別紙様式２

学位論文要旨

所属専攻　　　理学　　　専攻
氏　名　　　安達　駿弥

論文題名
Monodromy invariant Hermitian forms and unitary monodromies of second order Fuchsian differential equations
（２階 Fuchs 型微分方程式のモノドロミー不変 Hermite 形式とユニタリモノドロミー）

要　旨
本学位論文では，Riemann 球面上に（n+1）個の確定特異点を持つ SL 型 2 階線形 Fuchs 型常微分方程式（E）によって定まるモノドロミー表現とその同型類（モノドロミー）が不変 Hermite 形式を持つための必要十分条件を与え，さらにそのようなモノドロミーおよび不変 Hermite 形式を実際に構成する。ここで（E）のモノドロミー表現とは（E）の基本解系の解析接続が引き起こす基本群の SL(2,ℂ)-表現のことを指す。モノドロミー表現が不変 Hermite 形式を持つことは，その像（モノドロミー群）がユニタリ群 SU(p,q) の部分群と同型になることと同値である。
n=2 の場合，（E）は Gauss の超幾何微分方程式に他ならない。この場合は，特性指数が全て実数値であるならばモノドロミーが不変 Hermite 形式を持つことがよく知られている。ここで Gauss の超幾何微分方程式は rigid，すなわちアクセサリー・パラメータを持たない方程式であり，モノドロミーが特性指数のみから完全に決定されてしまうことに注意しておく。モノドロミー不変 Hermite 形式の存在性が特性指数に対する条件のみで与えられているのはそのためである。
しかし n≧3 の場合は（E）は rigid ではなく，アクセサリー・パラメータを持つ。従ってモノドロミーは特性指数のみからは決まらず，アクセサリー・パラメータにも依存する。そのため，特性指数に対する条件のみではモノドロミー不変 Hermite 形式の存在性を特徴付けることはできない。
このような背景の下で，本学位論文では n が 3 以上の場合に（E）のモノドロミーに対する不変 Hermite 形式の存在性を考察している。

第 2 章では n=3 の場合を詳細に扱った。局所モノドロミー（特性指数）を固定したときの方程式（E）のモノドロミー表現全体のモジュライ空間（モノドロミー多様体と呼ぶ。文中では，局所モノドロミーから決まるパラメータ $a \in \mathbb{C}^4$ を用いて $M(a)$ と表している）は，

一般に複素 3 次元空間内のあるアフィン 3 次曲面（文中では $S(a)$と表している）として実現されることが神保道夫氏によって指摘されている。その後，岩崎克則氏がモノドロミー多様体 $M(a)$ と 3 次曲面 $S(a)$ のそれぞれにおいて Big open と呼ばれる Zariski 開部分集合（文中では $M^{\circ}(a)$，$S^{\circ}(a)$ と表している）を導入し，$M^{\circ}(a)$ に属するモノドロミーを $S^{\circ}(a)$ の座標を用いてパラメトライズしていた。

そこで本論文では，岩崎氏によるパラメトリゼーションを利用することで，Big open $M^{\circ}(a)$ のうち不変 Hermite 形式を持つような既約モノドロミーからなる集合が 3 次曲面の Big open と実 3 次元空間との共通部分 $S^{\circ}(a) \cap \mathbb{R}^3$ と同一視できることを示した。続いて，Big open $M^{\circ}(a)$ に属していない既約モノドロミーについてもパラメトリゼーションを与え，不変 Hermite 形式の存在性を 3 次曲面の座標の実数性によって特徴付けた。いずれの場合においても，モノドロミーを不変に保つ Hermite 形式を 3 次曲面の座標を用いて具体的に構成している。

以上の結果をまとめると次のようになる : n=3 の場合のモノドロミー多様体 $M(a)$ を 3 次曲面 $S(a)$ として実現したとき，不変 Hermite 形式を持つ既約なモノドロミーは $S(a)$ と実 3 次元空間との共通部分 $S(a) \cap \mathbb{R}^3$ 内の点に対応する。また，そのようなモノドロミーを不変に保つ Hermite 形式は $S(a)$ の座標を用いて具体的に記述できる。

第 3 章では第 2 章で得られた結果の大部分を一般の n≧3 の場合に拡張している。この場合も n=3 の場合と同様にしてモノドロミー多様体 $M(a)$ が定義され，それは複素 m 次元空間内のあるアフィン代数的集合 $S(a)$ として実現される（$a \in \mathbb{C}^{n+1}$ は局所モノドロミーから決まるパラメータであり，m は n から決まる自然数)。

そこでまず，上述した岩崎氏の結果を n≧3 の場合に拡張した。すなわちモノドロミー多様体 $M(a)$ とアフィン代数的集合 $S(a)$ のそれぞれにおいて Big open の一般化にあたる Zariski 開部分集合 $M^{\circ}(a)$，$S^{\circ}(a)$ を導入したのち，$M^{\circ}(a)$ に属するモノドロミーを $S^{\circ}(a)$ の座標を用いてパラメトライズした。さらにその結果を用いて，$M^{\circ}(a)$ のうち不変 Hermite 形式を持つ既約モノドロミー（ユニタリモノドロミー）からなる集合が $S^{\circ}(a)$ と実 m 次元空間との共通部分 $S^{\circ}(a) \cap \mathbb{R}^m$ と同一視できることを示した。この証明は $M^{\circ}(a)$ に属するユニタリモノドロミーを実際に構成するものであり，Morgan-Shalen や Acosta による Character variety の研究で得られていたユニタリモノドロミーの特徴付けに関する結果に対して構成的な別証明を与えたものとも解釈できる。

さらに本論文では，$S^{\circ}(a) \cap \mathbb{R}^m$ の座標の値を用いたユニタリモノドロミーの符号 (p,q) の判定法を与えている。