

Mona Hirsimäki

DELAUNAYN KOLMIOINNISTA JA TODISTAJISTA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Toukokuu 2023

Tiivistelmä

Mona Hirsimäki: Delaunayn kolmioinnista ja todistajista
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2023

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä Delaunayn kolmioinnin ja sen määrittelyssä käytettävien heikkojen ja vahvojen todistajien käyttäytymistä eri metrisissä avaruuksissa. Delaunayn kolmioinnin ohella lopuksi tarkastellaan kolmea muuta simpleksistä kompleksia. Tutkielman päälähteinä käytetään de Silvan artikkeleita *A weak definition of Delaunay triangulation* ja *A weak characterisation of the Delaunay triangulation*.

Tutkielma kuuluu matematiikassa topologian osa-alueeseen. Lukijalta oletetaankin metristen ja topologisten avaruuksien sekä erityisesti simpleksisten kompleksien perustietojen hallitsemista, vaikka keskeisimpiä käsitteitä esitetään tutkielman alussa. Ensimmäinen tärkeä tulos on Geometrisen realisaation lause, joka helpottaa geometrisen realisaation määrittelyn ymmärtämistä.

Tutkielman keskeisimmät tulokset liittyvät simpleksin vahvan todistajan ja sen alisimpleksien heikkojen todistajien suhteeseen. Saadaan heikkojen todistajien lause, jonka mukaan simpleksillä on vahva todistaja, jos ja vain jos sen jokaisella alisimpleksillä on heikko todistaja. Tulos todistetaan niin euklidisessa avaruudessa kuin yleisessä tapauksessa sekä, kun todistajat määritellään sisältävän virhetoleranssin ϵ . Heikkojen todistajien lauseiden perusteella heikko ja vahva Delaunayn kolmiointi ovat sama simpleksinen kompleksin sekä euklidisessa avaruudessa että tietyin lisäehdoin topologisessa avaruudessa, kun simpleksin vahva todistaja kuuluu topologisen avaruuden konvekseen osajoukkoon.

Esitetään myös, miten todistajat käyttäytyvät euklidisen pallon tapauksessa. Saadaan heikkojen todistajien lausetta muistuttava tulos, jonka mukaan k -simpleksillä on vahva todistaja, jos ja vain jos sen jokaisella alisimpleksillä on heikko todistaja. Tällöin oletetaan, että k -simpleksin kärjet kuuluvat n -ulotteisen pallon yleiseen äärelliseen osajoukkoon ja että $k \leq n$. Lisäksi esitetään vankan todistajan määrittely, jonka nojalla k -simpleksillä on vahva todistaja, jos ja vain jos sen jokaisella alisimpleksillä on vankka todistaja. Tällöin oletetaan, että k -simpleksin kärjet kuuluvat n -ulotteisen euklidisen pallon osajoukkoon ja että $k \leq n$.

Viimeiseksi esitetään kolme simpleksistä kompleksia, Čechin, Vietorisin-Ripsin ja alfa-kompleksi. Kompleksien määrittelyissä on kyse pisteiden välisistä etäisyyksistä, kuten on todistajien määrittelyissä, sekä joukkojen leikkauksista. Keskeiseksi tulokseksi saadaan, että Vietorisin-Ripsin kompleksin parametrilla r on Čechin kompleksin parametrilla $\sqrt{2}r$ osajoukko. Tulosta kutsutaan

Vietorisin-Ripsin lauseeksi. Lisäksi vertaillaan edellisten kompleksien ja Delaunayn kolmiointiin geometrisia realisaatioita.

Avainsanat: Delaunayn kolmiointi, heikot ja vahvat todistajat, simpleksinen kompleksi, geometrinen realisaatio

Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1	Johdanto	5
2	Valmistelevia tarkasteluja	7
2.1	Metrisistä avaruuksista	7
2.2	Euklidinen pallo, polku ja geodeesi	8
2.3	Simplekseistä ja simpleksisistä komplekseista	9
3	Todistajista	15
3.1	Heikko ja vahva todistaja	15
3.2	Voronoin kaavio ja Delaunayn kolmiointi	16
3.3	Heikkojen todistajien lause euklidisessa avaruudessa	21
3.4	Heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto	25
4	Likimääräiset todistajat	28
5	Euklidisen pallon tarkastelua	34
5.1	Lauseiden uudelleenmäärittelyä ja lisäehtoja	34
5.2	Heikkojen todistajien lause euklidisessa pallossa	35
6	Muita simpleksisiä komplekseja	39
6.1	Radonin ja Hellyn lauseet	39
6.2	Čechin kompleksi ja Vietorisin-Ripsin kompleksi	40
6.3	Alfa-kompleksi	43
6.4	Esimerkki kompleksien geometrisista realisaatioista	45
	Lähteet	49

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Delaunayn kolmiointia ja sen määrittelemiseen tarvittavia heikkoja ja vahvoja todistajia eri metrisissä avaruuksissa. Erityisesti todistetaan heikkojen todistajien lause eri avaruuksissa. Lisäksi luvussa 6 tarkastellaan Delaunayn kolmioinnin lisäksi kolmea muuta abstraktia simpleksistä kompleksia, joiden määritelmässä keskeistä on pisteiden väliset etäisyydet ja joukkojen leikkaukset.

Luvussa 2 käydään läpi tutkielman ymmärtämisen kannalta keskeisimpiä perusasioita metrisistä avaruuksista ja simpleksisistä komplekseista. Todistetaan myös Geometrisen realisaation lause, jonka mukaan jokaisella abstraktilla simpleksisellä kompleksilla, jonka dimensio on n , on geometrinen realisaatio euklidisessa avaruudessa, jonka dimensio on $2n + 1$. Lukijalta edellytetään lisäksi erityisesti erilaisten avaruuksien, kuten euklidisten ja topologisten avaruuksien, ja erilaisten geometrioiden, kuten euklidisten ja epäeuklidisten geometrioiden, perustietojen hallitsemista.

Luvun 3 alaluvuissa 3.1 ja 3.2 esitetään heikkojen ja vahvojen todistajien määritelmät sekä Voronoin kaavion ja useat Delaunayn kolmioinnin määritelmät. Alaluvussa 3.3 todistetaan heikkojen todistajien lause euklidisessa avaruudessa, minkä mukaan simpleksillä on vahva todistaja, jos ja vain jos jokaisella simpleksin alisimpleksillä on heikko todistaja. Tästä seuraa, että heikko ja vahva Delaunayn kolmiointi ovat sama abstrakti simpleksinen kompleksieuklidisessa avaruudessa. Heikko ja vahva Delaunayn kolmiointi ovat sama kompleksieuklidisessä avaruudessa. Heikko ja vahva Delaunayn kolmiointi ovat sama kompleksieuklidisessä avaruudessa, kun simpleksin vahva todistaja kuuluu joukon \mathbb{R}^n konvekseen osajoukkoon. Vastaavasti alaluvussa 3.4 todistetaan heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto, kun euklidisestä avaruudesta siirrytään yleisiin epäeuklidisiin geometrioihin. Tällöin ympäröivä avaruus on topologinen ja simpleksin kärjet kuuluvat sen osajoukkoon. Saadaan alalukua 3.3 vastaavat tulokset.

Luvussa 4 esitetään likimääräisten heikkojen ja vahvojen todistajien määritelmät, joissa esiintyy virhetoleranssi ϵ . Virhetoleranssin nojalla tarkkaa likimääräisten todistajien määrittelemiseen käytettävää metriikkaa ei tarvitse tietää, mikä on sovellusten kannalta hyödyllistä. Luvun päätuloksena todistetaan likimääräisten heikkojen todistajien lause, joka vastaa aiemmin todistettua heikkojen todistajien lausetta yleisessä tapauksessa, mutta todistajat ovat tässä ϵ -todistajia.

Luvussa 5 tarkastellaan euklidisen pallon tapauksia, kun todistajat määritellään sisäisen geodeettisen metriikan perusteella. Alaluvussa 5.1 käsitellään aiemmin esitettyjen lauseiden käyttäytymistä euklidisen pallon tapauksessa. Erityisesti kuitenkin todistetaan, että k -simpleksillä, jonka kärjet kuuluvat n -ulotteisen pallon yleiseen äärelliseen osajoukkoon, on vahva todistaja, jos ja vain jos k -simpleksin jokaisella alisimpleksillä on heikko todistaja. Lisäksi on oletettava, että $k \leq n$. Tämä tulos esitetään alaluvussa 5.2. Lisäksi alaluvussa 5.2 esitetään vankan todistajan määritelmä. Määritelmän nojalla todistetaan

lause, jonka mukaan jokaisella k -simpleksin alisimpleksillä on vankka todistaja, jos ja vain jos k -simpleksillä on vahva todistaja, kun simpleksien kärjet kuuluvat euklidisen pallon osajoukkoon A ja kun $k \leq n$. Jos joukko A on yleinen, niin heikoista todistajista voidaan muodostaa vankkoja todistajia.

Luvussa 6 käsitellään kolmea abstraktia simpleksistä kompleksia, joiden määritelmässä keskeistä on pisteiden väliset etäisyydet, kuten on todistajien määritelmässä, ja joukkojen leikkaukset. Alaluvussa 6.1 todistetaan ensin Radonin ja Hellyn lauseet. Hellyn lauseen mukaan kaikilla äärellisen euklidisen avaruuden konveksien osajoukkojen kokoelman joukoilla, joita on $n+1$, on epätyhjä yhteinen leikkaus, jos ja vain jos kaikilla kokoelman joukoilla on yhteinen epätyhjä leikkaus. Alaluvussa 6.2 esitetään Čechin ja Vietorisin-Ripsin kompleksit, jotka ovat kooltaan Delaunayn kompleksia suurempia. Keskeinen alaluvun tulos on Vietorisin-Ripsin lause, jonka mukaan Vietorisin-Ripsin kompleksi parametrilla r on Čechin kompleksin parametrilla $\sqrt{2}r$ osajoukko. Alaluvussa 6.3 esitetään Delaunayn kompleksin alikompleksi, alfa-kompleksi, jonka määritelmässä keskeistä on, että suljetun euklidisen kuulan säteelle annetaan tietty arvo. Viimeisessä alaluvussa 6.4 vertaillaan tutkielman neljän abstraktin simpleksisen kompleksin geometrisia realisaatioita.

Tutkielmassa esitetään lisäksi runsaasti esimerkkejä ja havainnollistavia kuvia sekä todistettujen lauseiden käytöstä että määritelmien sisällön ymmärtämisen helpottamiseksi. Tutkielman päälähdeteoksina käytetään de Silvan artikkeleita *A weak definition of Delaunay triangulation* ja *A weak characterisation of the Delaunay triangulation*. Muut käytettävät lähde- teokset erityisesti luvuis- sa 2 ja 6 ovat Deyn ja Wangin kirja *Computational Topology for Data Analysis*, Edelsbrunnerin ja Harerin kirja *Computational Topology: An Introduction*, Kankaanrinnan luentomoniste *Introduction to Algebraic Topology*, Mordukhovichin ja Namin kirja *An Easy Path to Convex Analysis and Applications* sekä Yanin kirja *Introduction to Topology*.

2 Valmistelevia tarkasteluja

Luvussa 2 esitetään tutkielman käsittelyssä tarvittavia apuneuvoja erityisesti metrisistä avaruuksista ja simpleksisistä komplekseista.

2.1 Metrisistä avaruuksista

Esitetään tässä alaluvussa viisi keskeistä määritelmää: metrisen avaruuden, euklidisen etäisyyden, joukon halkaisijan sekä avoimen ja suljetun metrisen kuulan määritelmät.

Määritelmä 2.1. [3, s. 6–7], [7, s. 25] Olkoon X joukko ja olkoon $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ etäisyysfunktio, joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet kaikilla $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) \geq 0$, ja $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$ (positiivisuus),
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisyys),
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö).

Tällöin pari (X, d) on *metrinen avaruus*.

Määritelmä 2.2. [7, s. 25] Olkoot pisteet $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pisteiden x ja y välinen *euklidinen etäisyys* avaruudessa \mathbb{R}^n on

$$d(x, y) = d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|.$$

Huomautus. Tutkielmassa merkinnällä $|x - y|$ tarkoitetaan normia.

Määritelmä 2.3. [4, s. 66] Euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n osajoukon A *halkaisija* on

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\},$$

missä \sup = supremum ja d on avaruuden \mathbb{R}^n euklidinen metriikka.

Määritelmä 2.4. [7, s. 30] Olkoon pari (X, d) metrinen avaruus, $a \in X$ ja $r > 0$. *Avoim metrinen kuula* on joukon X osajoukko

$$B_d(a, r) = \{b \in X \mid d(a, b) < r\},$$

missä a on kuulan keskipiste ja r on kuulan säde.

Määritelmä 2.5. [7, s. 44] Olkoon pari (X, d) metrinen avaruus, $a \in X$ ja $r > 0$. *Suljettu metrinen kuula* on joukon X osajoukko

$$\overline{B}_d(a, r) = \{b \in X \mid d(a, b) \leq r\},$$

missä a on kuulan keskipiste ja r on kuulan säde.

Huomautus. Jos määritelmien 2.4 ja 2.5 joukko X on avaruus \mathbb{R}^n ja d on euklidinen etäisyys avaruudessa \mathbb{R}^n , niin avointa metristä kuulaa kutsutaan *avoi-meksi euklidiseksi kuulaksi* ja vastaavasti suljettua metristä kuulaa kutsutaan *suljetuksi euklidiseksi kuulaksi*.

2.2 Euklidinen pallo, polku ja geodeesi

Määritelmä 2.6. [3, s. 9] Olkoon (\mathbb{R}^n, d) euklidinen avaruus ja olkoon $\overline{B}_d(a, r)$ suljettu euklidinen kuula. Suljetun euklidisen kuulan $\overline{B}_d(a, r)$ reunapisteet muodostavat *euklidisen $(n - 1)$ -ulotteisen pallon*

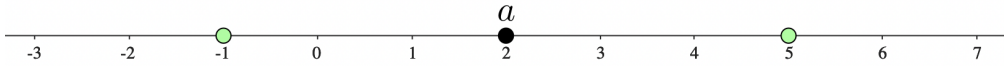
$$S(a, r) = S^{n-1} = \{b \in \mathbb{R}^n \mid d(a, b) = r\}.$$

Euklidinen $(n - 1)$ -ulotteinen pallo on siis $(n - 1)$ -ulotteinen pistejoukko, joka on upotettu n -ulotteiseen euklidiseen avaruuteen.

Huomautus. Jos edellisessä määritelmässä 2.6 säde $r = 1$, niin euklidista $(n - 1)$ -ulotteista palloa sanotaan *euklidiseksi $(n - 1)$ -ulotteiseksi yksikköpalloksi*.

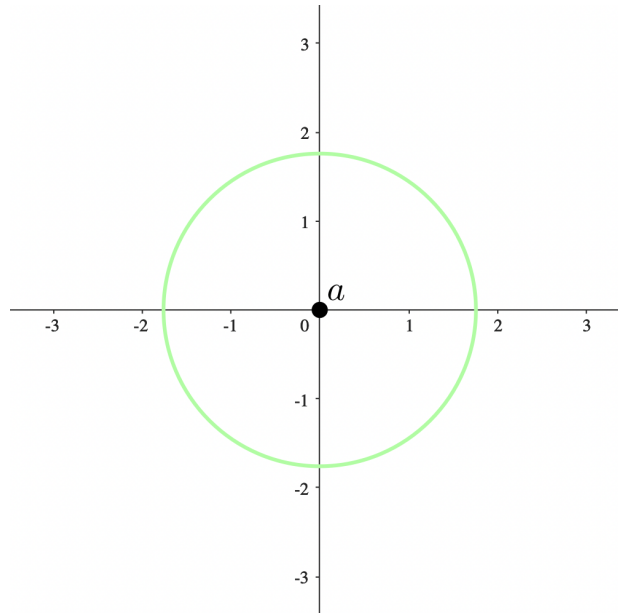
Esimerkki 2.1. Esitetään edellisen määritelmän mukaiset euklidiset n -ulotteiset pallot vihreällä värillä seuraavissa kuvissa, kun $n = 0, 1$ ja 2 . Tässä metriikka on euklidinen etäisyys.

Kuvassa 2.1 on esitetty 0-ulotteinen pallo S^0 avaruudessa \mathbb{R}^1 , missä piste $a = 2 \in \mathbb{R}^1$ on pallon S^0 keskipiste ja säde $r = 3 > 0$.



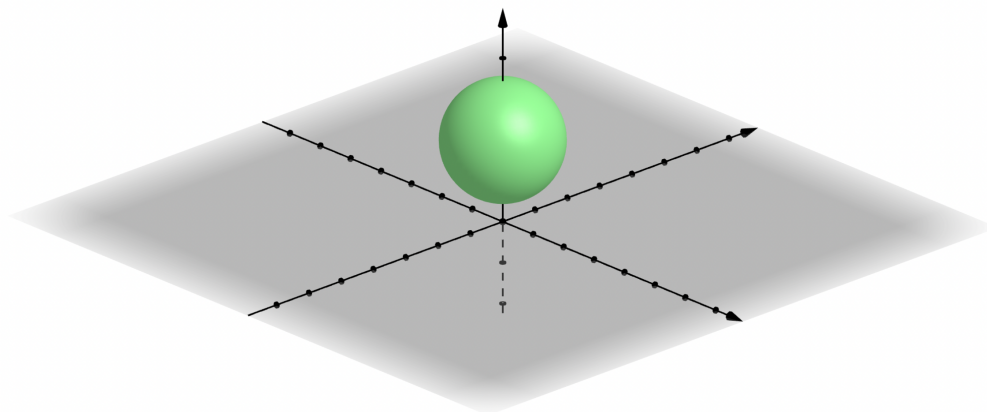
Kuva 2.1. Euklidinen 0-ulotteinen pallo S^0 avaruudessa \mathbb{R}^1 .

Kuvassa 2.2 on esitetty ympyrä eli 1-ulotteinen pallo S^1 avaruudessa \mathbb{R}^2 , missä piste $a = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ on pallon S^1 keskipiste ja säde $r > 0$.



Kuva 2.2. Euklidinen 1-ulotteinen pallo S^1 avaruudessa \mathbb{R}^2 .

Kuvassa 2.3 on esitetty ”maallikon tuntema” pallo eli 2-ulotteinen pallo S^2 avaruudessa \mathbb{R}^3 . Tärkeä huomio 2-ulotteisesta pallosta on, että sen sisus ei kuulu palloon mukaan.



Kuva 2.3. Euklidinen 2-ulotteinen pallo S^2 avaruudessa \mathbb{R}^3 .

Määritelmä 2.7. [7, s. 139] Olkoon X topologinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$. Polku pisteestä x pisteeseen y on jatkuva kuvaus

$$f: [0, 1] \rightarrow X,$$

jolle pätee $f(0) = x$ ja $f(1) = y$.

Määritelmä 2.8. [1, s. 4], [3, s. 9] Olkoon X avaruus ja olkoot $a, b \in X$. Geodeettinen etäisyys eli *geodeesi* on lyhyin pisteiden a ja b välinen polku. Geodeesia kutsutaan myös pisteiden a ja b väliseksi lyhyimmäksi mahdolliseksi käyräksi, kaareksi tai viivaksi. Polkua pisteiden a ja b välillä merkitään joukolla $[a, b]$.

2.3 Simplekseistä ja simpleksisistä komplekseista

Esitetään tämän alaluvun alussa simpleksin ja simpleksisen kompleksin määrittelyn esittämiseksi tarvittavat määritelmät affiini kombinaatio ja affiini verho sekä konvekssi kombinaatio ja konvekssi verho. Erityisesti ensin käsitellään geometrisen simpleksin ja simpleksisen kompleksin määrittelmät, ja myöhemmin käsitellään abstraktin simpleksin ja simpleksisen kompleksin määrittelmät. Lisäksi alaluvussa esitetään joitakin simpleksihin ja simpleksisiin komplekseihin liittyviä hyödyllisiä käsitteitä, kuten k' -sivu, dimensio ja geometrinen realisatio, josta todistetaan Geometrisen realisatation lause.

Määritelmä 2.9. [4, s. 62] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$. Piste $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i$, kun $\lambda_i \in \mathbb{R}$, on pisteiden p_0, \dots, p_k *affiini kombinaatio*, jos $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$.

Määritelmä 2.10. [4, s. 62] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$. Joukon $\{p_0, \dots, p_k\}$ *affiini verho* on pisteiden p_0, \dots, p_k affiinien kombinaatioiden muodostama joukko.

Määritelmä 2.11. [4, s. 62] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon piste $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i$, kun $\lambda_i \in \mathbb{R}$, pisteiden p_0, \dots, p_k affiini kombinaatio, missä $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Affiini kombinaatio $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i$ on *konvekssi kombinaatio*, jos jokaisella λ_i pätee $\lambda_i \geq 0$.

Määritelmä 2.12. [4, s. 24] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$. Joukon $\{p_0, \dots, p_k\}$ *konvekssi verho* on pisteiden p_0, \dots, p_k konveksien kombinaatioiden muodostama joukko. Käytetään joukon $\{p_0, \dots, p_k\}$ konveksista verhosta merkintää $[p_0, \dots, p_k]$.

Määritelmä 2.13. [7, s. 117–118] Olkoon joukko $\{p_0, \dots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Joukko $\{p_0, \dots, p_k\}$ on *affiinisti riippumaton*, jos joukko $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0\}$ on lineaarisesti riippumaton avaruudessa \mathbb{R}^n .

Määritelmä 2.14. [3, s. 24] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon joukko $\{p_0, \dots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ affiinisti riippumaton. Joukon $\{p_0, \dots, p_k\}$ konvekssi verho $[p_0, \dots, p_k]$ on *geometrinen k -simpleksi*, missä pisteet p_0, \dots, p_k ovat k -simpleksin kärjet.

Määritelmä 2.15. [3, s. 24] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ simpleksin σ kärjet. Simpleksin σ k' -sivu on kärkijoukon $\{p_0, \dots, p_k\}$ epätyhjän affiinisti riippumattoman osajoukon konvekssi verho eli k' -simpleksi, kun $0 \leq k' \leq k$.

Määritelmä 2.16. [4, s. 65] Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon joukko $\{p_0, \dots, p_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ affiinisti riippumaton. Tällöin k -simpleksin $[p_0, \dots, p_k]$ *barysentr* eli *painopiste* on piste x , joka on k -simpleksin kärkipisteiden keskiarvo, eli

$$x = \frac{1}{k+1} \cdot (p_0 + \dots + p_k).$$

Määritelmä 2.17. [3, s. 24] Avaruuden \mathbb{R}^n äärellinen *geometrinen simpleksinen kompleksi* on äärellinen kokoelma K avaruuden \mathbb{R}^n simpleksejä, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- (i) jos $\sigma \in K$ ja σ' on simpleksin σ sivu, niin $\sigma' \in K$,
- (ii) jos $\sigma, \tau \in K$, niin joko leikkaus $\sigma \cap \tau = \emptyset$ tai leikkaus $\sigma \cap \tau$ on molempien simpleksien σ ja τ yhteinen sivu.

Määritelmä 2.18. [3, s. 24] Simpleksisen kompleksin K *dimensio* on

$$\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\},$$

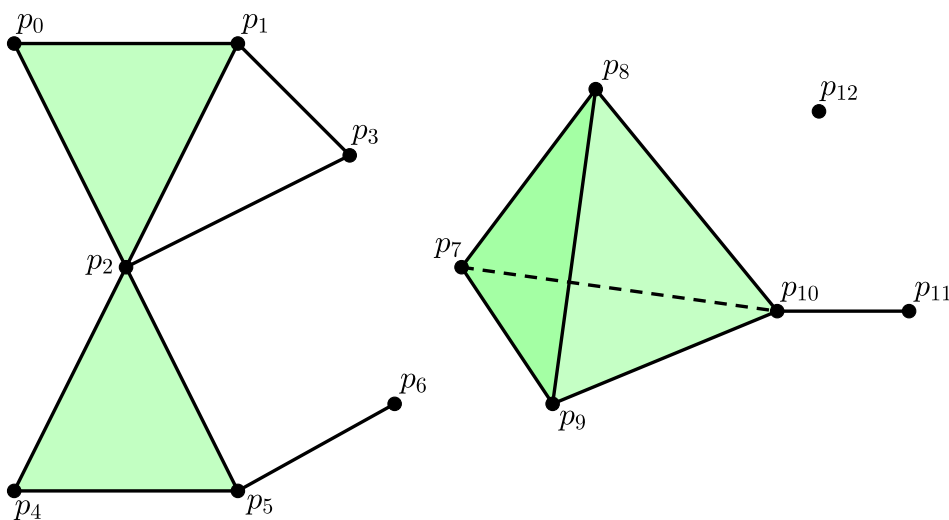
missä k -simpleksin $\sigma \in K$ *dimensio* on k .

Esitetään yksinkertainen esimerkki geometrisesta simpleksisestä kompleksista.

Esimerkki 2.2. Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_{12} \in \mathbb{R}^3$ kuvassa 2.4 olevan geometrisen simpleksisen kompleksin K kärkipisteet. Toisin sanoen, 0-simpleksit $[p_0], [p_1], [p_2], [p_3], [p_4], [p_5], [p_6], [p_7], [p_8], [p_9], [p_{10}], [p_{11}]$ ja $[p_{12}]$ ovat simpleksisen kompleksin K kärjet.

Tarkastellaan tarkemmin tetraedrin eli 3-simpleksin $[p_7, p_8, p_9, p_{10}]$ sivuja ja niiden määriä määritelmän 2.15 nojalla. Kyseisen 3-simpleksin 0-sivuja eli toisin sanoen kärkipisteitä on neljä ja ne ovat $[p_7], [p_8], [p_9]$ ja $[p_{10}]$. Puolestaan 1-sivuja on kuusi ja ne ovat $[p_7, p_8], [p_7, p_9], [p_7, p_{10}], [p_8, p_9], [p_8, p_{10}]$ ja $[p_9, p_{10}]$ sekä 2-sivuja on neljä ja ne ovat $[p_7, p_8, p_9], [p_7, p_8, p_{10}], [p_7, p_9, p_{10}]$ ja $[p_8, p_9, p_{10}]$. Lisäksi triviaalisti 3-sivuja on yksi ja se on 3-simpleksi $[p_7, p_8, p_9, p_{10}]$ itse.

Määritetään vielä geometrisen simpleksisen kompleksin K dimensio määritelmän 2.18 nojalla. Saadaan siis, että $\dim(K) = 3$.



Kuva 2.4. Simpleksinen kompleksin K .

Määritelmä 2.19. [3, s. 24] Olkoon A joukko. *Abstrakti simpleksinen kompleksin* on äärellinen kokoelma K joukon A epätyhjiä osajoukkoja, kun seuraavat ehdot pätevät:

- (i) jos $p \in A$, niin $\{p\} \in K$,
- (ii) jos $\sigma \in K$ ja $\tau \subseteq \sigma$, niin $\tau \in K$.

Abstraktin simpleksisen kompleksin K alkiota σ kutsutaan siis *abstraktiksi k -simpleksiksi*.

Huomautus. Edellisen määritelmän 2.19 simpleksisen kompleksin K kärkijoukolle A voidaan myös käyttää merkintöjä $V(K)$ ja $\text{Vert}(A)$.

Määritelmä 2.20. [4, s. 63–64] Simpleksisen kompleksin K *alikompleksi* L on simpleksinen kompleksin L , jolle pätee $L \subseteq K$. Simpleksiset kompleksit K ja L voivat olla geometrisia tai abstrakteja.

Määritelmä 2.21. [3, s. 25], [4, s. 63] Olkoon $q \geq 0$. Simpleksisen kompleksin K q -ranka $K^{(q)}$ on simpleksisen kompleksin K alikompleksi, johon kuuluvat kaikki simpleksisen kompleksin K simpleksit σ , joiden dimensio on korkeintaan q . Siis toisin sanoen

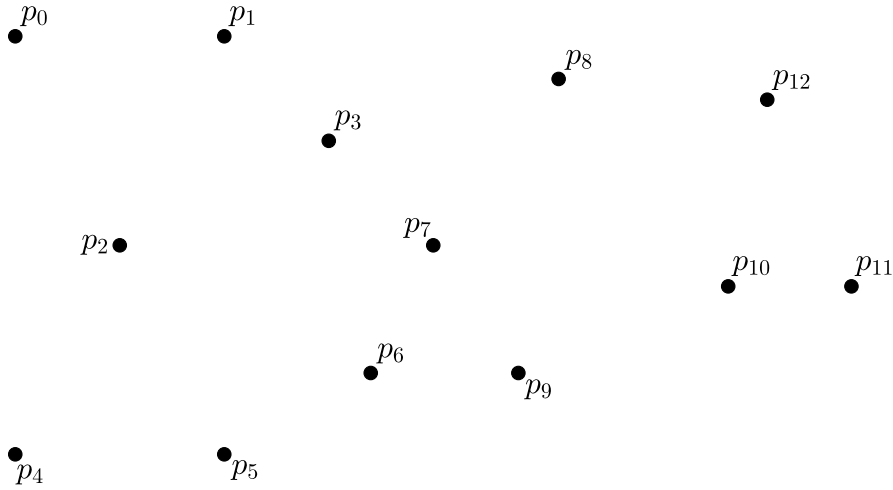
$$K^{(q)} = \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) \leq q\}.$$

Seuraava esimerkki havainnollistaa kuvien avulla määritelmän 2.21 sisältöä.

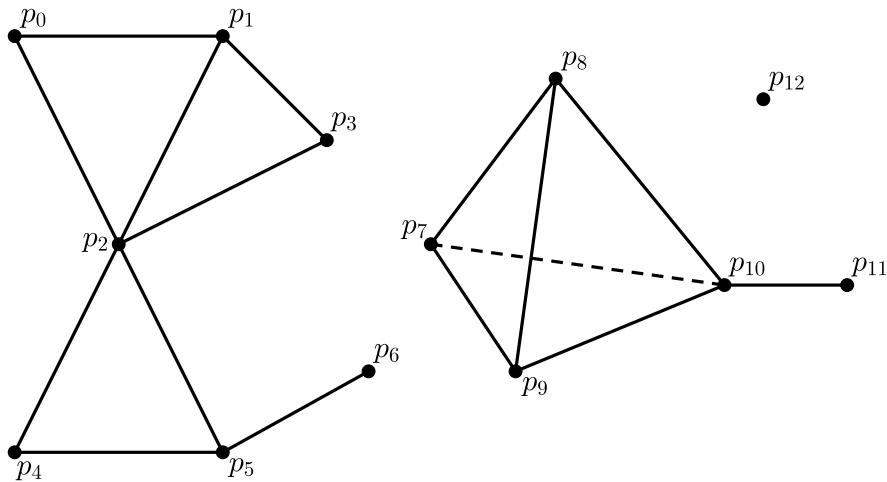
Esimerkki 2.3. Jatketaan esimerkin 2.2 tarkastelua.

Kuvassa 2.5 on simpleksisen kompleksin K 0-ranka $K^{(0)}$ ja kuvassa 2.6 on simpleksisen kompleksin K 1-ranka $K^{(1)}$.

Puolestaan 2-ranka $K^{(2)}$ ja 3-ranka $K^{(3)}$ on esitetty kuvassa 2.4. On kuitenkin huomioitava, että vaikka $K^{(2)}$ ja $K^{(3)}$ esitetään samana kuvana, niin 2-rangassa tetraedrin eli 3-simpleksin $[p_7, p_8, p_9, p_{10}]$ sisus ei on mukana, mutta 3-rangassa 3-simpleksin $[p_7, p_8, p_9, p_{10}]$ sisus on mukana. Tällöin myös siis $K^{(3)} = K$, koska $\dim(K) = 3$.



Kuva 2.5. 0-ranka $K^{(0)}$



Kuva 2.6. 1-ranka $K^{(1)}$

Määritelmä 2.22. [3, s. 25] Abstraktin simpleksisen kompleksin K' *geometrisen realisaatio* K on avaruuden \mathbb{R}^n geometrinen simpleksinen kompleksin K' k -simpleksin $\{p_0, \dots, p_k\}$ geometrinen simpleksinen kompleksin K k -simpleksille, joka on pisteiden $e(p_0), \dots, e(p_k)$ konveksoverho.

Geometrisen realisaation toteutuminen on mahdollista, jos ympäröivän avaruuden dimensio on riittävän suuri, kuten seuraavasta Geometrisen realisaation lauseesta nähdään.

Lause 2.1 (Geometrisen realisaation lause). *Jokaisella abstraktilla simpleksisellä kompleksilla, jonka dimensio on n , on geometrinen realisaatio avaruudessa \mathbb{R}^{2n+1} .*

Todistus (vrt. [4, s. 64]). Olkoon K äärellinen kokoelma joukon A epätyhjiä osajoukkoja eli abstrakti simpleksinen kompleksin K . Olkoon $f: V(K) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ injektiivinen kuvaus, jonka kuvan joukon pisteet ovat yleisessä sijainnissa. Tämä tarkoittaa sitä, että mitkä tahansa $2n+2$ tai vähemmän kuvauksen f kuvan pisteitä ovat affiinisti riippumattomia.

Olkoot sitten τ ja τ_0 simpleksejä, joiden kärjet kuuluvat joukkoon A siten, että $k = \dim(\tau)$ ja $k_0 = \dim(\tau_0)$. Tällöin simpleksien τ ja τ_0 yhdisteen mahtavuudelle eli koolle saadaan, että

$$|\tau \cup \tau_0| = |\tau| + |\tau_0| - |\tau \cap \tau_0| \leq k + k_0 + 2 \leq 2n + 2.$$

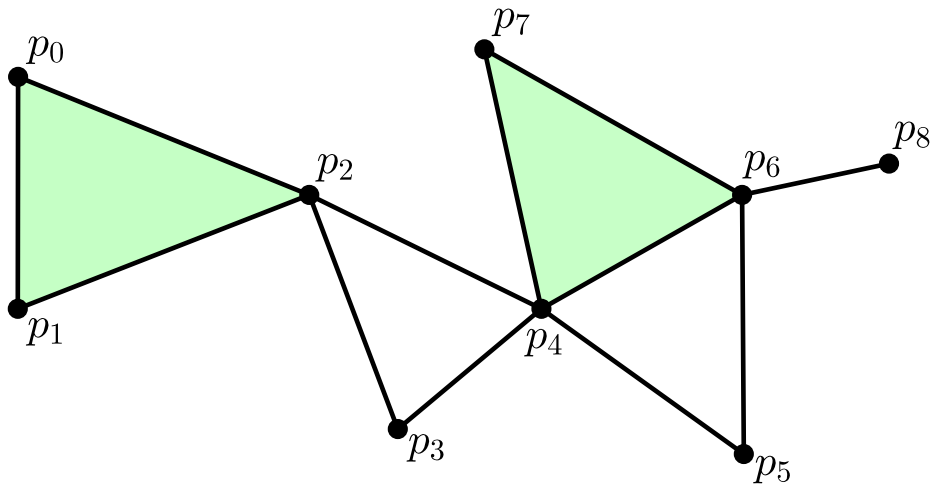
Täten saadaan, että yhdisteen $\tau \cup \tau_0$ kuvan pisteet ovat myös affiinisti riippumattomia. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen yhdisteen $\tau \cup \tau_0$ kuvan pisteiden konveksoverho x on yksikäsitteinen. Näin ollen piste x kuuluu sekä simpleksiin $\sigma = \text{conv}f(\tau)$ että simpleksiin $\sigma_0 = \text{conv}f(\tau_0)$, jos ja vain jos x on leikkauksen $\tau \cap \tau_0$ kuvan pisteiden konveksoverho. Tämä tarkoittaa puolestaan, että simpleksien σ ja σ_0 leikkaus $\sigma \cap \sigma_0$ on joko tyhjä tai leikkaus on molempien simpleksien σ ja σ_0 yhteinen sivu. Tällöin geometrisen simpleksisen kompleksin määritelmän 2.17 ehdot toteutuvat. Siis geometrinen realisaatio on olemassa. \square

Esitetään lopuksi yksinkertainen havainnollistava esimerkki geometrisesta realisaatiosta.

Esimerkki 2.4. Olkoon $A = \{p_0, \dots, p_8\}$ abstraktin simpleksisen kompleksin K' kärkijoukko $V(K')$, kun abstrakti simpleksinen kompleksin

$$K' = \{ \{p_0\}, \{p_1\}, \{p_2\}, \{p_3\}, \{p_4\}, \{p_5\}, \{p_6\}, \{p_7\}, \{p_8\}, \{p_0, p_1\}, \{p_0, p_2\}, \\ \{p_1, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \{p_2, p_4\}, \{p_3, p_4\}, \{p_4, p_5\}, \{p_4, p_6\}, \{p_4, p_7\}, \{p_5, p_6\}, \\ \{p_6, p_7\}, \{p_6, p_8\}, \{p_0, p_1, p_2\}, \{p_4, p_6, p_7\} \}.$$

Kuvassa 2.7 on abstraktin simpleksisen kompleksin K' eräs geometrinen realisaatio K tasossa \mathbb{R}^2 .



Kuva 2.7. Abstraktin simpleksisen kompleksin K' geometrinen realisaatio K .

Huomautus. Käytetään jatkossa myös abstraktin simpleksisen kompleksin simpleksille $\sigma = \{p_0, \dots, p_k\}$ merkintää $[p_0, \dots, p_k]$.

Huomautus. Tästä eteenpäin tutkielmassa oletetaan, että simpleksit ja simpleksiset kompleksit ovat abstrakteja.

3 Todistajista

3.1 Heikko ja vahva todistaja

Seuraavat heikon ja vahvan todistajan määritelmät ovat tutkielman keskeisimpiä käsitteitä. Esitetään täten myös esimerkki 3.1, joka selventää määritelmien 3.1 ja 3.2 sisältöä.

Määritelmä 3.1. [1, s. 1], [2, s. 41] Olkoon (\mathbb{R}^n, d) euklidinen avaruus ja olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Olkoon myös $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, missä kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Alkio $x \in \mathbb{R}^n$ on k -simpleksin σ *heikko todistaja* joukon A suhteen, jos

$$d(x, p) \leq d(x, b)$$

kaikilla $p \in \sigma$ ja $b \in A \setminus \sigma$.

Määritelmä 3.2. [1, s. 1], [2, s. 41] Olkoon (\mathbb{R}^n, d) euklidinen avaruus ja olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Olkoon myös $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, missä kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Alkio $x \in \mathbb{R}^n$ on k -simpleksin σ *vahva todistaja* joukon A suhteen, jos x on k -simpleksin σ heikko todistaja joukon A suhteen ja

$$d(x, p) = d(x, p')$$

kaikilla $p, p' \in \sigma$.

Esimerkki 3.1. Olkoot pisteet $p_0, \dots, p_3 \in \mathbb{R}^2$ simpleksisen kompleksin

$$K = \{[p_0], [p_1], [p_2], [p_3], [p_0, p_1], [p_0, p_2], [p_0, p_3], [p_1, p_2], [p_2, p_3], [p_0, p_1, p_2]\}$$

kärjet.

Vasemmalla kuvassa 3.1 nähdään, että piste x on kolmion eli 2-simpleksin $[p_0, p_1, p_2]$ vahva todistaja. Selvästi myös piste x on 1-simpleksien $[p_0, p_1]$, $[p_0, p_2]$ ja $[p_1, p_2]$ sekä 0-simpleksien eli kärkipisteiden $[p_0]$, $[p_1]$ ja $[p_2]$ vahva todistaja.

Oikealla kuvassa 3.1 puolestaan piste y on 1-simpleksin $[p_0, p_3]$ heikko todistaja. Piste y on myös tietenkin 0-simpleksien eli kärkipisteiden $[p_0]$ ja $[p_3]$ heikko todistaja.



Kuva 3.1. Piste x on vahva todistaja ja piste y on heikko todistaja.

3.2 Voronoin kaavio ja Delaunayn kolmiointi

Tutkielman keskeiselle käsitteelle eli Delaunayn kolmioinnille esitetään tässä alaluvussa erilaisia versioita. Erityisesti käsitellään heikon ja vahvan Delaunayn kolmioinnin määritelmien eroa. Alaluvun alussa esitetään kuitenkin ensin Voronoin solun ja Voronoin kaavion määritelmät, joihin ensimmäiseksi esitettävä Delaunayn kolmioinnin määritelmä 3.5 pohjautuu. Tämä alaluku perustuu de Silvan artikkeleihin [1, s. 1] ja [2, s. 40–43].

Määritelmä 3.3. Olkoon (\mathbb{R}^n, d) euklidinen avaruus ja olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Joukko A määrittää avaruuden \mathbb{R}^n hajoamisen *Voronoin soluiksi*

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) \leq d(x, b) \text{ kaikilla } b \in A\},$$

kun $a \in A$.

Koska jokaista joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pistettä a vastaa Voronoin solu V_a , niin Voronoin solun määritelmän nojalla avaruuden \mathbb{R}^n jokainen piste kuuluu vähintään yhteen joukon A pisteen a Voronoin soluun V_a . Avaruuden \mathbb{R}^n piste x voi kuulua useampaan Voronoin soluun silloin, kun $d(x, a) = d(x, b)$, missä $a, b \in A$. Näin ollen avaruus \mathbb{R}^n hajoaa Voronoin soluiksi.

Määritelmä 3.4. Olkoon (\mathbb{R}^n, d) euklidinen avaruus ja olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Joukon A *Voronoin kaavio*

$$\text{Vor}(A, \mathbb{R}^n) = \text{Vor}(A) = \{V_a \mid a \in A\}$$

on Voronoin solujen V_a muodostama joukko, joka peittää avaruuden \mathbb{R}^n .

Koska edellä todettiin, että jokainen avaruuden \mathbb{R}^n piste kuuluu vähintään yhteen joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pisteen a Voronoin soluun V_a ja että avaruus \mathbb{R}^n hajoaa Voronoin soluiksi, niin Voronoin solujen V_a muodostamaan joukkoon eli Voronoin kaavioon kuuluvat täten edellisen määritelmän nojalla kaikki avaruuden \mathbb{R}^n pisteet. Näin ollen Voronoin kaavio peittää avaruuden \mathbb{R}^n .

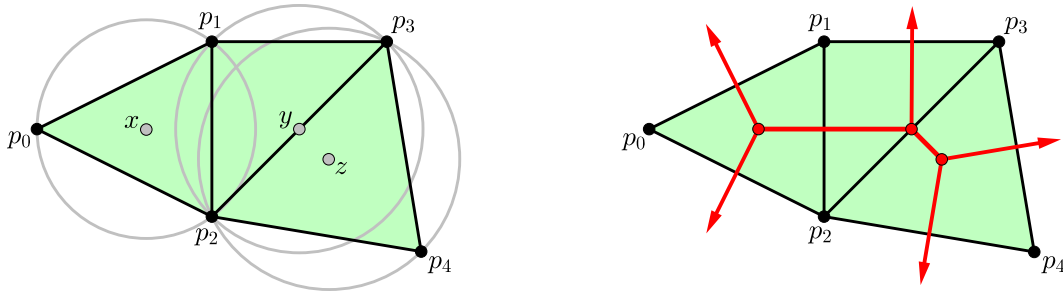
Määritelmä 3.5. Olkoon $\text{Vor}(A)$ Voronoin kaavio, missä $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Voronoin kaavion $\text{Vor}(A)$ duaali on *vahva Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n) = \text{Del}(A)$, joka on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

$$\begin{aligned} \text{Del}(A) \text{ sisältää } k\text{-simpleksin } \sigma = [p_0, \dots, p_k], \text{ missä kärjet } p_0, \dots, p_k \in A \\ \Leftrightarrow V_\sigma = \bigcap_{p \in \sigma} V_p = V_{p_0} \cap V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_k} \neq \emptyset \text{ kaikilla } k \geq 0. \end{aligned}$$

Esitetään esimerkki määritelmien 3.4 ja 3.5 sisällöistä.

Esimerkki 3.2. Olkoon $A = \{p_0, \dots, p_4\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

- a) Kuvassa 3.2 vasemmalla joukon A vahvan Delaunayn kolmioinnin eli abstraktin simpleksisen kompleksin geometrinen realisaatio on esitetty mustalla ja vihreällä värillä. Harmaalla värillä on puolestaan joukon A Delaunayn kolmioinnin jokaiselle 2-simpleksille eli kolmiolle piirretty ympyrä, joka kulkee kyseisen kolmion kärkipisteiden kautta. Kolmion $[p_0, p_1, p_2]$ ympyrän keskipiste on x , kolmion $[p_1, p_2, p_3]$ ympyrän keskipiste on y ja kolmion $[p_2, p_3, p_4]$ ympyrän keskipiste on z .
- b) Kuvassa 3.2 oikealla on edelleen joukon A vahvan Delaunayn kolmioinnin eli abstraktin simpleksisen kompleksin geometrinen realisaatio esitetty mustalla ja vihreällä värillä. Nyt kuvan vasemman puolen pisteet x, y ja z yhdistämällä saadaan kuvassa punaisella värillä esitetyn Voronoin kaavion reunat. Voronoin kaavion reunat kulkevat siis Delaunayn kolmioinnin 1- ja 2-simpleksien vahvojen todistajien kautta.



Kuva 3.2. Joukon A Delaunayn kolmiointi ja Voronoin kaavio.

Voronoin solun määritelmästä 3.3 seuraa, että vahvan Delaunayn kolmioinnin määritelmä 3.5 voidaan myös muotoilla uudelleen käyttäen todistajien 3.1 ja 3.2 määritelmiä.

Määritelmä 3.6. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Vahva Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n) = \text{Del}(A)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

$$\begin{aligned} \text{Del}(A) \text{ sisältää } k\text{-simpleksin } \sigma = [p_0, \dots, p_k], \text{ missä kärjet } p_0, \dots, p_k \in A \\ \Leftrightarrow \text{simpleksillä } \sigma \text{ on vahva todistaja avaruudessa } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Jos simpleksillä σ on vahva todistaja x , niin x on automaattisesti myös jokaisen simpleksin σ alisimpleksin $\tau \subseteq \sigma$ heikko todistaja, kuten lauseen 3.1 todistuksessaakin tullaan toteamaan. Täten voidaan muotoilla heikon Delaunayn kolmioinnin määritelmä.

Määritelmä 3.7. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Heikko Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}^W(A, \mathbb{R}^n) = \text{Del}^W(A)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

$$\text{Del}^W(A) \text{ sisältää } k\text{-simpleksin } \sigma = [p_0, \dots, p_k], \text{ missä kärjet } p_0, \dots, p_k \in A \Leftrightarrow \text{jokaisella simpleksin } \sigma \text{ alisimpleksillä } \tau \text{ on heikko todistaja avaruudessa } \mathbb{R}^n.$$

Toisaalta voidaan myös muodostaa seuraavanlaiset heikon ja vahvan Delaunayn kolmioinnin määritelmät, kun rajataan todistajan kuulumisen avaruuden \mathbb{R}^n sijasta sen osajoukkoon.

Määritelmä 3.8. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. *Vahva Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}(A, B)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

$$\begin{aligned} \text{Del}(A, B) \text{ sisältää } k\text{-simpleksin } \sigma = [p_0, \dots, p_k], \text{ missä kärjet } p_0, \dots, p_k \in A \\ \Leftrightarrow \text{simpleksillä } \sigma \text{ on vahva todistaja joukossa } B. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.9. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. *Heikko Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}^W(A, B)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

$$\begin{aligned} \text{Del}^W(A, B) \text{ sisältää } k\text{-simpleksin } \sigma = [p_0, \dots, p_k], \text{ missä kärjet } p_0, \dots, p_k \in A \\ \Leftrightarrow \text{jokaisella simpleksin } \sigma \text{ alisimpleksillä } \tau \text{ on heikko todistaja joukossa } B. \end{aligned}$$

Esitetään lopuksi esimerkki määritelmän 3.8 sisällöstä. Esimerkki 3.3 havainnollistaa myös määritelmän 3.6 ideaa.

Esimerkki 3.3. Olkoot joukot

$$A = \{(-6, 4), (-4, -2), (-2, 10), (0, -6), (2, 4), (4, -2), (8, 8), (8, 2)\}$$

ja

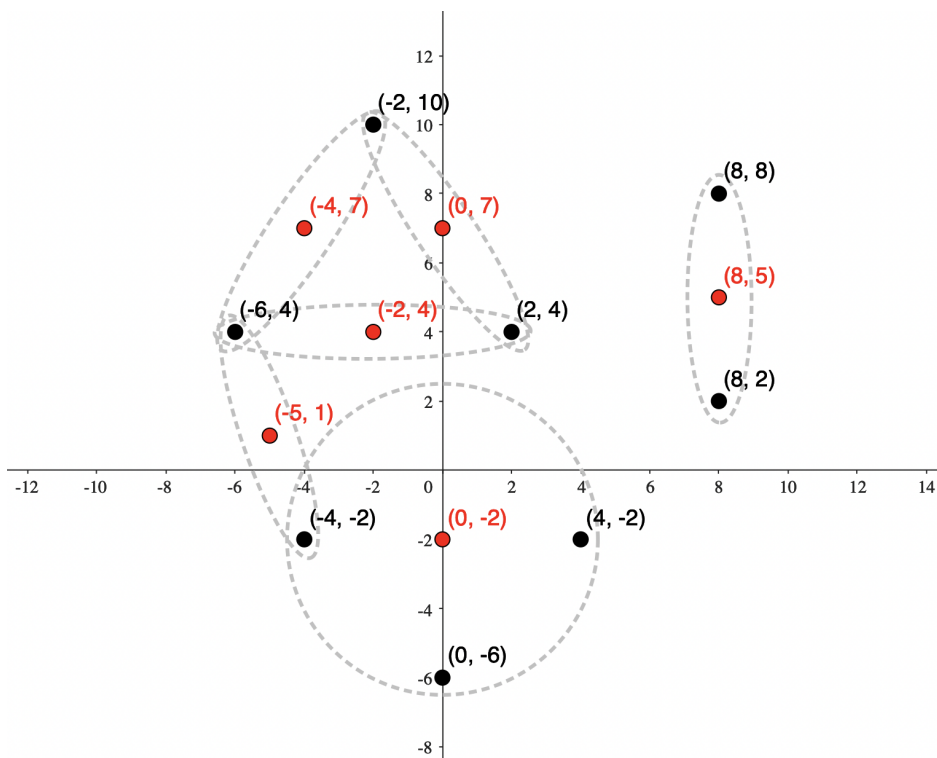
$$B = \{(-5, 1), (-4, 7), (-2, 4), (0, 7), (0, -2), (8, 5)\}$$

tason \mathbb{R}^2 pistejoukkoja.

- a) Määritetään sekä vahvan Delaunayn kolmioinnin $\text{Del}(A, B)$ että heikon Delaunayn kolmioinnin $\text{Del}^W(A, B)$ simpleksit.
- b) Piirretään kuvat kompleksien $\text{Del}(A, B)$ ja $\text{Del}^W(A, B)$ geometrisista realisaatioista tasossa \mathbb{R}^2 .

Ratkaisu.

- a) Vedotaan joukkojen A ja B pisteiden välisissä etäisyyksissä alla olevaan kuvaan 3.3. Kuvassa mustalla värillä on merkitty pistejoukon A pisteet ja punaisella värillä on merkitty pistejoukon B pisteet.



Kuva 3.3. Pistejoukon A pisteet ovat mustalla värillä ja pistejoukon B pisteet ovat punaisella värillä.

Täten saadaan, että

- piste $(0, -2)$ on joukon $\{(-4, -2), (0, -6), (4, -2)\}$ vahva todistaja,
- piste $(8, 5)$ on joukon $\{(8, 8), (8, 2)\}$ vahva todistaja,
- piste $(-4, 7)$ on joukon $\{(-6, 4), (-2, 10)\}$ vahva todistaja,
- piste $(-2, 4)$ on joukon $\{(-6, 4), (2, 4)\}$ vahva todistaja,
- piste $(0, 7)$ on joukon $\{(-2, 10), (2, 4)\}$ vahva todistaja,
- piste $(-5, 1)$ on joukon $\{(-6, 4), (-4, -2)\}$ vahva todistaja.

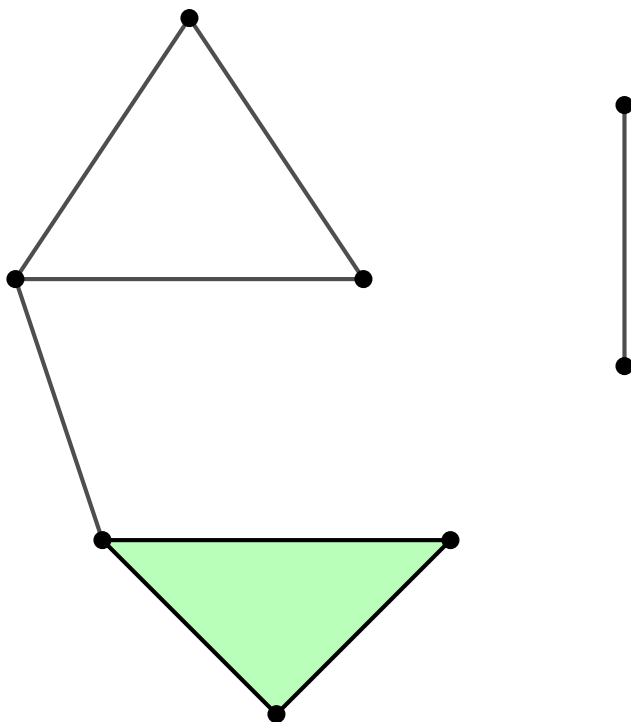
Kuvassa 3.3 harmaalla katkoviivalla on ympyröity edellä mainitut joukon A pisteet, joilla on vahva todistaja joukossa B . Harmaiden katkoviivojen sisällä on myös joukkoon B kuuluva vaadittu vahva todistaja.

Näin ollen saadaan, että

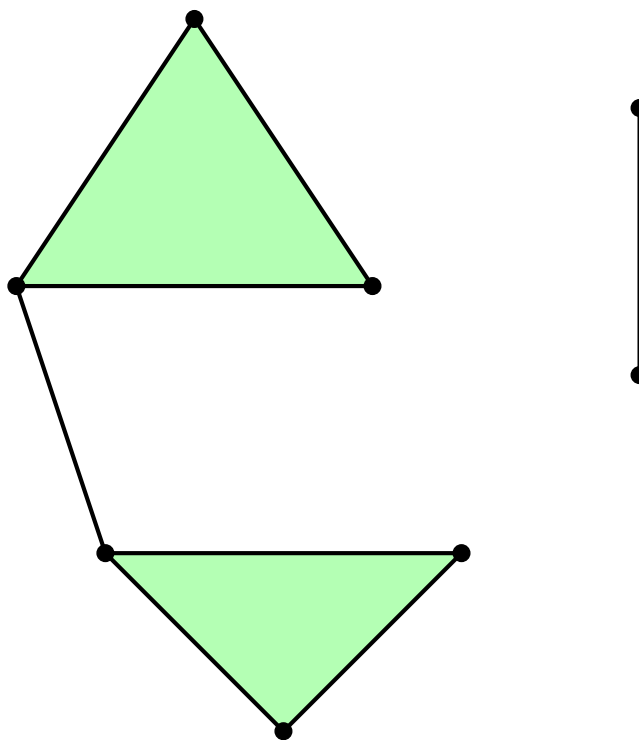
$$\begin{aligned} \text{Del}(A, B) = \{ & [(-6, 4)], [(-4, -2)], [(-2, 10)], [(0, -6)], [(2, 4)], [(4, -2)], \\ & [(8, 8)], [(8, 2)], [(8, 8), (8, 2)], [(-6, 4), (-2, 10)], \\ & [(-6, 4), (2, 4)], [(-2, 10), (2, 4)], [(-6, 4), (-4, -2)], \\ & [(-4, -2), (0, -6)], [(-4, -2), (4, -2)], [(0, -6), (4, -2)], \\ & [(-4, -2), (0, -6), (4, -2)] \} \end{aligned}$$

$$\text{ja } \text{Del}^W(A, B) = \text{Del}(A, B) \cup \{[(-6, 4), (-2, 10), (2, 4)]\}.$$

b) Kompleksien $\text{Del}(A, B)$ ja $\text{Del}^W(A, B)$ geometriset realisaatiot tasossa \mathbb{R}^2 ovat:



Kuva 3.4. Kompleksin $\text{Del}(A, B)$ geometrinen realisaatio.



Kuva 3.5. Kompleksin $\text{Del}^W(A, B)$ geometrinen realisaatio.

3.3 Heikkojen todistajien lause euklidisessa avaruudessa

Todistetaan tässä alaluvussa lauseessa 3.1, että euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^n äärellisen joukon A heikko ja vahva Delaunayn kolmiointi ovat sama simpleksinen kompleksi, eli $\text{Del}^W(A) = \text{Del}(A)$. Oletetaan, että metriikka on tavallinen euklidinen etäisyys. Ensimmäistä lausetta voidaan myös sanoa heikkojen todistajien lauseeksi. Alaluku perustuu de Silvan artikkeleihin [1, s. 2–3] ja [2, s. 42, 46–47] lukuun ottamatta konveksin joukon määritelmää 3.10.

Lause 3.1. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Silloin k -simpleksillä σ on vahva todistaja joukossa \mathbb{R}^n , jos ja vain jos jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä $\tau \subseteq \sigma$ on heikko todistaja joukossa \mathbb{R}^n .*

Todistus on kokonaisuudessaan seuraavan lauseen 3.2 todistuksen yhteydessä. Lauseen 3.1 väitteen toinen suunta on kuitenkin triviaali. Osoitetaan se tässä.

Oletetaan, että k -simpleksillä σ on vahva todistaja x joukossa \mathbb{R}^n . Tällöin x on triviaalisti myös vahva todistaja simpleksin σ jokaiselle alisimpleksille $\tau \subseteq \sigma$. Mutta, koska vahva todistaja on määritelmän 3.2 perusteella myös heikko todistaja, niin x on myös jokaisen simpleksin σ alisimpleksin $\tau \subseteq \sigma$ heikko todistaja.

Täten saadaan, että inklusio $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n) \subseteq \text{Del}^W(A, \mathbb{R}^n)$ pätee. Lauseen 3.1 seurauksena voidaan siis tarkalleen ottaen muotoilla heikon Delaunayn kolmiointin määritelmä 3.7, joka esitettiin edellisessä alaluvussa 3.2.

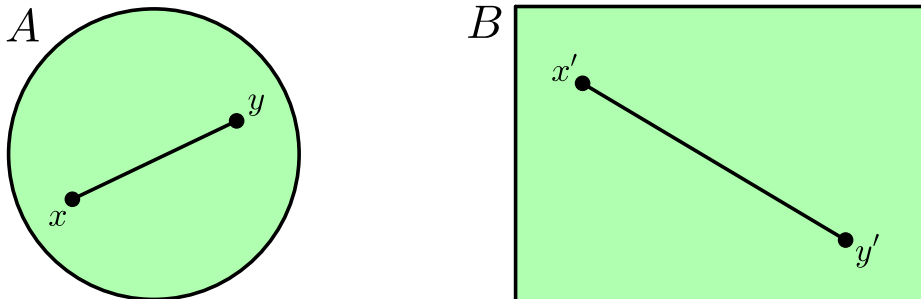
Esitetään sitten konveksin joukon määritelmä avaruudessa \mathbb{R}^n havainnollistavan esimerkin kanssa ennen esimerkkiä 3.5 lauseen 3.1 käytöstä.

Määritelmä 3.10. [7, s. 140] Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *konvekksi*, jos kaikilla pisteillä $x, y \in A$ pätee

$$(1 - t)x + ty \in A,$$

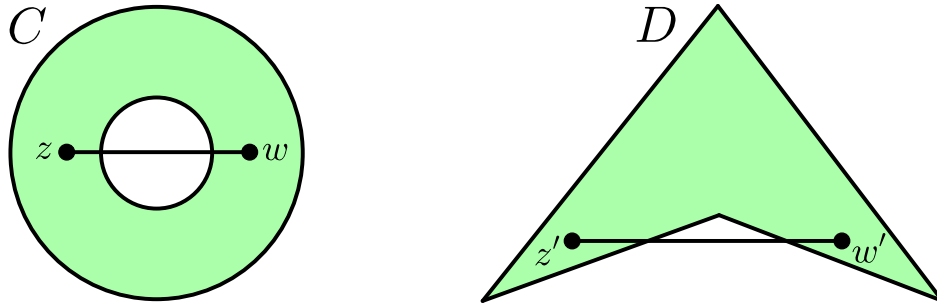
kun $t \in [0, 1]$.

Esimerkki 3.4. Kuvassa 3.6 on esitetty kaksi tason \mathbb{R}^2 konveksia osajoukkoa A ja B . Kuvasta nähdään siis selvästi, että kaikilla pisteillä $x, y \in A$ jana $[x, y]$ sisältyy joukkoon A ja että kaikilla pisteillä $x', y' \in B$ jana $[x', y']$ sisältyy joukkoon B .



Kuva 3.6. Tason \mathbb{R}^2 konveksit joukot A ja B .

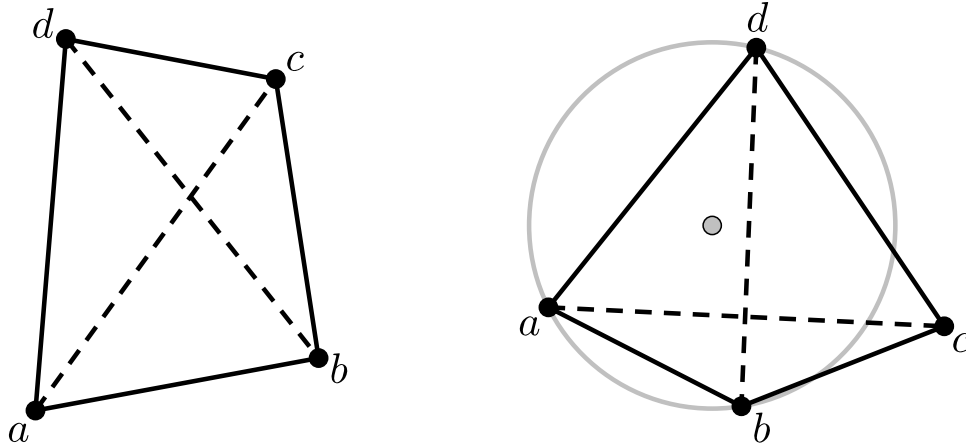
Puolestaan kuvassa 3.7 esitetyt tason \mathbb{R}^2 osajoukot C ja D eivät ole konvekseja, sillä pisteiden $z, w \in C$ välinen jana $[z, w]$ ei sisälly kokonaan joukkoon C ja vastaavasti pisteiden $z', w' \in D$ välinen jana $[z', w']$ ei sisälly kokonaan joukkoon D .



Kuva 3.7. Tason \mathbb{R}^2 ei konveksit joukot C ja D .

Esimerkki 3.5. Olkoot pisteet $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$. Tarkastellaan monikulmiota $abcd$ tasossa \mathbb{R}^2 .

- a) Oletetaan, että $abcd$ on konvekssi monikulmio. Toisin sanoen, jokainen monikulmion $abcd$ sisäkulma on alle 180 astetta, sekä monikulmion $abcd$ jokaisen kahden kärjen yhdistävän janan pisteet kuuluvat monikulmion $abcd$ sisään. Tällöin kaikilla konveksin monikulmion $abcd$ kärkipisteillä $[a]$, $[b]$, $[c]$ ja $[d]$, kaikilla 1-sivuilla $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d]$ ja $[d, a]$ sekä kaikilla kolmioilla $[a, b, c]$, $[b, c, d]$, $[c, d, a]$ ja $[d, a, b]$ on heikko todistaja konveksin monikulmion $abcd$ kärkijoukon $\{a, b, c, d\}$ suhteen. Kuvassa 3.8 vasemmalla on esimerkki konveksista monikulmiosta $abcd$. Katkoviivoilla on lisäksi esitetty monikulmion $abcd$ lävistäjät $[a, c]$ ja $[b, d]$.
- b) Oletetaan, että konvekssi monikulmio $abcd$ ei ole syklinen. Toisin sanoen, konveksista monikulmiota $abcd$ ei voida piirtää ympyrän sisään siten, että sen kärjet sijaitsisivat ympyrän kehällä. Tällöin vain toisella monikulmion $abcd$ lävistäjistä eli 1-sivuista $[a, c]$ ja $[b, d]$ on heikko todistaja. Kuvassa 3.8 oikealla on esimerkki konveksista monikulmiosta $abcd$, joka ei ole syklinen. Lävistäjät $[a, c]$ ja $[b, d]$ on esitetty edelleen katkoviivoilla. Tässä esimerkissä lävistäjällä $[b, d]$ on heikko todistaja. Koska lävistäjä $[b, d]$ on kolmioiden $[a, b, d]$ ja $[b, c, d]$ yhteinen sivu, niin lauseen 3.1 nojalla saadaan, että kolmioilla $[a, b, d]$ ja $[b, c, d]$ on vahvat todistajat. Joukon $\{a, b, c, d\}$ vahva Delaunayn kolmiointi siis koostuu näistä kahdesta kolmiosta $[a, b, d]$ ja $[b, c, d]$.



Kuva 3.8. Vasemmalla konvekxi monikulmio $abcd$ ja oikealla ei-syklinen konvekxi monikulmio $abcd$.

Jotta voidaan todistaa lauseen 3.1 toinen suunta induktiolla, on lauseen 3.1 väitettä vahvistettava induktion helpottamiseksi. Tarkoituksena seuraavassa lauseessa on muodostaa simpleksin σ vahva todistaja siten, että se on konvekxi kombinaatio simpleksin σ alisimpleksien heikoista todistajista.

Lause 3.2. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Oletetaan, että jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä $\tau \subseteq \sigma$ on heikko todistaja x_τ joukossa \mathbb{R}^n joukon A suhteen. Silloin pisteiden x_τ konvekxi verho sisältää simpleksin σ vahvan todistajan joukon A suhteen.*

Todistus. Otetaan käyttöön merkintä

$$(3.1) \quad R(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq |x - b|\},$$

kun $a, b \in A$. Joukot $R(a, b)$ ovat konvekseja.

Todistetaan väite induktiolla muuttujan k suhteen.

Induktion perusaskel on triviaali, sillä kun $k = 0$, niin ainoa mahdollinen simpleksin $\sigma = [p_0]$ alisimpleksi τ on simpleksi σ itse, kun $p_0 \in A$. Tällöin alisimpleksillä $\tau = \sigma$ on oletuksen mukaan heikko todistaja x_{τ_0} joukossa \mathbb{R}^n . Koska simpleksillä τ on vain yksi kärkipiste p_0 , niin heikko todistaja x_{τ_0} on määritelmän 3.2 nojalla myös simpleksin τ vahva todistaja. Näin ollen, koska $\tau = \sigma$ ja triviaalisti pisteiden x_τ konvekxi verho sisältää pisteen x_{τ_0} , niin simpleksin σ vahva todistaja x_{τ_0} kuuluu pisteiden x_τ konvekssiin verhoon.

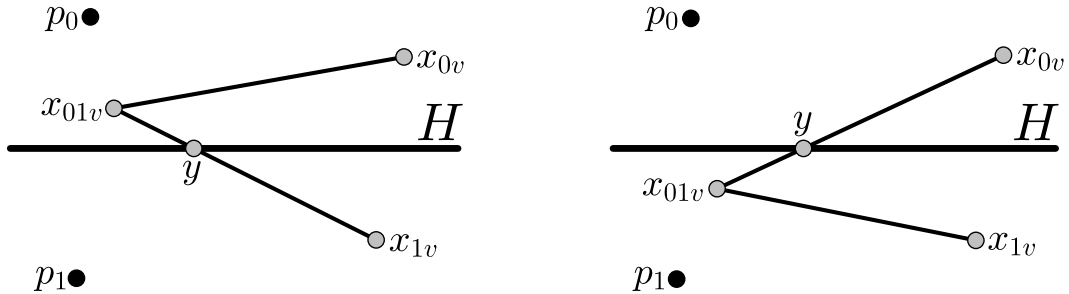
Oletetaan sitten, että $k \geq 1$. Olkoot $p_0, p_1 \in \sigma$ erillisiä ja olkoon

$$H = R(p_0, p_1) \cap R(p_1, p_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p_0| = |x - p_1|\}$$

avaruuden \mathbb{R}^n aliavaruus. Olkoon lisäksi $\tau = \sigma \setminus \{p_0\} = [p_1, \dots, p_k]$ k -simpleksi ja olkoon $A' = A \setminus \{p_0\}$. Todistuksen idea eli induktioaskel on seuraavanlainen: Jokaiselle simpleksin τ alisimpleksille τ' löydetään heikko todistaja $y_{\tau'} \in H$ joukon A' suhteen. Induktio-oletuksen nojalla simpleksillä τ on myös vahva todistaja $x \in \mathbb{R}^n$ joukon A' suhteen. Koska joukko H on konvekxi, niin $x \in H$.

Tällöin x on myös simpleksin σ vahva todistaja joukon A suhteen. Lisäksi pisteet eli heikot todistajat $y_{\tau'}$ kuuluvat heikkojen todistajien x_{τ} konvekssiin verhoon, sillä heikkojen todistajien $y_{\tau'}$ konstruoinnista seuraa, että ne ovat pisteiden x_{τ} konvekseja kombinaatioita. Tällöin x kuuluu pisteiden x_{τ} konvekssiin verhoon. Jäljelle jää enää todistaa simpleksin τ alisimpleksien τ' heikkojen todistajien olemassaolo. Tarkastelu voidaan jakaa neljään eri tapaukseen, jotka ovat esitetty kuvissa 3.9 ja 3.10.

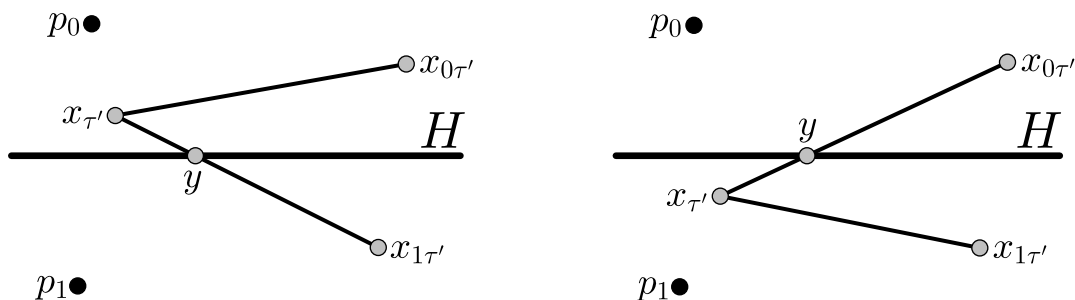
Oletetaan ensin, että $p_1 \in \tau'$. Tällöin voidaan kirjoittaa, että $\tau' = v \cup \{p_1\}$, missä $p_1 \notin v \subseteq \{p_2, \dots, p_k\}$. Olkoot pisteet x_{0v}, x_{1v} ja x_{01v} simpleksien, joiden kärkijoukot ovat $v \cup \{p_0\}, v \cup \{p_1\}$ ja $v \cup \{p_0, p_1\}$, heikot todistajat joukon A suhteen. Merkinnän (3.1) nojalla $x_{0v} \in R(p_0, p_1)$ ja $x_{1v} \in R(p_1, p_0)$. Tällöin pätee, että joko $x_{01v} \in R(p_0, p_1)$ tai $x_{01v} \in R(p_1, p_0)$. Jos $x_{01v} \in R(p_0, p_1)$, niin merkinnän (3.1) mukaan $|x_{01v} - p_0| \leq |x_{01v} - p_1|$. Koska myös pätee $|x_{1v} - p_1| \leq |x_{1v} - p_0|$, niin jatkuvuuden perusteella jana $[x_{01v}, x_{1v}]$ leikkaa joukon H jossakin pisteessä $y \in [x_{01v}, x_{1v}]$. Koska $x_{01v}, x_{1v} \in R(a, b)$ jokaisella $a \in \tau'$ ja $b \in A' \setminus \tau'$, niin konvekssisuuden nojalla sama pätee myös pisteelle y . Siis, toisin sanoen jossakin joukon H pisteessä y pätee $|y - p_0| = |y - p_1|$, joten y on simpleksin τ' heikko todistaja. Vastaavasti, jos $x_{01v} \in R(p_1, p_0)$, niin pätee $|x_{01v} - p_1| \leq |x_{01v} - p_0|$. Koska myös pätee $|x_{0v} - p_0| \leq |x_{0v} - p_1|$, niin jatkuvuuden perusteella jana $[x_{01v}, x_{0v}]$ leikkaa joukon H jossakin pisteessä $y \in [x_{01v}, x_{0v}]$. Koska $x_{01v}, x_{0v} \in R(a, b)$ jokaisella $a \in v \cup \{p_0\}$ ja $b \in A' \setminus \tau'$, niin sama pätee myös pisteelle y . Siis, toisin sanoen jossakin joukon H pisteessä y pätee $|y - p_0| = |y - p_1|$, joten $y \in R(p_1, b)$ jokaisella $b \in A' \setminus \tau'$. Siis y on simpleksin τ' heikko todistaja.



Kuva 3.9. Pisteiden y paikantaminen, kun $p_1 \in \tau'$.

Oletetaan sitten, että $p_1 \notin \tau'$. Olkoot pisteet $x_{\tau'}, x_{0\tau'}$ ja $x_{1\tau'}$ simpleksien, joiden kärkijoukot ovat $\tau', \tau' \cup \{p_0\}$ ja $\tau' \cup \{p_1\}$, heikot todistajat joukon A suhteen. Merkinnän (3.1) nojalla $x_{0\tau'} \in R(p_0, p_1)$ ja $x_{1\tau'} \in R(p_1, p_0)$. Tällöin pätee, että joko $x_{\tau'} \in R(p_0, p_1)$ tai $x_{\tau'} \in R(p_1, p_0)$. Jos $x_{\tau'} \in R(p_0, p_1)$, niin merkinnän (3.1) mukaan $|x_{\tau'} - p_0| \leq |x_{\tau'} - p_1|$. Koska myös pätee $|x_{1\tau'} - p_1| \leq |x_{1\tau'} - p_0|$, niin jatkuvuuden perusteella jana $[x_{\tau'}, x_{1\tau'}]$ leikkaa joukon H jossakin pisteessä $y \in [x_{\tau'}, x_{1\tau'}]$. Koska $x_{\tau'}, x_{1\tau'} \in R(a, b)$ jokaisella $a \in \tau'$ ja $b \in A \setminus (\tau' \cup \{p_1\})$, niin sama pätee myös pisteelle y . Siis, toisin sanoen jossakin joukon H pisteessä y pätee $|y - p_0| = |y - p_1|$, joten $y \in R(a, p_1)$ jokaisella $a \in \tau'$. Siis y on simpleksin τ' heikko todistaja. Vastaavasti, jos $x_{\tau'} \in R(p_1, p_0)$, niin pätee $|x_{\tau'} - p_1| \leq |x_{\tau'} - p_0|$. Koska myös pätee $|x_{0\tau'} - p_0| \leq |x_{0\tau'} - p_1|$,

niin jatkuvuuden perusteella jana $[x_{\tau'}, x_{0\tau'}]$ leikkaa joukon H jossakin pisteessä $y \in [x_{\tau'}, x_{0\tau'}]$. Koska $x_{\tau'}, x_{0\tau'} \in R(a, b)$ jokaisella $a \in \tau'$ ja $b \in A' \setminus \tau'$, niin sama pätee myös pisteelle y . Siis y on simpleksin τ' heikko todistaja.



Kuva 3.10. Piste y paikantaminen, kun $p_1 \notin \tau'$.

Näin ollen simpleksin τ alisimplekseillä τ' on heikot todistajat $y_{\tau'}$. Lause on siis todistettu. Todistus täydentää täten myös lauseen 3.1 todistuksen. \square

Täten saadaan, että myös inklusio $\text{Del}^W(A, \mathbb{R}^n) \subseteq \text{Del}(A, \mathbb{R}^n)$ pätee. Näin ollen lause 3.1 on ekvivalentti väitteen $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n) = \text{Del}^W(A, \mathbb{R}^n)$ kanssa. Lisäksi lauseen 3.1 vahvistettu väite eli lause 3.2 on vastaavasti ekvivalentti väitteen $\text{Del}(A, B) = \text{Del}^W(A, B)$ kanssa kaikilla konvekseilla joukoilla $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

3.4 Heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto

Kun euklidisesta avaruudesta \mathbb{R}^n siirrytään tiettyihin yleisiin epäeuklidisiin geometrioihin, edellinen lause 3.2 pätee edelleen. Tällöin voidaan käyttää samaa lauseen 3.2 todistusta, kunhan otetaan huomioon muutamia asioita. Esitetään seuraavaksi otaksuma, joka sisältää riittävät ehdot, jotta tämän alaluvun keskeisin lause eli heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto voidaan todistaa. Alaluku perustuu de Silvan artikkeliin [2, s. 47–48] lukuun 5.

Otaksuma 3.1 (Voronoin konveksisuus). Oletetaan, että seuraavat neljä postulaattia eli oletusta pätevät:

- (i) X on topologinen avaruus ja A on joukko.
- (ii) Kaikilla $p \in A$ on olemassa jatkuva funktio $d(p, -): X \rightarrow \mathbb{R}$.
- (iii) Jokainen järjestämätön pari $x, y \in X$ sisältyy yhtenäiseen joukkoon $\gamma(x, y) \subseteq X$.
- (iv) Kaikilla $p, b \in A$ joukko

$$R(p, b) = \{x \in X \mid d(p, x) \leq d(b, x)\}$$

on konvekksi siinä mielessä, että $\gamma(x, y) \subseteq R(p, b)$ aina, kun $x, y \in R(p, b)$.

Kahden ensimmäisen oletuksen (i) ja (ii) perusteella voidaan määritellä heikot ja vahvat todistajat sekä Delaunayn kolmioinnit $\text{Del}(A, X)$ ja $\text{Del}^W(A, X)$ vastaavasti, kuten aiemmin euklidisessa avaruudessa määriteltiin.

Kolmas oletus (iii) mahdollistaa joukon X osajoukon konveksisuuden käsitteen, ja neljäs oletus (iv) vastaa väitettä, että Voronoin solut

$$V_p = \{x \in X \mid d(p, x) \leq d(b, x) \text{ kaikilla } b \in A\},$$

kun $p \in A$, ovat konvekseja.

Lause 3.3 (heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto). *Oletetaan otaksuma 3.1. Simpleksillä $\sigma \subseteq A$ on vahva todistaja $x \in X$ joukon A suhteen, jos ja vain jos jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä $\tau \subseteq \sigma$ on heikko todistaja x_τ joukossa X joukon A suhteen. Lisäksi pisteiden x_τ konvekssi verho sisältää simpleksin σ vahvan todistajan x .*

Todistus. Kuten aiemmin jo todettiin, mikä tahansa simpleksin σ vahva todistaja x on välttämättä myös jokaisen simpleksin σ alisimpleksin $\tau \subseteq \sigma$ heikko todistaja. Väitteen toisen suunnan todistamisessa noudatetaan lauseen 3.2 todistusta melkein sanataarkasti. Korvataan kuitenkin euklidinen etäisyys $|p - x|$ arvolla $d(p, x)$ ja jana $[x, y]$ merkinnällä $\gamma(x, y)$ jokaisessa tapauksessa.

Huomataan, että avaruuden X aliavaruus

$$H = R(p_0, p_1) \cap R(p_1, p_0) = \{x \in X \mid d(p_0, x) = d(p_1, x)\}$$

on konvekssi, sillä H on kahden konveksin joukon leikkaus. Lisäksi huomataan, että jos piste $x \in R(p_0, p_1)$ ja piste $y \in R(p_1, p_0)$, niin tällöin $\gamma(x, y)$ leikkaa joukon H kanssa. Tämä seuraa siitä, että joukot $R(p_0, p_1)$ ja $R(p_1, p_0)$ ovat suljettuja ja ne peittävät avaruuden X , kun taas $\gamma(x, y)$ on yhtenäinen ja sen alkioita on molemmissa joukoissa $R(p_0, p_1)$ ja $R(p_1, p_0)$.

Näillä lisähuomioilla todistus on identtinen lauseen 3.2 todistuksen kanssa. \square

Lause 3.3 vastaa täten väitettä, jonka mukaan $\text{Del}(A, K) = \text{Del}^W(A, K)$ kaikilla konvekseilla joukoilla $K \subseteq X$.

Esimerkki 3.6. Olkoon X joukon \mathbb{R}^n konvekssi osajoukko ja olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Käytetään suljetusta pisteiden x ja y välisestä janasta merkintää $\gamma(x, y)$, sekä olkoon $d(p, x) = |p - x|$, kun $x, y \in X$ ja $p \in A$. Tällöin Voronoin konveksisuus eli otaksuma 3.1 toteutuu, koska joukko $R(p, b)$ on puoliavaruuden leikkaus joukon X kanssa. Näin ollen, koska puoliavaruudet ovat konvekseja, niin myös $R(p, b)$ on konvekssi. Niinpä $\gamma(x, y) \subseteq R(p, b)$.

Esimerkki 3.7. Olkoon X euklidisen n -ulotteisen yksikköpallon avoimen puolipallon konvekssi osajoukko. Olkoon myös $A \subseteq S^n$ ja olkoon $d(p, x) = \theta(p, x)$ geodeettinen etäisyys pisteestä p pisteeseen x . Tällöin käsitettä ”konvekssi” tulkitaan siten, että joukko X sisältää minimaalisen pisteiden x ja y välisen geodeesin $\gamma(x, y)$, kun $x, y \in X$. Avoimelle puolipallolle asetetun rajoituksen vuoksi

joukko X ei sisällä antipodisia pisteitä, joten $\gamma(x, y)$ on yksikäsitteinen. Rajoitus on välttämätön heikkojen todistajien lauseelle.

Myös Voronoin konveksisuus eli otaksuma 3.1 toteutuu, sillä ensinnäkin $R(p, b)$ on jonkin $(n - 1)$ -ulotteisen puolipallon ja joukon X leikkaus. Suljettu puolipallo ei kuitenkaan ole konvekksi, mutta jos se sisältää kaksi ei-antipodista pistettä x ja y , niin se välttämättä sisältää yksikäsitteisen minimaalisen geodeesin $\gamma(x, y)$. Näin ollen $R(p, b)$ on konvekksi.

Esimerkkien 3.6 ja 3.7 nojalla saadaan seuraava seuraus.

Seuraus 3.1. *Heikkojen todistajien lauseen yleinen muoto pätee geodeettiselle metriikalle euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^n ja n -ulotteisessa avoimessa puolipallossa $S_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$. Lisäksi, jos $X = S_+^n$, niin joukko A saa olla mikä tahansa n -ulotteisen pallon S^n osajoukko.*

4 Likimääräiset todistajat

Kun aiemmin esitettyjen heikon ja vahvan todistajien määritelmien 3.1 ja 3.2 vaatimuksia lievennetään, voidaan ottaa käyttöön virhetoleranssi ϵ . Virhetoleranssin käyttöönotosta on kaksi hyötyä. Ensinnäkin siihen sisältyy ajatus siitä, että todistajien määrittämiseen käytettävää etäisyysfunktioita eli metriikkaa d ei välttämättä tunneta tarkasti. Erityisesti sovelluksissa on yleistä, että tarkkaa metriikkaa ei tiedetä. Toiseksi virhetoleranssin käyttäminen mahdollistaa sellaisten kompleksien, jotka kasvavat monotonisesti virhetoleranssin ϵ kasvaessa, tutkimisen.

Tämän luvun tarkoituksena on esittää uusi versio heikkojen todistajien lauseista 3.1 ja 3.3 käyttämällä likimääräisiä todistajia, jotka siis toisin sanoen sisältävät virhetoleranssin ϵ . Luku perustuu de Silvan artikkeliin [2, s. 54–57] lukuun 8 lukuun ottamatta ekvivalenssirelaation ja ekvivalenssiluokan määritelmiä 4.6 ja 4.7.

Aloitetaan määrittelemällä seuraavat relaatiot.

Määritelmä 4.1. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seuraavat merkinnät \leq_ϵ , \geq_ϵ ja $=_\epsilon$ ovat ϵ -relaatioita, missä

- (i) $\alpha \leq_\epsilon \beta$ tarkoittaa, että $\alpha \leq \beta + \epsilon$,
- (ii) $\alpha \geq_\epsilon \beta$ tarkoittaa, että $\beta \leq_\epsilon \alpha$, tai yhtäpitävästi $\alpha \geq \beta - \epsilon$,
- (iii) $\alpha =_\epsilon \beta$ tarkoittaa, että $\alpha \leq_\epsilon \beta$ ja $\beta \leq_\epsilon \alpha$, tai yhtäpitävästi $|\alpha - \beta| \leq \epsilon$.

Likimääräiset heikot ja vahvat todistajat voidaan määritellä käyttäen edellä määriteltyjä ϵ -relaatioita tavanomaisten relaatioiden \leq , \geq ja $=$ sijasta. Tämä toimii riittävästi, kun joukot, jotka ϵ -relaatiot eli ϵ -epäyhtälöt määrittelevät, ovat konvekseja. Tämä on vahva ehto. Jotta tämä saavutetaan myöhemmin esitettävissä esimerkeissä, on metriikkaa d tarpeellista muuttaa. Tästä syystä käytetään uutta symbolia λ aiemmin käytetyn symbolin d sijasta seuraavassa otaksumassa.

Otaksuma 4.1 (vahva Voronoin konveksisuus). Oletetaan, että seuraavat neljä postulaattia eli oletusta pätevät:

- (i) X on topologinen avaruus ja A on joukko.
- (ii) Kaikilla $p \in A$ on olemassa jatkuva funktio $\lambda(p, -): X \rightarrow \mathbb{R}$.
- (iii) Jokainen järjestämätön pari $x, y \in X$ sisältyy yhtenäiseen joukkoon $\gamma(x, y) \subseteq X$.
- (iv) Kaikilla $p, b \in A$ ja $\epsilon \in \mathbb{R}$ joukko

$$R_\epsilon(p, b) = \{x \in X \mid \lambda(p, x) \leq_\epsilon \lambda(b, x)\}$$

on konvekssi siinä mielessä, että $\gamma(x, y) \subseteq R_\epsilon(p, b)$ aina, kun $x, y \in R_\epsilon(p, b)$.

Määritelmä 4.2. Oletetaan otaksunan 4.1 kohdat (i) ja (ii). Olkoon $\sigma \subseteq A$ simpleksi. Alkio $x \in X$ on simpleksin σ *heikko ϵ -todistaja* joukon A suhteen, jos

$$\lambda(p, x) \leq_\epsilon \lambda(b, x)$$

kaikilla $p \in \sigma$ ja $b \in A \setminus \sigma$.

Määritelmä 4.3. Oletetaan otaksunan 4.1 kohdat (i) ja (ii). Olkoon $\sigma \subseteq A$ simpleksi. Alkio $x \in X$ on simpleksin σ *vahva ϵ -todistaja* joukon A suhteen, jos x on simpleksin σ heikko ϵ -todistaja joukon A suhteen ja

$$\lambda(p, x) =_\epsilon \lambda(p', x)$$

kaikilla $p, p' \in \sigma$.

Näin ollen voidaan muodostaa aiemmin esitettyjen heikon ja vahvan Delaunayn kolmioinnin määritelmiä 3.8 ja 3.9 vastaavat määritelmät käyttäen heikkoja ja vahvoja ϵ -todistajia.

Määritelmä 4.4. Olkoot $A, B \subseteq X$. *Vahva Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}(A, B; \epsilon)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

simpleksi $\sigma \in \text{Del}(A, B; \epsilon) \Leftrightarrow$ simpleksillä σ on vahva ϵ -todistaja joukossa B .

Määritelmä 4.5. Olkoot $A, B \subseteq X$. *Heikko Delaunayn kolmiointi* $\text{Del}^W(A, B; \epsilon)$ on abstrakti simpleksinen kompleksi, joka toteuttaa ehdon

simpleksi $\sigma \in \text{Del}^W(A, B; \epsilon) \Leftrightarrow$

jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä τ on heikko ϵ -todistaja joukossa B .

Tällöin erityisesti pätee, että $\text{Del}(A, B; \epsilon) \subseteq \text{Del}(A, B; \epsilon')$, kun $\epsilon \leq \epsilon'$, ja vastaavasti $\text{Del}^W(A, B; \epsilon) \subseteq \text{Del}^W(A, B; \epsilon')$, kun $\epsilon \leq \epsilon'$.

Lause 4.1 (likimääräisten heikkojen todistajien lause). *Oletetaan otaksuna 4.1. Simpleksillä $\sigma \subseteq A$ on vahva ϵ -todistaja $x \in X$ joukon A suhteen, jos ja vain jos jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä $\tau \subseteq \sigma$ on heikko ϵ -todistaja x_τ joukossa X joukon A suhteen. Lisäksi pisteiden x_τ konvekssi verho sisältää simpleksin σ vahvan ϵ -todistajan x .*

Lauseen todistus tulee olemaan vahvasti algebrallinen ja se esitetään tämän luvun lopussa.

Seuraavista esimerkeistä 4.1 ja 4.2 nähdään, että funktio λ liittyy geodeettiseen metriikkaan d monotonisen muunnoksen kautta, kun metriikka d määritellään vastaavasti kuin otaksunan 4.1 kohdassa (ii). Siten on olemassa ekvivalenssi

$$\lambda(p, x) \leq \lambda(b, x) \quad \Leftrightarrow \quad d(p, x) \leq d(b, x).$$

Siis, kun virhetoleranssi $\epsilon = 0$, niin ϵ -todistajat ovat samat kuin määritelmien 3.1 ja 3.2 tarkat todistajat.

Esimerkki 4.1. (likimääräiset todistajat avaruudessa \mathbb{R}^n). Olkoot $p, x \in \mathbb{R}^n$. Määritellään, että

$$\lambda(p, x) = \frac{1}{2}|p - x|^2.$$

Tällöin epäyhtälö

$$\lambda(p, x) \leq \lambda(b, x) + \epsilon$$

on ekvivalentti epäyhtälön

$$\frac{1}{2}(|p|^2 - |b|^2) - \epsilon \leq (p - b) \cdot x,$$

joka on konvekksi ehto, kanssa. Epäyhtälöt ovat ekvivalentteja, koska

$$\begin{aligned} & \lambda(p, x) \leq \lambda(b, x) + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}|p - x|^2 \leq \frac{1}{2}|b - x|^2 + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(p - x) \cdot (p - x) \leq \frac{1}{2}(b - x) \cdot (b - x) + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(p \cdot p - p \cdot x - x \cdot p + x \cdot x) \leq \frac{1}{2}(b \cdot b - b \cdot x - x \cdot b + x \cdot x) + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(p \cdot p) - p \cdot x + \frac{1}{2}(x \cdot x) \leq \frac{1}{2}(b \cdot b) - b \cdot x + \frac{1}{2}(x \cdot x) + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(p \cdot p) + \frac{1}{2}(x \cdot x) - \frac{1}{2}(b \cdot b) - \frac{1}{2}(x \cdot x) - \epsilon \leq p \cdot x - b \cdot x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(p \cdot p - b \cdot b) - \epsilon \leq (p - b) \cdot x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(|p|^2 - |b|^2) - \epsilon \leq (p - b) \cdot x. \end{aligned}$$

Huomautus. [2, s. 50] Jos $\theta(p, x)$ on pisteiden $p, x \in S^n$ välinen geodeettinen etäisyys, niin $\cos(\theta(p, x)) = p \cdot x$.

Esimerkki 4.2. (likimääräiset todistajat pallossa S^n). Olkoot $p, x \in S^n$ sellaisia pisteitä, että $\theta(p, x) < \pi/2$, missä $\theta(p, x)$ on pisteiden p ja x välinen geodeettinen etäisyys. Määritellään, että

$$\lambda(p, x) = -\log(\cos(\theta(p, x))).$$

Tällöin epäyhtälö

$$\lambda(p, x) \leq \lambda(b, x) + \epsilon$$

on ekvivalentti epäyhtälön

$$(e^\epsilon p - b) \cdot x \geq 0,$$

joka on konvekksi ehto missä tahansa avoimessa pallonpuoliskossa S_+^n , kanssa.

Epäyhtälöt ovat ekvivalentteja, koska

$$\begin{aligned}
& \lambda(p, x) \leq \lambda(b, x) + \epsilon \\
\Leftrightarrow & -\log(\cos(\theta(p, x))) \leq -\log(\cos(\theta(b, x))) + \epsilon \\
\Leftrightarrow & -\log(p \cdot x) \leq -\log(b \cdot x) + \log e^\epsilon \\
\Leftrightarrow & 0 \leq -\log(b \cdot x) + \log e^\epsilon + \log(p \cdot x) \\
\Leftrightarrow & 0 \leq -\log(b \cdot x) + \log(e^\epsilon p \cdot x) \\
\Leftrightarrow & \log(b \cdot x) \leq \log(e^\epsilon p \cdot x) \\
\Leftrightarrow & b \cdot x \leq e^\epsilon p \cdot x \\
\Leftrightarrow & e^\epsilon p \cdot x - b \cdot x \geq 0 \\
\Leftrightarrow & (e^\epsilon p - b) \cdot x \geq 0.
\end{aligned}$$

Käytännössä kuitenkin ehdon $\theta(p, x)$ täyttämiseksi on operoitava n -ulotteisen pallon S^n osajoukossa, jonka halkaisija on enintään $\pi/2$.

Seuraus 4.1. *Likimääräisten heikkojen todistajien lause pätee n -ulotteisessa avaruudessa \mathbb{R}^n ja n -ulotteisen pallon S^n konvekseissa osajoukoissa, joiden halkaisijat ovat enintään $\pi/2$, kun käytetään edellisissä esimerkeissä 4.1 ja 4.2 määriteltyjä muunneltuja geodeettisia etäisyyksiä $\lambda(p, x)$.*

Palataan seuraavaksi tarkemmin likimääräisten heikkojen todistajien lauseen 4.1 todistamiseen. Lauseen todistus on samanlainen, kuin luvun 3 alaluvussa 3.3 esitetyn heikkojen todistajien lauseen 3.1 todistus. Suurin ero todistusten välillä on, että relaatio $=_\epsilon$ ei ole transitiivinen. Täten simpleksin σ alkioita eli pisteitä on käsiteltävä tarkasti myös silloin, kun toimitaan aliavaruuksissa. Yksi tällainen aliavaruus on esimerkiksi $H_\epsilon(p, b) = R_\epsilon(p, b) \cap R_\epsilon(b, p)$. Otetaan siis käyttöön seuraava abstrakti kehys. Tarkoituksena on käyttää ekvivalenssirelaatiota, jotta pisteet p ja b voidaan ”yhdistää” unohtamatta kumpaakaan.

Esitetään ennen abstraktin kehyksen muodostamista kuitenkin ekvivalenssirelaation ja ekvivalenssiluokan määritelmät.

Määritelmä 4.6. [7, s. 18] Olkoon X joukko ja olkoot $x, y, z \in X$. *Ekvivalenssirelaatio* \sim on joukon X alkioiden välinen relaatio, joka toteuttaa seuraavat kolme ominaisuutta:

- (i) $x \sim x$ kaikilla $x \in X$ (refleksiivisyys),
- (ii) jos $x \sim y$, niin $y \sim x$ (symmetrisyys),
- (iii) jos $x \sim y$ ja $y \sim z$, niin $x \sim z$ (transitiivisuus).

Määritelmä 4.7. [7, s. 19–20] Olkoon X joukko, \sim joukon X ekvivalenssirelaatio ja $x \in X$. *Ekvivalenssiluokka* $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ on joukon X osajoukko. Alkion x ekvivalenssiluokkaan $[x]$ kuuluvat siis kaikki ne joukon X alkio, jotka ovat ekvivalenssirelaatiossa alkion x kanssa.

Olkoon A joukko ja olkoon \sim joukon A ekvivalenssirelaatio. Käytetään joukosta A täten merkintää (A, \sim) . Kirjoitetaan, että simpleksi $\sigma \subseteq (A, \sim)$, jos simpleksi $\sigma \subseteq A$ on joukon A ekvivalenssiluokkien yhdiste. Oletetaan myös, että otaksuma 4.1 pätee. Simpleksin $\sigma \subseteq (A, \sim)$ heikko ϵ -todistaja joukon (A, \sim) suhteen on piste $x \in X$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

$$\begin{aligned} \lambda(p, x) =_{\epsilon} \lambda(b, x) & \quad \text{kaikilla } p, b \in A, \text{ kun } p \sim b, \\ \lambda(p, x) \leq_{\epsilon} \lambda(b, x) & \quad \text{kaikilla } p \in \sigma, b \in A \setminus \sigma. \end{aligned}$$

Olkoon sitten \approx relaatio, joka saadaan yhdistämällä ekvivalenssirelaation \sim eri ekvivalenssiluokat $[p_0]$ ja $[p_1]$ yhdeksi luokaksi $[[p_0]] = [[p_1]]$. Tärkeä huomio on, että jos simpleksi $\tau \subseteq (A, \approx)$, niin myös $\tau \subseteq (A, \sim)$.

Apulause 4.1. Olkoon edellisessä tilanteessa simpleksi $\tau \subseteq (A, \approx)$.

- (i) Jos simpleksi τ ei sisällä luokkaa $[[p_0]] = [[p_1]]$, niin määritellään simpleksit $\tau_0, \tau_1 \subseteq (A, \sim)$ siten, että $\tau_0 = \tau \cup [p_0]$ ja $\tau_1 = \tau \cup [p_1]$.
- (ii) Jos simpleksi τ sisältää luokan $[[p_0]] = [[p_1]]$, niin määritellään simpleksit $\tau_0, \tau_1 \subseteq (A, \sim)$ siten, että $\tau_0 = \tau \setminus [p_1]$ ja $\tau_1 = \tau \setminus [p_0]$.

Oletetaan, että simplekseillä τ, τ_0 ja τ_1 on heikot ϵ -todistajat x, x_0 ja x_1 joukon (A, \sim) suhteen. Tällöin simpleksillä τ on heikko ϵ -todistaja joukon (A, \approx) suhteen heikkojen ϵ -todistajien x, x_0 ja x_1 konveksissa verhossa.

Todistus. Todetaan ensinnäkin, että todistuksessa tarkastellaan molempia tapauksia (i) ja (ii) samaan aikaan lähes todistuksen loppuun saakka.

Yksi seuraavista tilanteista on pädevä pisteelle x :

$$(4.1) \quad \lambda(b_0, x) =_{\epsilon} \lambda(b_1, x) \quad \text{kaikilla } b_0 \in [p_0], b_1 \in [p_1],$$

$$(4.2) \quad \lambda(b_0, x) > \lambda(b_1, x) + \epsilon \quad \text{joillakin } b_0 \in [p_0], b_1 \in [p_1],$$

$$(4.3) \quad \lambda(b_1, x) > \lambda(b_0, x) + \epsilon \quad \text{joillakin } b_0 \in [p_0], b_1 \in [p_1].$$

Ensimmäinen tilanne 4.1 tarkoittaa suoraan, että piste x on simpleksin τ heikko ϵ -todistaja joukon (A, \approx) suhteen. Tarkastellaan siis toista tilannetta 4.2. Kolmannen tilanteen 4.3 tilanne käsiteltäisiin symmetrisesti, joten sitä ei tässä todistuksessa käydä läpi.

Joukko

$$R = \{z \in X \mid \lambda(b_0, z) \leq_{\epsilon} \lambda(b_1, z) \quad \text{kaikilla } b_0 \in [p_0], b_1 \in [p_1]\}$$

on suljettu. Tällöin $x_0 \in R$ ja $x \notin R$. Koska $\gamma(x, x_0)$ on yhtenäinen joukko, niin on olemassa piste $y \in \gamma(x, x_0)$, joka sisältyy sekä joukkoon R että joukon $\gamma(x, x_0) \setminus R$ sulkeumaan. Saadaan, että

$$\lambda(M_0, y) = \lambda(m_1, y) + \epsilon \quad \text{joillakin } M_0 \in [p_0], m_1 \in [p_1],$$

missä lisäksi $\lambda(M_0, y)$ on suurin arvoista $\lambda(b_0, y)$, missä $b_0 \in [p_0]$, ja $\lambda(m_1, y)$ on pienin arvoista $\lambda(b_1, y)$, missä $b_1 \in [p_1]$. Tämä tarkoittaa, että

$$\lambda(b_0, y) =_\epsilon \lambda(b_1, y) \quad \text{kaikilla } b_0 \in [p_0], b_1 \in [p_1].$$

Konveksisuuden nojalla nyt voidaan päätellä vastaavanlaisia väittämiä pisteestä y kuin pisteistä x ja x_0 aikaisemmin tehtiin. Erityisesti

$$\begin{aligned} \text{tapaukset (i) ja (ii): } \lambda(p, y) &=_\epsilon \lambda(b, y) && \text{kaikilla } p, b \in A, \text{ kun } p \sim b, \\ \text{tapaus (i): } \lambda(p, y) &\leq_\epsilon \lambda(b, y) && \text{kaikilla } p \in \tau, b \in A \setminus \tau, b \notin [p_0], \\ \text{tapaus (ii): } \lambda(p, y) &\leq_\epsilon \lambda(b, y) && \text{kaikilla } p \in \tau, b \in A \setminus \tau, p \notin [p_1]. \end{aligned}$$

Tapauksessa (i): jos $p \in \tau$ ja $b_0 \in [p_0]$, niin

$$\lambda(p, y) \leq \lambda(m_1, y) + \epsilon = \lambda(M_0, y) \leq \lambda(b_0, y) + \epsilon.$$

Täten $\lambda(p, y) \leq_\epsilon \lambda(b_0, y)$. Tapauksessa (ii): jos $c_1 \in [p_1]$ ja $b \in A \setminus \tau$, niin

$$\lambda(c_1, y) \leq \lambda(m_1, y) + \epsilon = \lambda(M_0, y) \leq \lambda(b, y) + \epsilon.$$

Täten $\lambda(c_1, y) \leq_\epsilon \lambda(b, y)$.

Näin ollen yhdistämällä edelliset väittämät saadaan, että piste y on simpleksin τ heikko ϵ -todistaja joukon (A, \approx) suhteen molemmissa tapauksissa (i) ja (ii). Lause on täten todistettu. \square

Esitetään tämän alaluvun lopuksi likimääräisten heikkojen todistajien lauseen 4.1 todistus.

Todistus lause 4.1. Tarkastellaan joukon A ekvivalenssirelaatioita, jotka ovat σ -tuettuja. Tämä tarkoittaa, että epätriviaali relaatio $p \sim b$ on sallittu vain, jos pisteet $p, b \in \sigma$. Lisäksi sanotaan, että ekvivalenssirelaatio \sim on σ -täydellinen, jos jokaisella epätyhjällä simpleksillä $\tau \subseteq \sigma$, missä $\tau \subseteq (A, \sim)$, on heikko ϵ -todistaja joukon (A, \sim) suhteen.

Olkoon relaatio \sim σ -tuettu ja σ -täydellinen. Olkoon myös \approx σ -tuettu relaatio, joka saatiin yhdistämällä simpleksin σ ekvivalenssirelaation \sim kaksi eri ekvivalenssiluokkaa yhdeksi ekvivalenssiluokaksi. Apulauseen 4.1 nojalla myös relaatio \approx on σ -täydellinen. Lauseen 4.1 otaksuma puolestaan väittää, että triviaali relaatio, missä $p \sim b$, jos ja vain jos $p = b$, on σ -täydellinen. Kun ekvivalenssirelaation \sim ekvivalenssiluokkien yhdistämistä jatketaan, niin äärellisen monen askeleen jälkeen voidaan päätellä, että maksimaalinen σ -tuettu relaatio \sim_σ , missä $p \sim_\sigma b$ kaikilla $p, b \in \sigma$, on itse σ -täydellinen. Erityisesti on olemassa simpleksin σ heikko ϵ -todistaja x joukon (A, \sim_σ) suhteen. Täten määritelmistä seuraa, että piste x on simpleksin σ vahva ϵ -todistaja joukon A suhteen. Lisäksi piste x sisältyy alkuperäisten heikkojen ϵ -todistajien konvekseen verhoon. Näin ollen lauseen 4.1 väite on todistettu. \square

5 Euklidisen pallon tarkastelua

Tarkastellaan luvussa 5 euklidisen pallon S^n tapausta, kun heikot ja vahvat todistajat määritellään sisäisen geodeettisen metriikan d perusteella. Luku pohjautuu de Silvan artikkeliin [1, s. 4–8] lukuihin 4 ja 5.

5.1 Lauseiden uudelleenmäärittelyä ja lisäehtoja

Käsitellään tässä alaluvussa erityisesti jo esitettyjen lauseiden 3.1 ja 3.2 tilanteita tarkemmin, kun tarkastellaan euklidista n -ulotteista palloa S^n . Kiinnitetään huomiota esitettävien lauseiden yksityiskohtiin.

Esitetään ensimmäisenä seuraava lause, joka on lauseen 3.1 epäsuora vastine, kun lauseen 3.1 väitettä heikennetään.

Huomautus. Käytetään seuraavassa lauseessa simpleksiin σ liittyvästä suljetusta euklidisesta kuulasta merkintää

$$\overline{B}_\sigma = \{b \in \mathbb{R}^n \mid d(a, b) \leq r\},$$

missä a on kuulan keskipiste ja r on kuulan säde.

Lause 5.1. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Oletetaan, että jokaista simpleksin σ alisimpleksiä $\tau \subseteq \sigma$ vastaa suljettu euklidinen kuula \overline{B}_τ , joka sisältää simpleksin τ kärjet ja jonka sisäpisteiden joukko ei sisällä muita joukon A pisteitä. Tällöin on olemassa suljettu euklidinen kuula \overline{B} , jonka reuna sisältää simpleksin σ kärjet ja jonka sisäpisteiden joukko ei leikkaa joukkoa A .*

Todistus. Suljetun euklidisen kuulan \overline{B}_τ olemassaolo vastaa simpleksin τ heikon todistajan x_τ olemassaoloa, sillä joko piste x_τ valitaan suljetun euklidisen kuulan \overline{B}_τ keskipisteeksi tai kääntäen suljettu euklidinen kuula \overline{B}_τ , jonka keskipiste on x_τ , on pienin suljettu euklidinen kuula, joka sisältää kaikki simpleksin τ kärjet. Vastaavasti suljetun euklidisen kuulan \overline{B} olemassaolo vastaa simpleksin σ vahvan todistajan olemassaoloa. Tällä tavalla lause 5.1 on yhtäpitävää lauseen 3.1 kanssa. \square

Euklidiselle n -ulotteiselle pallolle S^n saadaan nyt seuraava tulos.

Lause 5.2. *Olkoon $A \subseteq S^n$ ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Oletetaan, että jokaista simpleksin σ alisimpleksiä $\tau \subseteq \sigma$ vastaa suljettu euklidinen kuula \overline{B}_τ , joka sisältää simpleksin τ kärjet ja jonka sisäpisteiden joukko ei sisällä muita joukon A pisteitä. Oletetaan lisäksi, että suljettujen metrinen kuulien joukko $\{\overline{B}_\tau \mid \tau \text{ on simpleksin } \sigma \text{ alisimpleksi}\}$ ei peitä koko n -ulotteista palloa S^n . Tällöin on olemassa suljettu metrinen kuula \overline{B} , jonka reuna sisältää simpleksin σ kärjet ja jonka sisäpisteiden joukko ei leikkaa joukkoa A .*

Todistus. Olkoon $s \in S^n \setminus \bigcup \{ \overline{B}_\tau \mid \tau \text{ on simpleksin } \sigma \text{ alisimpleksi} \}$. Tarkastellaan alkioita s avaruuden \mathbb{R}^{n+1} vektorina. Olkoon $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ hypertaso, joka on kohtisuorassa vektoria s vastaan. On tunnettua, että stereografinen projektio $S^n \setminus \{s\} \rightarrow V$ kuvaa pallon S^n ne suljetut metriset pallot, jotka eivät sisällä pistettä s , avaruuden V suljetuille euklidisille palloille. Vastaavuus on bijektii-
vinen. Tämän vastaavuuden nojalla lause 5.2 on ekvivalentti edellisen lauseen 5.1 kanssa. \square

Edellinen lause 5.2 on itseasiassa kuitenkin epätos i ilman lisäehtoa, joka esitetään seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 5.1. Olkoot navat $n, s \in S^2$. Olkoot lisäksi pisteet p_1, \dots, p_k 2-ulotteisen pallon S^2 leveysasteen C ympyrän pisteitä, sekä olkoon piste $p_0 \in S^2$ mikä tahansa leveysasteen C pohjoispuolella sijaitseva piste. Tällöin jokaisella simpleksin $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ alisimpleksillä τ on heikko todistaja, sillä jos $p_0 \in \tau$, niin n on alisimpleksin τ heikko todistaja, ja jos $p_0 \notin \tau$, niin s on alisimpleksin τ heikko sekä myös vahva todistaja. Lisäksi leveysaste C jakaa pallon kahteen kalottiin, ja nämä kalotit yhdessä muodostavat 2-ulotteisen pallon S^2 . Näin ollen, jos $k \geq 3$, niin simpleksillä σ ei ole vahvaa todistajaa.

Lauseen 3.2 todistus ei myöskään päde, koska n -ulotteinen pallo S^n ei ole konvekksi joukko. Nimittäin, ei ole olemassa yksikäsitteistä lyhyintä geodeesia eli polkua n -ulotteisen pallon S^n antipodisten pisteiden välillä. Koska erityisesti 0-ulotteinen pallo S^0 ei ole polkuyhtenäinen, niin ei ole olemassa edes yhtä geodeesia, joka sisältäisi sisäpisteen, sillä 0-ulotteinen pallo S^0 sisältää vain kaksi pistettä, jotka ovat juurikin antipodiset pisteet. Induktiivinen väite kuitenkin pätee, kun tarkastellaan n -ulotteisen pallon S^n osapalloja, jotka ovat peräkkäin pienempiulotteisia. Tällöin 0-ulotteisen pallon S^0 tapaus on väistämätön, kun $k > n$.

Esitetään vielä seuraus.

Seuraus 5.1. *Oletetaan, että joukko $A = \{a_0, \dots, a_{n+1}\} \subseteq S^n$ ei sisälly r -säteiseen $(n-1)$ -ulotteiseen palloon millään $r > 0$. Oletetaan lisäksi, että jokaista osajoukkoa $J \subseteq A$ vastaa suljettu metrinen kuula \overline{B}_J , joka sisältää joukon J ja jonka sisäpisteiden joukko ei leikkaa joukkoa $A \setminus J$. Tällöin suljetut metriset kuulat \overline{B}_J peittävät n -ulotteisen pallon S^n . \square*

5.2 Heikkojen todistajien lause euklidisessa pallossa

Todistetaan seuraavaksi heikkojen todistajien lausetta euklidisessa avaruudessa 3.1 muistuttava väite. Oleellista lauseessa 5.3 on, että tarkastellaan tilannetta euklidisen n -ulotteisen pallon S^n tapauksessa ja että joukko $A \subseteq S^n$ on yleinen äärellinen joukko. Todistuksen mahdollistamiseksi todistetaan ensin kolme muuta lausetta, sekä esitellään uusi määritelmä, vankka todistaja.

Huomautus. Olkoon A n -ulotteisen pallon S^n osajoukko. Joukkoa A kutsutaan yleiseksi, kun seuraava väite pätee: jos $m < n$, niin joukon A mikään osajoukko, jossa on $m+3$ pistettä, ei sisälly r -säteiseen m -ulotteiseen palloon millään $r > 0$.

Lause 5.3. Oletetaan, että A on n -ulotteisen pallon S^n yleinen äärellinen osajoukko ja että $k \leq n$. Silloin k -simpleksillä $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$, on vahva todistaja, jos ja vain jos simpleksin σ jokaisella alisimpleksillä τ on heikko todistaja.

Siispä, jos joukko $A \subseteq S^n$ on yleinen, niin heikkoja todistajia voidaan käyttää sen Delaunayn kolmioinnin määrittelyä n -ulotteisessa pallossa S^n oikein n -rankaan asti. Toisaalta todellinen Delaunayn kolmiointi on enintään n -ulotteinen, jos A on yleinen, koska $(n+1)$ -solun olemassaolo tarkoittaisi, että sen $n+2$ kärkeä sijaitisivat jollakin $(n-1)$ -ulotteisella pallolla. Siis toisin sanoen, kun A on yleinen äärellinen joukko, niin ei ole olemassa soluja siten, että $k > n$, missä k on simpleksin, jonka kärjet kuuluvat joukkoon A , dimensio. Tällöin $\text{Del}(A)$ on joukon A konveksin verhon geometrinen realisaatio. Näin ollen, kun A on yleinen joukko, niin sen Delaunayn kolmiointi n -ulotteisessa pallossa S^n on yhtäpitävää kompleksin, joka on määritelty käyttäen heikkoja todistajia, n -rangan kanssa.

Esitetään seuraavaksi vankan todistajan määritelmä.

Määritelmä 5.1. Olkoon $A \subseteq S^n$, missä S^n on n -ulotteinen euklidinen pallo, ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Alkio $x \in S^n$ on k -simpleksin σ *vankka todistaja* joukon A suhteen, jos sillä on olemassa ympäristö, jonka jokainen alkio on simpleksin σ heikko todistaja joukon A suhteen.

Seuraava lause selventää määritelmän 5.1 tilannetta.

Lause 5.4. Olkoon $A \subseteq S^n$ äärellinen joukko, missä $n \geq 1$, ja olkoon $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Tällöin $x \in S^n$ on simpleksin σ *vankka todistaja*, jos ja vain jos epäyhtälö $d(x, p) < d(x, b)$ pätee kaikilla $p \in \{p_0, \dots, p_k\}$ ja $b \in A \setminus \{p_0, \dots, p_k\}$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $x \in S^n$ on simpleksin $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ vankka todistaja, $p \in \{p_0, \dots, p_k\}$ ja $b \in A \setminus \{p_0, \dots, p_k\}$. Oletetaan lisäksi, että $d(x, p) = d(x, b) < \pi$. Yhtäpitävyys $d(x, p) = d(x, b) = \pi$ ei voi päteä, sillä pisteellä x on olemassa vain yksi antipodi eli vastakkainen piste n -ulotteisessa pallossa S^n . Olkoon piste $y \neq x, b$ minimaalisen geodeesin $[x, b]$ mikä tahansa piste. Tällöin $d(y, b) = d(x, b) - d(x, y)$, mutta $d(y, p) > d(x, p) - d(x, y)$, koska y ei ole minimaalisen geodeesin $[x, p]$ piste. Näin ollen epäyhtälö $d(y, p) > d(y, b)$ pätee joillekin pisteille y , jotka ovat mielivaltaisen lähellä pistettä x . Mutta tämä aiheuttaa ristiriidan, koska x on vankka todistaja. Siis on oltava, että epäyhtälö $d(x, p) < d(x, b)$ pätee kaikissa tapauksissa.

Oletetaan sitten, että epäyhtälö $d(x, p) < d(x, b)$ pätee jokaisella pisteellä $p \in \{p_0, \dots, p_k\}$ ja $b \in A \setminus \{p_0, \dots, p_k\}$. Huomataan, että epäyhtälön $d(x, p) < d(x, b)$ toteuttavat pisteet x muodostavat avoimen joukon. Tällaisia epäyhtälöitä on äärellisen monta. Jos piste x toteuttaa kaikki epäyhtälöt, niin silloin pisteellä x on sellainen ympäristö, että myös kaikki ympäristön pisteet toteuttavat samat epäyhtälöt. Näin ollen $x \in S^n$ on simpleksin σ vankka todistaja. \square

Lause 5.5. *Olkoon $A \subseteq S^n$, $k \leq n$ ja $\sigma = [p_0, \dots, p_k]$ k -simpleksi, jonka kärjet $p_0, \dots, p_k \in A$. Jos jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä $\tau \subseteq \sigma$ on vankka todistaja, niin simpleksillä σ on vahva todistaja.*

Todistus. Olkoon $\sigma_t = [p_t, p_{t+1}, \dots, p_k]$ simpleksi ja olkoon $A_t = A \setminus \{p_i \mid i < t\}$, kun $t = 0, 1, \dots, k$. Olkoon lisäksi H_t yhtälöiden $d(x, p_0) = \dots = d(x, p_t)$ määrittelemä pallo. Huomataan, että $\dim(H_t) \geq n - t$.

Osoitetaan sitten näyttämällä induktiolla muuttujan t suhteen, että jokaisella simpleksin σ_t alisimpleksillä τ on vankka todistaja $x_\tau \in H_t$ joukon A_t suhteen.

Induktion peruskaskel on triviaali, sillä kun $t = 0$, niin kyseessä on suoraan oletus. Myös tapaus $t = k$ on selvä, sillä simpleksin $[p_k]$ todistaja $x \in H_k$ joukon A_k suhteen on simpleksin σ vahva todistaja.

Oletetaan sitten, että väite on todistettu jollekin t , jolle pätee $t < k$. Tällöin jokaisella simpleksin σ_t alisimpleksillä τ on vankka todistaja $x_\tau \in H_t$ joukon A_t suhteen. Lisäksi voidaan olettaa, että mitkään kaksi vankkaa todistajaa x_τ eivät ole antipodisia, sillä $\dim(H_t) \geq 1$, jolloin pisteitä x_τ voidaan "häiritä" tämän toteuttamiseksi. Käytetään seuraavaksi lauseen 3.2 todistuksen perustelua simpleksin σ_{t+1} alisimpleksien τ' heikkojen todistajien $y_{\tau'} \in H_{t+1}$ löytämiseksi joukon A_{t+1} suhteen. Jos epäyhtälö $d(x, p) \leq d(x, b)$ toteutuu pisteiden x_0 ja x_1 , jotka eivät ole antipodisia, ympäristössä, niin se toteutuu myös minimaalisen geodeesin eli välin $[x_0, x_1]$ ympäristössä. Siten uudet heikot todistajat $y_{\tau'}$ ovat myös vankkoja todistajia. Induktioaskel on täten saatu päätökseen. \square

Toisaalta, jos joukko A on yleinen, niin heikoista todistajista voidaan muodostaa vankkoja todistajia.

Apulause 5.1. Oletetaan, että $A \subseteq S^n$ on äärellinen joukko, jolle pätee jokaisella $k < n$, että joukon A mikään osajoukko, jossa on $k + 3$ pistettä, ei sisälly k -ulotteiseen palloon. Olkoon σ simpleksi, jonka kärjet kuuluvat joukkoon A . Jos simpleksillä σ on heikko todistaja, niin simpleksillä σ on myös vankka todistaja.

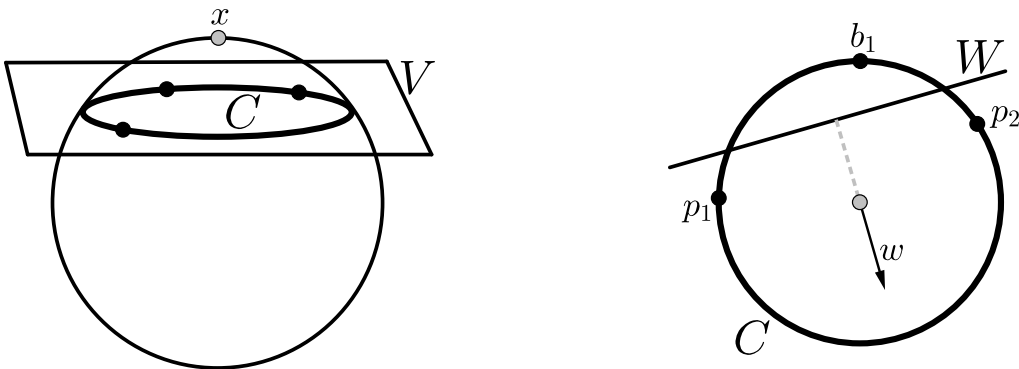
Todistus. Olkoon x simpleksin σ heikko todistaja. Jos x ei ole vankka todistaja, niin on olemassa sellaiset joukon A pisteet p_1, \dots, p_k ja b_1, \dots, b_t , että p_1, \dots, p_k ovat simpleksin σ kärkiä, mutta b_1, \dots, b_t eivät ole simpleksin σ kärkiä. Pisteille pätee $d(x, p_1) = \dots = d(x, p_k) = d(x, b_1) = \dots = d(x, b_t)$. Tällöin kaikki nämä edelliset pisteet kuuluvat $(n - 1)$ -ulotteiseen palloon C , jonka keskipiste on x . Muiden simpleksin σ kärkien voidaan olettaa olevan pallon C sisäpuolella, ja loppujen joukon A pisteiden voidaan olettaa olevan pallon C ulkopuolella. Tällöin pätee ehto $k + t < n + 2$.

Koska n -ulotteinen pallo S^n on avaruuden \mathbb{R}^{n+1} aliavaruus, niin oletetaan, että joukko $C = V \cap S^n$ määrittelee n -tason V . Tämä eli n -taso V voidaan luonnollisesti tunnistaa n -ulotteisen pallon S^n pisteen x tangenttiavaruudeksi. Muodostetaan seuraavaksi vektori $w \in V$, ja näytetään, että pienelle häiriölle $x' = x + \epsilon w + O(\epsilon^2)$ pätee jokaisella i ja j tiukka epäyhtälö $d(x', p_i) < d(x', b_j)$.

Kun ϵ on tarpeeksi pieni, niin muilla joukon A pisteillä merkitykselliset epäyhtälöt pysyvät muuttumattomina. Täten x' on vaadittu vankka todistaja.

Väitetään sitten, että joukon $\{p_1, \dots, p_k, b_1, \dots, b_t\}$ konvekssi verho on n -tasoon V upotettu $(k + t - 1)$ -simpleksi. Jos väite ei pitäisi paikkansa, niin tällöin $k + t$ pistettä olisivat avaruuden \mathbb{R}^n $(k + t - 2)$ -ulotteisessa affiinissa avaruudessa ja siten myös n -ulotteiseen palloon S^n sisältyvässä $(k + t - 3)$ -ulotteisessa pallossa. Tämä aiheuttaa ristiriidan oletuksen kanssa. Tästä seuraa, että joukkojen $\{p_1, \dots, p_k\}$ ja $\{b_1, \dots, b_t\}$ konvekssit verhot ovat erillisiä eli toisin sanoen ne eivät leikkaa, joten $(n-1)$ -ulotteinen hypertaso W erottaa ne. Olkoon vektori w siten $(n-1)$ -ulotteisen hypertason W , joka on n -tason V aliavaruus, yksikkönormaalivektori, joka osoittaa kohti puoliavaruutta, joka sisältää pisteet p_i . Katso kuva 5.1.

Määritetään vielä, mikä vaikutus häiriöllä on etäisyyksiin. Yksinkertaisin tapa on laskea neliöidyn euklidisen etäisyysfunktion $f_a: \epsilon \mapsto |x + \epsilon w - a|^2$ derivaatta, nimittäin $f'_a(0) = -2\langle w, a \rangle$, koska $\langle w, x \rangle = 0$. Koska vektori w valittiin erottavan $(n-1)$ -ulotteisen hypertason W yksikkönormaalivektoriksi, niin voidaan johtaa epäyhtälö $f'_{p_i}(0) - f'_{b_j}(0) = 2\langle w, b_j - p_i \rangle < 0$, joka pätee jokaisella i ja j . Näin ollen riittävän pienellä muuttujan ϵ arvolla pätee epäyhtälö $|x' - p_i|^2 < |x' - b_j|^2$ ja täten myös epäyhtälö $d(x', p_i) < d(x', b_j)$, koska näiden kahden etäisyysfunktion välillä on monotoninen riippuvuus. Lause on täten todistettu. \square



Kuva 5.1. Vasemmalla leveysasteen C määrittelemä n -taso V , ja oikealla erottava hypertaso W määrää sopivan häiriön x' suunnan.

Esitetään sitten tämän alaluvun ensimmäisen lauseen 5.3 todistus.

Todistus lause 5.3. Todistus koostuu kolmen implikaation ketjusta. Ensinnäkin, koska simpleksillä σ on vahva todistaja, niin jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä τ on heikko todistaja. Tällöin apulauseen 5.1 nojalla jokaisella simpleksin σ alisimpleksillä τ on myös vankka todistaja. Täten, koska $k \leq n$ oletuksen nojalla, niin lauseen 5.5 nojalla simpleksillä σ on vahva todistaja. Näin ollen lauseen 5.3 väite on todistettu. \square

6 Muita simpleksisiä komplekseja

Esitetään tässä luvussa kolme erilaista abstraktia simpleksistä kompleksia, joiden määritelmässä keskeistä on pisteiden väliset etäisyydet ja joukkojen leikkaukset. Joukkojen leikkauksiin liittyen esitetään ensin Radonin ja Hellyn lauseet ensimmäisessä alaluvussa 6.1.

6.1 Radonin ja Hellyn lauseet

Tarkastellaan aluksi joukkoja, joiden leikkauksilla on yhteisiä pisteitä. Olkoon F äärellinen kokoelma avaruuden \mathbb{R}^n konvekseja osajoukkoja. Mitä pienempi euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n dimensio eli ulottuvuus n on, sitä rajoitetumpia joukkojen leikkaukset ovat. Esimerkiksi, jos dimensio $n = 1$ ja kolme avaruuden \mathbb{R}^1 väliä leikkaavat pareittain, niin ei ole mahdollista, että näillä kolmella joukolla ei olisi yhteistä epätyhjää leikkausta. Tämä tulos yleistyy korkeampiin ulottuvuuksiin. Todistetaan kuitenkin ensin Radonin lause.

Lause 6.1 (Radonin lause). *Olkoot x_1, \dots, x_{n+2} avaruuden \mathbb{R}^n eri pisteitä. Tällöin joukolla $\{x_1, \dots, x_{n+2}\}$ on sellainen ositus $\{S, T\}$, että $[S] \cap [T] \neq \emptyset$, missä $[S]$ ja $[T]$ ovat joukkojen S ja T konveksit verhot.*

Todistus (vrt. [5, s. 22] tai [6, s. 102–103]). Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä ja ratkaistaan niiden avulla tuntemattomat reaalityöt $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+2} x_{n+2} = 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+2} = 0 \end{cases}$$

Koska jokaiselle koordinaatille on yksi yhtälö, niin edellisen yhtälöparin alimmainen yhtälö mukaan lukien yhtälöitä on yhteensä $n + 1$. Koska yhtälöitä on $n + 1$ ja tuntemattomia on $n + 2$, on yhtälöryhmällä epätriviaali ratkaisu $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2})$. Täten voidaan olettaa, että

$$0 > \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq 0 \leq \alpha_{k+1} \leq \dots \leq \alpha_{n+2} > 0,$$

jollakin $k \in \{1, \dots, n + 1\}$. Tällöin

$$-\alpha_1 - \dots - \alpha_k = \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n+2} > 0.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} p &= \frac{-\alpha_1}{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_k}{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)} x_k \\ &= \frac{\alpha_{k+1}}{(\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n+2})} x_{k+1} + \dots + \frac{\alpha_{n+2}}{(\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n+2})} x_{n+2} = q. \end{aligned}$$

Olkoon $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ ja $T = \{x_{k+1}, \dots, x_{n+2}\}$. Tällöin $p \in [S]$ ja $q \in [T]$. Koska $p = q$, on oltava, että $[S] \cap [T] \neq \emptyset$. \square

Lause 6.2 (Hellyn lause). *Olkoon $F = \{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ äärellinen kokoelma avaruuden \mathbb{R}^n konvekseja osajoukkoja ja olkoon $|F| = m \geq n + 1$. Oletetaan, että kaikilla kokoelman F joukoilla, joita on $n + 1$, on yhteinen epätyhjä leikkaus. Tällöin kaikilla kokoelman F joukoilla on yhteinen epätyhjä leikkaus, $\bigcap_{i=1}^m \Omega_i \neq \emptyset$.*

Todistus (vrt. [6, s. 103]). Todistetaan väite kokoelman F konveksien joukkojen lukumäärän m suhteen. Lause pätee selvästi, kun $m = n + 1$. Oletetaan sitten, että väite pätee, kun $|F| = m \geq n + 1$. Olkoon $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m, \Omega_{m+1}\}$ sellainen kokoelma avaruuden \mathbb{R}^n konvekseja osajoukkoja, että mitkä tahansa sen $n + 1$ joukkoa leikkaavat siten, että joukkojen yhteinen leikkaus on epätyhjä. Kun $i = 1, \dots, m + 1$, määritellään seuraavasti:

$$\Theta_i = \bigcap_{j=1, j \neq i}^{m+1} \Omega_j.$$

Huomataan, että $\Theta_i \subseteq \Omega_j$ aina, kun $j \neq i$ ja $i, j = 1, \dots, m + 1$. Oletuksen nojalla saadaan, että $\Theta_i \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa alkio $\omega_i \in \Theta_i$ jokaisella $i = 1, \dots, m + 1$. Käytetään alkioiden ω_i joukosta merkintää $W = \{\omega_1, \dots, \omega_{m+1}\}$. Radonin lauseen 6.1 nojalla saadaan, että on olemassa kaksi joukon W epätyhjää erillistä osajoukkoa $W_1 = \{\omega_i \mid i \in I_1\}$ ja $W_2 = \{\omega_i \mid i \in I_2\}$, missä $I_1 \cup I_2 = I = \{1, \dots, m + 1\}$, siten, että $[W_1] \cap [W_2] \neq \emptyset$ ja $W = W_1 \cup W_2$. Täten voidaan valita alkio $\omega \in [W_1] \cap [W_2]$ ja osoittaa, että alkio $\omega \in \bigcap_{i=1}^{m+1} \Omega_i$. Koska $i \neq j$, kun $i \in I_1$ ja $j \in I_2$, niin tällöin $\Theta_j \subseteq \Omega_i$ aina, kun $i \in I_1$ ja $j \in I_2$. Kun indeksi $i = 1, \dots, m + 1$ kuuluu joukkoon I_1 , niin tällöin pätee, että $\omega_j \in \Theta_j \subseteq \Omega_i$ jokaisella $j \in I_2$. Näin ollen joukon Ω_i konveksisuuden nojalla $\omega \in [W_2] = [\{\omega_j \mid j \in I_2\}] \subseteq \Omega_i$. Tämä osoittaa, että $\omega \in \Omega_i$ jokaisella $i \in I_1$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\omega \in \Omega_i$ jokaisella $i \in I_2$. Lause on siis todistettu. \square

6.2 Čechin kompleksi ja Vietorisin-Ripsin kompleksi

Heikkojen ja vahvojen todistajien määritelmässä on kyse pisteiden välisistä etäisyyksistä. Tutkielmassa on käsitelty todistajia ja simpleksejä erilaisissa avaruuksissa ja tilanteissa. Erityisesti Delaunayn kolmiointi on kulkenut koko ajan mukana, sillä kuten on todettu, se voidaan määritellä heikkojen ja vahvojen todistajien avulla. Delaunayn kompleksit ovat yleensä sopivan harvoja kooltaan, jolloin niitä on helpompi käsitellä laskelmissa kuin monia muita simpleksisiä komplekseja. Esitetään seuraavaksi Delaunayn kolmiointia kooltaan suuremmat simpleksiset kompleksit: Čechin kompleksi ja Vietorisin-Ripsin kompleksi. Näitä komplekseja on usein vaikea käsitellä käytännössä, kun pisteiden lukumäärä kasvaa. Esimerkiksi muutaman tuhannen pisteen Čechin tai Vietorisin-Ripsin kompleksit voivat sisältää kolmioita eli 2-simpleksejä jopa miljoonia. Keskeistä näidenkin simpleksisten kompleksien määritelmässä on etäisyydet, erityisesti suljettujen kuulien säteen pituus, simpleksin halkaisijan pituus sekä joukkojen

leikkaukset. Alaluku perustuu Deyn & Wangin kirjaan [3, s. 27–29] ja Edelsbrunnerin & Harerin kirjaan [4, s. 72–75].

Esitetään ensin Čechin kompleksi, joka on eräänlainen erikoistapaus konveksien joukkojen leikkauksista, missä joukot ovat suljettuja euklidisia kuulia samalla säteellä r .

Määritelmä 6.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon A avaruuden X äärellinen osajoukko. Olkoon myös $r > 0$. Joukon A Čechin kompleksi parametrilla r on simpleksinen kompleksi

$$\check{C}ech(r) = \mathbb{C}^r(A) = \left\{ \sigma \subseteq A \mid \bigcap_{p \in \sigma} \overline{B}_d(p, r) \neq \emptyset \right\},$$

missä $p \in A$ on kuulan keskipiste ja r on kuulan säde siten, että r on sama jokaisessa kuulassa. Čechin kompleksin kärkijoukko on siis A ja siihen kuuluvat simpleksit jokaista äärellistä osajoukkoa $\sigma \subseteq A$ kohti, jolle pätee $\bigcap_{p \in \sigma} \overline{B}_d(p, r) \neq \emptyset$.

Oletetaan seuraavaksi, että $X = \mathbb{R}^n$ ja d on avaruuden \mathbb{R}^n euklidinen metriikka. Ensinnäkin on selvää, että suljetuilla euklidisilla kuulilla $\overline{B}_d(p, r)$ on yhteinen epätyhjä leikkaus, jos ja vain jos suljettujen euklidisten kuulien keskipisteet kuuluvat saman säteen omaavaan yhteiseen suljettuun kuulaan. Tällöin siis piste x kuuluu jokaiseen suljettuun euklidiseen kuulaan, jos ja vain jos $d(p, x) \leq r$ kaikilla keskipisteillä $p \in A$. Helppo seuraus aiemmin todistetusta Hellyn lauseesta 6.2 on täten, että joukon A mitkä tahansa $n + 1$ pistettä sisältyvät yhteiseen r säteiseen suljettuun euklidiseen kuulaan, jos ja vain jos kaikki joukon A pisteet sisältyvät kyseiseen yhteiseen r säteiseen suljettuun euklidiseen kuulaan. Tämä seuraus on Jungin lause, joka edeltää Hellyn lauseen yleisempää muotoa. Jungin lauseessa siis jokaista äärellisen joukon A pistettä vastaa suljettu euklidinen kuula. Koska suljetut euklidiset kuulat ovat konvekseja joukkoja, niin suljetut euklidiset kuulat muodostavat Hellyn lauseen mukaisen avaruuden \mathbb{R}^n konveksien osajoukkojen äärellisen kokoelman. Täten väite, että joukon A mitkä tahansa $n + 1$ pistettä sisältyvät yhteiseen r säteiseen suljettuun euklidiseen kuulaan, tarkoittaa edellä mainitun nojalla toisin sanoen sitä, että pisteitä, joita on $n + 1$, vastaavien suljettujen euklidisten kuulien yhteinen leikkaus on epätyhjä. Edellinen väite pätee, jos ja vain jos kaikki joukon A pisteet sisältyvät kyseiseen yhteiseen r säteiseen suljettuun euklidiseen kuulaan, mikä tarkoittaa toisin sanoen sitä, että kaikkien joukon A pisteitä vastaavien suljettujen euklidisten kuulien yhteinen leikkaus on epätyhjä.

Čechin kompleksilla ei välttämättä ole geometrista realisaatiota avaruudessa \mathbb{R}^n . Geometrisen lauseen 2.1 mukaan geometrinen realisaatio kuitenkin löytyy avaruudessa \mathbb{R}^{2n+1} , kun n on Čechin kompleksin dimensio. Toisaalta on myös selvää, että mitä suurempi suljettujen euklidisten kuulien säde r on, sitä enemmän kuulat menevät päällekkäin eli toisin sanoen leikkaavat toisiaan. Näin ollen $\check{C}ech(r_0) \subseteq \check{C}ech(r)$ aina, kun $r_0 \leq r$.

Esitetään sitten Vietorisin-Ripsin kompleksin määritelmä, joka liittyy läheisesti Čechin kompleksiin.

Määritelmä 6.2. Olkoon (X, d) äärellinen metrinen avaruus ja olkoon $r > 0$. Joukon X Vietorisin-Ripsin kompleksi parametrilla r on simpleksinen kompleksi

$$\text{Vietoris-Rips}(r) = \mathbb{V}\mathbb{R}^r(X) = \{\sigma \subseteq X \mid \sigma \text{ on äärellinen ja } \text{diam}(\sigma) \leq 2r\}.$$

Vietorisin-Ripsin kompleksin kärkijoukko on siis X ja siihen kuuluvat simpleksit jokaista äärellistä osajoukkoa $\sigma \subseteq X$ kohti, jolle pätee $\text{diam}(\sigma) \leq 2r$.

Oletetaan edelleen, että $X = \mathbb{R}^n$ ja d on avaruuden \mathbb{R}^n euklidinen metriikka. Huomioitavaa on, että Vietorisin-Ripsin kompleksin 1-ranka itseasiassa määrittää kaikki sen simpleksit, sillä joukon halkaisija on aina kahden pisteen etäisyys toisistaan. Selvää on myös, että Vietorisin-Ripsin kompleksin ja Čechin kompleksin 1-rangot ovat samat, kun säde eli parametri r on sama kummassakin kompleksissa. Lisäksi tällöin pätee, että $\check{C}ech(r) \subseteq \text{Vietoris-Rips}(r)$, koska Vietorisin-Ripsin kompleksi sisältää kaikki ne k -simpleksit, jonka kaikki 1-sivut kuuluvat Vietorisin-Ripsin kompleksiin, kun $k \geq 2$. Toisin sanoen, jos suljetujen euklidisten kuulien $\overline{B}_d(p_i, r)$ leikkauksessa $\bigcap_{i=1}^k \overline{B}_d(p_i, r)$ on piste x , niin pisteiden p_i ja p_j välinen etäisyys $d(p_i, p_j)$ kaikilla i ja j , kun $1 \leq i$ ja $j \leq k$, on enintään $2r$. Tällöin jokainen simpleksi $\sigma = [p_i, \dots, p_k]$, joka kuuluu Čechin kompleksiin, kuuluu myös Vietorisin-Ripsin kompleksiin.

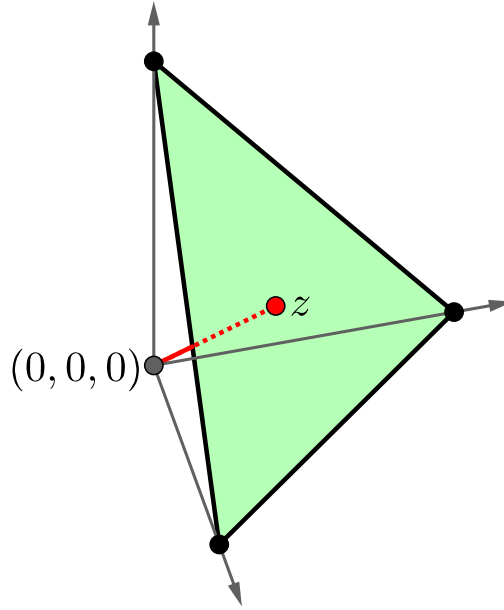
Todistetaan seuraavaksi Vietorisin-Ripsin lause, jonka mukaan Vietorisin-Ripsin kompleksi voi myös olla Čechin kompleksin osajoukko, jos Čechin kompleksin sädettä eli parametria r kasvatetaan kertomalla se vakiolla.

Lause 6.3 (Vietorisin-Ripsin lause). *Olkoon A euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n äärellinen osajoukko ja olkoon $r \geq 0$. Silloin $\text{Vietoris-Rips}(r) \subseteq \check{C}ech(\sqrt{2}r)$.*

Todistus. Simpleksi on säännöllinen, jos sen kaikki 1-sivut eli 1-simpleksit ovat yhtä pitkiä. Kätevä esitys dimensiolle eli ulottuvuudelle n on *standardi n -simpleksi* Δ^n , joka on avaruuden \mathbb{R}^{n+1} tavallisten kantavektoreiden

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

konveksi verho. Näiden kantavektoreiden pituus on siis 1. Katso alla oleva kuva.



Kuva 6.1. Standardi 2-simpleksi Δ^2 yhdistää avaruuden \mathbb{R}^3 tavalliset kantavektorit.

Tällöin jokaisen standardi n -simpleksin Δ^n 1-sivun eli 1-simpleksin pituus on $\sqrt{2}$. Symmetrian nojalla origon etäisyys standardi simpleksistä Δ^n on sen etäisyys standardi simpleksin barysentristä eli painopisteestä z , jonka jokaiset $n + 1$ koordinaattia ovat pituudeltaan $1/(n + 1)$. Painopisteen z pituus on täten $\|z\| = d(z, 0) = 1/\sqrt{n + 1}$. Painopiste z on myös pienimmän n -ulotteisen standardi n -simpleksin jokaisen kärjen kautta kulkevan pallon S^n keskipiste. Kun r_n on edellisen n -ulotteisen pallon S^n säde, niin saadaan, että $r_n^2 = 1 - \|z\|^2 = n/(n + 1)$. Jos dimensio $n = 1$, niin $n/(n + 1)$ on todella puolet välin pituudesta. Jos puolestaan dimensio $n = 2$, niin $n/(n + 1)$ on tasasivuisen kolmion kärkien kautta kulkevan ympyrän säteen pituus. Kun dimensio n kasvaa kohti ääretöntä, niin sädekin r_n kasvaa ja lähestyy lukua yksi. Siten jokaisella joukolla, jossa on $n + 1$ tai vähemmän pisteitä ja jolla on sama r_n säteinen n -ulotteinen kuula minikuulanaan, on alkiot, joiden etäisyys on $\sqrt{2}$ tai suurempi. Minikuulalla tarkoitetaan tässä siis yksikäsitteistä pienintä suljettua kuulaa, joka sisältää edellä mainitun joukon, jossa on $n + 1$ tai vähemmän pisteitä. Tästä seuraa, että jokainen simpleksi, jonka halkaisija on $\sqrt{2}$ tai vähemmän, kuuluu Čechin kompleksiin $\check{C}ech(r_n)$. Kertomalla säde r_n luvulla $\sqrt{2}r$ saadaan, että $Vietoris-Rips(r) \subseteq \check{C}ech(\sqrt{2}rr_n)$. Mutta, koska $r_n \leq 1$ kaikilla n , niin $\check{C}ech(\sqrt{2}rr_n)$ on Čechin kompleksin $\check{C}ech(\sqrt{2}r)$ alikompleksi. Näin ollen $Vietoris-Rips(r) \subseteq \check{C}ech(\sqrt{2}r)$. \square

6.3 Alfa-kompleksi

Kun suljetun euklidisen kuulan säteelle annetaan jokin arvo, voidaan määrittellä seuraava Delaunayn kolmioinnin alikompleksi. Alaluku perustuu Deyn & Wangin kirjaan [3, s. 30] ja Edelsbrunnerin & Harerin kirjaan [4, s. 83].

Määritelmä 6.3. Olkoon A äärellinen euklidisen avaruuden (\mathbb{R}^n, d) osajoukko ja olkoon $r \geq 0$. *Alfa-kompleksi* $\text{Alfa}(r)$ on Delaunayn kolmioinnin $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n)$ alikompleksi, joka sisältää kaikki ne Delaunayn kolmioinnin $\text{Del}(A, \mathbb{R}^n)$ simpleksit, joita ympäröi korkeintaan r säteinen suljettu kuula.

Alfa-kompleksi muistuttaa selvästi edellisen alaluvun 6.2 Čechin kompleksia. Ne kuitenkin eroavat toisistaan geometrisen realisaation toteutumisen osalta.

Tarkastellaan tarkemmin alfa-kompleksin määritelmää. Olkoon edelleen A äärellinen avaruuden \mathbb{R}^n osajoukko ja olkoon $r \geq 0$. Merkitään kaikkien pisteiden $p \in A$ suljettuja euklidisia kuulia tutulla merkinnällä $\overline{B}_d(p, r)$, missä p on kuulan keskipiste ja r on kuulan säde. Tällöin näiden suljettujen kuulien $\overline{B}_d(p, r)$ yhdiste on myös suljettu joukko, jonka pisteet ovat enintään säteen r etäisyydellä vähintään yhdestä joukon A pisteestä. Tästä suljetusta joukosta voidaan käyttää merkintää

$$\bigcup_{p \in A} D(p, r),$$

missä $D(p, r) = \{x \in \overline{B}_d(p, r) \mid d(x, p) \leq d(x, b) \text{ kaikilla } b \in A\}$ ja d on euklidinen metriikka.

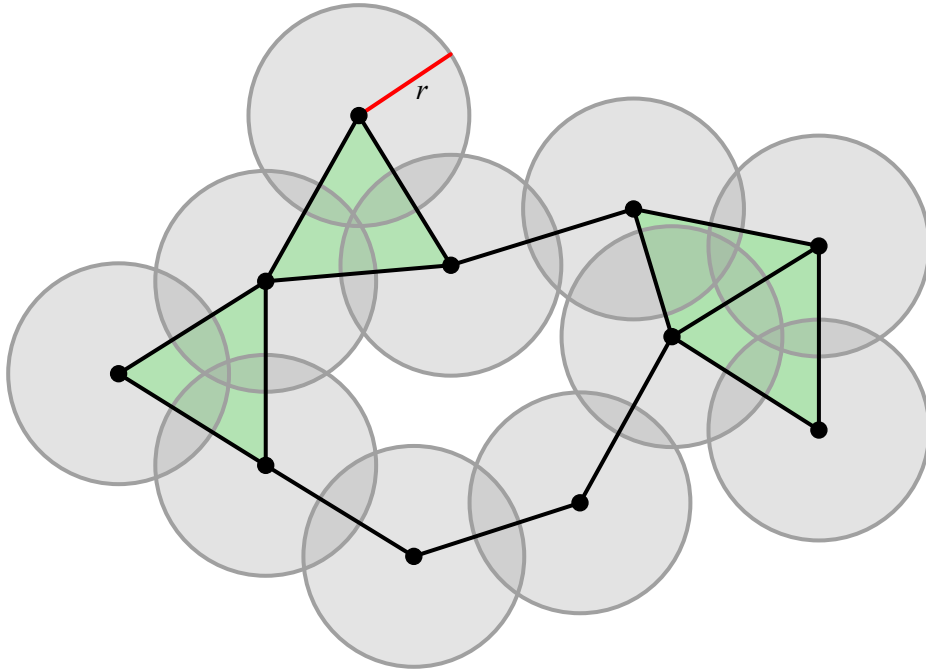
Tarkoituksena on esittää alfa-kompleksista tulkinta, joka perustuu joukon A Voronoin soluihin ja kaavioon. Siis, hajoitetaan joukko $\bigcup_{p \in A} D(p, r)$ siten, että jokainen suljettu kuula leikkaa sitä vastaavan Voronoin solun kanssa, eli $\overline{B}_d(p, r) \cap V_p = D(p, r)$. Koska suljetut euklidiset kuulat ja Voronoin solut ovat konvekseja joukkoja, niin leikkaukset $\overline{B}_d(p, r) \cap V_p = D(p, r)$ ovat myös konvekseja. Tällöin pätee, että mitkä tahansa kaksi leikkausta ovat joko erillisiä tai ne menevät päällekkäin niiden yhteisessä reunassa, jolloin leikkaus on toisin sanoen epätyhjä. Täten saadaan alfa-kompleksille seuraava määritelmä edellisten merkintöjen nojalla:

$$k\text{-simpleksi } \sigma = [p_0, \dots, p_k] \in \text{Alfa}(r) \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{p \in \sigma} D(p, r) \neq \emptyset.$$

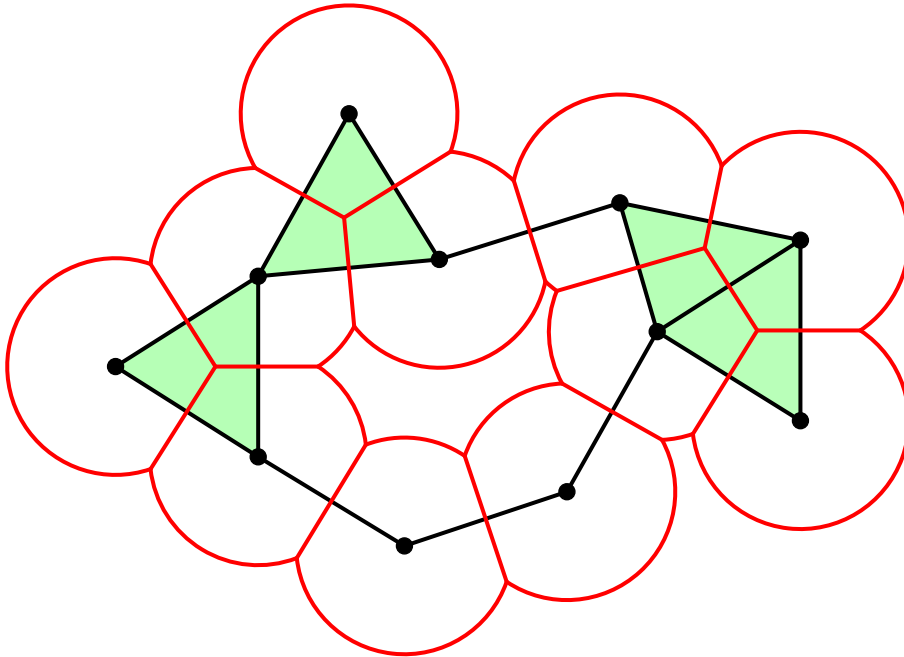
Näin ollen, koska $D(p, r) \subseteq V_p$, niin alfa-kompleksi on Delaunayn kolmioinnin alikompleksi. Toisaalta nyt myös pätee $D(p, r) \subseteq \overline{B}_d(p, r)$, joten alfa-kompleksi on myös Čechin kompleksin alikompleksi.

Esimerkki 6.1. Tarkastellaan avaruudessa \mathbb{R}^2 alfa-kompleksia $\text{Alfa}(r)$ avaruuden \mathbb{R}^2 jonkun osajoukon A suhteen.

- a) Alla olevassa kuvassa on esitetty alfa-kompleksi $\text{Alfa}(r)$, jonka 0- ja 1-sivut on esitetty mustalla värillä sekä 2-sivut eli kolmiot on esitetty vihreällä värillä. Punaisella viivalla on esitetty alfa-kompleksin simpleksien ympäröivän suljetun kuulan maksimisäde r . Harmaalla värillä puolestaan on esitetty jokaisen alfa-kompleksin kärjen ympärille piirrettävä suljettu kuula maksimisäteellä r . Näiden suljettujen kuulien perusteella nähdään selkeästi, että alfa-kompleksiin todella kuuluvat juurikin kuvassa olevat Delaunayn kolmioinnin $\text{Del}(A, \mathbb{R}^2)$ simpleksit.



- b) Kun a)-kohdan tapauksen tarkastelua jatketaan, saadaan alla oleva kuva. Kuvassa punaisen värin rajaamat alueet vastaavat suljettujen kuulien ja Voronoin solujen konvekseja leikkauksia $D(p, r)$, kun $p \in A$.



6.4 Esimerkki kompleksien geometrisista realisaatioista

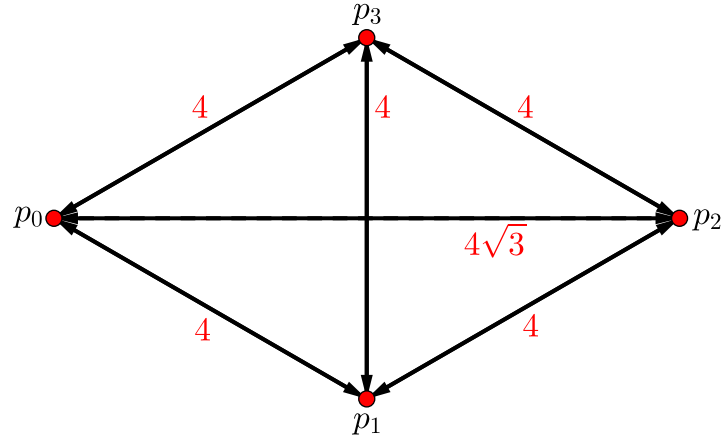
Esimerkki 6.2. Olkoon (\mathbb{R}^2, d) 2-ulotteinen euklidinen avaruus, missä d on euklidinen etäisyys. Olkoon myös joukko $A = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Oletetaan, että joukon A pisteet sijaitsevat toisistaan alla olevan kuvan 6.2 mukaisesti.

Kuvan perusteella siis

$$d(p_0, p_1) = d(p_0, p_3) = d(p_1, p_2) = d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) = 4$$

ja

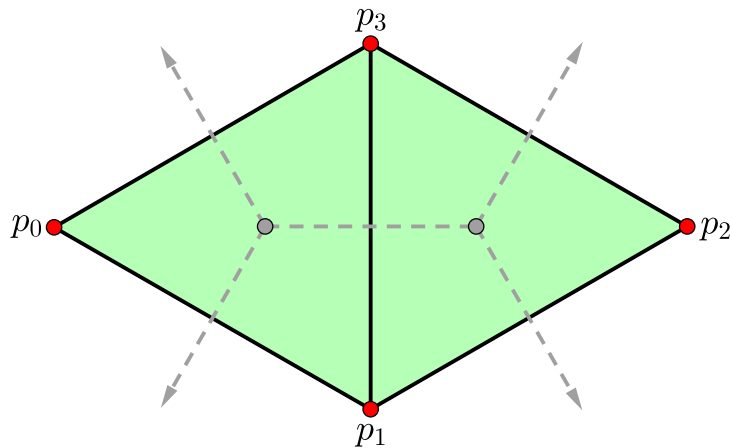
$$d(p_0, p_2) = 4\sqrt{3} \approx 6,9.$$



Kuva 6.2. Joukon A pisteiden etäisyydet toisistaan.

Tarkastellaan joukon A suhteen Delaunayn, alfa-, Čechin ja Vietorisin-Ripsin komplekseja erityisesti parametrin eli säteen r eri arvoilla. Seuraavissa kuvissa harmaalla värillä merkityt pisteet, suljetut kuulat ja katkoviivat eivät kuulu edellisten simpleksisten kompleksien geometriisiin realisaatioihin. Mainitaan myös, että kuvissa on piirretty vain suljettujen kuulien reunat, mutta myös kuulien sisäpuoli kuuluu suljettuihin kuuliin.

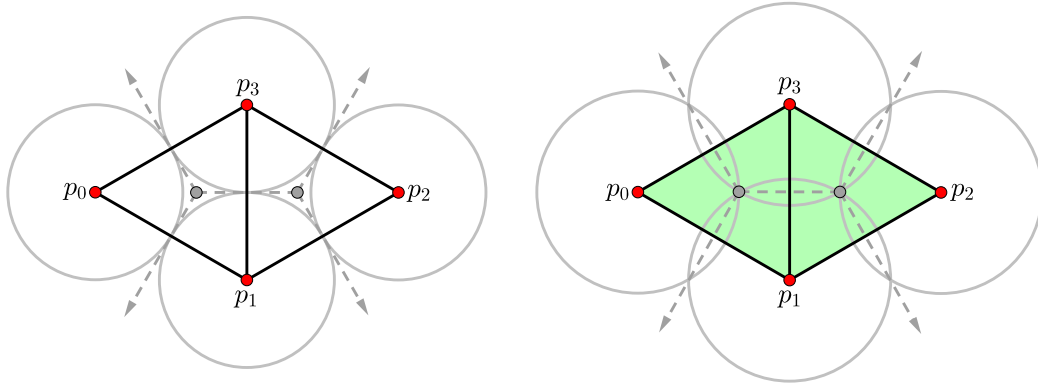
a) Kuvassa 6.3 on joukon A Delaunayn kolmioiden geometrinen realisaatio. Harmaalla katkoviivalla on myös merkitty joukon A Voronoin kaavion reunat. Voronoin solujen kaksi leikkauspistettä on puolestaan merkitty harmailla pisteillä, jotka ovat myös 2-simpleksien $[p_0, p_1, p_3]$ ja $[p_1, p_2, p_3]$ vahvat todistajat.



Kuva 6.3. $\text{Del}(A, \mathbb{R}^2) = \text{Del}(A)$.

b) Kuvassa 6.4 vasemmalla on joukon A alfa-kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 2$, ja oikealla on joukon A alfa-kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 4/\sqrt{3} \approx 2,3$. Harmaalla värillä on piirretty jokaisen joukon A pisteen ympärille maksimisäteiset suljetut kuulat, eli kuulien säde on vasemmalla 2 ja oikealla $4/\sqrt{3}$. Lisäksi edelleen harmaalla katkoviivalla on merkitty joukon A Voronoin kaavion reunat.

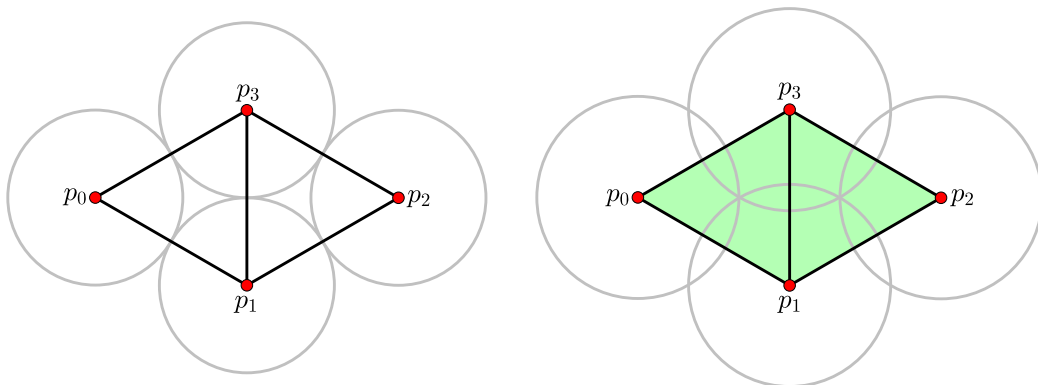
Yksi tärkeä huomio on, että kun säde $r > 4/\sqrt{3}$, niin alfa-kompleksiin ei kuulu enää muita simpleksejä alfa-kompleksin $\text{Alfa}(4/\sqrt{3})$ simpleksien lisäksi. Toisin sanoen, 1-simpleksi $[p_0, p_2]$ ja 3-simpleksi $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ eivät voi ikinä kuulua alfa-kompleksiin, koska pisteiden p_0 ja p_2 Voronoin solut V_{p_0} ja V_{p_2} eivät koskaan leikkaa, eli $V_{p_0} \cap V_{p_2} = \emptyset$.



Kuva 6.4. Vasemmalla $\text{Alfa}(2)$ ja oikealla $\text{Alfa}(4/\sqrt{3})$.

c) Kuvassa 6.5 vasemmalla on joukon A Čechin kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 2$, ja oikealla on joukon A Čechin kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 4/\sqrt{3} \approx 2,3$. Harmaalla värillä on piirretty jokaisen joukon A pisteen ympärille suljetut kuulat, eli kuulien säde on vasemmalla 2 ja oikealla $4/\sqrt{3}$.

Delaunayn kompleksista ja alfa-kompleksista eroten myös simpleksit $[p_0, p_2]$ ja $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ kuuluvat Čechin kompleksiin, kun säde $r \geq 2\sqrt{3} \approx 3,5$. Tällöin tosin Čechin kompleksin geometrinen realisaatio ei ole mahdollista tasossa \mathbb{R}^2 , vaan avaruuden \mathbb{R}^n on oltava dimensioltaan vähintään 3.

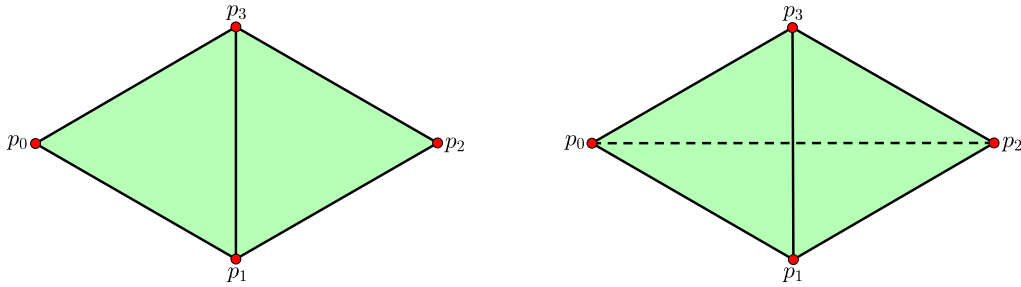


Kuva 6.5. Vasemalla $\mathbb{C}^2(A)$ ja oikealla $\mathbb{C}^{4/\sqrt{3}}(A)$.

d) Kuvassa 6.6 vasemalla on joukon A Vietorisin-Ripsin kompleksin geometrinen realisaatio, kun parametri $r = 2$, ja oikealla on joukon A Vietorisin-Ripsin kompleksin geometrinen realisaatio, kun parametri $r = 2\sqrt{3} \approx 3,5$.

Erityisesti nyt kompleksiin $\mathbb{V}\mathbb{R}^{2/\sqrt{3}}(A)$ kuuluvat kaikki mahdolliset joukon A pisteistä muodostettavat simpleksit. Tällöin kompleksin $\mathbb{V}\mathbb{R}^{2/\sqrt{3}}(A)$ geometrinen realisaatio on mahdollista avaruudessa \mathbb{R}^n , jonka dimensio on vähintään 3.

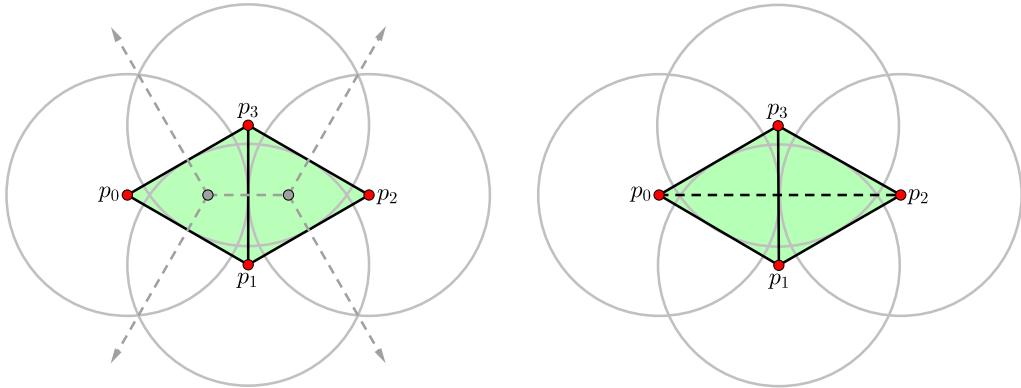
Todetaan myös, että tietenkin jos parametri $r \geq 2/\sqrt{3}$, niin tämä Vietorisin-Ripsin kompleksi on sama kuin Vietorisin-Ripsin kompleksi parametrilla $r = 2\sqrt{3}$, koska $\text{diam}(A) = 4\sqrt{3} \leq 2 \cdot r$.



Kuva 6.6. Vasemalla $\mathbb{V}\mathbb{R}^2(A)$ ja oikealla $\mathbb{V}\mathbb{R}^{2/\sqrt{3}}(A)$.

e) Kuten aikaisemmin todettiin, Čechin kompleksi ja alfa-kompleksi ovat määritelmiltään 6.1 ja 6.3 hyvin lähellä toisiaan. Kompleksien geometriset realisaatiot ovat siis usein samat. Esimerkiksi kuvista 6.4 ja 6.5 nähdään, että $\text{Alfa}(2) = \check{\text{Cech}}(2)$. Aina kuitenkin näin ei ole.

Kuvassa 6.7 vasemmalla on joukon A alfa-kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 2/\sqrt{3} \approx 3,5$, ja oikealla on joukon A Čechin kompleksin geometrinen realisaatio, kun säde $r = 2/\sqrt{3}$. Harmaalla värillä on aikaisempien kohtien mukaisesti piirretty suljetut kuulat joukon A pisteille ja katkoviivalla on piirretty joukon A Voronoin kaavion reunat. Tällöin alfa-kompleksiin kuuluvat 2-simpleksit $[p_0, p_1, p_3]$ ja $[p_1, p_2, p_3]$ ja niiden kaikki alisimpleksit. Čechin kompleksiin kuuluvat kuitenkin 3-simpleksi $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ ja sen kaikki alisimpleksit. Näin ollen $\text{Alfa}(2/\sqrt{3}) \subsetneq \check{\text{Cech}}(2/\sqrt{3})$.



Kuva 6.7. Vasemalla $\text{Alfa}(2/\sqrt{3})$ ja oikealla $\check{\text{Cech}}(2/\sqrt{3})(A)$.

Lähteet

- [1] de Silva, V. *A weak definition of Delaunay triangulation*. arXiv.org, 2003.
- [2] de Silva, V. *A weak characterisation of the Delaunay triangulation*. *Geom. Dedicata*. 135 (2008), 39–94.
- [3] Dey, T. K., Wang, Y. *Computational Topology for Data Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.
- [4] Edelsbrunner, H., Harer, J. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2010.
- [5] Kankaanrinta, M. *Introduction to Algebraic Topology*, luentomoniste.
- [6] Mordukhovich, B. S., Nam, N. M. *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*. 1. painos. Morgan & Claypool Publishers, 2014.
- [7] Yan, M. Higher Education Press Ltd. Comp. *Introduction to Topology*. 1. painos. De Gruyter, 2016.