МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УДК 512.626+519.682 DOI 10.17223/20710410/60/9

О РЕШЕНИИ ОБЩЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ И ПРИЛОЖЕНИИ В ТЕОРИИ ФОРМАЛЬНЫХ ГРАММАТИК

О. И. Егорушкин, И. В. Колбасина, К. В. Сафонов

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия

E-mail: egorushkin.o@yandex.ru, kabaskina@yandex.ru, safonovkv@rambler.ru

Рассматривается общее алгебраическое уравнение и ставится задача найти его решение при помощи степенных рядов или рядов Лорана, зависящих от коэффициентов уравнения. Получено решение в виде ряда Лорана, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты формулами в «замкнутом» виде, когда число слагаемых в формуле не растёт вместе с номером коэффициента. В прикладном аспекте общее алгебраическое уравнение рассматривается как коммутативный образ соответствующего уравнения с некоммутативными символами, которое, в свою очередь, интерпретируется в теории формальных грамматик как полиномиальная грамматика. Показано, что такая грамматика не порождает формального языка (не имеет решения в виде формального степенного ряда), поскольку её коммутативный образ имеет решение в виде ряда Лорана, содержащего отрицательные степени переменных, тогда как деление в теории формальных грамматик не определено.

Ключевые слова: *общее алгебраическое уравнение, степенной ряд, ряд Лорана, коммутативный образ, полиномиальная грамматика, формальный язык.*

ON THE SOLUTION OF A GENERAL ALGEBRAIC EQUATION BY POWER SERIES AND APPLICATIONS IN THE THEORY OF FORMAL GRAMMARS

O. I. Egorushkin, I. V. Kolbasina, K. V. Safonov

Reshetnev State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

A general algebraic equation is considered, and the problem is to find its solution using power series or Laurent series depending on the coefficients of the equation. A solution is obtained in the form of a Laurent series, the coefficients of which are expressed in terms of the coefficients by formulas in a “closed” form, when the number of terms in the formula does not increase with the number of the coefficient. In the applied aspect, a general algebraic equation is considered as a commutative image of the corresponding equation with non-commutative symbols, which, in turn, is interpreted in the theory of formal grammars as a polynomial grammar. It is shown that such a grammar does not generate a formal language (it does not have a solution in the form of a formal power series), since its commutative image has a solution in the form of a Laurent series containing negative degrees of variables, while division in the theory of formal grammars is not defined.

Keywords: *general algebraic equation, power series, Laurent series, commutative image, polynomial grammar, formal language.*

Введение

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$x_n z^n + x_{n-1} z^{n-1} + \ldots + x_1 z + x_0 = 0, \tag{1}$$

которое решается относительно символа z в виде функции $z = z(x) = z(x_0, \ldots, x_n)$ от коэффициентов $x_0, \ldots, x_n$.

Конструктивное представление функции $z = z(x)$ является фундаментальной задачей математики с многовековой историей.

Как известно, после открытия формул Кардано и Феррари для решений уравнений третьей и четвёртой степени появилась надежда решать в радикалах алгебраическое уравнение произвольной степени. Прошло почти три века, прежде чем в 1824 г. Абель доказал невозможность этого, рассмотрев уравнения пятой степени [1]. Точнее, Абель доказал, что если существует формула, выражающая в радикалах корни уравнения пятой степени через его коэффициенты, то в случае действительных коэффициентов это уравнение имеет либо один действительный корень, либо пять [2]. Однако уравнение пятой степени с действительными коэффициентами может иметь три действительных и два комплексно сопряжённых корня, а значит, формулы в радикалах не существует.

После доказательства теоремы Абеля интересы математиков обратились к конструктивному представлению многозначной аналитической функции $z = z(x)$ с использованием более сложных, чем радикалы, инструментов, например степенных рядов, интегралов и специальных функций, поскольку они зачастую дают возможность осуществлять приближенные вычисления.

Так, в 1921 г. Я. Меллин предложил решать общее уравнение с помощью гипергеометрических функций, причём разложение в ряд получено на основе интегрального представления Меллина — Барнса [3]. В 1984 г. Умемура доказал разрешимость уравнения произвольной степени с помощью тэта-функций.

В принципе, получить разложение в степенной ряд или ряд Лорана неявной функции $z = z(x_0, \ldots, x_n)$, определяемой функциональным уравнением

$$F(x_0, \ldots, x_n, z) = 0,$$

не очень сложно. Как правило, такие разложения содержат оператор дифференцирования возрастающего порядка, либо коэффициенты разложения выражаются через коэффициенты исходной функции формулой с возрастающим числом слагаемых [4].

Наша цель — найти решение $z = z(x)$ общего алгебраического уравнения (1) в виде степенного ряда либо ряда Лорана, коэффициенты которого выражены формулой в «замкнутом виде»: когда число слагаемых в ней не растёт вместе с номером коэффициента, что позволяет более эффективно исследовать коэффициенты разложения.

Идея, реализуемая в настоящей работе, состоит в том, что решение $z(x)$ является алгебраической функцией от нескольких переменных — коэффициентов уравнения (1), и потому её степенной ряд является диагональю степенного ряда некоторой рациональной функции, зависящей от этих переменных и ещё одной, дополнительной, переменной [5]. Далее указанная рациональная функция будет разложена в степенной ряд, наконец, после взятия его диагонали по паре переменных будет получена искомая формула в замкнутом виде.

Поскольку разложение аналитической функции в степенной ряд или ряд Лорана в фиксированной области единственно, то коэффициенты ряда функции $z = z(x)$ не зависят от способа их получения, остаётся лишь вопрос о простоте и удобстве соответствующих формул. Заметим, что полученное в настоящей работе разложение можно извлечь в несколько ином виде из более общей функции, найденной ранее с помощью интеграла Меллина — Барнса и гипергеометрических функций [3].

Решение уравнения (1) имеет приложение в теории формальных языков и грамматик, играющей ведущую роль как в лингвистике, так и в программировании. Приложение связано с тем, что наиболее важные классы формальных грамматик можно записать в виде системы полиномиальных уравнений с некоммутативными переменными [6, 7], а именно: под полиномиальной грамматикой понимается [8, 9] система полиномиальных уравнений

$$P_j(x,z) = 0, \quad P_j(0,0) = 0, \quad j = 1,\dots,k, \tag{2}$$

которая решается относительно символов $z = (z_1,\dots,z_n)$ в виде формальных степенных рядов (ФСР), зависящих от символов $x = (x_0,\dots,x_m)$.

Символы $x_0,\dots,x_m$ называются терминальными и образуют словарь языка, а символы $z_1,\dots,z_n$ — нетерминальными и участвуют в задании его грамматических правил. Над всеми символами определена некоммутативная операция конкатенации и коммутативные операции формального сложения и умножения на числа, что позволяет рассматривать ФСР с числовыми коэффициентами.

Если система ФСР $z_1 = z_1(x),\dots,z_n = z_n(x)$ является решением системы уравнений (2), то первый ФСР $z_1(x)$ называется полиномиальным языком, порождённым полиномиальной грамматикой (2), что обусловлено особой ролью начального символа языка z_1. При этом мономы от терминальных символов интерпретируются как предложения языка, а язык $z_1(x)$ — как сумма всех «правильных» мономов (предложений) [8, 9].

В этом аспекте общее алгебраическое уравнение (1) можно рассматривать как полиномиальную грамматику, состоящую из одного уравнения, решение которого в виде ФСР $z = z(x) = z(x_0,\dots,x_n)$, если оно существует, представляет собой формальный язык.

Исследовать системы с некоммутативными символами очень трудно ввиду некоммутативности переменных и отсутствия операции деления. Трудность, естественно, сохраняется и в случае полиномиальной грамматики, состоящей из одного уравнения

$$P_1(x,z) = 0,$$

относительно одного неизвестного $z = z_1$, и даже в частном случае некоммутативного общего алгебраического уравнения

$$P_1(x,z) = x_n z^n + x_{n-1} z^{n-1} + \ldots + x_1 z + x_0 = 0.$$

И всё же при исследовании грамматики можно использовать степенные ряды (ряды Лорана) с коммутативными переменными, если перейти от грамматики к её коммутативному образу.

1. Коммутативный образ ФСР

Для ФСР, являющегося в нашем случае кратным рядом, возникает вопрос об определении частичной суммы ряда. Поскольку ряд формальный, его частичную сумму можно определять произвольным образом. Один из возможных способов состоит в том, чтобы перенумеровать члены кратного ФСР в одномерную последовательность, что естественным образом определит порядок суммирования.

Можно упорядочить члены ФСР следующим образом: сгруппировать все возможные мономы от $x_0, \ldots, x_m$ в однородные многочлены, расположенные по возрастанию степеней, затем перенумеровать мономы каждого из однородных многочленов в лексикографическом порядке в одну последовательность, переходя от многочлена меньшей степени к большей [6, 7]. При таком упорядочивании все мономы от символов $x_0, \ldots, x_m$ единственным образом записываются в виде последовательности $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$, играющей роль базиса ФСР. Теперь каждый ряд s можно однозначно записать в виде разложения по этому базису

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \langle s, u_i \rangle \; u_i, \tag{3}$$

где $\langle s, u_i \rangle$ — числовой коэффициент при мономе u_i. Можно также ещё раз перенумеровать члены ФСР, пропуская мономы с нулевыми коэффициентами.

Поставим в соответствие ФСР (3) его коммутативный образ $\mathrm{ci}(s)$ — степенной ряд, который получается из s в предположении, что символы $x_0, \ldots, x_m$ (равно как и $z_1, \ldots, z_n$) обозначают коммутативные переменные, принимающие значения из поля комплексных чисел. При этом гомоморфизм, отображающий кольцо степенных рядов, задаётся отображением множества терминальных символов на множество образующих свободной коммутативной полугруппы и считается фиксированным [10].

В этом предположении любой моном u_i от символов $x_1, \ldots, x_m$ можно записать в виде $x_0^{\alpha_0} \ldots x_m^{\alpha_m}$, где $\alpha_j = \deg_{x_j}(u_i)$ — число вхождений (степень) символа x_j в этот моном. Если обозначить мультииндекс $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$, то можно записать равенство $\alpha = \deg_x(u_i)$, с учётом которого получаются следующие равенства:

$$\mathrm{ci}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle s, u_i \rangle \cdot \mathrm{ci}(u_i) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\alpha = \deg_x(u_i)} \langle s, u_i \rangle \right) x^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Впервые коммутативный образ ФСР был рассмотрен и применён в работе [10], которая показала эффективность и перспективность аналитических методов в теории формальных грамматик.

2. Основной результат

Как отмечалось выше, функция $z = z(x)$ является многозначной аналитической функцией; она может иметь особенности лишь на дискриминантном множестве коммутативного многочлена $P_1(x, z)$, содержащем, в частности, гиперплоскость $\{x_n = 0\}$.

Вблизи точки $x = 0$, $z = 0$ может быть несколько ветвей решения уравнения (1). Рассмотрим ту ветвь $z = z(x)$ решения, которая при $x_1 \neq 0$ аналитична в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ и, кроме того, для которой выполнено равенство $z(0, x_1, \ldots, x_n) = 0$; по теореме о неявной функции такая ветвь существует и единственна. Имеет место следующая

Теорема 1. Для указанной ветви решения общего алгебраического уравнения (1) имеет место разложение в ряд Лорана

$$\begin{gathered}z(x)=\sum_{k_2,\ldots,k_n\geqslant 0}(-1)^{2k_2+\ldots+nk_n+1}\frac{(2k_2+\ldots+nk_n)!}{(k_2+\ldots+(n-1)k_n+1)!\;k_2!\ldots k_n!}\times\\ \times x_0^{k_2+\ldots+(n-1)k_n+1}x_1^{-2k_2-\ldots-nk_n-1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},\end{gathered}\tag{4}$$

который сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{|x_k|\leqslant\rho,\ k\neq 1,\ |x_1|\geqslant 1\}$, где число ρ достаточно мало.

Ряд Лорана (4) содержит мономы с отрицательными степенями переменной x_1, при этом решения в виде степенного ряда не существует, поскольку ряд Лорана получается заменой переменных из единственного решения уравнения (6). Отсюда следует, что решить соответствующее некоммутативное уравнение в виде ФСР также невозможно [6, 7]. Получаем следствие теоремы 1.

Следствие 1. Формальная грамматика, состоящая из одного уравнения с некоммутативными символами

$$x_nz^n+x_{n-1}z^{n-1}+\ldots+x_1z+x_0=0,$$

не порождает формального языка, поскольку не имеет решения в виде ФСР.

Для сравнения заметим, что грамматика (уравнение с некоммутативнными символами)

$$x_nz^n+\ldots+x_2z^2+z+x_0=0$$

порождает формальный язык (имеет решение в виде ФСР), который можно получить методом последовательных приближений:

$$z^{(k+1)}=-x_n(z^{(k)})^n-\ldots-x_2(z^{(k)})^2-x_0;\quad k=0,1,2,\ldots;\quad z^{(0)}=0.$$

Доказательство теоремы 1. В уравнении (1) сделаем мономиальную замену переменных

$$x_1=x_1,\ x_k=x_1x_k,\ k\neq 1,\tag{5}$$

тогда после сокращения на x_1 получим уравнение

$$P_1(x[1],z)=x_nz^n+\ldots+x_2z^2+z+x_0=0,\tag{6}$$

где $x[1]=(x_0,1,x_2,\ldots,x_n)$. Рассмотрим ветвь решения уравнения (6), для которой $z(0,1,x_2,\ldots,x_n)=0$. При этом выполнены условия теоремы о неявной функции

$$P_1(0,0)=0,\qquad\frac{\partial P_1(0,0)}{\partial z}=1,$$

и потому в окрестности точки $x[1]=(0,1,0,\ldots,0)$ решение аналитическое и единственное. Следовательно, функция $z(x[1])$ раскладывается в степенной ряд

$$z(x[1])=\sum b_{\alpha[1]}x[1]^{\alpha[1]},$$

где $\alpha[1]=(\alpha_0,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. Заметим также, что, удовлетворяя полиномиальному уравнению (6), она является алгебраической функцией.

Теперь можно утверждать [5], что, в силу алгебраичности функции $z(x[1])$, её степенной ряд является диагональю степенного ряда рациональной функции

$$R(x[1],y)=\left.\frac{z^2P'_{1z}(x[1],z)}{P_1(x[1],z)}\right|_{\substack{z=y\\ x_0=x_0y}}$$

по паре переменных $x_0,\ y$, что будем записывать так:

$$z(x[1])=\Delta_{x_0,y}(R(x[1],y)).$$

Итак, для того чтобы получить ряд для искомой ветви $z(x)$, следует: 1) разложить в ряд функцию $R(x[1],z)$; 2) сделать в этом ряде мономиальную замену переменных $z=y$, $x_0=x_0y$; 3) взять диагональ этого ряда по x_0 и y, т. е. выбрать те слагаемые, степень которых по x_0 равна степени по y, и заменить в них моном $(x_0y)^k$ на x_0^k. Эти действия выполнены ниже.

1. Для получения разложения функции R заметим, что

$$\frac{z^2P'_{1z}(x[1],z)}{P(x[1],z)}=z^2\left[\ln P_1(x[1],z)\right]'_z.$$

Далее, используя разложение логарифма в ряд Маклорена и формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{gathered}\ln P_1(x[1],z)=\ln(z(1+x_nz^{n-1}+\ldots+x_2z+x_0z^{-1})=\\ =\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x_nz^{n-1}+\ldots+x_2z+x_0z^{-1})^k=\\ =\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_n=k}}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{k!}{k_1!\ldots k_n!}(x_nz^{n-1})^{k_n}\ldots(x_2z)^{k_2}(x_0z^{-1})^{k_1}=\\ =\ln z+\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_n\geqslant 1}}(-1)^{k_1+\ldots+k_n-1}\frac{(k_1+\ldots+k_n-1)!}{k_1!\ldots k_n!}x_0^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}z^{-k_1+k_2+\ldots+(n-1)k_n}.\end{gathered}$$

Данные ряды сходятся абсолютно и равномерно, если $|x_nz^{n-1}+\ldots+x_2z+x_0z^{-1}|<1$, что, в свою очередь, имеет место, если $0<r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$, $|x_k|\leqslant\rho$, $k\neq 1$, где число $r>0$ произвольное, а число ρ достаточно малое.

Почленно дифференцируя последний ряд, получим разложение для функции $z^2[\ln P_1(x[1],z)]'_z$:

$$\begin{gathered}z+\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_n\geqslant 1}}(-1)^{k_1+\ldots+k_n-1}\frac{(k_1+\ldots+k_n-1)!}{k_1!\ldots k_n!}(-k_1+k_2+\ldots+(n-1)k_n)\times\\ \times x_0^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}z^{-k_1+k_2+\ldots+(n-1)k_n+1}.\end{gathered}$$

2. Заменив z на y, а x_0 на x_0y, получим ряд

$$\begin{gathered}R(x[1],y)=y+\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_n\geqslant 1}}(-1)^{k_1+\ldots+k_n-1}\ \frac{(k_1+\ldots+k_n-1)!}{k_1!\ldots k_n!}\times\\ \times(-k_1+k_2+\ldots+(n-1)k_n)x_0^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}y^{k_2+\ldots+(n-1)k_n+1}.\end{gathered}$$

3. Выбирая диагональные члены ряда условием

$$k_1 = k_2 + \ldots + (n-1)k_n + 1$$

и заменяя $x_0 y$ на x_0, получаем степенной ряд

$$z(x[1]) = \sum_{\substack{k_2,\ldots,k_n \geqslant 0 \\ k_2+\ldots+k_n\geqslant 0}} (-1)^{2k_2+\ldots+nk_n} \frac{(2k_2+\ldots+nk_n)!}{(k_2+\ldots+(n-1)k_n+1)!\ k_2!\ldots k_n!} \times$$
$$\times(-1)x_0^{k_2+\ldots+(n-1)k_n+1} x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n} =$$
$$= \sum_{k_2,\ldots,k_n\geqslant 0} (-1)^{2k_2+\ldots+nk_n+1} \frac{(2k_2+\ldots+nk_n)!}{(k_2+\ldots+(n-1)k_n+1)!\ k_2!\ldots k_n!} \times$$
$$\times x_0^{k_2+\ldots+(n-1)k_n+1} x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}.$$

Наконец, сделав в последнем степенном ряде замену переменных

$$x_1 = x_1,\ x_k = x_k/x_1,\ k \neq 1,$$

обратную к замене переменных (5), получим ряд Лорана (4), который сходится абсолютно и равномерно, если $|x_k/x_1| \leqslant \rho$, $k \neq 1$, что выполняется при $|x_1| \geqslant 1$. ■

Пример 1. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x_2 z^2 + x_1 z + x_0 = 0$$

и его решение $z = z(x)$, такое, что $z(0, x_1, x_2) = 0$ при $|x_1| \neq 0$. Это решение равно

$$z(x) = \frac{-x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4x_0x_2}}{2x_2} = -\frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_1}{2x_2}\sqrt{1 - \frac{4x_0x_2}{x_1^2}}\ .$$

С одной стороны, используя разложение степенной функции в ряд Маклорена, получаем

$$z(x) = -\frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_1}{2x_2}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{4x_0x_2}{x_1^2} + \frac{1/2(1/2-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{4x_0x_2}{x_1^2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{4x_0x_2}{x_1^2}\right)^3 + \ldots\right) = -\frac{x_0}{x_1} - \frac{x_0^2x_2}{x_1^3} - 2\,\frac{x_0^3x_2^2}{x_1^5} - 5\,\frac{x_0^4x_2^3}{x_1^7} - \ldots$$

С другой стороны, тот же результат даёт ряд (4), который при $n = 2$ имеет вид

$$z(x) = \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{2k_2+1} \frac{(2k_2)!}{(k_2+1)!\ k_2!}\ x_0^{k_2+1} x_1^{-2k_2-1} x_2^{k_2} = -\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(2k_2)!}{(k_2+1)!\ k_2!}\ x_0^{k_2+1} x_1^{-2k_2-1} x_2^{k_2} =$$
$$= -\frac{x_0}{x_1} - \frac{x_0^2x_2}{x_1^3} - 2\,\frac{x_0^3x_2^2}{x_1^5} - 5\,\frac{x_0^4x_2^3}{x_1^7} - \ldots$$

В заключение заметим, что наличие у коммутативного образа полиномиальной грамматики (2) решения в виде рядов Лорана ещё не говорит о том, что грамматика не имеет решения в виде ФСР и не порождает формального языка, поскольку её коммутативный образ может иметь и другие решения, в том числе в виде степенного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abel N. H.* Oeuvres completes, t. 1. Christiania: Grondahl, 1839. 294 p.
2. *Тихомиров В.* Абель и его великая теорема // Квант. 2003. № 1. С. 11–15.
3. *Семушева А. Ю., Цих А. К.* Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений / Сб. «Комплексный анализ и дифференциальные операторы (К 150-летию С. В. Ковалевской)». Красноярск: Красноярский гос. ун–т, 2000. С. 122–134.
4. *Aizenberg L. A. and Yuzhakov A. P.* Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis. Providence: AMS, 1983. 283 p.
5. *Safonov K. V.* On power series of algebraic and rational functions in C^n // J. Math. Analys. Appl. 2000. V. 243. P. 261–277.
6. *Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., and Safonov K. V.* On solvability of systems of symbolic polynomial equations // Журнал СФУ. Математика и физика. 2016. Т. 9. № 2. С. 166–172.
7. *Егорушкин О. И., Колбасина И. В., Сафонов К. В.* О применении многомерного комплексного анализа в теории формальных языков и грамматик // Прикладная дискретная математика. 2017. № 37. С. 76–89.
8. *Salomaa A. and Soitolla M.* Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. N.Y.: Springer Verlag, 1978. 167 p.
9. *Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л.* Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1973. 319 с.
10. *Семёнов А. Л.* Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // Доклады АН СССР. 1973. Т. 212. С. 50–52.

REFERENCES

1. *Abel N. H.* Oeuvres completes, t. 1. Christiania, Grondahl, 1839. 294 p.
2. *Tikhomirov V.* Abel’ i ego velikaya teorema [Abel and his great theorem]. Kvant, 2003, no. 1, pp. 11–15. (in Russian)
3. *Semusheva A. Yu. and Tsikh A. K.* Prodolzhenie issledovaniy Mellina o reshenii algebraicheskikh uravneniy [Continuation of Mellin’s research on the solving of algebraic equations]. Kompleksnyy Analiz i Differentsial’nye Operatory. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State University, 2000, pp. 122–134. (in Russian)
4. *Aizenberg L. A. and Yuzhakov A. P.* Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis. Providence, AMS, 1983. 283 p.
5. *Safonov K. V.* On power series of algebraic and rational functions in C^n. J. Math. Analys. Appl., 2000, vol. 243, pp. 261–277.
6. *Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., and Safonov K. V.* On solvability of systems of symbolic polynomial equations. J. SFU, Mathematics and Physics, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 166–172.
7. *Egorushkin O. I., Kolbasina I. V., and Safonov K. V.* O primenenii mnogomernogo kompleksnogo analiza v teorii formal’nyh yazykov i grammatik [On the application of multidimensional complex analysis in the theory of formal languages and grammars]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2017, no. 37, pp. 76—89. (in Russian)
8. *Salomaa A. and Soitolla M.* Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series. N.Y., Springer Verlag, 1978. 167 p.
9. *Glushkov V. M., Tseytlin G. E., and Yushchenko E. L.* Algebra. Yazyki. Programmirovanie [Algebra. Languages. Programming]. Kiev, Naukova Dumka, 1973. 319 p. (in Russian)
10. *Semenov A. L.* Algoritmicheskie problemy dlya stepennykh ryadov i kontekstno-svobodnykh grammatik [Algorithmic problems for power series and context-free grammars]. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1973, vol. 212, pp. 50–52. (in Russian)