https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.6

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.[1], к.т.н.
Юнькова О.О.[2], к.ф.-м.н.
Коробова М. В.[1], к.ф.-м.н.

Чутливість розв'язків при моделюванні динаміки інвестицій

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

V.R. Kulian[1], Ph.D.
O.O. Yunkova[2], Ph.D.
M.V. Korobova[1] , Ph.D.

Solutions sensitivity when modeling of investment dynamics

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1
e-mail: olenayunkova@gmail.com

Розглядається математична задача чутливості розв'язків диференціальних рівнянь, що описують динаміку портфеля акцій на ринку цінних паперів.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій, чутливість розв'язків.

The efforts of researchers for analysis of the financial investment market are largely aimed at considering multi-criteria problems with a large number of criteria, studying and solving investment management problems in static and dynamic settings, building procedures for an adequate description of random processes of market price changes, developing applied numerical methods and algorithms for solving large-scale problems. These problems as tasks of management under conditions of uncertainty refer equally to the fundamental problems of the applied theory of decision-making. The researches of R. Bellman, J. Danzig, R. Merton, and G. Markowitz [1] are aimed at establishing the fundamental foundations and studying various meaningful interpretations of financial analysis processes. Thus, in the static case, they obtained fundamental results that had a wide practical application. The property of the distribution of the optimal portfolio into risk-free and risky components for the case of the presence of a risk-free asset on the market was established, and the fundamental properties of the equilibrium market of optimal portfolios were investigated. Dynamic models of asset and liability management have found the most successful application in the field of long-term financial planning, where the need for repeated decision-making is determined by the essence of the process.

Key words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio, sensitivity of solutions

Статтю представив д.ф-м.н., професор Хусаїнов Д.Я.

ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ ФУНКЦІЙ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ АКЦІЇ

Розглянемо задачу про побудову функцій чутливості для моделей ціноутворення однієї акції та портфеля акцій.

Скористаємось, наведеною у роботі [2], динамічною моделлю формування ринкової вартості акції. За структурою вона відповідає відомій моделі У. Шарпа і може бути записана так:

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j r_j(t), \quad (1)$$

$i = \overline{1,n},\ t \in [t_0, T]$.

Тут: $r_i(t)$ – ринкова ціна акції у момент часу $t \in [t_0, T]$; α_1, α_2 – невідомі параметри моделі; $SM_{ind}(t)$ – функція індексу фондового ринку; $I(t)$ – функція індексу інфляції. Для зручності перетворень праву частину (1) позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Вважатимемо також, що мають місце початкові умови

$r(t_0)=r_0=r_0(\alpha)$, $t_0=t_0(\alpha)$, а також, що $\alpha=\alpha_1$ скаляр, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 близька до сталої. У такій постановці β_j – коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r,α, а також за неперервної диференційованості функцій r_0,t_0 за α_1 існує неперервна похідна $u(t,\alpha_1)=\dfrac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}$.

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial r}u+\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1} \qquad (2)$$

за початкової умови

$$u(t_0)=\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}+f(r_0(\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}.$$

Рівняння (2) отримано прямим диференціюванням (1) за α_1, а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t,\alpha_1)=\int_{t_0(\alpha_1)}^{t}f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)d\tau+r_0(t_0,\alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t,\alpha_1)=\frac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}=$$

$$\int_{t_0(\alpha_1)}^{t}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial r}u(\tau,\alpha_1)+\\ \dfrac{\partial f(r(t,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}\end{array}\right]d\tau+\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}-$$

$$f(r(t_0(\alpha_1),\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \qquad (3)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (3) $t=t_0$. Таким чином, для (1) побудовано функцію чутливості, що описує залежність ціни акції від параметра α_1, а також початкову умову. У подальшому нею можна скористатись при розв'язанні задачі ідентифікації параметрів моделі (1).

ЗАДАЧА ПРО ПОБУДОВУ ФУНКЦІЙ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Оскільки метою моделювання є опис та аналіз динаміки формування ринкової вартості портфеля акцій, динаміку його складових запишемо так

$$\frac{dr_i(t)}{dt}=(\alpha_{i_1}SM_{ind}(t)+\alpha_{i_2}I(t))r_i(t)+\sum_{j=1}^{N}\beta_{i\,j}r_j(t),$$

$i=\overline{1,N},\ t\in[t_0,T]$.

Математична модель формування ринкової вартості портфеля, який складається з N акцій має вигляд

$$\begin{pmatrix}\dfrac{dr_1}{dt}\\ \dfrac{dr_2}{dt}\\ \cdots\\ \dfrac{dr_N}{dt}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N}\\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N}\\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \cdots\\ r_N\end{pmatrix},$$

де $A_i=\alpha_{i1}SM_{ind}(t)+\alpha_{i2}I(t)$.

Для загального випадку система матиме такий векторно-матричний вигляд

$$\frac{dr}{dt}=(B^{(1)}+b(t)\Lambda^{(1)}+c(t)\Lambda^{(2)})r(t),\ t\in[t_0,T], \qquad (4)$$

де:

$$B^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{1N}\\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & \beta_{2N}\\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \beta_{N3} & 0\end{pmatrix},$$

$$b(t)=SM_{ind}(t), c(t)=I(t),$$

$$\Lambda^{(1)}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_N^{1}\end{pmatrix},\Lambda^{(2)}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_N^{2}\end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(1)T}=(\alpha_{11},\alpha_{21},...,\alpha_{N1}),\lambda^{(2)T}=(\alpha_{12},\alpha_{22},...,\alpha_{N2}).$$

Системі звичайних диференціальних рівнянь (4) відповідають початкові умови $r(t_0,\Lambda)=r_0(\Lambda),t_0=t_0(\Lambda)$, де Λ - об'єднана матриця параметрів моделі.

У подальшому вважаємо, що $r(t,\Lambda)$ - вектор фазових координат; $r_0(\Lambda),t_0(\Lambda)$ – неперервно-диференційовані функції. Систему (4) будемо досліджувати на замкнутих обмежених множинах фазового простору, які описують з одного боку обмеженість інвестиційного ресурсу, а з іншого - обмеженість очікуваної прибутковості або ринкової вартості акції на реальному ринку

$$\Phi_t \cong \Gamma_t = \left\{ r : \left| l_s^T(t) r \right| \le 1, s = 1,2,\ldots N \right\}, t \in [t_0, T],$$
$$\Phi_t \cong \Psi_t = \{ r : \psi(r,t) \le 1 \}, t \in [t_0, T],$$

де $l_s(t)$ – задані кусково-неперервні вектор-функції розмірності N; $\psi(r,t)$ – скалярна функція, неперервна за t разом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора r; Ψ_t – замкнута опукла множина, що містить внутрішню точку $r = 0$ для всіх $t \in [t_0; T]$.

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ РИНКОВОЇ ВАРТОСТІ ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ

Для дослідження поведінки розв'язків системи (4) скористаємось методом функцій Ляпунова за умови їх однозначності і неперервності разом з частинними похідними на множинах визначення. Основним методом дослідження поведінки збурених траєкторій у теорії чутливості є застосування функцій чутливості [3], які у нашому випадку матимуть такий загальний вигляд:

$$U_i^1(t, \overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}) = \frac{\partial r_i(\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, t)}{\partial \Lambda^{(1)}{}_i}, i = \overline{1,N},$$

де $\Lambda_i^{(1)} = \alpha_{i1}$ і у відповідній матриці розміщений на місці (i,i).

$$U_i^2(t, \overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}) = \frac{\partial r_i(\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(2)}}, i = \overline{1,N},$$

де $\Lambda_i^{(2)} = \alpha_{i_2}$ і у відповідній матриці розміщений на місці (i,i).

Тут $U^1(t, \overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)})$, $U^2(t, \overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)})$ - N –мірні вектори функцій чутливості, що характеризують величину швидкості зміни збуреного руху в залежності від збурення i-го параметра відносно розрахункових значень $\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}$.

Далі приходимо до розв'язання відповідниз задач Коші.

Тут $\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, r(\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, t)$ - матриці параметрів і траєкторія системи (4). Для визначення початкових умов необхідно продиференціювати за $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ інтегральне рівняння:

$$r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t) = \int_{t_0}^{T} \begin{bmatrix} (B^{(1)} + b(\tau)\overline{\Lambda}^{(1)} + c(\tau)\overline{\Lambda}^{(2)})* \\ r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \tau) \end{bmatrix} d\tau$$
$$+ r_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}).$$

У результаті отримаємо:

$$U_i^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) = \frac{\partial r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(1)}} =$$
$$\int_{t_0}^{T} \left[\begin{matrix} (B^{(1)} + b(\tau)\overline{\Lambda}^{(1)} + \\ c(\tau)\overline{\Lambda}^{(2)}) U_i^1(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) + \end{matrix} \right.$$
$$\left. b(\tau) r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \tau) \right] d\tau + \frac{dr_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{d\Lambda^{(1)}} -$$
$$\begin{bmatrix} (B^{(1)} + b(t_0)\overline{\Lambda}^{(1)} + \\ c(t_0)\overline{\Lambda}^{(2)}) r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t_0) \end{bmatrix} \frac{dt_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)})}{d\Lambda^{(1)}},$$

$$U_i^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) = \frac{\partial r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{\partial \Lambda_i^{(2)}} =$$
$$\int_{t_0}^{T} \left[\begin{matrix} (B^{(1)} + b(\tau)\overline{\Lambda}^{(1)} + \\ c(\tau)\overline{\Lambda}^{(2)}) U_i^2(t, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}) + \end{matrix} \right. \tag{5}$$
$$c(\tau) r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \tau)] d\tau +$$
$$+ \frac{dr_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t)}{d\Lambda^{(2)}} - \begin{bmatrix} (B^{(1)} + b(t_0)\overline{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\overline{\Lambda}^{(2)})* \\ r(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, t_0) \end{bmatrix}$$
$$\frac{dt_0(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)})}{d\Lambda^{(2)}}.$$

Взявши у останньому рівнянні $t = t_0$, побудуємо вираз для визначення початкових умов матриць функцій чутливості.

Система (5) повністю визначає функції чутливості для (4), а також характеризує чутливість її розв'язків до зміни параметрів, що обумовлюють динаміку стану фондового ринку і процеси ціноутворення на ньому.

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНКЦІЯМИ ЧУТЛИВОСТІ ТА РУХОМ ПРИБУТКОВОСТІ ПОРТФЕЛЯ

Для встановлення зв'язку між функціями чутливості і рухом прибутковості застосуємо диференціали вищих порядків функції багатьох змінних [2]. Під рухом прибутковості розуміємо вектор

$$\Delta r(\overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, t) = r(\overline{\Lambda}^{(1)} + \Delta\Lambda^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)} + \Delta\Lambda^{(2)}, t) -$$
$$r(t, \overline{\Lambda}^{(1)}, \overline{\Lambda}^{(2)}, t) = r - \overline{r}$$

що характеризує зміну ринкової вартості цінного папера r і визначає величину відхилення тренду акції від прогнозованої. Першим наближенням для руху прибутковості буде вираз:

$$\begin{aligned}\Delta_1 r(\overline{\Lambda}^{(1)},\overline{\Lambda}^{(2)},t) &= U_1{}^1(\overline{\Lambda}^{(1)},\overline{\Lambda}^{(2)},t)\Delta\Lambda_1{}^{(1)}+\ldots\\ &+U_N{}^1(\overline{\Lambda}^{(1)},\overline{\Lambda}^{(2)},t)\Delta\Lambda_N{}^{(1)}+\\ &+U_1{}^2(\overline{\Lambda}^{(1)},\overline{\Lambda}^{(2)},t)\Delta\Lambda_1{}^{(2)}+\ldots\\ &+U_N{}^2(\overline{\Lambda}^{(1)},\overline{\Lambda}^{(2)},t)\Delta\Lambda_N{}^{(2)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Вираз (6) є лінійним відносно приросту параметрів і функцій чутливості. Для динамічної моделі (4) розглянемо задачу максимізації за параметрами норми ринкової вартості портфеля цінних паперів.

$$I(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}) = \max_{\substack{\Lambda^{(1)}\in G_\Lambda,\\ \Lambda^{(2)}\in G_\Lambda}} [\Phi(r(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)},T))].$$

Задачу розглянемо за наявності обмежень на функції чутливості [2]:

$$U(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)})\in G_t = \left\{\begin{array}{l} U^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}): \\ \left|\sum_{i=1}^{N} l_{s_1}{}^{(i)T}(t)U_i{}^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)})\right|\le 1, \\ s_1=1,2,\ldots N_1, N_1\in N \\ U^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}): \\ \left|\sum_{i=1}^{N} l_{s_2}{}^{(i)T}(t)U_i{}^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)})\right|\le 1, \\ s_2=1,2,\ldots N_2, N_2\in N \end{array}\right\}, \tag{7}$$

$$U(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)})\in \Psi_t = \left\{\begin{array}{l} U^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}):\Psi(U^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),t)= \\ \Psi(U_1{}^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),\ldots,U_N{}^1(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),t)\le 1 \\ U^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}):\Psi(U^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),t)= \\ \Psi(U_1{}^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),\ldots,U_N{}^2(t,\Lambda^{(1)},\Lambda^{(2)}),t)\le 1 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Для її розв'язання застосуємо ітераційну схему градієнтного спуску:

$$\Lambda_i{}^{(k+1)} = P_{G_\Lambda{}^{(k)}}\left\{\begin{array}{l}\Lambda_i{}^{(k)}-\rho_k * grad_r^T\Phi(r(\Lambda^{(1)^{(k)}},\Lambda^{(2)^{(k)}} \\ ,T))U^{(i)}(\Lambda^{(1)^{(k)}},\Lambda^{(2)^{(k)}},T)\end{array}\right\},$$

$i=\overline{1,2N}, k=0,1,2\ldots$

де P – операція проектування вектора параметрів Λ на множину $G_\Lambda^{(k)}\subset G_\Lambda$, ρ_k - крок спуску. Множина початкових умов:

$$G_0=\left\{U(t_0):\sum_{k=1}^{N}U^{(k)T}(t_0)DU^{(k)}(t_0)\le c^2\right\}.$$

Вона описує область, в якій для функцій чутливості будуть виконуватись обмеження (7) і (8) при фіксованому Λ. Параметри Λ на $(k+1)$-ій ітерації вибираємо із множини:

$$G_{\lambda^{(k)}} = G_\lambda \cap \left\{\lambda:\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}\dfrac{dr_0(\Lambda)}{d\Lambda_i}-((B^{(1)}+b(t_0)\Lambda^{(1)}+ \\ c(t_0)\Lambda^{(2)})\cdot r(t_0(\Lambda),\Lambda))\end{bmatrix}^T * \right.$$

$$\left. * D * \begin{bmatrix}\dfrac{dr_0(\Lambda)}{d\Lambda_i}-((B^{(1)}+b(t_0)\Lambda^{(1)}+ \\ c(t_0)\Lambda^{(2)})\cdot r(t_0(\Lambda),\Lambda))\dfrac{dt_0(\Lambda)}{d\Lambda_i}\end{bmatrix}\right\}\le c^2.$$

Наведений вище аналіз є необхідним конструктивним інструментом для виконання наступного етапу у загальній схемі активного управління портфелем акцій, який пов'язаний із розв'язанням задач прогнозування ринкової вартості та ефективної диверсифікації - як найбільш важливих задач теорії та практики прикладного портфельного аналізу.

Список використаних джерел

1. *Шарп У.* Инвестиции / *Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли.* – Инфра-М, 1999. –с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – № 148. –с. 3-10.
3. Гаращенко Ф.Г. Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций / Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А. // Проблемы управления и информатики.- 2016. - № 4.- с. 124-132.

Reference

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing eng*. 148. p. 3-10.
3. GARASHCHENKO FEDIR, KULIAN VICTOR and YUNKOVA OLENA (2016) Simulation of the Dynamics and Diversification of Stock Portfolio Journal of Automation and Information Sciences. - New York, Connecticut. - v. 48, issue 7. - P. 28-40.

Надійшла до редколегії: 10.12.2022 р.