem e ele atue como um mediador da aprendizagem.

O raciocínio combinatório é imprescindível para todo aquele que, continuamente, e por toda a sua escolaridade em Matemática básica e em nível superior, o compreenda, dele se aproprie e faça uso correto, de maneira a reunir condições para resolver problemas de contagem e problemas de probabilidade, mas não apenas nestas áreas de conhecimentos. A Matemática Discreta, um campo de pesquisa Matematica em ampla evolução, em particular a Teoria dos Grafos, é uma área que prescinde fortemente do exercício sistemático deste raciocínio.

O raciocínio combinatório - um dos raciocínios matemáticos que devem ser desenvolvidos desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, ainda na tenra idade -, tem importância significativa para o desenvolvimento do letramento matemático dos cidadãos em geral. Não apenas para estes, mas principalmente para os estudantes da Escola Básica e para os seus professores.

Uma vez que o raciocínio combinatório seja compreendido e o sujeito dele se aproprie, ele permitirá o provimento de conhecimentos matemáticos suficientes para o entendimento e a apropriação de todos os outros conceitos da Combinatória que são necessários para a resolução de uma extensa variedade de diferentes tipos de problemas de contagem, caracterizados segundo diferentes tipos de agrupamentos e grupamentos de objetos que podem ser formados a partir do seu exercício como, por exemplo, arranjos, permutações e combinações. Na Educacao Básica, desde os Anos Finais do Ensino Fundamental, o estudo recai na resolução de problemas que envolvem as permutações – simples e com repetição -, as combinações simples e a aplicação dos princípios fundamentais da contagem, por meio dos arranjos.

ReBECEM | Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

O letramento matemático combinatório se estende (compreendido, apropriado e exercitado) ao longo do tempo - por muitos anos, e não apenas durante o período de estudos da escola básica. Ele precisa ser continuamente alimentado (adquirido, exercitado), caso contrário pode vir a ser esquecido ou ser exercitado de maneira incorreta.

Mediante o exposto se entende o porquê da importância do letramento matemático combinatório, no ensino da Matemática, ser constantemente ressaltada tanto por professores quanto por pesquisadores. Quase sempre ele é posto à prova em diferentes áreas da própria Matemática e/ou em diversas situações cotidianas que exigem o seu correto exercício para a plena compreensão do contexto em que ele se apresenta, e dele se precise fazer uso para uma ou mais tomadas de decisão, por exemplo.

Diante de tais argumentos é mister o entendimento, tanto para professores quanto para pesquisadores, de que um estudante não se transforma de um dia para outro em um sujeito letrado combinatoriamente. Tampouco a escolaridade na escola básica parece ser suficiente para dotá-lo de tal competência Matemática, embora não seja isso o que se deseje, almeje e busque enquanto professores da Educação Básica.

Fato é que tudo começa do início, desde as situações presentes no cotidiano dos estudantes e de suas famílias: por exemplo, como escolher uma calça e uma camisa para sair se no armário há tantas peças de cada; do uso de materiais manipuláveis para compreender o exercício do raciocínio combinatório; do conhecimento acerca de representações espontâneas ou gráficas, mas lúdicas, para se chegar às representações numéricas, por exemplo. Tudo a seu tempo e hora para se chegar algum tempo depois à complexidade própria da sua utilização e do exercício do raciocínio combinatório em situações matemáticas mais complexas.

Neste estudo, o objeto matemático ressaltado contempla as competências associadas com o propósito de propor, refletir, discutir e resolver problemas de Combinatória que exigem o exercício do raciocínio combinatório - explorando ideias básicas, em um contexto da Combinatória -, desde os Anos Iniciais e em um crescente ao longo de toda a escolaridade básica.

Os problemas relacionados com esse objeto de conhecimentos devem ser explorados ao longo de toda a Educação Básica segundo uma metodologia que se aproxima de uma espiral: o conteúdo é retomado de tempos em tempos para ser ampliado por meio da proposição de novos e complexos problemas de contagem.

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Todo o estudo tem o propósito de tornar as diferentes técnicas de contagem para resolver problemas de Combinatória conhecidos, desde os problemas mais simples até os mais complexos. Os mais complexos exigem técnicas de contagem mais sofisticadas e/ou o uso de mais que um conteúdo, em conjunto com outro (s). Em comum, todos os problemas prescindem da mobilização e do correto exercício do raciocínio combinatório.

Ao iniciar o estudo o professor precisa estimular a exploração de conceitos matemáticos associados com o pensamento aditivo, o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório por meio da proposição de problemas que envolvam diferentes tipos de agrupamentos de problemas. Trata-se de um conteúdo da Matemática que precisa ser apresentado, explorado, discutido e fundamentado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que tal possibilidade permite promover a inserção dos estudantes em problemas presentes no cotidiano de suas famílias desde então a partir de conceitos da própria Matemática.

Por essas razões, consideramos que o conhecimento e a apropriação de conceitos de Combinatória pelos estudantes mostram-se importantes e indispensáveis ser desenvolvidos na escola, já desde a mais tenra idade, como também salientam os autores da BNCC (BRASIL, 2018). Por conta de tais considerações, concordamos com Teixeira (2020) quando este enfatiza que

> [...] tais experiências apresentam possibilidades de novas aprendizagens no exercício docente a partir de ações dialógicas e da interação entre pares, as quais vêm reforçar uma tese muito presente na área de formação e prática docente de professores, em grupos colaborativos, segundo a qual é pela reflexão na prática e sobre a prática que se pode reestruturar os conhecimentos profissionais dos professores (TEIXEIRA, 2020, p.111).

Em prosseguimento, seguem considerações a respeito da classificação de um jogo didatico como um jogo combinatório.

3 Jogos combinatórios

Segundo COLIPAN (2014, 2016), a aplicação sistemática da Matemática tomando por base a utilização de jogos é um fenômeno relativamente recente, embora os jogos existam ao longo de toda nossa história.

Segundo BERLEKAMP; CONWAY; GUY (2001) a "*Teoria dos Jogos Combinatórios*" é uma teoria matemática que estuda os jogos entre 2 (dois) jogadores

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

que jogam por algumas rodadas, regras bem definidas, e que têm como objetivo o de chegar a uma certa condição de vitória. O artigo dos autores, apontado acima, é o ponto de partida de uma teoria dos anos 1960 cujos resultados estão publicados no livro "*Winning Way four your Mathematical Plays*", que foi publicado em 1982. Embora antigo, o livro é considerado o livro de referência da Teoria dos Jogos Combinatórios até os dias de hoje. De forma precisa, os autores BERLEKAMP; CONWAY; GUY (2001) definiram o que é um jogo combinatório.

Segundo COLIPAN (2014, 2016), desde então esta definição foi adotada pela comunidade matemática da área. A definição acerca do que vem a ser um "Jogo Combinatório", segundo BERLEKAMP, CONWAY;GUY (2001) é composta de 8 (oito) axiomas, listados a seguir:

> Axioma 1. O jogo é disputado por 2 (dois) jogadores, que jogam alternadamente.
>
> Axioma 2. O jogo é determinado por uma quantidade finita de posições. A posição de partida, ou o início do jogo, é conhecida pelos 2 (dois) jogadores.
>
> Axioma 3. A regra do jogo caracteriza claramente as jogadas que podem ser realizadas em cada rodada a partir de uma posição dada, ou seja, a partir de uma posição conhecida. As posições são denotadas por P e o conjunto de posições acessíveis em uma dada jogada é chamado "opções de P", denotada por opç (P). *Considera*ndo estas definições, fazer uma jogada a partir de uma dada posição corresponde a escolher uma das opções desta posição, isto é, escolher uma e somente uma opção dentre todas as possíveis opções opc (P).
>
> Axioma 4. Os 2(dois) jogadores jogam alternadamente e está proibido passar a vez. A explicação é que se um dos jogadores pudesse passar a vez o jogo poderia não terminar jamais. De fato, se um jogador descobre que não pode ganhar, ele passava a vez e o outro jogador não irá querer continuar.
>
> Axioma 5. Os 2 (dois) jogadores conhecem perfeitamente o estado do jogo, isto é, cada jogador conhece a posição e o conjunto de opções dessa posição em cada jogada.
>
> Axioma 6. O acaso (azar) não intervém nas jogadas.
>
> Axioma 7. Na convenção normal de um jogo combinatório, o primeiro jogador que não pode jogar é o perdedor, isto é, o jogador que tem a última jogada válida, ganha o jogo. Quando a convenção inversa é adotada, se chama de convenção oposta, isto é, o jogador que tem a última jogada válida perde.
>
> Axioma 8. A regra do jogo deve ser construída de tal maneira que o jogo tenha um fim em um número finito de jogadas: isto é, cada jogada deve aproximar-nos do fim do jogo. A partida só termina quando um dos jogadores já não pode mais jogar. Isto é, cada jogada deve aproximar os jogadores para o fim do jogo. A partida só terminará quando um dos jogadores não puder seguir jogando.

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Segundo DUCHENE (2006), entre os Jogos Combinatórios estão os seguintes: O Jogo de Nim, O Jogo el Chomp, O Jogo el Cram, e o Jogo el Sprouts, entre outros. Segundo COLIPAN (2016), um famoso jogo da teoria dos Jogos Combinatórios é o Jogo de Marienbad (Do filme "O ano passado em Marienbad"). O Jogo de Marienbad é uma variante de um jogo muito famoso, chamado de "Jogo de Nim", que tem inspirado muitos trabalhos em Matemática (BOUTON, 1901). Sobre esse jogo, consulte TEIXEIRA (2021).

Por outro lado, há jogos que não são considerados como "Jogos Combinatórios" e são bastante conhecidos e jogados. Segundo DUCHENE (2006), entre os "Jogos não Combinatórios" está o "*Jogo de Dominó*" por conta desse jogo não cumprir os seguintes Axiomas: *Axioma 4.* Os 2 (dois) jogadores jogam alternadamente e está proibido passar a vez; *Axioma 5.* Os 2 (dois) jogadores conhecem perfeitamente o estado do jogo, isto é, cada jogador conhece a posição e o conjunto de opções dessa posição em cada jogada, e o *Axioma 6.* O acaso (azar) não intervém nas jogadas.

Também o "Jogo de Xadrez" é um "Jogo não Combinatório", por conta de esse jogo não cumprir os seguintes Axiomas: *Axioma 3.* A regra do jogo caracteriza claramente as jogadas que podem ser realizadas em cada rodada a partir de uma posição dada, ou seja, a partir de uma posição conhecida. As posições são denotadas por P e o conjunto de posições acessíveis em uma dada jogada é chamada de "opções de P", denotada por opç (P), e o *Axioma 7.*

Na convenção normal de um Jogo Combinatório, o primeiro jogador que não pode jogar é o perdedor, isto é, o jogador que tem a última jogada válida, ganha o jogo.

Os "Jogos de Cartas" também são tipos de "Jogo não Combinatório" por conta de esses jogos não cumprirem os seguintes axiomas: *Axioma1.* O jogo é disputado por 2 (dois) jogadores, que jogam alternadamente, *Axioma 5.* Os 2 (dois) jogadores conhecem perfeitamente o estado do jogo, isto é, cada jogador conhece a posição e o conjunto de opções dessa posição em cada jogada, e *Axioma 6.* O acaso (azar) não intervém nas jogadas, mesmo que o jogo seja disputado por 2 (dois) jogadores. Há outros "Jogos não Combinatórios".

Claramente, tem-se que o objetivo em um "Jogo Combinatório" é, como em qualquer jogo, o de ganhar. Para que isso ocorra, há 2 (duas) alternativas a considerar:

1ª) jogar o jogo ao acaso, isto é, com o componente azar presente nele e deixar que o destino decida por cada jogador que assim proceder;

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

2ª) jogar o jogo, mas refletir de modo que se possa encontrar um método que nos permita ganhar sempre, seja qual for o jogo do nosso oponente. Essa alternativa é conhecida como busca por uma "*estratégia ganhadora*".

Para tal, definimos uma "*estratégia ganhadora*" como o método (receita, técnica, procedimento) utilizado por um jogador de modo que ele possa fazer suas jogadas com a certeza de que elas o levarão à vitória no jogo. Assim, toda posição que conduza um jogador à vitória é chamada de "posição ganhadora", isto é, um sujeito está em uma "posição ganhadora" todas as vezes em que potencialmente jogando bem - ou seja, aplicando uma estratégia - está seguro de que vai ganhar (que vai se sair vencedor).

Por outro lado, toda posição "não ganhadora" é perdedora. Isto é, uma "posição perdedora" é uma posição segundo a qual não estamos seguros de que vamos ganhar (de que vamos sair vencedor).

Ainda segundo Colipan (2016), os problemas matemáticos de "Jogos Combinatórios" têm uma natureza heurística bastante complexa. De fato, segundo a autora, resolver um jogo combinatório corresponde a encontrar uma estratégia ganhadora e/ou caracterizar as posições ganhadoras e perdedoras do jogo. Portanto, as noções abordadas são essenciais no momento de resolver este tipo de jogo.

O jogo Grelha Quadrada 3 x 3 é um jogo combinatório?

Em prosseguimento, seguem as considerações a respeito do jogo Grelha Quadrada 3 x 3.

4 O Jogo Grelha Quadrada 3 x 3

I. Material a ser disponibilizado para uso durante o desenrolar do jogo: O jogo utiliza um tabuleiro quadrado 3 x 3 (três quadrados menores dispostos no sentido vertical por 3 quadrados menores dispostos no sentido horizontal, totalizando 3 x 3 = 9 quadrados menores), denominado por Grelha Quadrada 3 x 3, como mostrado na Figura 1, a seguir, mais à esquerda. Trata-se de um jogo entre 2(dois) oponentes: A e B. Para realizar os movimentos sobre o tabuleiro são utilizadas 2(duas) *tampinhas de garrafa pet***:** uma na cor amarela (para o jogador A) e outra na cor azul (para o jogador B). O jogador que vai dar início ao jogo será decidido por meio de uma disputa tipo *par ou ímpar*. O jogador vencedor dessa disputa deve colocar sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto inferior à esquerda (ou canto superior à direita) e o seu oponente deverá colocar a sua *tampinha de garrafa pet* no quadrado localizado no canto

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

superior à direita (ou canto inferior à esquerda), como mostrado no tabuleiro intermediário da Figura 1, a seguir, o qual mostra a disposição das *tampinhas* antes de uma disputa do jogo ter início. Para o restante do texto considere que o jogador A foi o vencedor da disputa *par ou ímpar*. O tabuleiro mais à direita, na Figura 1, abaixo, aponta para um momento de jogo que foi interrompido após o 3º movimento, movimento este feito pelo jogador A o último a jogar.

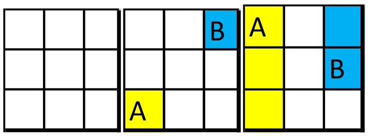

Figura 1: Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3, possíveis posições iniciais de uma partida, e três possíveis primeiros movimentos de uma partida
Fonte: Autor (2022).

II. Objetivos do jogo: O objetivo de cada jogador é capturar a *tampinha* do seu oponente ou conseguir posicionar sua *tampinha* na posição de partida do seu oponente, quando do início do jogo. Para atender a qualquer um dos dois objetivos será preciso que cada jogador obedeça a certas regras do jogo, as quais serão mostradas em prosseguimento.

III. Regras do jogo: Eis as quatro regras para o jogo, as quais precisam ser compreendidas pelos jogadores antes do início de uma disputa:

1ª regra: Conforme os dois primeiros tabuleiros mostrados na Figura 2, a seguir, a primeira regra estipula que o jogador A pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, e também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a direita, sendo permitido retornar com a sua *tampinha* à qualquer posição anteriormente visitada apenas por uma vez durante toda a partida; O jogador B pode movimentar sua *tampinha* na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, e também pode movimentar sua *tampinha* na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a esquerda, sendo permitido retornar com a sua *tampinha* à qualquer posição anteriormente visitada apenas por uma vez durante toda a partida.

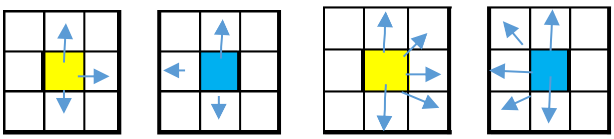

Figura 2: Movimentos permitidos serem feitos e movimentos possíveis de captura de uma **tampinha** no Tabuleiro do Jogo Grelha Quadrada 3 X 3
Fonte: Autor (2022).

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

2ª regra: É obrigatória a captura da *tampinha* do oponente sempre que possível: quando as tampinhas do jogador e de seu oponente se encontrarem *em diagonal* (deve ser respeitado o sentido horizontal do jogador que vai fazer a captura: a captura da *tampinha* de B pelo jogar A se dará *em diagonal para a direita* ou *em diagonal para a esquerda,* enquanto que a captura da *tampinha* de A pelo jogador B se dará **em** *diagonal para a esquerda ou em diagonal para a direita*. A captura da *tampinha* do oponente se dará sempre que as duas *tampinhas* estiverem adjacentes (juntas), respeitando o sentido de movimentação vertical (para cima ou para baixo) e o sentido de movimentação horizontal (para a direita ou para a esquerda, conforme seja o jogador).

3ª regra: Será obrigatório finalizar a disputa sempre que um jogador estiver com a sua *tampinha* junto ao quadrado inicial do seu oponente ou sempre que a *tampinha* do seu oponente estiver em posição que o permita fazer a captura.

4ª regra: O movimento das *tampinhas* durante o desenrolar do jogo não poderá ultrapassar o limite máximo de 8 (oito) movimentos. Assim, cada jogador poderá movimentar sua *tampinha* no máximo por 4 vezes. Quando o jogador B fizer o 8º movimento (considerando que o jogador A inicia a disputa, como foi dito) a disputa estará encerrada. Em qualquer momento de uma partida, quando a *tampinha* de um jogador estiver adjacente (junta) à *tampinha* do seu oponente impossibilitando que uma jogada seja feita, a disputa será finalizada e o empate estará configurado O mesmo ocorre se após o 8º movimento, o jogador B não conseguir colocar sua *tampinha* na posição inicial do jogador A.

IV. Objetivo pedagógico do jogo: A restrição em relação ao número máximo de 8(oito) movimentos tem duas razões: A primeira é a de permitir que o jogo não se estenda por muitos movimentos, tornando-o cansativo e desinteressante pelos estudantes. A segunda razão tem a ver com a resolução de problemas combinatórios e probabilísticos associados ao jogo - que são sugeridos aos professores, em prosseguimento - de modo que avaliem a viabilidade/possibilidade/importância de propor aos seus estudantes. Tal razão vai ao encontro de encurtar as resoluções de alguns problemas sem deixar de permitir que o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico durante a construção de diagramas de árvore (para se chegar à lista de todas as possibilidades como o jogo poderia se desenrolar a partir de determinado momento do jogo, ou desde o seu início), bem como a determinação da chance de cada jogador vencer uma partida. Espera-se que cada jogador se comporte como um jogador

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

proativo, isto é, um jogador que deseja vencer e aprender algo novo com o jogo e pelo jogo. Podemos dizer que o jogo é, por assim dizer, um disparador do ensino-aprendizagem de alguns conceitos da análise combinatória e da probabilidade, mormente a oportunidade de aprender a construir diagramas de árvore e de mobilizar e exercitar o raciocínio combinatório durante a construção. Para resolver os problemas sugerimos que o professor e estudantes recorram à construção de diagramas de árvore, com o propósito de identificar todas (ou algumas) possibilidades que o rumo de uma partida pode tomar. Está aí o primeiro conhecimento básico de combinatória a partir do jogo: a construção de diagramas de árvore. Uma vez construído o diagrama de árvore por completo (a partir do início de uma partida, ou de um particular momento do jogo) todos os resultados finais possíveis ao prosseguimento da partida tornar-se-ão conhecidos. Por sua vez, importante salientar aos estudantes que cada resultado final mostrado no diagrama da árvore poderá ser alcançado por um jogador, conforme tenha sido o desenrolar de uma partida. Então, acrescentam-se aos objetivos pedagógicos do jogo a oportunidade de os jogadores se depararem com a necessidade de ter de tomar uma decisão, para cada movimento de sua *tampinha*, e dar prosseguimento à partida, respeitando as regras estabelecidas; exercitem o raciocínio combinatório enquanto vão aprendendo a construir um diagrama de árvore; apropriem-se de novos conhecimentos, próprios da Combinatória e da Probabilidade.

V. Organização dos estudantes em sala: Os participantes podem participar do jogo tanto de modo individual (um contra o outro) quanto em grupos menores.

VI. Estudantes comunicando a aprendizagem: Recomendamos ao professor oportunizar aos estudantes a possibilidade de eles mostrarem o que aprenderam com o jogo, promovendo reflexões e discussões conjuntas a esse respeito, e pedindo que os estudantes escrevam sobre o que aprenderam com o jogo.

VI. Explorando problemas associados ao jogo: Uma vez que os estudantes conheçam bem as regras do jogo, após terem jogado por algumas rodadas, o professor pode propor problemas a ele relacionados em prosseguimento às disputas. Sugerimos alguns problemas para os professores, como os mostrados em prosseguimento.

A seguir, seguem considerações a respeito da metodologia do estudo.

5 Metodologia e sujeitos do estudo

Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

No estudo, a metodologia **"Design Experiment in Educational Research"** de Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer e Schauble (2003), foi a indicada. A escolha da metodologia se deu em função de ela ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo. Segundo a metodologia, um desenho básico flexível - que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo – deve ser preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações, a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais, tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da Matemática com vistas à obtenção de inovações.

Contudo, salienta-se que o professor precisa se responsabilizar por identificar as adaptações que se façam necessárias programar ao longo do estudo, ao assumir o papel de orientador, intervindo somente em momentos críticos considerados por ele como de bloqueio durante o desenrolar das tarefas propostas.

O estudo - previsto para ser desenvolvido ao longo de cinco a seis aulas de 40 minutos cada - deve ter o seu início quando o propósito inicial for o de analisar a produção dos estudantes no tocante ao conhecimento, apropriação e o exercício do raciocínio combinatório; na construção de diagramas de árvore, e nas resoluções e comunicação das respostas referentes a um conjunto de problemas que devem ser propostos ao final de no mínimo 3 (três) rodadas do jogo, para todos os estudantes de uma mesma turma. Consideramos que o jogo tem como propósito ser um disparador do ensino aprendizagem na construção de arvores de possibilidades e posterior analise dos resultados obtidos, com a finalidade de identificar possíveis estratégias ganhadoras para o jogo.

Para atender os propósitos do jogo, um planejamento precisou ser elaborado tomando por base o objetivo de desenvolver conceitos associados com o exercício dos raciocínios combinatório e probabilístico segundo o significado de construção de diagramas de árvore, para cada problema proposto. Segundo Lopes e Rezende (2010, p.680), "A associação do jogo com a resolução de problemas torna as aulas mais atraentes e participativas, os estudantes tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento".

O Jogo Grelha Quadrada 3 x 3, objeto deste trabalho, foi testado por 4 estudantes (duas duplas) do 4º ano do ensino fundamental, contando a participação de

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

uma professora para mediar a resolução dos problemas 1, 2 e 3 com os estudantes, conforme a seguir.

As resoluções que foram objeto dos referidos problemas (construção dos referidos diagramas de árvore; identificação do espaço amostral; constatação da independência dos eventos, e o cálculo das probabilidades de cada evento) foram apresentadas pela referida professora no quadro branco da sala de aula do estudo, e em seguida foi objeto de discussão e reflexão pelos estudantes, mediadas pela professora e sem a intervenção do pesquisador.

Em prosseguimento, uma a uma as resoluções obtidas na arvore foram sendo testadas *in loco* pelos referidos estudantes, observando os caminhos percorridos em cada um dos ramos da arvore construída. Não obstante o satisfatório resultado que foi obtido com o estudo, recomenda-se seja proposto um estudo mais abrangente o qual reúna um forte cunho descritivo em relação às regras do jogo, incluindo os diálogos havidos entre os estudantes de uma mesma turma e entre eles e o professor.

Inclusive, por conta do momento recente que atravessamos de isolamento social, é propício que o estudo possa ser encaminhado pelo professor por meio de aulas presenciais no momento que julgar conveniente, mesmo que o conteúdo não esteja previsto no seu particular planejamento didático do referido ano escolar de seus estudantes.

Isto porque, agora, em um ambiente natural (sala de aula) para a coleta direta de dados da produção, após as reflexões, intervenções e discussões dos estudantes entre si e estes com o professor todo o aprendizado tende a ser mais produtivo para todo o grupo. Sao momentos em que o professor poderá exercer o papel de mediador e incentivador na promoção de reflexões e discussões coletivas, as quais visem ampliar conhecimentos relacionados com a construção de diferentes digramas de árvore e a constatação do resultado obtido em uma partida pelos estudantes, com a comparação em paralelo dos passos que se seguiram a obtenção do ramo da referida arvore.

Em Teixeira (2021), o diagrama de árvore por completo foi apresentado, com todas as possibilidades como uma partida do jogo poderá vir a se desenrolar desde os primeiros movimentos possíveis.

6 O Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 é um jogo combinatorio?

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Após terem jogado o jogo Grelha Quadrada 3 x 3 por três partidas em prosseguimento, oportunidade essa em que os sujeitos do estudo puderam se familiarizar com as regras do jogo e acerca das possibilidades de movimentação das **tampinhas**, pelo tabuleiro, o pesquisador lhes apresentou os oito axiomas de um jogo combinatório de modo que avaliassem ser o jogo em questão classificado como um jogo combinatório ou não. Cada axioma foi confrontado com as regras estabelecidas pelo Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 e a partir daí os sujeitos de estudo o consideraram um jogo combinatório.

Após esse momento, os quatro estudantes dividiram-se em duplas para darem início à construção dos dois ramos do diagrama de árvore, os quais mostram todas as possibilidades como o jogo pode se desenrolar, conforme sejam os dois possíveis movimentos iniciais do jogador A, que inicia jogando, de movimentar sua **tampinha**: ou no sentido vertical para cima ou no sentido horizontal para a direita, como mostra-nos a Figura 3, a seguir:

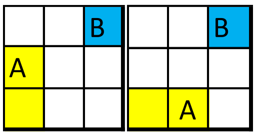

Figura 3: Os dois primeiros movimentos possíveis serem feitos pelo jogador A por ocasião do 1º movimento de sua **tampinha** no Tabuleiro doJogo Grelha Quadrada 3 X 3
Fonte: Autor (2022).

Sendo assim, uma dupla de sujeitos do estudo se encarregou de dar continuidade as movimentações das **tampinhas** segundo o tabuleiro mostrado na Figura 3, acima, à esquerda, e a outra dupla se encarregou de dar continuidade às movimentações segundo o tabuleiro que está desenhado na Figura 3, acima, à direita. Paralelamente, os componentes das duas duplas foram construindo, respectivamente, os dois ramos da referida arvore de possibilidades.

A Figura 4, a seguir, mostra-nos todas as possibilidades de movimentação das **tampinhas** a partir da movimentação inicial feita pelo jogador A por ocasião do 1º movimento, no sentido vertical para cima. Por conta da restrição de espaço, aqui, as possibilidades de movimentação da **tampinha** do jogador A no sentido horizontal para a direita não serão mostradas, mas todas elas podem ser encontradas em Teixeira (2021).

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

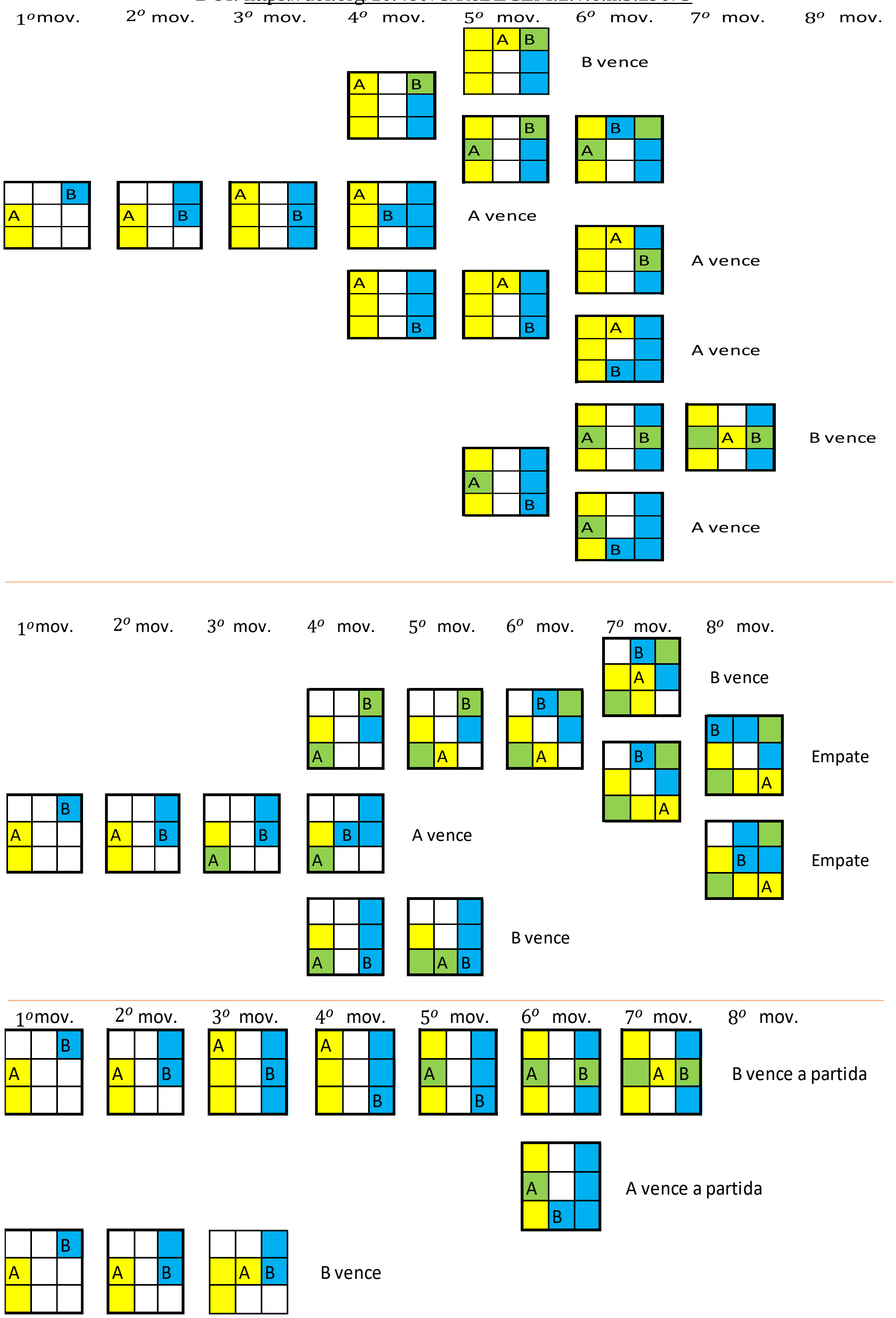

Figura 4: Todas as possibilidades de desenrolar de uma partida a partir da movimentação inicial da t**ampinha** do jogador A no sentido vertical para cima, no Tabuleiro do Jogo *Grelha Quadrada 3 X 3*
Fonte: Autor (2022).

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Uma vez que cada um dos ramos da árvore tenha sido concluído os sujeitos do estudo puderam se debruçar sobre as análises de cada um dos resultados que foram obtidos, no sentido de identificar se o resultado poderia ou não ser evitado pelo jogador perdedor ou se todas as jogadas que foram efetuadas pelo jogador vencedor - as quais o levaram a vitória - poderiam ou não ser caracterizadas como jogadas resultantes de uma estratégia ganhadora. Ademais, este foi um dos objetivos do estudo.

7 Resultados obtidos e análises

O diagrama de árvore, mostrado na Figura 5, a seguir, mostra-nos uma ‘estratégia quase ganhadora’ para o jogador B, já no 4º movimento. Ela está condicionada, por ocasião do 3º movimento, ao fato de o jogador A não retornar com a sua ***tampinha***. Tomamos a liberdade de nomear esta estratégia como ‘quase ganhadora’ pois ela depende da movimentação do jogador adversário, o que não faz dela ser de fato uma real estratégia ganhadora conforme a definição de estratégia ganhadora’ que foi apresentada anteriormente. Assim, se o jogador A movimentar sua ***tampinha*** no sentido vertical para cima por ocasião do 1º movimento e não retornar por ocasião do 3º movimento, o jogador B vence a partida já no 4º movimento.

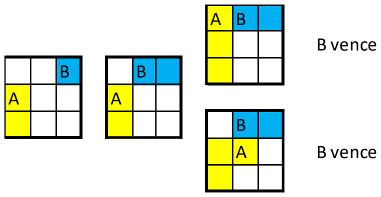

Figura 5: Possibilidades de estratégias ganhadoras para o jogador B a partir da movimentação inicial da **tampinha** do jogador A no sentido vertical para cima no Tabuleiro do Jogo *Grelha Quadrada 3 X 3*
Fonte: Autor (2022).

O diagrama de árvore, mostrado na Figura 6, a seguir, mostra-nos uma sequência de movimentos possíveis em uma partida, com destaque para o fato de que por ocasião do 2º movimento - o primeiro movimento do jogador B - este jogador adianta sua *tampinha* no quadrado adjacente horizontal, repete essa jogada por ocasião do 4º movimento, enquanto que o jogador A retorna com sua *tampinha* à posição inicial do jogo por ocasião do 3º movimento. Desde então, pelo fato de o jogador A realizar esta jogada, ele já está decretando sua derrota ou, na melhor das hipóteses, ele poderá vir a alcançar um empate, caso o jogador B se distraia e, por ocasião do 6º movimento faça um movimento de retorno no sentido horizontal. Por ocasião do 7º movimento, ele pode

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

se aproveitar dessa distração para movimentar sua ***tampinha*** no sentido horizontal para a direita, obtendo um empate. Ainda assim o jogador B poderá sair vencedor, mesmo que tenha feito tal retorno, pois poderá se recuperar e vencer a partida por ocasião do 8º movimento, como mostrado na Figura 6.

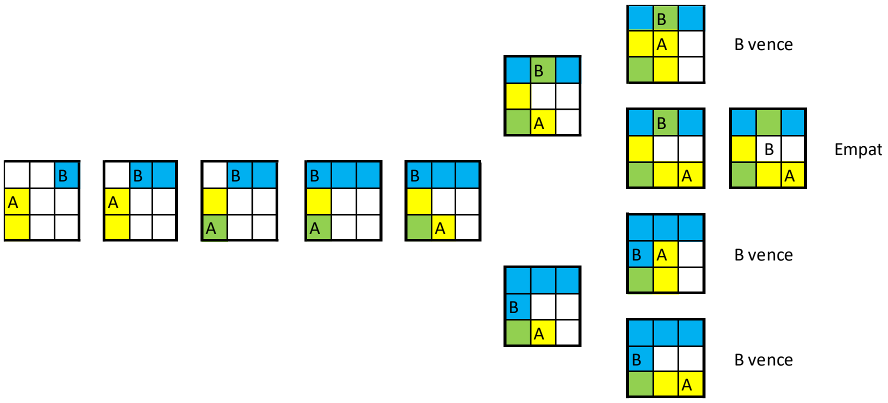

Figura 6: Possibilidades de estratégias ganhadoras para o jogador B a partir da movimentação inicial da **tampinha** do jogador A no sentido vertical para cima no Tabuleiro do Jogo *Grelha Quadrada 3 X 3*
Fonte: Autor (2022).

Outras estratégias ganhadoras, tanto para o jogador A quanto para o jogador B, foram identificadas pelos sujeitos do estudo por ocasião da análise do diagrama de árvore por completo.

8 Considerações finais

Ao apresentar e analisar as possibilidades de resultados de partidas do Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 e como ele pode contribuir para o estudo inicial acerca da apropriação do raciocínio combinatório durante a construção de diagramas de árvore, bem como a identificação e confirmação de estratégias ganhadoras por estudantes do ensino fundamental, entendemos ser este um caminho promissor para iniciar o ensino da temática Combinatória, neste segmento de ensino.

O presente estudo permitiu identificar que o Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 contribui para o conhecimento, mobilização e o exercício de um importante raciocínio matemático, que é o raciocínio combinatório. Destaca-se a importância de o jogo haver contribuído para tal, uma vez que este raciocínio será constantemente mobilizado em diferentes situações didáticas durante a resolução de problemas de Combinatória, ao longo dos anos de estudo em Matemática na Educação Básica.

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Ademais, o diagrama de árvore é uma representação gráfica bastante útil e, em muitas ocasiões, torna-se uma ferramenta imprescindível para a o encaminhamento da resolução de diversos problemas combinatórios. Problemas em que a totalidade de objetos combinados não seja demasiado grande, que torne inviável a construção de uma árvore de possibilidades por completo.

Não bastasse tal, basta que se faça um pequeno rascunho de ideias por meio de considerações que precisam ser consideradas em um problema de Combinatória, acerca de um possível diagrama de árvore, para lançar luz sobre uma representação numérica que dê conta de determinar o quantitativo total de possibilidades que possibilitam obter a resposta quantitativa para diversos problemas de contagem.

O conhecimento por completo do diagrama de árvore, para o Jogo Grelha Quadrada 3 x 3 (um diagrama demasiado robusto), pelos dois jogadores, permite que cada jogador identifique com quais estratégias consideradas ganhadoras poderão contar para fazer escolhas durante uma disputa. Ou seja, qual estratégia é favorável vir a escolher para colocar em prática, ema uma disputa. Mas isso não exclui o fato de o jogador oponente também conhecer tal estratégia e, quando e se possível, tentar fazer o possível para vir a neutralizá-la.

Em alguns momentos de procura pelos sujeitos do estudo por uma estratégia ganhadora foi preciso reafirmar o conceito do que vem a ser uma estratégia ganhadora: trata-se de uma estratégia que independe de o jogador oponente realizar estas ou aquelas movimentações de sua tampinha para que ele a coloque em jogo, pois caso seja assim não haveria garantia de que tal estratégia vai culminar em vitória líquida e certa.

Assim, recomenda-se aos jogadores não utilizarem uma estratégia na qual ele fique torcendo para que o seu oponente faça tal ou qual movimento, de modo que ele vennha a vencer a disputa. Em um Jogo Combinatório, independente do que o seu oponente venha a fazer, a vitória é liquida e certa quando uma estratégia ganhadora é colocada em prática.

Por outro lado, se os dois jogadores conhecem estratégias que não são estratégias verdadeiramente ganhadoras ao menos que eles avaliem a partir de qual momento da partida tal estratégia poderá ser considerada como uma estratégia ganhadora até o movimento final, o desfecho da partida. Nessas situações exercícios de raciocínio lógico são mobilizados pelos jogadores – possíveis, a partir do conhecimento do diagrama de árvore completo, o qual mostra todas as possibilidades para o desenrolar de uma partida.

ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Outra questão que foi considerada no estudo foi pedir que os sujeitos do estudo avaliassem, em um particular momento da partida, se o retorno de uma tampinha a uma posição do tabuleiro de jogo inviabilizaria ou não o estabelecimento de uma estratégia sabidamente ganhadora.

Consideramos ser o jogo mais uma possibilidade para que o professor possa explorar o conteúdo (exercício do raciocínio combinatório e a construção de diagrama de árvore) no decorrer do seu trabalho docente, sem desconsiderar outras possibilidades didáticas de seu conhecimento e utilização.

Como consequência de tais práticas, tanto o entendimento do jogo quanto a sua proposição e avaliação revestem-se de oportunidades para o professor ampliar conceitualmente os seus conhecimentos: conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos do conteúdo, pertinentes à temática combinatória, segundo conceitos defendidos por Shulman (1986).

O entendimento acerca dos propósitos do jogo representa um degrau a mais para o professor galgar na longa construção e (re) significação de sua prática docente. Tanto no que refere ao conhecimento de conteúdo quanto em relação aos conhecimentos pedagógico de conteúdo e curricular (em consonância com o que defendem os autores da BNCC).

Embora o jogo tenha sido testado por um pequeno número de quatro estudantes, os resultados que foram obtidos mostraram-nos que a ampliação conceitual de aprendizados que eles proporcionaram foi bastante significativa, e de grande relevância para esses estudantes.

Por essas razões, julgamos que ele deve merecer análises e reflexões por parte dos professores, notadamente quanto à importância de testá-lo com os seus estudantes (a partir do 5º ano do ensino fundamental) e conhecer a impressão que neles provoque por conta de reflexões, e em relação aos conhecimentos que foram construídos com ele e a partir dele.

Com a resolução de mais diferentes tipos de problemas (dentre os que foram sugeridos e/ou outros) e maior quantidade de sujeitos de estudo (estudantes de toda uma turma), são esperados resultados promissores, mas só o seu uso poderá nos indicar se estamos ou não corretos em nossas previsões.

Não podemos considerar relevante que a proposição de um jogo em um contexto de sala de aula revista-se da ideia de que seja ele mais *uma diversão: o jogo pelo jogo, e mais nada além do fato de ocupar os estudantes com o seu jogar e divertir-se.*

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

Um jogo didático deve fazer parte de um contexto de ensino-aprendizagem mais amplo que a simples ocupação de está-lo jogando. Ou seja, um jogo didático, como é o caso do Jogo da Grelha Quadrada 3 x 3, deve propiciar condições favoráveis para a apropriação de um ou mais conhecimentos matemáticos.

É neste contexto que o presente jogo apresenta a proposta de ir além de uma diversão, ao permitir que os jogadores exercitem o raciocínio combinatório para a construção de diagramas de árvore; o estabelecimento do espaço amostral de possibilidades (eventos prováveis ocorrer); bem como a quantificação e a comparação de probabilidades, estes dois últimos conhecimentos a serem abordados em momentos pertinentes ao ensino de probabilidade.

Portanto, cabe salientar que a proposição do jogo não foi concebida com o viés único da diversão dos estudantes com a ideia de vir a jogá-lo (embora ela esteja presente na própria concepção de um jogo), mas que, por meio dele e com ele, possa possibilitar a construção e a apropriação de conhecimentos.

Assim, de modo que um jogo possa se caracterizar como um recurso auxiliar do professor no ensino-aprendizagem da Matemática escolar é imprescindível que esse jogo faça o jogador pensar, para tomar uma decisão: pensar sobre a jogada que vai fazer em seguida e os desdobramentos de poder ter tomado uma decisão e não outra, quando possível. Consideramos que o presente jogo se propõe a tal.

Um jogo didático precisa apresentar desafios a todos os que o jogam de modo que para vencer o jogo um jogador precise superar tais desafios por meio do estabelecimento de estratégia (s) proativa (s) que o permita sair vencedor e não que os jogadores considerem o jogo apenas como só mais uma diversão, entre tantas outras, em que ora um jogador vence ora vence o outro.

É claro que a diversão é um componente importante para o desenrolar de um jogo, mas ela não pode ser apenas o mote que motive o professor a propor um jogo didático para os seus estudantes. É preciso que o jogo contenha o componente didático; o pensar e o decidir (como é o caso presente jogo) e não ser um jogo de sorte e azar.

Assim, faz-se importante também criar condições favoráveis para que os estudantes compreendam que o presente jogo é um jogo de estratégia, onde o aleatório não está presente.

Além do mais é recomendável e saudável que após os estudantes terem elaborado estratégias ganhadoras pessoais para vencer uma partida no jogo, eles as compartilhem com os colegas do seu "time" e em algum momento posterior à disputa

ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

também o façam com os colegas que foram seus oponentes quando da disputa, bem como com outros colegas que não participaram do jogo até então.

Enquanto os estudantes partilham variadas estratégias pessoais de jogo invariavelmente eles criam uma atmosfera agradável de trocas, reflexões e questionamentos entre si, as quais os levam a uma ampliação conceitual acerca do conhecimento matemático subjacente ao jogo em si e aos conhecimentos que subliminarmente estão presentes quando do desenrolar de uma ou mais partidas do jogo.

Um jogo didático, como é o caso do presente jogo, favorece a oportunidade de o professor propor um trabalho em grupos; bem como favorece a descoberta; a partilha de saberes e a ampliação da aprendizagem de um novo conteúdo matemático presente nele - estendendo-se ao desenvolvimento de competências que visam à preparação de cada jogador, de modo eficiente, para competir no jogo.

O presente jogo também possibilita o exercício do pensamento (raciocínio) combinatório; a análise de possibilidades para fazer a combinação de objetos, de modo a formar o espaço amostral (obtenção dos eventos elementares); reflexões para a tomada de decisões; realização de testes de hipóteses que venham a ser levantados durante as discussões coletivas; ampliação do debate acerca da descoberta, e a ampliação de estratégias de jogo que visam melhorar a compreensão e a apropriação de conceitos. Um jogo didático também leva os atores envolvidos a atitudes relacionadas com o hábito e o desenvolvimento de ações pertinentes ao processo de argumentação.

Ressaltamos, portanto, o quanto um jogo didático pode favorecer o trabalho de um professor no tocante à apresentação e desenvolvimento de ferramentas matemáticas concernentes ao ensino e a aprendizagem de um conteúdo matemático, por meio dele e a partir dele. Em particular, o ensino e a aprendizagem de conceitos básicos de combinatória em conjunto com conceitos de probabilidade, desde os anos iniciais do ensino fundamental, por meio do presente Jogo Grelha Quadrada 3 x 3.

Finalmente, também ressaltamos que o bom uso de um jogo e a sua adequada exploração pode contribuir com o professor para que ele amplie e melhore seus instrumentos observacionais em relação ao rendimento e os conhecimentos dos seus estudantes de maneira mais amiúde.

Tudo isso porque o jogo permite, por exemplo, que o professor conheça melhor as dificuldades de seus estudantes e as interpretações que eles fazem quando da leitura do enunciado de um problema. Também em relação às fragilidades conceituais que porventura os estudantes possam vir a ter - mais facilmente identificáveis, durante o

DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

jogo -, bem como em relação a concepções e crenças que cada estudante tenha a respeito do conhecimento matemático objeto do jogo e em relação às atividades que invariavelmente se seguem ao seu desenrolar.

Com base em todas as considerações o professor deve refletir acerca de quais conhecimentos e competências ele terá de considerar para ajudar os seus estudantes a superarem as dificuldades que tenham e, assim, estará contribuindo para melhorar o rendimento escolar dos seus estudantes no tocante ao ensino e a aprendizagem da Matemática, como um todo.

Finalizando, enfatizamos a pertinência de se realizar futuros estudos que abordem as propostas presentes nos problemas sugeridos (talvez outros) de modo a conhecer mais amiúde como se dá a compreensão e o exercício do pensamento combinatório durante a construção de diagramas de árvores em uma dimensão mais ampla e em diferentes contextos; o estabelecimento de outros espaços amostrais e a quantificação e comparação de probabilidades, em consonância com o desenvolvimento de habilidades e competências presentes na BNCC.

Referências

BATANERO, C., GODINO, J. D., NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, D.J.B. (Ed.). **The assessment challenge in statistics educativo**. Minnesota: IOS Press, 1997. p. 239-252. Disponível em: <https://www.stat.auckland.ac.nz/~isi/publications/access bkref.>. Acesso em: 18 set. 2022

BERLEKAMP, E.; CONWAY, J.; GUY, R.**Winning ways for your mathematical plays**. Natick, Wwllwaley: A. K. Peters Ltd.2001.

BOUTON, C. **Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory**, Annals of Mathematics, Princeton, 1901, p. 35-39.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação. 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em: 18 set. 2022.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER, R. , SCHAUBLE, L. **Design Experiments in Educational Research**. American Educational Research Association, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COLIPAN, X. **Étude didactique des situations recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim**, 384 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - InstitutoJoseph Fourier, Universidade de Grenoble 1, Grenoble, 2014.

ReBECEM
Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática
ISSN 2594-9179
DOI: https://doi.org/10.48075/ReBECEM.2.v.6.n.3.29673

COLIPAN, X. Desarrollo de la Actividad Científica em Clases a través del estúdio de Juegos Combinatorios, el Ejemplo del Juego del Chocolate. **Revista Bolema,** Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 691-712. 2016.

DUCHENE, E. **Jeux combinatories sur les grafes**. Tese (Doutorado em Matemática) - Institut Joseph Fourier, Grenoble, 2006.

FISCHBEIN, Efrain. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel. 1975.

FRANCO, M. A. S. Pedagogia da Pesquisa-ação. **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 483-502. 2005. Disponível em: <http:// www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf >. Acesso em: 18 set 2022

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (SP), 2000. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334>. Acesso em: 18 set. 2022

INHELDER, B., PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. Traduçãoo de Dante Moreira Leite. (Biblioteca Pioneira de Ciencias Sociais. Psicologia). São Paulo: Pioneira, 1976. 259 p.

NAVARRO-PELAYO, V., BATANERO, C., GODINO, J. D. Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, v. 8, n. 1, p. 26-39. 1996.

MUNIZ, C.A. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2010. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4604>. Acesso em: 18 set. 2022.

TEIXEIRA, P. J. M. Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 081-113. 2020.

TEIXEIRA, P. J. M. **Curiosidades, Passatempos, Desafios e Jogos Combinatórios**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2021.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational**, v. 15, n. 2, p. 4-14. 1986.

Recebido em: 16 de agosto de 2022

Aceito em: 09 de novembro de 2022