

UM SISTEMA DE TABLEAUX PARA A LÓGICA PARACONSISTENTE J_3

A TABLEAUX SYSTEM FOR THE PARACONSISTENT LOGIC J_3

Helen Gomes da Silva¹
Hércules de Araujo Feitosa²
Gabriel Alexandre da Cruz³

Resumo: A Lógica paraconsistente J_3 foi introduzida por D'Ottaviano e da Costa (1970). Tal abordagem foi proposta ao considerar o problema de Jaskowski que tratava de aspectos da paraconsistência. Em (1985) D'Ottaviano apresentou um sistema axiomático correto e completo para J_3 . Posteriormente, Feitosa, Cruz e Golzio (2015) introduziram um novo sistema axiomático para a lógica J_3 , mais simples em relação à primeira formalização. Diante do fato que o método hilbertiano é pouco intuitivo, hoje, existem sistemas de prova alternativos ao axiomático, os quais são mais elucidativos e, usualmente, mais rápidos. Dentre eles, destacamos o método dos tableaux analíticos. Neste trabalho, apresentamos a Lógica paraconsistente J_3 em um sistema de tableaux e mostramos a equivalência entre a abordagem original e o sistema de tableaux que introduzimos nestas notas.

Palavras-chave: Lógica trivalente. Lógica paraconsistente J_3 . Sistemas dedutivos. Método de tableaux.

Abstract: Paraconsistent Logic J_3 was introduced by D'Ottaviano and Costa (1970). That approach was motivated by a Jaskowski's problem on aspects of paraconsistence. In (1985) D'Ottaviano developed a correct and complete axiomatic system for J_3 . Later, Feitosa, Cruz and Golzio (2015) introduced a new axiomatic system for the logic J_3 , which was simpler in relation to the first formalization. Considering that the Hilbert method for deductive systems is not very intuitive, nowadays there are alternative systems to the axiomatic one, which are more elucidative and, usually, faster. Among them, we highlight the method of tableaux. In this work, we present the Paraconsistent Logic J_3 in an analytical tableaux system and prove the equivalence between the original approach and the tableau system introduced in the paper.

Keywords: Trivalent Logic. Paraconsistent logic J_3 . Deductive systems. Tableaux method.

Introdução

Em 1948, motivado pela ideia de sistematizar teorias com possíveis contradições, Jaskowski propôs o problema que envolvia esta e algumas outras noções de paraconsistência. Com o intuito de apresentar uma possível solução para este problema, D'Ottaviano e da Costa (1970) introduziram a Lógica J_3 .

¹ Email: helen-277@hotmail.com. Pós em Filosofia, UNESP- FFC- Marília.

² Email: haf@fc.unesp.br. Departamento de Matemática, UNESP- FC- Bauru.

³ Email: gabriel_210495@hotmail.com. Licenciatura em Matemática, UNESP- FC- Bauru.

A J_3 é uma lógica paraconsistente e foi formalizada a partir de uma semântica matricial trivalente. Também é classificada como uma lógica não clássica, pois não segue todos os princípios aristotélicos, em particular o da não contradição. Assim, em J_3 é possível que as fórmulas φ e $\neg\varphi$ sejam ambas verdadeiras em algum contexto, sem que todas as demais fórmulas decorram dessa situação.

Em 1985, D'Ottaviano introduziu um sistema axiomático correto e completo para a J_3 , o qual era composto por cinco axiomas e duas regras de dedução. Contudo, neste trabalho, adotamos o sistema de axiomas para J_3 , de acordo com Feitosa, Cruz e Golzio (2015).

Os sistemas axiomáticos são pouco intuitivos e a prova via axiomas, na maioria das vezes, é trabalhosa. Hoje, existem métodos de prova alternativos ao hilbertiano, que são mais práticos e facilmente computáveis.

Dentre estes sistemas temos o método de tableaux. Este método dedutivo foi apresentado de uma forma eficiente e elegante por Smullyan (1968).

Trata-se de procedimento dedutivo por refutação, isto é, partimos da negação da fórmula que gostaríamos de provar, expandimos o tableau desta negação da fórmula inicial e no caso de encontrarmos uma contradição em todos os ramos do tableau, consideramos que a fórmula inicial é válida.

Nestas notas, apresentamos a lógica paraconsistente J_3 em um sistema dedutivo de tableaux aqui introduzido. Também verificamos a equivalência entre este sistema, denotado por $T(J_3)$, e a abordagem axiomática da J_3 .

1. A lógica paraconsistente J_3

A linguagem proposicional da lógica J_3 é $\mathcal{L} = (\neg, \vee, \nabla)$, em que os operadores representam, respectivamente, a negação paraconsistente, a disjunção e o operador ∇ difere os elementos distinguidos dos não distinguidos.

As interpretações destes operadores são dadas pelas tabelas:

	\neg	\vee	0	$1/2$	1		∇
0	1	0	0	$1/2$	1	0	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	1
1	0	1	1	1	1	1	1

A partir destes operadores, podemos definir alguns operadores derivados como:

Conjunção: $\varphi \wedge \psi =_{\text{def}} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Negação forte: $\sim\varphi =_{\text{def}} \neg\nabla\varphi$

Delta: $\Delta\varphi =_{\text{def}} \neg\nabla\neg\varphi$

Condicional: $\varphi \rightarrow \psi =_{\text{def}} \nabla\varphi \vee \psi$

Bicondicional: $\varphi \leftrightarrow \psi =_{\text{def}} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Consistência: $\circ\varphi =_{\text{def}} \sim(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Seguem as tabelas dos operadores derivados:

\wedge	0	$1/2$	1		\sim		Δ
0	0	0	0	0	1	0	0
$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	0
1	0	$1/2$	1	1	0	1	1

\rightarrow	0	$1/2$	1	\leftrightarrow	0	$1/2$	1		\circ
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
$1/2$	0	$1/2$	1	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
1	0	$1/2$	1	1	0	$1/2$	1	1	1

Segue da definição da conjunção, a partir da disjunção, que em J_3 valem as leis de De Morgan, isto é, $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

A semântica matricial de J_3 é dada pela seguinte matriz lógica:

$$M_{J_3} = (\{0, 1/2, 1\}, \{1/2, 1\}, \neg, \vee, \nabla)$$

com o conjunto de valores designados, valores que assumimos como verdadeiros, $D = \{1/2, 1\}$. A seguir apresentamos a relação de consequência semântica.

Denotamos por $Var(J_3) = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ o conjunto das variáveis proposicionais de J_3 e por $For(J_3)$ o conjunto das fórmulas de J_3 .

Uma *valoração* para J_3 é qualquer função:

$$v: Var(J_3) \rightarrow \{0, 1/2, 1\},$$

a qual é estendida de modo único para o conjunto $For(J_3)$ segundo os operadores apresentados acima.

Se $\Gamma \subseteq For(J_3)$, então $v(\Gamma) = \{v(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$. Deste modo, apresentamos a implicação lógica ou a consequência semântica de J_3 .

Se $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For(J_3)$, então $\Gamma \text{ implica } \varphi$ quando para toda J_3 -valoração v , se $v(\Gamma) \subseteq D$, então $v(\varphi) \in D$, ou seja:

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow v(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow v(\varphi) \in D.$$

Como consequência da definição de valoração, segue que para toda fórmula de J_3 , se ela é válida segundo uma valoração $v: Var(J_3) \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$, então também é válida segundo a restrição booleana de v , ou seja, de acordo com a valoração Booleana $v: Var(J_3) \rightarrow \{0, 1\}$, com todos os significados booleanos dos operadores $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, em que é apagado o valor $1/2$. Deste modo, toda fórmula J_3 -válida é uma tautologia.

Podemos construir tabelas de verdade para fórmulas de J_3 , que por ser uma lógica trivalente, tem como número de linhas algum múltiplo de 3. Vejamos alguns exemplos:

(a) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$:

φ	\rightarrow	$(\psi$	\rightarrow	$\varphi)$
0	1	0	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	0	1	1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$:

φ	\leftrightarrow	$\neg\neg\varphi$
0	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

(c) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$:

φ	\rightarrow	$(\varphi$	\vee	$\psi)$
0	1	0	0	0
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1

(d) $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$:

\neg	$(\varphi$	\vee	$\psi)$	\leftrightarrow	$(\neg\varphi$	\wedge	$\neg\psi)$
1	0	0	0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1	1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	1	0	0	0

Nos exemplos acima, a última coluna das tabelas assume apenas os valores 1 e $\frac{1}{2}$ e, deste modo, podemos concluir que todas estas fórmulas são válidas de acordo com \mathcal{MJ}_3 .

(e) Cada fórmula σ do tipo $\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \circ\varphi$ é contraditória:

φ	$\neg\varphi$	$\circ\varphi$	σ
0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	1	0

Neste exemplo, a fórmula σ assume todos os valores iguais a 0, o que denotamos por \perp . Em contrapartida, uma fórmula como a negação $\neg\sigma$, que assume sempre o valor 1 será denotada por \top .

Entretanto, há algumas fórmulas tautológicas que não são válidas segundo \mathcal{MJ}_3 .

Apresentamos abaixo alguns exemplos:

(f) $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

Seja v uma valoração de modo que $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 0$. Daí, $v(\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)) = (\frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2} \rightarrow 0)) = \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$.

$$(g) (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$$

Tomemos uma valoração v tal que $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Daí, $v((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)) = (1 \rightarrow \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2} \rightarrow 0) = \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 0$.

Proposição 1.1: Se $v: For(J_3) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é uma J_3 -valoração, então:

$$(i) v(\varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = \frac{1}{2} \text{ ou } v(\varphi) = 1;$$

$$(ii) v(\neg \varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = \frac{1}{2} \text{ ou } v(\varphi) = 0;$$

$$(iii) v(o\varphi) \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = 0 \text{ ou } v(\varphi) = 1.$$

Demonstração: Imediata das tabelas dos operadores de J_3 .

Apresentamos agora o sistema axiomático da Lógica Paraconsistente J_3 no ambiente proposicional, que foi desenvolvido com base nas lógicas LFI e pelo texto (CONIGLIO; SILVESTRINI, 2014).

Segue de acordo com Feitosa, Cruz, Golzio (2015) um esquema de axiomas de J_3 :

$$(A1) \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$$

$$(A3) (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

$$(A4) (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$(A5) (\sigma \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \psi) \rightarrow (\sigma \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$$

$$(A6) \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$(A7) \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$(A8) (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$$

$$(A9) \neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$(A10) \varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(A11) o\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi))$$

$$(A12) \neg o\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg \varphi)$$

$$(A13) o\varphi \rightarrow o\neg \varphi$$

$$(A14) (o\varphi \wedge o\psi) \rightarrow o(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(A15) (o\varphi \wedge o\psi) \rightarrow o(\varphi \vee \psi).$$

Regra de Dedução:

(MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

Feitosa, Cruz, Golzio (2015) demonstraram que o sistema axiomático de J_3 é correto e completo relativo à semântica \mathcal{M}_{J_3} .

Logo, temos o seguinte resultado: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$.

2. O método dos tableaux

Os sistemas de tableaux para a Lógica Clássica, proposicional e quantificacional, foram apresentados de uma forma elegante por Smullyan (1968).

A origem de tal método, entretanto, está baseada nos trabalhos de Gentzen (1935), que introduziu sistemas dedutivos finitos e, na maioria das vezes, mais rápidos que os demais métodos. Estes sistemas são conhecidos como cálculo de sequentes e dedução natural.

Tais sistemas de prova seguem o princípio da subfórmula, o qual determina: se uma fórmula tem uma demonstração, então ela possui uma demonstração em que ocorrem apenas subfórmulas da fórmula inicial. Segundo Smullyan (1968), esta característica determina o que tem sido chamado de tableau analítico.

Um aspecto importante deste sistema de prova é que se trata de um método de refutação, uma vez que para demonstrarmos que uma fórmula φ é válida, consideramos, inicialmente, que ela não é válida. Diante disso, expandimos o tableau da fórmula $\neg\varphi$. No caso de encontrarmos alguma contradição em todas as possibilidades de análise da fórmula $\neg\varphi$, podemos concluir então que φ é válida.

Caso contrário, o tableau apresenta algum ramo aberto, isto é, sem alguma contradição na expansão de $\neg\varphi$. Assim, este mesmo ramo fornece um contra-exemplo de valoração para fórmula φ , que a faz falsa.

Além disso, o método dos tableaux analíticos também pode ser definido como um algoritmo e, com isso, faz-se um sistema de decisão para fórmulas válidas de uma determinada lógica, da mesma forma que as tabelas de verdade são para a lógica proposicional clássica. Entretanto, cada tableau tem uma enorme vantagem por ser um procedimento muito mais rápido e econômico.

O tableau é desenvolvido (ou expandido) através das regras de expansão, as quais permitem uma análise das fórmulas de uma dada linguagem \mathcal{L} . Outro conceito importante neste método é o ‘ramo’, o qual utilizamos para caracterizar uma sequência possível de análise de subfórmulas da fórmula em questão.

Ademais, Smullyan (1968) apresentou o tableau como sendo uma árvore ordenada e diádica, pois um ramo pode gerar no máximo duas consequências distintas. No mesmo trabalho, ele apresentou seu método de tableaux tanto para a lógica proposicional clássica (LPC), como para a lógica de primeira ordem clássica.

Neste artigo, apresentamos o sistema de tableaux para a LPC, de acordo com Smullyan (1968). Assim, também apresentamos as regras com fórmulas marcadas, em que T representa a verdade (*truth*) e F representa o falso.

Indicamos que a fórmula φ é deduzida via tableau de Γ por $\Gamma \Vdash \varphi$.

As fórmulas neste sistema de prova podem ser de dois tipos:

Fórmulas do tipo A: as consequências das fórmulas do tipo A são consequências diretas, isto é, permanecem no mesmo ramo e não geram bifurcações.

Fórmulas do tipo B: neste caso, as fórmulas do tipo B não são diretas e, assim, elas bifurcam em dois distintos ramos, em que cada um deles é uma possibilidade de análise da fórmula dada.

Apresentamos, a seguir, as regras de expansão do sistema de tableaux analíticos para a LPC.

Regras do tipo A:

$$\begin{array}{c}
 \frac{T \quad \neg\alpha}{F \quad \alpha} \\
 \\
 \frac{F \quad \alpha \vee \beta}{F \quad \alpha} \\
 F \quad \beta \\
 \\
 \frac{F \quad \neg\alpha}{T \quad \alpha} \\
 \\
 \frac{F \quad \alpha \rightarrow \beta}{T \quad \alpha} \\
 F \quad \beta \\
 \\
 \frac{T \quad \alpha \wedge \beta}{T \quad \alpha} \\
 T \quad \beta
 \end{array}$$

Regras do tipo B:

$$\frac{F \alpha \wedge \beta}{\begin{array}{|l} F \alpha \\ F \beta \end{array}} \qquad \frac{T \alpha \vee \beta}{\begin{array}{|l} T \alpha \\ T \beta \end{array}} \qquad \frac{T \alpha \rightarrow \beta}{\begin{array}{|l} F \alpha \\ T \beta \end{array}}$$

Após a aplicação de todas as regras de expansão possíveis num tableau, podemos encontrar uma contradição num ramo, ou seja, quando para alguma fórmula φ , ocorrem no ramo as fórmulas marcadas $T\varphi$ e $F \varphi$. Neste caso, dizemos que o ramo é fechado. Caso contrário, dizemos que o ramo é aberto.

Além disso, se todos os ramos do tableau são fechados, então temos um tableau fechado. Assim, podemos concluir que a fórmula inicial é válida. Do contrário, a fórmula inicial não é válida.

3. Tableaux para a lógica paraconsistente J_3

Nesta seção, apresentamos a Lógica Paraconsistente J_3 no método de tableaux. Também provamos a equivalência entre o sistema hilbertiano da J_3 e o sistema de tableaux introduzido neste trabalho. O sistema de tableaux para a Lógica Paraconsistente J_3 será denotado por $T(J_3)$.

O sistema de $T(J_3)$ é composto dos seguintes itens:

- O alfabeto de $T(J_3)$ é determinado pelos operadores da Lógica J_3 , conforme sistema de axiomas de J_3 da Seção 1.
- O conjunto de fórmulas $For(J_3)$ é gerado de forma recursiva a partir das fórmulas atômicas de J_3 , o conjunto $Var(J_3) = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, pelos operadores de J_3 .
- O sistema trabalha com formas marcadas do tipo $k\varphi$, em que $k \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
- O conjunto de regras de dedução do sistema $T(J_3)$ será introduzido a seguir.

Destacamos as regras específicas para o operador \circ , apresentadas agora.

As regras de expansão de $T(J_3)$ para o operador \circ são as seguintes:

- $R_1 T(J_3)$:

$$\frac{0 \quad \circ \varphi}{\frac{1}{2} \quad \varphi}$$

- $R_2 T(J_3)$:

$$\frac{1 \quad \circ \varphi}{1 \quad \varphi \quad | \quad 0 \quad \varphi}$$

- $R_3 T(J_3)$:

$$\frac{\frac{1}{2} \quad \circ \varphi}{\times}$$

Esta última regra indica o fechamento imediato do ramo, pois o operador de consistência não pode assumir o valor $\frac{1}{2}$.

Definição 3.1: No sistema $T(J_3)$, um ramo de tableau fecha quando ocorre nele uma fórmula φ com dois valores distintos ou R_3 .

Definição 3.2: No sistema $T(J_3)$, o tableau é fechado se todo ramo do tableau é fechado.

Devido a valoração $\frac{1}{2}$, é necessário introduzirmos uma nova categoria de regras, pois o comportamento da expansão não se enquadra exatamente nas regras dos tipos A e B vistas anteriormente.

- **Regra do tipo C:** expande o ramo e gera três possibilidades de análise. Apresentamos, a seguir, todas as regras de expansão de $T(J_3)$.

As regras do tipo A são as seguintes:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad \neg\varphi \\
 \hline
 0 \quad \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 0 \quad \neg\varphi \\
 \hline
 1 \quad \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1/2 \quad \neg\varphi \\
 \hline
 1/2 \quad \varphi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \quad \circ\varphi \\
 \hline
 1/2 \quad \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1 \quad \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 1 \quad \varphi \\
 1 \quad \psi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 0 \quad \varphi \vee \psi \\
 \hline
 0 \quad \varphi \\
 0 \quad \psi
 \end{array}$$

As regras do tipo B são as seguintes:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad \circ\varphi \\
 \hline
 1 \quad \varphi \quad | \quad 0 \quad \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 0 \quad \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 0 \quad \varphi \quad | \quad 0 \quad \psi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1 \quad \varphi \vee \psi \\
 \hline
 1 \quad \varphi \quad | \quad 1 \quad \psi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0 \quad \varphi \rightarrow \psi \\
 \hline
 0 \quad \psi \\
 1 \quad \varphi \quad | \quad 1/2 \quad \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1 \quad \varphi \rightarrow \psi \\
 \hline
 0 \quad \varphi \quad | \quad 1 \quad \psi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1/2 \quad \varphi \rightarrow \psi \\
 \hline
 1/2 \quad \psi \\
 1/2 \quad \varphi \quad | \quad 1 \quad \varphi
 \end{array}$$

As regras do tipo C são:

$$\begin{array}{c}
 1/2 \quad \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 1/2 \quad \varphi \quad | \quad 1/2 \quad \varphi \quad | \quad 1 \quad \varphi \\
 1/2 \quad \psi \quad | \quad 1 \quad \psi \quad | \quad 1/2 \quad \psi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 1/2 \quad \varphi \vee \psi \\
 \hline
 1/2 \quad \varphi \quad | \quad 1/2 \quad \varphi \quad | \quad 0 \quad \varphi \\
 1/2 \quad \psi \quad | \quad 0 \quad \psi \quad | \quad 1/2 \quad \psi
 \end{array}$$

Indicamos que a fórmula φ é deduzida via tableau de Γ por $\Gamma \Vdash \varphi$.

3.1 Da dedução axiomática para a dedução em tableaux

Desejamos mostrar que $\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$. Como a segunda equivalência já foi provada (FEITOSA; CRUZ e GOLZIO, 2015), então faremos os seguintes caminhos: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$ e $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$.

Assim, provamos agora que para cada dedução de J_3 fazemos corresponder um tableau fechado. Isto corresponde a dizer que a consequência dedutiva implica na consequência analítica, a consequência dos tableaux.

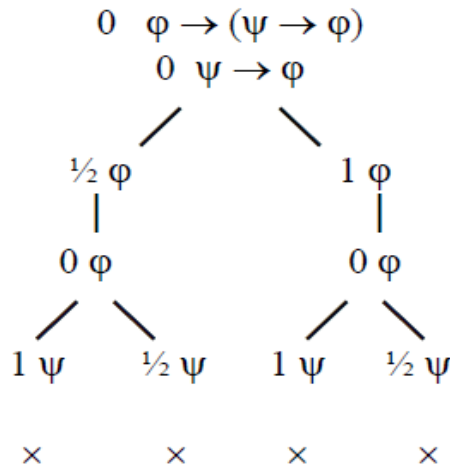
Teorema 3.3: $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração: Por indução sobre o comprimento da dedução $\Gamma \vdash \varphi$.

Se $n = 1$, então $\varphi \in \Gamma$ ou φ é um axioma de J_3 .

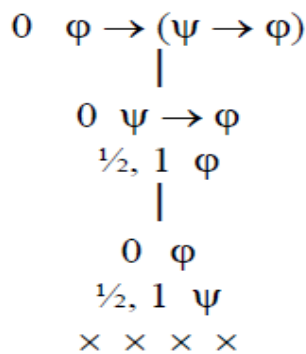
Se $\varphi \in \Gamma$, certamente o tableau $\Gamma \Vdash \varphi$ fecha, pois a fórmula φ ocorre com valores distintos no tableau. Agora, mostramos que o tableau de cada axioma de J_3 fecha segundo $T(J_3)$.

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$:

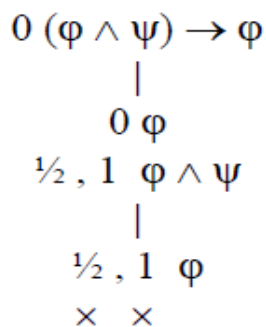


Assim deve ser cada tableau de $T(J_3)$. Contudo, em alguns casos evitaremos as muitas ramificações com uma notação levemente diferente. Vejamos:

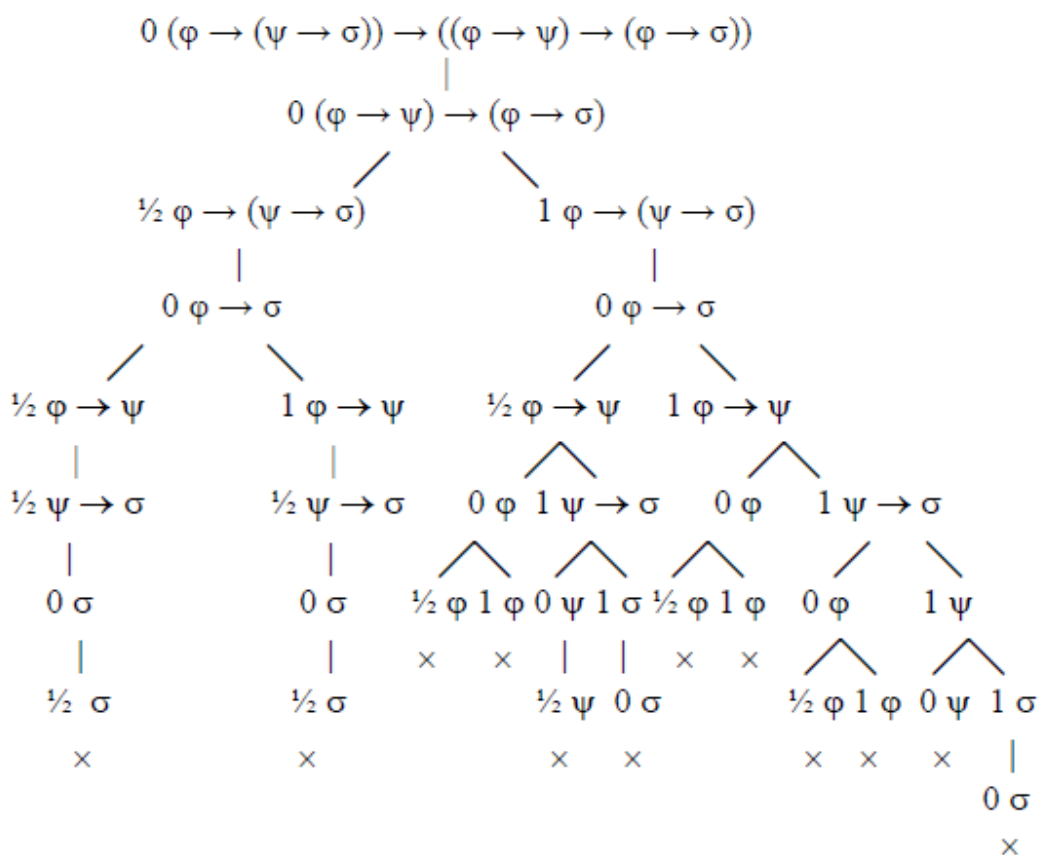
(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$:



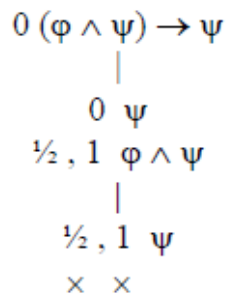
(A3) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:



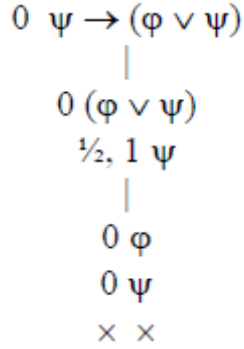
(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$



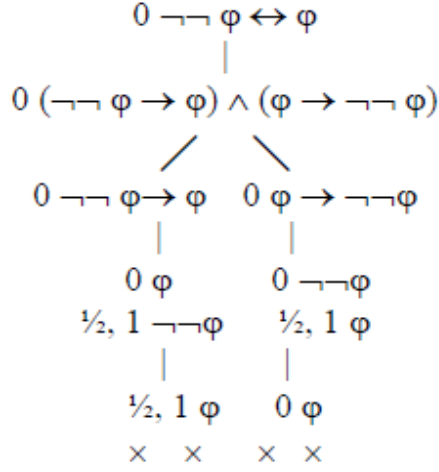
(A4) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$:



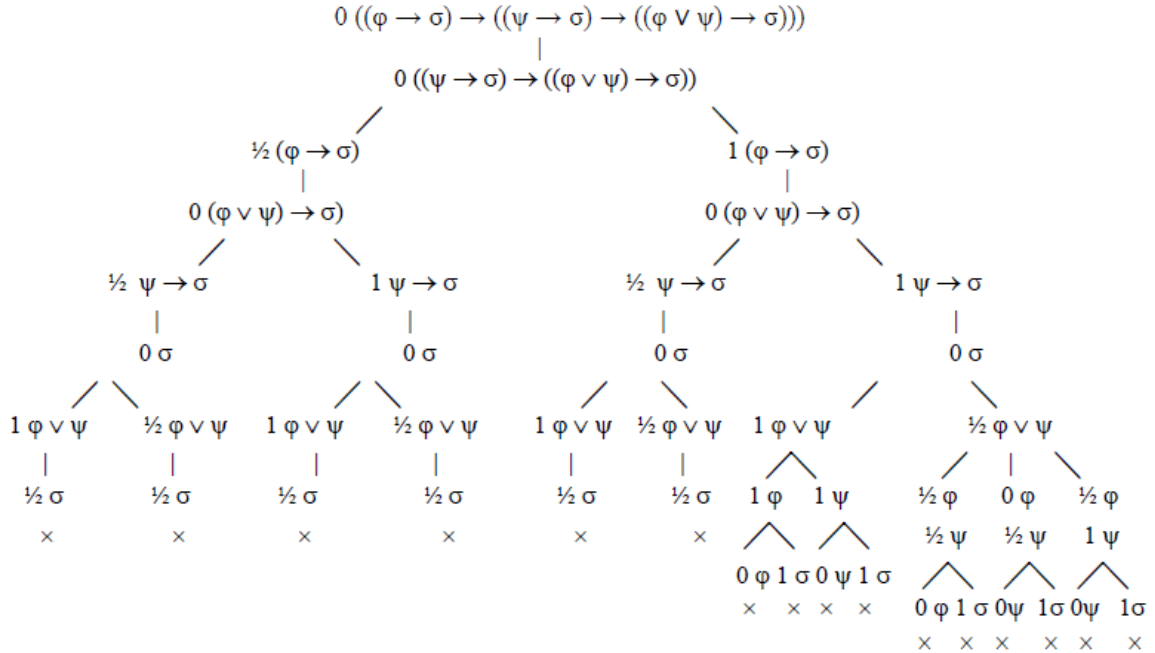
(A7) $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$:



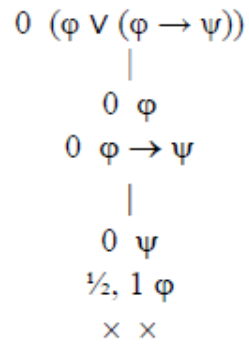
(A9) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$:



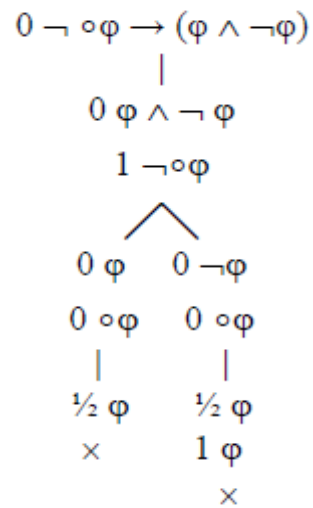
(A8) $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$



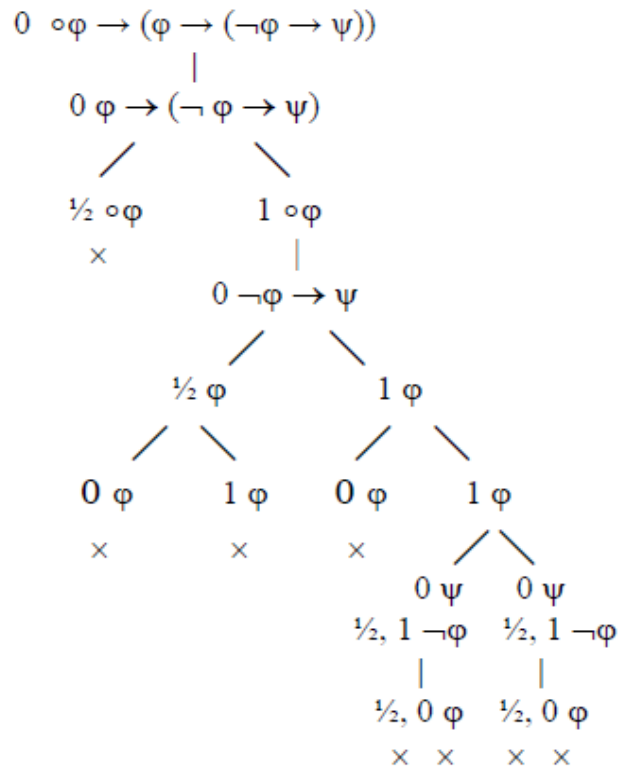
(A10) $\phi \vee (\phi \rightarrow \psi)$:



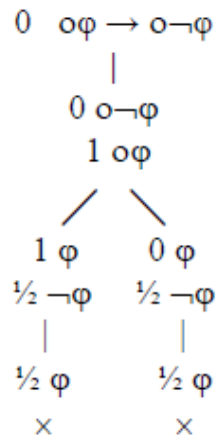
(A12) $\neg \circ \phi \rightarrow (\phi \wedge \neg \phi)$:



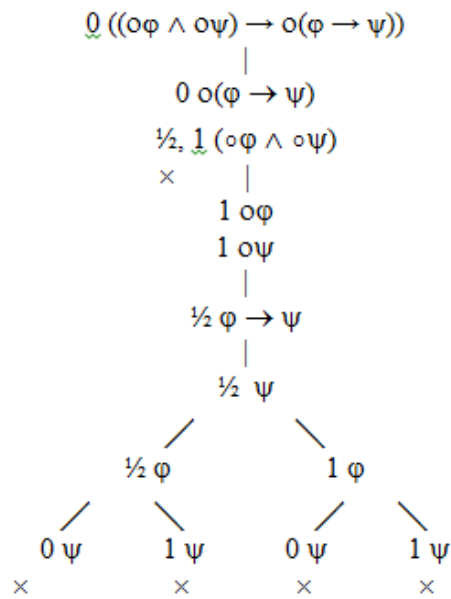
(A11) $o\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi))$:



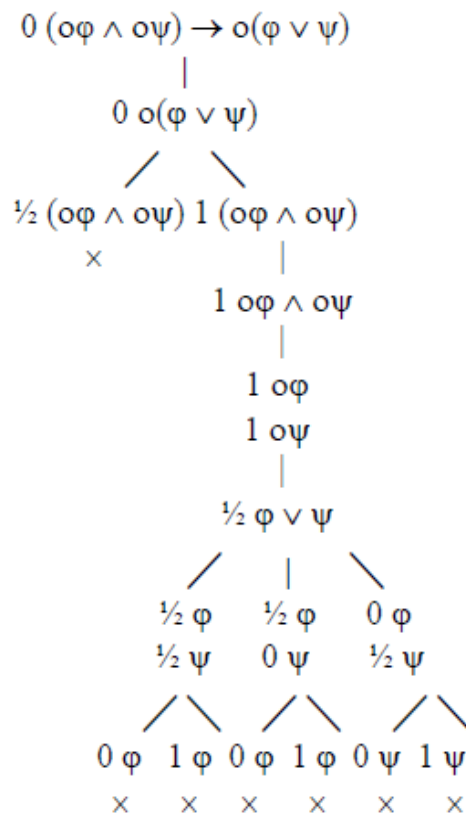
(A13) $o\varphi \rightarrow o\neg\varphi$:



(A14) $(o\phi \wedge o\psi) \rightarrow o(\phi \rightarrow \psi)$:



(A15) $(o\phi \wedge o\psi) \rightarrow o(\phi \vee \psi)$:



Se $n > 1$, então temos $\Gamma \vdash \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$.

Por hipótese de indução, os tableaux $\Gamma \Vdash \sigma$ e $\Gamma \Vdash \sigma \rightarrow \varphi$ fecham. Logo, para toda valoração v tal que $v(\Gamma) \subseteq \{\frac{1}{2}, 1\}$ temos que $v(\sigma) \neq 0$ e $v(\sigma \rightarrow \varphi) \neq 0$.

Então devemos considerar o tableau $\Gamma, \sigma, \sigma \rightarrow \varphi \Vdash \varphi$:

Γ

$\frac{1}{2} \sigma$	$\frac{1}{2} \sigma$	1σ	1σ
$\frac{1}{2} \sigma \rightarrow \varphi$	$1 \sigma \rightarrow \varphi$	$\frac{1}{2} \sigma \rightarrow \varphi$	$1 \sigma \rightarrow \varphi$
0φ	0φ	0φ	0φ
$\frac{1}{2} \varphi$	\wedge	$\frac{1}{2} \varphi$	\wedge
$\frac{1}{2}, 1 \sigma$	$0 \sigma \quad 1 \varphi$	$\frac{1}{2}, 1 \sigma$	$0 \sigma \quad 1 \varphi$
$\times \quad \times$	$\times \quad \times$	$\times \quad \times$	$\times \quad \times$

Em todos os casos os tableaux fecham e, portanto, $\Gamma \Vdash \varphi$. ■

3.2 Conjuntos saturados para baixo

Definição 3.4: Um conjunto θ de fórmulas marcadas é *saturado para baixo* se ele atende as seguintes condições:

- (i) nenhuma fórmula aparece em θ com dois valores distintos no ramo;
- (ii) se em θ ocorre alguma fórmula marcada do tipo A, então $k_1 \alpha_1 \in \theta$ e $k_2 \alpha_2 \in \theta$, em que $k_1 \alpha_1$ e $k_1 \alpha_2$ são as subfórmulas marcadas imediatas da fórmula do tipo A;
- (iii) se em θ ocorre alguma fórmula marcada do tipo B, então $k_1 \beta_1 \in \theta$ ou $k_2 \beta_2 \in \theta$, em que $k_1 \beta_1$ e $k_2 \beta_2$ são as subfórmulas marcadas imediatas da fórmula do tipo B;
- (iv) se em θ há alguma fórmula marcada do tipo C, então $k_1 \gamma_1 \in \theta$ ou $k_2 \gamma_2 \in \theta$ ou $k_3 \gamma_3 \in \theta$, em que $k_1 \gamma_1$, $k_2 \gamma_2$ e $k_3 \gamma_3$ são as subfórmulas marcadas imediatas da fórmula do tipo C.

Lema 3.5: Todo ramo aberto e saturado de um tableau é um conjunto saturado para baixo.

Demonstração: Como o ramo é aberto, então nenhuma fórmula ocorre com valorações distintas no ramo, o que cumpre a condição (i). Devido à saturação do ramo, todas as possíveis regras de expansão do tableau já foram aplicadas. Assim, se há uma fórmula do tipo A no ramo, então $k_1\alpha_1$ e $k_2\alpha_2$ também estão no ramo, cumprindo a condição (ii). Agora, se uma fórmula do tipo B está no ramo, então ou $k_1\beta_1$ ou $k_2\beta_2$ está no ramo, cumprindo a condição (iii). Novamente pela saturação, se uma fórmula do tipo C está no ramo, então ou $k_1\gamma_1$ ou $k_2\gamma_2$ ou $k_3\gamma_3$ está no mesmo ramo e vale (iv). ■

Agora precisamos estender a noção de valoração para fórmulas marcadas. Isso pode ser feito da seguinte forma.

Definição 3.6: Dada uma valoração v e $k \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, então a fórmula marcada $k\varphi$ é distinguida segundo v , o que é denotado por $k\varphi \in D$, se $v(\varphi) = k$.

Desta maneira: $k\varphi \in D \Leftrightarrow v(\varphi) = k$.

Definição 3.7: Uma valoração v satisfaz um conjunto θ de fórmulas marcadas se para toda fórmula marcada $k\psi \in \theta$, tem-se que $k\psi \in D$.

Definição 3.8: Um conjunto θ de fórmulas marcadas é satisfatível se existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$, isto é, para toda $\psi \in \theta$, $k\psi \in D$.

Agora serão mostrados dois lemas necessários para a Completude.

Lema 3.9: Se θ é um conjunto satisfatível de fórmulas marcadas, então:

- (i) se uma fórmula do tipo A pertence a θ , então $\theta \cup \{k_1\alpha_1, k_2\alpha_2\}$ é satisfatível;
- (ii) se uma fórmula do tipo B pertence a θ , então $\theta \cup \{k_1\beta_1\}$ é satisfatível ou $\theta \cup \{k_2\beta_2\}$ é satisfatível;
- (iii) se uma fórmula do tipo C pertence a θ , então $\theta \cup \{k_1\gamma_1\}$ é satisfatível, ou $\theta \cup \{k_2\gamma_2\}$ é satisfatível, ou $\theta \cup \{k_3\gamma_3\}$ é satisfatível.

Demonstração: (i) Tomemos a fórmula de consistência do tipo A, isto é, $0\circ\varphi$. Como o conjunto θ é satisfatível, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\circ\varphi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e, portanto, $v(\theta \cup \{\frac{1}{2}\varphi\}) \subseteq D$.

Agora a conjunção do tipo A, isto é, $1 \varphi \wedge \psi$. Como o conjunto θ é satisfável, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ e, então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Portanto, $v(\theta \cup \{1\varphi, 1\psi\}) \subseteq D$.

Para a disjunção do tipo A temos que $0 \varphi \vee \psi$. Como o conjunto θ é satisfável, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$ e, portanto, $0 \varphi, 0 \psi \in D$. Assim, $v(\theta \cup \{0 \varphi, 0 \psi\}) \subseteq D$.

Todas as regras de negação são do tipo A.

Se temos $0 \neg\varphi$, desde que o conjunto θ é satisfável, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = 0$ e, então, $v(\varphi) = 1$ e, portanto, $v(\theta \cup \{1\varphi\}) \subseteq D$.

Quando temos $\frac{1}{2} \neg\varphi$, como θ é satisfável, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = \frac{1}{2}$ e, então, $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e, portanto, $v(\theta \cup \{\frac{1}{2} \varphi\}) \subseteq D$.

Finalmente, se temos $1 \neg\varphi$. Como o conjunto θ é satisfável, então existe uma valoração v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\neg\varphi) = 1$ donde segue que $v(\varphi) = 0$ e, portanto, $v(\theta \cup \{0\varphi\}) \subseteq D$.

(ii) Para a fórmula de consistência do tipo B, temos $1 o\varphi$. Como θ é satisfável, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$ e, então, $v(o\varphi) = 1$. Consequentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$. Contudo, se $v(\varphi) = 1$, então $v(\theta \cup \{1\varphi\}) \subseteq D$. De qualquer modo há um ramo tal que $v(\theta \cup \{k\varphi\}) \subseteq D$.

Para a conjunção do tipo B, temos $0 \varphi \wedge \psi$. Como θ é satisfável, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = 0$ e, consequentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 0$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\theta \cup \{0 \varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 0$, então $v(\theta \cup \{0 \psi\}) \subseteq D$.

Se temos uma disjunção do tipo B, isto é, $1\varphi \vee \psi$, desde que θ é satisfável, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = 1$ e, consequentemente, $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$. Se $v(\varphi) = 1$, então $v(\theta \cup \{1\varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 1$, então $v(\theta \cup \{1\psi\}) \subseteq D$.

Todas as regras de condicionais são do tipo B.

Para $0 \varphi \rightarrow \psi$, como θ é satisfável, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ e, consequentemente, $v(\psi) = 0$ e $v(\varphi) \in D$. Para $v(\psi) = 0$, segue que $v(\theta \cup \{0 \psi\}) \subseteq D$. Agora, para qualquer $k \in D$, se $v(\varphi) = k$, então $v(\theta \cup \{k\varphi\}) \subseteq D$. Logo, um dos ramos é tal que $v(\theta \cup \{0 \psi, k\varphi\}) \subseteq D$.

Para $\frac{1}{2}\varphi \rightarrow \psi$, como θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \rightarrow \psi) = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $v(\psi) = \frac{1}{2}$ e $v(\varphi) \in D$. Para $v(\psi) = \frac{1}{2}$, segue que $v(\theta \cup \{\frac{1}{2}\psi\}) \subseteq D$. Agora, para qualquer $k \in D$, se $v(\varphi) = k$, então $v(\theta \cup \{k\varphi\}) \subseteq D$. Logo, um dos ramos é tal que $v(\theta \cup \{\frac{1}{2}\psi, k\varphi\}) \subseteq D$.

Para $1\varphi \rightarrow \psi$, como θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e, conseqüentemente, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$. Se $v(\varphi) = 0$, então $v(\theta \cup \{0\varphi\}) \subseteq D$; e se $v(\psi) = 1$, então $v(\theta \cup \{1\psi\}) \subseteq D$. De qualquer modo, há um ramo tal que $v(\theta \cup \{k\varphi\}) \subseteq D$.

(iii) Para a conjunção do tipo C, temos $\frac{1}{2}\varphi \wedge \psi$. Como θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \wedge \psi) = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 1$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Como tem que valer um destes três casos, para $k_1, k_2 \in D$, segue que $v(\theta \cup \{k_1\varphi, k_2\psi\}) \subseteq D$.

Para a disjunção do tipo C, temos $\frac{1}{2}\varphi \vee \psi$. Como θ é satisfatível, então existe v tal que $v(\theta) \subseteq D$. Daí, $v(\varphi \vee \psi) = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = 0$; ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$. Como tem que valer um destes três casos, para $k_1, k_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, segue que $v(\theta \cup \{k_1\varphi, k_2\psi\}) \subseteq D$.

Em todos os casos, algum ramo do tableau é satisfatível. ■

3.3 Da dedução em tableaux para a consequência semântica

Agora podemos completar o caminho para a equivalência ente o sistema dedutivo J_3 e o sistema $T(J_3)$. Mas, para isso usaremos a consequência semântica dada pela matriz $\mathcal{M}J_3$. Mostraremos que se um tableau fecha, então há uma consequência semântica via $\mathcal{M}J_3$ para as fórmulas envolvidas no tableau.

Teorema 3.10: $\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$.

Demonstração: Provaremos pela contrapositiva, ou seja, que $\Gamma \not\models \varphi$ implica que $\Gamma \not\Vdash \varphi$.

Se $\Gamma \not\models \varphi$, então há uma valoração v tal que $v(\Gamma) \subseteq D$ e $v(\varphi) = 0$.

Seja θ_0 o conjunto das fórmulas marcadas que representam o tableau inicial para Γ tal que $v(\theta_0) \subseteq D$. Mostramos que a cada passo de expansão do tableau, sempre há um ramo θ_i tal que $v(\theta_i) \subseteq D$.

Consideremos que $v(\theta_{i-1}) \subseteq D$. Se o ramo θ_{i-1} é expandido por uma fórmula do tipo A, pelo Lema 4.10 (i), $v(\theta_i) \subseteq D$. Se o ramo θ_{i-1} é expandido por uma fórmula do tipo B, pelo Lema 4.10 (ii), um dos dois ramos gerados é tal que $v(\theta_i) \subseteq D$. Agora, se o ramo θ_{i-1} é expandido por uma fórmula do tipo C, pelo Lema 4.10 (iii), um dos três ramos gerados é tal que $v(\theta_i) \subseteq D$.

Em todos os casos, temos um ramo θ_i tal que $v(\theta_i) \subseteq D$. Assim, sempre há um ramo satisfável em θ , que é um conjunto saturado para baixo e não fechado.

Portanto, $\Gamma \not\models \varphi$. ■

4. Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos um sistema de tableaux, $T(J_3)$, para a Lógica paraconsistente J_3 , a qual foi abordada inicialmente num sistema axiomático. Para isso, introduzimos novas regras de expansão a partir da análise dos esquemas de axiomas de J_3 e apresentamos as cláusulas de fechamento do ramo do tableau.

Ressaltamos que o método de tableaux tem algumas vantagens com relação ao método hilbertiano, uma vez que o tableau é um sistema de dedutivo de fácil compreensão e manipulação. Além disso, as árvores de refutação são caracterizadas como um algoritmo, o que possibilita que o método seja implementado mais facilmente em computadores.

Após apresentarmos o nosso tableau para a J_3 , mostramos a equivalência entre o sistema axiomático da lógica J_3 e sistema de tableau que introduzimos. Assim, temos que tudo que deduzimos em J_3 também obtemos em $T(J_3)$ e todos os resultados que obtemos em $T(J_3)$ também são provados em J_3 .

5. Referências

- BOLC, L.; BOROWIK, P. *Many-valued logics: 1 theoretical foundations*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
BOZA, T. A. S.; FEITOSA, H. A. *Tableaux para uma Lógica Proposicional do Plausível*. 2010. Trabalho de Iniciação Científica

- CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E.; MARCOS, J. Logic of formal inconsistency. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd. ed., v. 14, p. 1-93, 2007.
- CARNIELLI, W. A.; MARCOS J.; AMO S. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, v. 8, p. 115-152, 2000.
- CONIGLIO, M. E.; SILVESTRINI, L. H. C. An alternative approach for quasi-truth. *Logic Journal of IGPL*, v. 22, p. 387-410, 2014.
- D'OTTAVIANO, I. M. L. The completeness and compactness of a three-valued first-order logic. *Revista Colombiana de Matemáticas*, v. XIX, n. 19, p. 77-94, 1985.
- D'OTTAVIANO, I. M. L. Definability and quantifier elimination for J_3 -theories. *Studia Logica*, v. XLVI, v. 46, n. 1, p. 37-54, 1987.
- D'OTTAVIANO, I. M. L.; da COSTA, N. C. A. Sur un problème de Jaskowski. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris (A-B)*, v. 270, p. 1349-1353, 1970.
- ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*. San Diego: Academic Press, 1972.
- EPSTEIN, R. L. *The semantic foundations of logic*. Volume 1: propositional logics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- FEITOSA, H. A.; CRUZ, G. A.; GOLZIO, A. C. J. Um novo sistema de axiomas para a lógica paraconsistente J_3 . *CQD: Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 4, p. 16-29, 2015.
- FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora, UNESP, 2005.
- FINGER, M.; MELO, A. C. V.; SILVA, F. S. C. *Lógica para computação*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
- GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, 1935.
- MALINOWSKI, G. *Many-valued logics*. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974.
- SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.