Tampereen yliopisto

Jenni Riutta

MURTOLUKUMERKINNÄSTÄ MONEKSI

Yläkoululaisten tunnistamat merkitykset murtolukumerkinnälle ja murtolukutehtävien kirjallinen kielentäminen

Pro gradu -tutkielma
Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Toukokuu 2023

TIIVISTELMÄ

Jenni Riutta: Murtolukumerkinnästä moneksi
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2023

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia murtolukumerkinnän merkityksiä yläasteikäiset oppilaat tunnistavat murtolukumerkinnälle, sekä kirjallisen kielentämisen hyödyntämistä murtolukutehtävien ratkaisussa. Murtolukumerkinnän merkitysten tunnistamista testattiin sekä spontaanisti pelkästä annetusta merkinnästä että kuvien avulla. Kirjallisen kielentämisen hyödyntämistä tutkittiin tarkastelemalla, millaisia kuviokielen malleja oppilaat käyttävät tehtävän ratkaisun tukena, sekä miten oppilaat kokevat kirjallisen kielentämisen hyödyntämisen tehtävän ratkaisussa.

Tutkimusmenetelmänä käytettiin Mixed Methods -menetelmää (MMR), joka yhdistää laadullisen ja määrällisen tutkimuksen. Teoreettisena viitekehyksenä tutkimuksessa hyödynnettiin murtolukumerkinnän eri merkityksiä sekä kuviokielen malleja. Murtolukumerkinnän eri merkityksiä ovat muun muassa suhde, jakolasku, osa kokonaisuudesta ja mitta. Kuviokielen mallit jaetaan puolestaan kolmeen luokkaan; pinta-alamalliin, pituusmalliin ja joukkomalliin. Lisäksi teoreettiseen viitekehykseen kuuluu tutkimuksen matemaattinen osuus, joka käsittelee murtolukujen yleistämistä kokonaisalueisiin.

Aineisto kerättiin oppilailla teetettävien tutkimuslomakkeiden avulla ja aineiston analyysissa hyödynnettiin sisällönanalyysia. Aineiston kerääminen toteutettiin syksyllä 2022 erään Pirkanmaalaisen yhtenäiskoulun yläkoulun puolella. Oppilaat (N=62) tekivät yhden oppitunnin aikana tutkimuslomakkeen, joka koostui kolmesta tehtävästä ja loppukyselystä.

Tutkimustulosten mukaan oppilaat löysivät eniten murtolukumerkinnälle merkityksiä osa kokonaisuudesta ja jakolasku. Vähiten tunnistetut merkitykset olivat puolestaan mitta ja suhde. Murtolukumerkinnän kuvaamiseen kuviokielellä suurin osa oppilaista käytti pinta-alamallia, joista suurin osa kouluissa yleisimmin käytettyä "piirakkamallia". Joukkomallia käytti vain muutama oppilas ja pituusmallia ei yksikään. Oppilaiden kokemukset kirjallisen kielentämisen hyödyntämisestä tehtävän ratkaisussa olivat keskimäärin positiivisia. Tehtävän selittämisen kuviokielen avulla oppilaat kokivat luonnollisen kielen avulla selittämiseen verrattuna helpommaksi, mukavammaksi ja hyödyllisemmäksi.

Tutkimustulosten perusteella matematiikan opetuksessa murtolukumerkinnän eri merkitysten esittely ja vertailu olisi tarpeen, sillä oppilaiden tämänhetkinen tietämys rajautuu lähinnä kahteen merkitykseen. Lisäksi voidaan todeta, että murtolukumerkinnän esittämiseen kuviokielellä olisi hyödyllistä opetella pinta-alamallin lisäksi myös muiden kuviokielen mallien hyödyntämistä. Tämä siksi, että esimerkiksi tutkimuksen tehtävässä, jossa tuli jakaa isompaa lukua pienemmällä, suurimmalla osalla oppilaista ei ollut keinoja kuvata muodostuvaa murtolukumerkintää kuviokielellä. Kirjallisen kielentämisen hyödyntämistä, etenkin kuviokielellä tapahtuvaa, voidaan tutkimuksen perusteella suositella murtolukujen opiskelussa hyödynnettäväksi, sillä oppilaat kokivat tämän hyödyllisenä tehtävän ratkaisussa.

Avainsanat: matematiikka, murtoluku, rationaaliluku, peruskoulu, kielentäminen, oppiminen

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO

Jokainen meistä törmää murtolukuihin arjessaan. Ihminen on kosketuksissa murtolukuihin jo ennen kuin ymmärtää, mitä murtoluvulla tarkoitetaan. Murtoluvun merkitys esiintyy esimerkiksi tilanteessa, kun lapsi miettii kaupassa, kuinka monta 10 sentin kolikkoa tarvitaan euron jäätelön ostamiseen. Esimerkiksi juuri rahan avulla lapsi voi oppia osan kokonaisuudesta merkityksen murtoluvulle. Lisäksi lapsi ymmärtää murtolukuihin liittyviä käsitteitä kuten puolikas, vaikka ei sitä vielä merkintänä ymmärtäisi. Lapsi ymmärtää mitä tarkoittaa jonkin konkreettisen asian, esimerkiksi piirakan jakaminen kahteen osaan ja sen, että jaossa syntyy kaksi puolikasta.

Siitä huolimatta, vaikka lapsi ymmärtäisi murtoluvun merkityksen käytännössä, matematiikan opiskelussa siirtyminen luonnollisista luvuista rationaalilukuihin on monille oppilaille hankalaa [20]. Rationaaliluvuista tekee hankalaa oppia ensinnäkin se, että rationaalilukujen merkintätavat, desimaaliluku ja etenkin murtoluku eroavat huomattavasti luonnollisesta luvusta. Rationaaliluvut hallitakseen, tulee osata vaihdella sujuvasti näiden esitysmuotojen, murtoluvun ja desimaaliluvun välillä. Murtolukujen laskutoimituksetkin voivat tuntua oppilaasta hankalalta, sillä ne eivät toimikaan samalla tavalla kuin luonnollisilla luvuilla. Lisäksi oppilaalle voi olla vaikeaa käsittää, että murtolukumerkinnällä voidaan kuvata muutakin kuin osaa kokonaisuudesta. Näin selviää esimerkiksi Joutsenlahden ja Perkkilän tutkimuksessa, jossa suurin osa tutkimukseen osallistuneista luokanopettajaopiskelijoista tulkitsi murtolukumerkinnän osana kokonaisuudesta [11]. Osa kokonaisuudesta -merkityksen lisäksi murtolukumerkintää voidaan käyttää muun muassa suhteen ja jakolaskun kuvaamiseen [10].

Tutkimuksen tarkoituksena on tutkia, millaisia eri merkityksiä yläasteikäiset oppilaat tunnistavat murtolukumerkinnälle pelkästä annetusta murtolukumerkinnästä sekä annettujen kuvien avulla. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, havaitaanko vastauksissa eroja eri vuosiluokkien oppilaiden välillä ja vaikuttaako aikaisempi menestys matematiikan opinnoissa murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrään. Tutkimuksen tarkoituksena on lisäksi selvittää, millaisia kuviokielen malleja oppilaat hyödyntävät murtolukutehtävien kirjallisessa kielentämisessä sekä, millaisena oppilaat kokevat matematiikan kirjallisen kielentämisen osana murtolukutehtävän ratkaisua. Tutkimusmenetelmät tutkimuksessa ovat sekä kvalitatiivisia että kvantitatiivisia ja tulosten analysointiin hyödynnetään sisällönanalyysia.

2. MATEMATIIKAN OSAAMINEN JA YMMÄRTÄMINEN

2.1 Matematiikan osaaminen

Viime vuosikymmenten ajan Suomi on menestynyt kansainvälisissä peruskouluikäisten matematiikan osaamisen mittauksissa. Muun muassa vuoden 2011 TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) tutkimuksessa Suomi oli kymmenen parhaiten menestyneen maan joukossa [30, s. 49]. Kuitenkin joitakin muutoksiakin on viime vuosikymmenten aikana osaamisessa tapahtunut. TIMSS –tutkimusten tuloksista huomataan, kuinka vuosien 1999 ja 2011 välillä kahdeksasluokkalaisten oppilaiden matematiikan osaaminen on vähentynyt merkittävästi; vuonna 1999 pisteiden keskiarvo oli 520 ja vuonna 2011 enää 482 pistettä [30]. Tämän lisäksi kansainvälisten tutkimusten tuloksista on huomattavissa muutos tyttöjen ja poikien välisissä osaamiseroissa.

Jotta voidaan tarkastella syvemmin matematiikan osaamista ja sen osa-alueita, tulee ensin määritellä, mitä matematiikan osaamisella tarkoitetaan. PISA –ohjelman määritelmän mukaan matematiikan osaamisella tarkoitetaan

> "yksilön kykyä muotoilla, käyttää ja tulkita matematiikkaa erilaisissa tilanteissa. Se pitää sisällään matemaattisen päättelyn sekä matemaattisten tietojen, käsitteiden, menetelmien ja välineiden käyttämisen ilmiöiden kuvaamisessa, selittämisessä ja ennustamisessa. Se auttaa yksilöitä tunnistamaan matematiikan merkityksen ympäröivässä maailmassa ja tekemään tarvittavia perusteltuja päätöksiä osallistuvina, rakentavina ja ajattelevina kansalaisina." [18, s. 22]

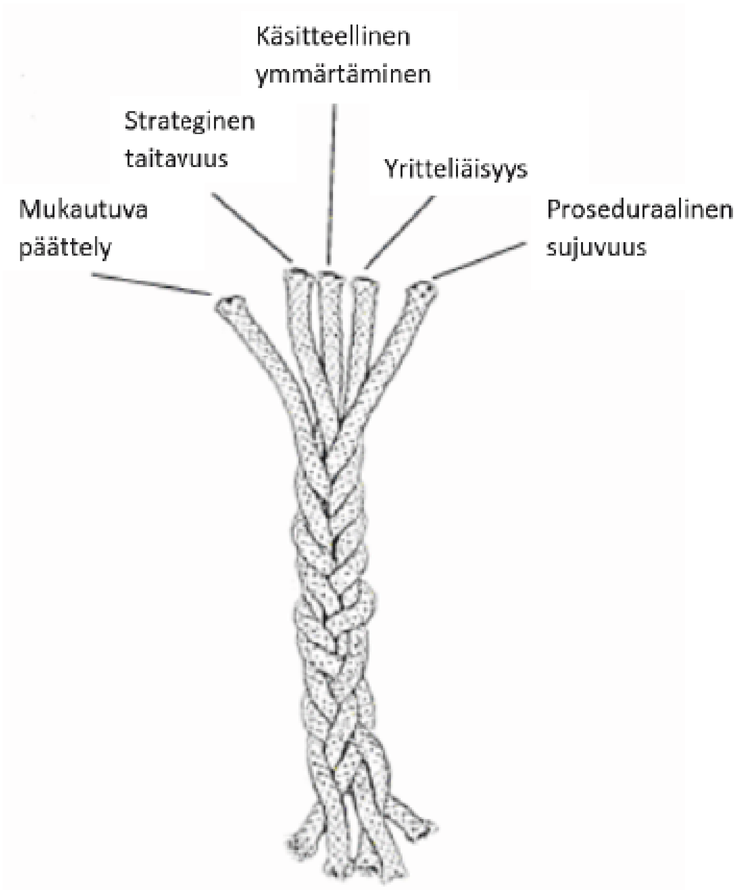
Tämä määritelmä pitää sisällään samoja osa-alueita, kuin seuraavaksi esitellyt Kilpatrickin ym. määrittelemät matematiikan osaamisen viisi osa-aluetta.

Kilpatrick, Swafford ja Findell [17, s. 5] jakavat matematiikan osaamisen (*mathematical proficiency* viiteen toisiinsa kytkeytyneeseen osa-alueeseen. Nämä osa-alueet ovat

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** *(conseptual understanding)*: matematiikan käsitteiden, laskutoimitusten ja niiden välisten suhteiden ymmärtäminen.
2. **Proseduraalinen sujuvuus** *(procedural fluency)*: taito toteuttaa proseduureja joustavasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.

3. **Strateginen taitavuus** *(strategic competence)*: kyky laatia, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia.
4. **Mukautuva päättely** *(adaptive reasoning)*: kyky loogiseen ajatteluun, pohdintaan, selittämiseen ja perusteluun.
5. **Yritteliäisyys** *(productive disposition)*: tendenssi nähdä matematiikka käytännöllisenä, hyödyllisenä ja vaivan arvoisena sekä usko oman ahkeruuden vaikutukseen.

Tärkein huomio on, että nämä viisi matematiikan osaamisen osa-aluetta eivät ole itsenäisiä, vaan yhteen nivoutuneita ja muodostavat yhdessä kokonaisuuden, eikä matematiikan osaamista pystytä saavuttamaan vain osalla näistä matematiikan osaamisen osa-alueista [17, s. 116].



Kuva 2.1. *Matematiikan osaamisen viisi osa-aluetta (muokattu lähteestä [17, s. 5])*

Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan kokonaisvaltaista ymmärrystä matemaattisista käsitteistä. Sellaiset oppilaat, joilla on hyvä käsitteellinen ymmärrys, osaavat enemmän kuin vain yksittäisiä työtapoja ja faktoja. He ymmärtävät opittavan asian merkityksen ja osaavat liittää sen osaksi aiemmin opittua. Käsitteellistä ymmärrystä osoittaa erilaisten esitystapojen käyttö ja ymmärrys siitä, mihin käyttötarkoitukseen eri esitystavat ovat hyödyllisiä. [17, s. 118-119]

Proseduraalinen sujuvuus tarkoittaa tietoa eri proseduureista eli menetelmistä sekä taitoa käyttää niitä joustavasti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Proseduraalinen sujuvuus tukee laskutapojen yhtäläisyyksien ja erojen tarkastelua. Se on yhteen kietoutunut käsitteellisen ymmärtämisen kanssa, sillä opittavan asian käsitteellinen ymmärtäminen helpottaa oppimista, vähentää alttiutta virheille sekä unohtamiselle. Ilman proseduraalista sujuvuutta, oppilaan on vaikea syventää ymmärrystään siitä, kuinka matemaattisia ongelmia ratkaistaan. [17, s. 121-122]

Vaikka koulumatematiikassa oppilaat saavat tyypillisesti valmiit tehtävät ratkaistavaksi, saattavat he koulun ulkopuolella törmätä tilanteisiin, joissa heidän tulee itse selvittää ongelma ja sen ratkaisu. Tällaisissa tilanteissa tarvitaan strategista taitavuutta. Strateginen taitavuus, käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus tukevat kaikki toisiansa. Ratkaistaessa haastavia matemaattisia ongelmia, tarvitaan taitoa käyttää erilaisia menetelmiä, ja toisaalta puolestaan kokemukset ongelmanratkaisusta auttavat uusien menetelmien oppimisessa. [17, s. 124-129]

Matematiikan osaamisen neljännellä osa-alueella, mukautuvalla päättelyllä tarkoitetaan taitoa ajatella käsitteiden ja erilaisten matemaattisten tilanteiden suhteita loogisesti. Voidaan sanoa, että mukautuva päättely on matematiikassa voima, joka pitää kaiken kasassa. Mukautuvaan päättelyyn liittyy kyky perustella tekemäänsä. Perustelu voi olla esimerkiksi todistamista, vaikkakaan todistaminen ei ole ainoa keino perustella. Muihin matematiikan osa-alueisiin mukautuva päättely liittyy etenkin ongelmanratkaisussa. [17, s. 129-131]

Viimeinen osa-alue, yritteliäisyys tarkoittaa taipumusta nähdä matematiikka järkevänä, mieltää se sekä hyödyllisenä että vaivan arvoisena, nähdä itsensä tehokkaana matematiikan oppijana sekä uskoa päättäväisen yrittämisen kannattavuuteen. Muihin osa-alueisiin yritteliäisyys liittyy siten, että kehittääkseen muita matemaattisen osaamisen osa-alueita, oppilaan tulee uskoa, että matematiikka on käsitettävää ja, että sitä voi oppia, kunhan yrittää sinnikkäästi. [17, s. 131]

Tämän tutkimuksen kannalta matematiikan osaamisen osa-alueista keskeisimpiä ovat käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus sekä mukautuva päättely. Tämän tutkimuksen kolmannessa tutkimustehtävässä oppilaiden tuli laskea murtoluvuilla. Murtoluvuilla laskemisessa oppilaiden tuli osata useita eri laskutapoja ja ymmärtää, miksi juuri niitä laskutapoja hyödynnetään murtoluvuilla laskiessa. Oppilaat tarvitsivat tehtävään siis käsitteellistä ymmärrystä. Lisäksi käsitteellistä ymmärrystä tarvittiin myös tutkimuksen ensimmäisissä tehtävissä, sillä käsitteelliseen ymmärtämiseen liittyy vahvasti ymmärrys eri esitysmuotojen yhtäläisyyksistä ja eroista sekä yhteyksistä toisiinsa [17, s. 119]. Proseduraalista sujuvuutta oppilaat tarvitsivat kaikissa tutkimuksen tehtävissä, sillä sitä tarvitaan etenkin paikka-arvon ja rationaaliluvun käsitteellisen ymmärtämisen tukemiseen [17, s. 121]. Mukautuvaa päättelyä tutkimuksessa tarvittiin erityisesti tutkimuksen viimeisessä tehtävässä, jossa tuli selittää omaa ratkaisuaan sanallisesti ja kuviokielen avulla, sillä mukautuvaan päättelyyn kuuluu kyky pohtia, selittää ja perustella ratkaisuaan.

2.2 Matematiikan ymmärtäminen

Tämän työn tavoitteena on saada käsitys siitä, minkälaisia merkityksiä oppilaat muodostavat murtolukumerkinnälle, mikä voidaan ajatella myös, miten he ymmärtävät murtolukumerkinnän. Jotta tämä olisi mahdollista, tulee selvittää, mitä matematiikan ymmärtämisellä tarkoitetaan ja mitä ymmärtäminen ylipäänsä on.

Hiebertin ja Lefevren (1986) mukaan oppilaan matemaattisen ymmärryksen kasvu voidaan nähdä konseptuaalisen tiedon eli käsitetiedon lisääntymisenä sekä proseduraalisen tiedon eli menetelmätiedon oppimisena [22, s. 134]. Käsitetiedon oppimisella tässä tarkoitetaan käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien eli käsitesuhteiden oppimista ja tätä kautta tapahtuvien tietorakenteiden edistymistä. Esimerkki tällaisesta käsitteestä voisi olla murtoluvun käsite. Menetelmätiedon oppimisella puolestaan tarkoitetaan erilaisten toimintojen ja taitojen, kuten murtolukujen laskutoimitusten oppimista. Matematiikan syvällinen ymmärtäminen vaatii menetelmätiedon ja käsitetiedon yhdistymistä osaamisessa. [22, s. 134-135].

Perkins ja Plythe (1994) määrittävät ymmärtämisen olevan kykyä tehdä aiheeseen liittyviä ajattelua vaativia toimintoja, kuten yleistämistä, selittämistä, soveltamista ja käsitellyn aiheen esittämistä eri tavoin [2, s. 99]. Bereiter [2, s. 100] kyseenalaistaa Perkinsin ja Plythen määritelmää ymmärtämisestä. Hän pohtii, miksi edes keskustellaan ymmärtämisestä, jos ymmärtäminen onkin vain toimintoja. Bereiterin mukaan ymmärtäminen on pikemminkin tila, joka mahdollistaa toimintoja, ei toiminnot itsessään. Bereiter [2, s. 102-104] esittää listan havaintoja, jotka perustuvat ihmisen ymmärtämiseen. Hänen mukaansa listan huomautuksia voidaan ilman suurempia muokkauksia käyttää monen asian tai tapahtuman ymmärtämisen kuvailuun. Lisäksi hän esittää, että teoreettista ymmärrystä voidaan hyvin esittää samaan tapaan, kuin käytännön ymmärrystä. Listan voi siis täten muokata esimerkiksi kuvaamaan murtolukumerkinnän ymmärtämistä, jolloin lista näyttäisi seuraavanlaiselta.

1. Murtolukumerkinnän ymmärtäminen riippuu henkilön suhteesta murtolukuihin. Murtolukumerkinnän ymmärtäminen on erilaista oppilaalle, yläasteen matematiikan opettajalle, matemaatikolle tai vaikka leipurille. On siis monta oikeaa tapaa ymmärtää murtolukumerkintää.
2. Ymmärrys liittyy läheisesti kykyyn toimia älykkäästi suhteessa murtolukumerkintään. Henkilö osaa hyödyntää murtolukumerkintää erilaisissa konteksteissa ja ymmärtää sen merkityksen eri käyttötarkoituksissa.
3. Ymmärrys liittyy läheisesti myös kiinnostukseen. Vaikka poikkeuksiakin on, voidaan päätellä, että henkilö, joka ei ole kiinnostunut murtolukumerkinnän eri merkityksistä,

ei myöskään ymmärrä niitä.

4. Murtolukumerkinnän ymmärtäminen vaatii sen, että ymmärtää sen suhteen muihin käsitteisiin, kuten rationaalilukuihin, suhteeseen ja jakolaskuun.
5. Murtolukumerkinnän ymmärrys ei välttämättä tarkoita kykyä selittää. Selittäminen voi kuitenkin olla keino, jolla kehittää ymmärrystä.
6. Vaikka ei ole yhtä oikeaa, täyttä tai ideaalia tapaa ymmärtää murtolukumerkintää, on tunnistettavissa vääriä tapoja, jotka ovat mahdollisesti korjattavissa.
7. Keskusteltaessa murtolukumerkinnästä harvoin viitataan keskustelijoiden mielentiloihin. Sen sijaan keskustelu keskittyy itse murtolukumerkintään, sen sovelluksiin, rajoituksiin ja niin edelleen.
8. Murtolukumerkinnän ymmärrys ilmenee kertoessa asioista, joissa se on pääosassa, kuten murtolukujen laskutoimituksissa tai jakolaskussa. Jos asiat, joita henkilö kertoo murtolukumerkinnöistä vaikuttaa muista epäjohdonmukaisilta, voidaan tulkita, että henkilö ei ymmärrä murtolukumerkintää.
9. Syvä ymmärrys murtolukumerkinnästä tarkoittaa syvällisten asioiden ymmärtämistä siitä; kuten missä eri käyttötarkoituksissa sitä voidaan hyödyntää ja mihin sitä voidaan soveltaa.
10. Murtolukumerkinnän syvä ymmärtäminen ilmenee eritoten siinä, että henkilö osaa esittää oivaltavia ratkaisuja murtolukumerkintään liittyviin ongelmiin.
11. Murtolukumerkinnän ymmärtäminen vaatii usein syvää ja monitahoista osallistumista siihen perehtymiseen.

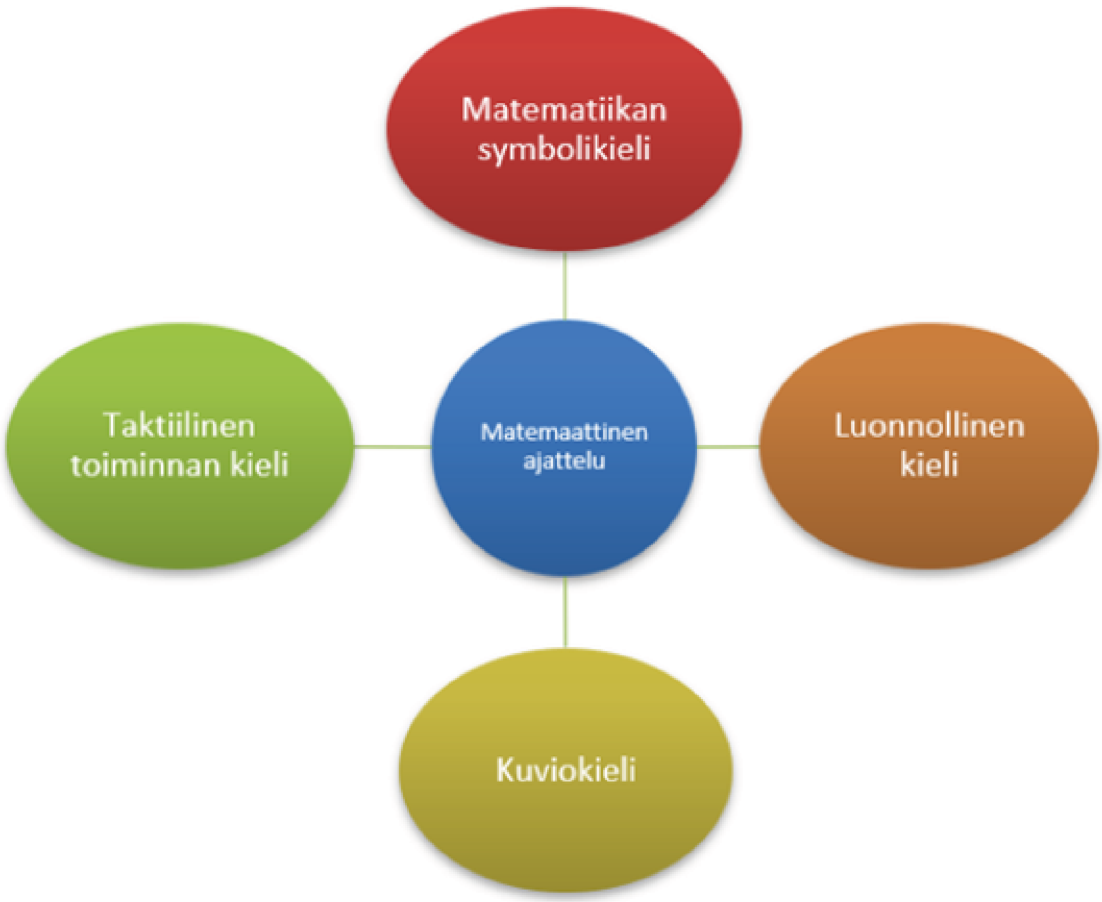
Bereiter [2, s. 111] tiivistää ajatuksensa ymmärtämisestä seuraavasti

> ”Käsitteellisten asioiden ymmärrystä tulisi käsitellä samalla tavalla, kuin aineellisten esineiden ymmärrystä; pikemminkin ihmisen ja esineen välisiin suhteisiin kuuluvana, kuin ihmisen mielessä sijaitsevan objektin ominaisuutena”.

Merenluodon ja Pehkosen [26, s. 418] mukaan käsitteen strukturaalinen eli rakenteellinen ymmärtäminen saavutetaan vasta sen jälkeen, kun on käsitteeseen on tutustuttu operaatioissa ja opittu ymmärtämään sen prosessina. Murtoluvun käsitteenkin voi täten ymmärtää vasta, kun on tutustuttu, miten se käyttäytyy erilaisissa laskutoimituksissa ja eri merkityksissään.

2.3 Matematiikan kielentäminen

Matematiikan symbolikieltä voidaan pitää omana kielenään [13, s. 413]. Matematiikka eroaa kuitenkin luonnollisista kielistä, kuten suomen kielestä siten, että sitä ei voida käyttää kaikkiin käyttötarkoituksiin, esimerkiksi tunteiden ilmaisuun [9, s. 59]. Matematiikan opiskeluun liittyy neljä eri kieltä, jotka ovat matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli sekä taktiilinen toiminnan kieli [13, s. 414]. Matematiikan symbolikielellä tarkoitetaan perinteistä tapaa kirjoittaa matematiikkaa, numeroin ja symbolein. Matematiikan ilmaisemiseen voidaan käyttää myös luonnollista kieltä, esimerkiksi suomen kieltä. Kuviokielellä tarkoitetaan matematiikan kuvaamista kuvioiden, kuten lukusuorien tai murtokakkujen avulla. Näiden kolmen tutuimman kielen lisäksi matematiikan opiskeluun liittyy neljäs kieli, taktiilinen toiminnan kieli, joka tarkoittaa esimerkiksi toimintamateriaalien avulla ilmaistua matemaattista ajattelua [13, s. 414]. Taktiilinen toiminnan kieli sopii esimerkiksi murtolukujen laskutoimitusten havainnollistamiseen murtolukupalojen avulla [13, s. 414]. Neljän matematiikan kielen avulla voidaan muodostaa matemaattisille käsitteille erilaisia merkityksiä, mikä auttaa käsitteiden ymmärtämisessä [12, s. 51]. Kuvioon 2.2 on esitetty matematiikan kielen neljä osa-aluetta.



***Kuva 2.2.** Matematiikan neljä kieltä. Muokattu lähteestä [12, s. 52]*

Vygotski [43] on tuonut esille ajatuksen kielen ja ymmärryksen yhteydestä. Hänen mukaansa ajatus ei ainoastaan ilmene sanassa, mutta myös toteutuu siinä [43, s. 214]. Joutsenlahti ja Rättyä [12, s. 52] määrittää matemaattisen ajattelun kielentämisen tarkoittavan kuvan 2.2 yhden tai useamman kielen käyttöä matemaattisen ajattelun ilmaisussa. Lisäksi matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan "matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla joko suullisesti tai kirjallisesti"[13, s. 410]. Matematiikan kielentäminen voidaan jakaa kirjalliseen ja suulliseen kielentämiseen. Suullisella kielentämisellä koulussa tarkoitetaan luonnollisella kielellä tapahtuvaa keskustelua ryhmässä, tehtävän ratkaisun selittämistä ja perustelua sekä käsitteiden merkitysten rakentamista muodostamalla yhteyksiä arkielämän ilmiöihin [13, s. 417]. Kirjallinen kielentäminen voi olla esimerkiksi ratkaisun selittämistä luonnollisen kielen tai kuviokielen avulla.

Matematiikan kielentämisellä on useita hyötyjä. Kielentäminen tuo oppilaan matemaattisen ajattelun ilmi opettajalle sekä muille läsnäolijoille [8, s. 234]. Tällöin opettajalle selviää helpommin, miten oppilas on ymmärtänyt opiskeltavan käsitteen. Suullisessa kielentämisessä oppilaan tulee ensin jäsennellä ajatteluaan itselleen ja muotoilla sanottavansa muille merkityksellisiksi lauseiksi. [13, s. 417] Tällöin oman ratkaisun selittäminen auttaa oppilasta jäsentämään ajatteluaan sekä kehittämään osaamista opittavasta asiasta [23, s. 4]. Myös Vygotskin [43] mukaan pelkästään jo sisäinen puhe auttaa materiaalin muistamisessa ja ymmärryksessä.

Oppilaat pitävät matematiikan ratkaisujen selittämistä haastavana sekä pelottavana [23, s. 79]. Kirjallisen kielentämisen hyödyt ovat kuitenkin saman kaltaiset suullisen kielentämisen kanssa. Vygotskin [43] mukaan kirjoitus on vielä puhetta tietoisempaa ja se pakottaa lapsen toimimaan älyllisemmin. Puhumisen tavoin kirjoittaminen auttaa oppilasta ajatustensa ilmaisemisessa, ja siinä oppilaalla on vielä enemmän aikaa miettiä ja hioa ajatustaan [28, s. 233]. Lisäksi Morganin [28, s. 235] mukaan matematiikkaa opiskellessa kirjoittaminen syventää oppimista. Matematiikan kirjallinen kielentäminen ei pelkästään auta oppilasta jäsentämään ja syventämään omaa ajatteluaan, mutta se hyödyttää oppilasta lisäksi myöhemmässä opiskelussa [7, s. 10]. Oppilaan on helppo palata aikaisempiin ratkaisuihin, jos ratkaisun vaiheet on kirjoitettu aikaisemmin näkyviin [13, s. 419].

Kirjallista kielentämistä voidaan hyödyntää monenlaisissa tehtävätyypeissä. Joutsenlahti ym. [14] esittävät neljä erilaista tehtävätyyppiä, jotka hyödyntävät kirjallista kielentämistä. Nämä tehtävä tyypit ovat 1. koodinvaihtotehtävät, joissa matematiikan symbolikielellä esitetyt ratkaisut on tehtävänä kuvata luonnollisella kielellä ja/tai kuviokielellä, 2. täydennystehtävät, joissa tehtävänä on täydentää ratkaisusta puuttuvia osia, 3. virheen etsintä, jossa annetusta ratkaisusta on tehtävänä etsiä ja korjata virheet sekä 4. ratkaisusta tehtävä, jossa annetusta ratkaisusta muodostetaan siihen sopiva tehtävänanto [14]. Näitä tehtävätyyppejä voi lisäksi soveltaa monenlaisten kielentämistä hyödyntävien tehtävien muodostamiseen. Tässä tutkimuksessa kirjallista kielentämistä hyödyntävät tehtävät ovat tehtävätyypiltään koodinvaihtotehtäviä, sillä niissä oppilaiden tehtävänä on kirjoittaa matematiikan symbolikielinen ratkaisu sekä luonnollisella kielellä että matematiikan kuviokieltä hyödyntäen.

Matematiikan kielentäminen on tärkeä osa peruskoulun matematiikan sisältöjä ja se mainitaankin jollakin tapaa jokaisen vuosiluokan kohdalla perusopetuksen opetussuunnitelmassa. Vuosiluokkien 1-2 matematiikan osiossa kielentäminen mainitaan seuraavasti: "Opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvia"[34, s. 128]. Peruskoulun alimmilla vuosiluokilla matematiikan kirjalliseen kielentämiseen liittyy siis luonnollisen kielen lisäksi myös kuviokieli sekä taktiilinen toiminnan kieli. Vuosiluokkien 3-6 ja 7-9 matematiikan tavoitteista löytyy samankaltaiset maininnat. Vuosiluokkien 3-6 tavoitteissa mainitaan seuraavasti "kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen"[34, s. 235] ja vuosiluokkien 7-9 tavoitteissa puolestaan seuraavasti: "kannustaa oppilasta harjaantumaan täsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun suullisesti ja kirjallisesti"[34, s. 374]. Vuosiluokkien 7-9 matematiikan tavoitteissa mainitaan lisäksi, että oppilaita tulisi rohkaista käyttämään piirroksia ja välineitä ajattelun tukemiseksi [34, s. 376]. Täten myös vuosiluokkien 3-6 ja 7-9 matematiikan kielentämiseen liittyvät kaikki matemaattisen ajattelun kielet; matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli, kuviokieli sekä taktiilinen toiminnan kieli.

3. MURTOLUVUT KOULUMATEMATIIKASSA

Rationaalilukujen ymmärtäminen on tärkeää muiden matematiikan ja tieteen osa-alueiden ymmärtämiseksi, mutta myös arki- ja työelämässä. Ilman rationaalilukujen ymmärtämistä, monen muun asian, kuten algebran, geometrian, tilastotieteen, kemian ja fysiikan ymmärtäminen olisi lähes mahdotonta [1, s. 775]. Rationaalilukujen ymmärtäminen on ehdoton taito useissa ammateissa, kuten sairaanhoitajana ja apteekkarina, minkä lisäksi se on tärkeää arkielämän tilanteissa, kuten ruuanlaitossa ja mittaamisessa [24, s. 202]. Rationaalilukujen osaamisen on myös tutkittu ennustavan tulevaa matematiikan osaamista [1, s. 775]. Vaikka rationaaliluvun ymmärtäminen on tärkeää, on huomattu, että se on vuosikymmenestä toiseen aiheuttanut haasteita oppilailla. Vuoden 2015 perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arvioinnissa 9. vuosiluokalla murtolukuja sisältävän tehtäväosuuden ratkaisuosuus oli keskimäärin vain 46 % [16, s. 70]. Kahdessa vuosikymmenessä, 1980-luvulta 2000-luvulle, esimerkiksi murtolukujen jakolaskutehtävässä oikein laskeneiden osuus on laskenut melkein kolmekymmentä prosenttiyksikköä [33, s. 101]. Lisäksi Hihnalan [6, s. 86] tutkimuksesta huomataan, että oppilaiden murtolukuosion ratkaisuprosenttien keskiarvo nousi seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle luokalle kahdeksan prosenttiyksikköä ja kahdeksannelta luokalta yhdeksännen luokan syksyyn vain kaksi prosenttiyksikköä. Oppilaiden murtolukujen osaaminen ei siis parantunut juurikaan vuosiluokkien välillä, vaikka oppilaiden matematiikan osaamisen tulisi kasvaa joka vuosi [17, s. 135]. Vastaavaan tulokseen tultiin myös Tuomisen [39] tutkimuksessa, jossa huomattiin, että oppilaiden suorituksen keskiarvo parani tehtävässä, jossa laskettiin murtolukujen erotusta. Kuitenkin tehtävässä, jossa jaettiin ja kerrottiin murtolukua luonnollisella luvulla, osaaminen taantui seitsemänneltä luokalta kahdeksannelle luokalle [39, s. 132].

Mikä sitten selittää rationaalilukujen heikkoa osaamista? Ensinnäkin rationaaliluvun oppimisen haasteet johtuvat osittain rationaaliluvun monista esitystavoista ja käyttötavoista [17, s. 7]. Rationaaliluvut voidaan esittää joko murtolukuna tai desimaalilukuna [37, s. 8]. Rationaaliluvun ymmärtämiseen sisältyy lisäksi taito vaihdella rationaaliluvun eri merkintätapojen välillä desimaaliluvusta murtolukuun ja näiden graafisiin esitysmuotoihin, kuten murtokakkuihin ja lukusuoriin [37, s. 3]. Desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi ja toisin päin ei kuitenkaan ole oppilaalle yksinkertainen tehtävä. Resnickin ym. (1989) tutkivat oppilaiden taitoa muuttaa murtoluku desimaaliluvuksi. Tutkimuksessa huomattiin kolme yleisintä virhetyyppiä muuttaessa murtolukua desimaaliluvuksi. Ensimmäisessä virhetyypissä oppilaat muodostivat desimaaliluvun ainoastaan murtoluvun osoittajan perusteella, jolloin esimerkiksi luku $\frac{3}{4}$ muutettiin luvuksi 0,3. Toisessa virhetyypissä oppilaat eivät puolestaan huomioineet lainkaan osoittajaa, vaan muodostivat desimaaliluvun nimittäjästä. Tällöin esimerkiksi luvusta $\frac{3}{4}$ muodostettiin luku 0,4. Kolmannessa yleisessä virhetyypissä oppilaat muuttivat murtoluvun desimaaliluvuksi vain ottamalla murtoluvusta osoittajan ja nimittäjän ja laittamalla desimaalipilkun johonkin näiden lukujen väliin, jolloin esimerkiksi luku $\frac{3}{4}$ muutettiin luvuksi 3,4. [37, s. 8]

Rationaalilukujen oppimisen haastetta lisää se, että niitä ei voida pelkästään esittää joko murtolukuna tai desimaalilukuna, vaan lisäksi molemmille, murtoluvuille ja desimaaliluvuille on monia merkintätapoja. Yhtä murtolukua voidaan esittää useilla eri tavoilla, esimerkiksi luku $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ ja niin edelleen [25, s. 15]. Murtolukumerkintä on haastava myös siksi, että siinä on kolme osaa; osoittaja, nimittäjä ja jakoviiva. Usein oppilaat erehtyvät tulkitsemaan murtoluvun osoittajaa ja nimittäjää omina lukuinaan, jolloin esimerkiksi luku $\frac{2}{3}$ merkitsisi oppilaalle erillisiä lukuja 2 ja 3 [24, s. 206-207]. Tämä johtaa murtolukujen laskutoimituksissa virheisiin, esimerkiksi $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{8}$ [1, s. 776].

Murtolukujen oppimista hankaloittaa lisäksi sen laskutoimitusten erilaisuus kokonaislukuihin verrattuna. Oppilaalle, joka on juuri oppinut kokonaisluvun käsitteen voi olla hankala ymmärtää sen käyttöä muissa merkityksissä, esimerkiksi kokonaisten määränä tai lukumääränä, joka kuvaa moneenko osaan kokonainen on jaettu [5]. Oppilaalle voi olla hankalaa ymmärtää, miksi murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskussa nimittäjien tulee olla samat, mutta kerto- ja jakolaskun voi tehdä keskenään eri nimittäjillä [24, s. 208]. Näiden murtolukujen peruslaskutoimitusten ominaisuuksien lisäksi oppilaan tulee hallita murtolukujen sieventäminen ja laventaminen, murtoluvun muuttaminen sekaluvuksi ja toisin päin sekä muistaa, missä murtolukujen laskutoimituksissa nimittäjä pysyy samana ja milloin se muuttuu laskutoimituksen myötä [24, s. 210]. Lisäksi oppilaalle voi olla ennen näkemätöntä ajatella rationaalilukua yksittäisenä kokonaisuutena tai pisteenä lukusuoralla; oppilaalle on tavanomaisempaa ajatella, että rationaaliluku tarkoittaa aina jotakin osaa kokonaisuudesta [17, s. 235]. Tätä harhakäsitystä vahvistaa luultavasti se, kuinka koulussa murtolukuja kuvataan usein esimerkiksi osittain väritettyinä kuvioina. Monet oppilaat yhdistävät murtoluvut juuri näihin kuvioihin, kuten ympyrädiagrammeihin, tai tutummin murtokakkuihin [29, s. 320]. Huonoa murtokakuissa on kuitenkin se, että niistä syntyy usein oppilaalle sellainen käsitys, että kuvion väritetty osuus kuvastaisi aina nimittäjää ja palasten määrä osoittajaa, vaikka näin ei kuitenkaan aina ole [29, s. 320].

3.1 Murtolukumerkinnän eri merkitykset

Murtolukumerkintää voidaan käyttää monen eri asian kuvaamiseen, eli sillä on monta eri merkitystä. Murtolukuja ymmärtääkseen oppilaiden tulisi ymmärtää murtolukumerkintää monessa eri konseptissa [41, s. 290]. Joutsenlahden ja Perkkilän [10] mukaan murtolukumerkintä $\frac{2}{3}$ voidaan käsittää ensinnäkin murtolukuna, jolloin merkintä kuvastaa kahta kolmasosaa. Tämän lisäksi merkintä $\frac{2}{3}$ voidaan ajatella suhteena "kahden suhde kolmeen"sekä jakolaskuna "kaksi jaettuna kolmella"[10].

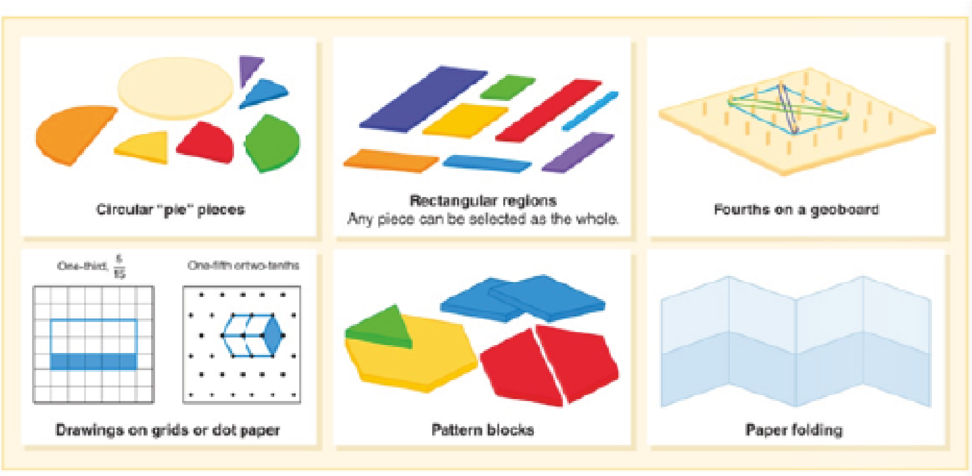
Myös Murdock-Stewart on esitellyt murtolukumerkinnälle eri merkityksiä. Hän esittelee murtolukumerkinnälle viisi eri merkitystä, jotka ovat osa kokonaisuudesta, mitta, operaattori, osamäärä sekä suhde [31]. Murdock-Stewart [31] määrittelee osa kokonaisuudesta -merkityksen tarkoittavan osan suhdetta kokonaiseen. Esimerkiksi murtolukumerkinnällä $\frac{3}{4}$ voidaan kuvata neljään osaan jaettua kakkua, josta kolme palasta on syöty. Mitalla viitataan puolestaan luvun paikkaan lukusuoralla tai mittanauhalla. Murdock-Stewartin [31] mukaan murtolukumerkintä voidaan nähdä lisäksi operaattorina silloin kun otetaan murto-osa, esimerkiksi $\frac{1}{4}$ jostakin. Tällöin esimerkiksi $\frac{1}{4}$ 12 ihmisestä on kolme. Osamäärän merkityksellä tarkoitetaan tulosta, joka saadaan, kun esimerkiksi kolme keksiä jaetaan neljälle ihmiselle. Suhteen merkityksen Murdock-Stewart määrittelee hieman eri lailla kuin Joutsenlahti ja Perkkilä. Hänen mukaansa murtoluku kuvastaa suhdetta ainoastaan silloin, kun se muodostetaan osan suhteesta kokonaiseen, ei kahden osan välillä. Hänen mukaansa kaikki suhteet eivät ole murtolukuja [31]. Joutsenlahden ja Perkkilän [10] mukaan suhteella sen sijaan tarkoitetaan yleisimmin kahden lukumäärän välistä suhdetta, esimerkiksi mittakaavaa, jossa verrataan kahden eri luvun suhdetta toisiinsa. Myös Van de Wallen ym. [41, s. 291] mukaan suhde voidaan muodostaa osasta ja kokonaisuudesta, mutta myös kahdesta eri kokonaisuudesta, esimerkiksi kuvaamaan luokan tyttöjen määrän suhdetta luokan poikien määrään.

3.2 Murtolukuja kuviokielellä

Murtolukujen esittämiseen voidaan hyödyntää erilaisia kuviokielen ja taktiilisen toiminnan kielen malleja. Van de Walle, Karp ja Bay-Williams [41] jakavat nämä mallit kolmeen kategoriaan: pinta-alamalli, pituusmalli sekä joukkomalli. Pinta-alamallia voidaan hyödyntää esimerkiksi, kun halutaan havainnollistaa $\frac{1}{4}$ ympyrästä. Pituusmalli toimii puolestaan lukusuoralla tai, kun halutaan ottaa esimerkiksi $\frac{3}{4}$ metristä. Joukkomallilla puolestaan kuvataan nimensä mukaisesti jostakin kokonaisuudesta joukon ottamista, esimerkiksi ottaessa $\frac{1}{3}$ luokan oppilaista. [41]

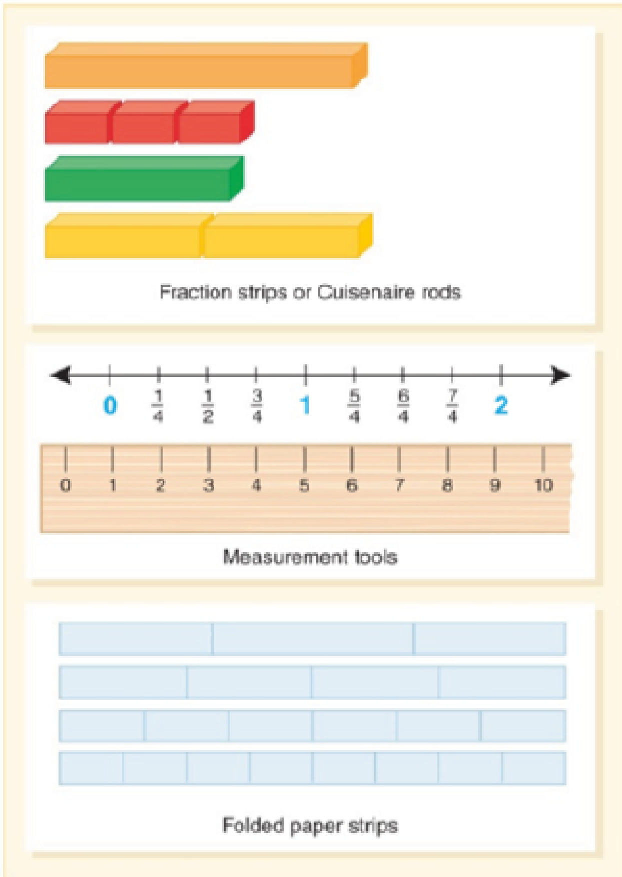
Seuraavat kuvat ovat Van de Wallen ym. [41] esittämät mallit murtoluvuille. Kuvassa 3.1 on esiteltynä pinta-alamalli murtoluvulle.

Kuvasta nähdään, että pinta-alamalliin lukeutuu ympyrädiagrammin muotoiset "piirakkamallia"hyödyntävät kappaleet, suorakulmion muotoiset kappaleet, geolauta, piirrokset ruudukkoon, muut kuviomallit sekä paperin taittelu osiin. Piirakkamallia hyödyntävät kappaleet ja geolauta ovat luultavasti monelle tutut alakoulun matematiikan opiskelusta, mutta niitä voidaan hyödyntää toki myös yläasteella.



Kuva 3.1. *Pinta-alamalli [41, s. 293]*

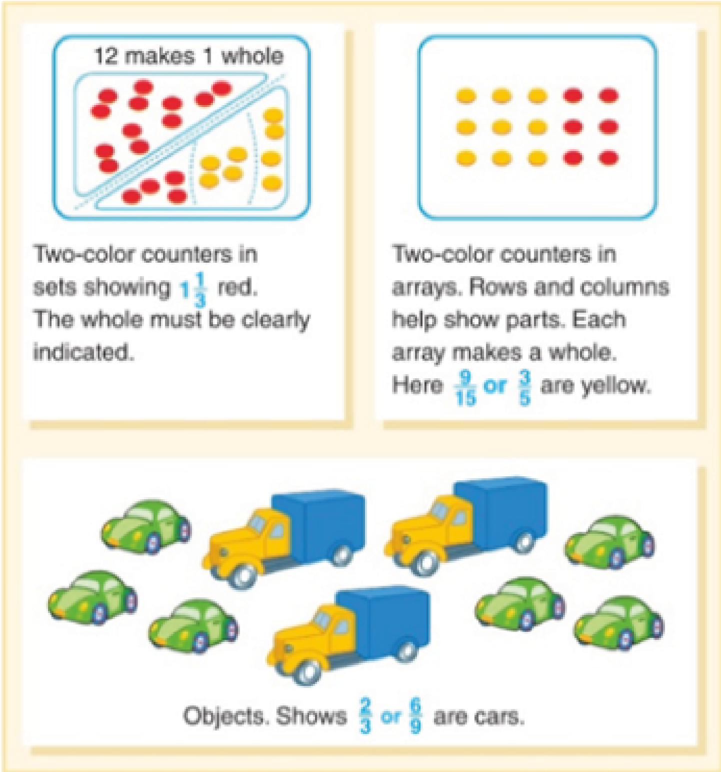
Kuva 3.2 esittää erilaisia pituusmalleja.



Kuva 3.2. *Pituusmalli [41, s. 294]*

Pituusmalliin kuuluu Cuisenaire -värisauvat, mittavälineet, kuten lukusuora ja viivain sekä pituussuunnassa taitellut paperit. Kuvassa 3.3 on esiteltynä joukkomalli.

Joukkomalliin voidaan käyttää laajalti monenlaisia objekteja, joista kuvassa esimerkkeinä eriväriset ympyrät sekä autot.



Kuva 3.3. *Joukkomalli [41, s. 295]*

Eri esitysmallien avulla opitaan eri asioita murtoluvuista ja erilaisten mallien käyttö syventää oppilaiden ymmärrystä. Pinta-alamallin avulla oppilaat oppivat hahmottamaan, kuinka murtolukumerkinnällä voidaan kuvata osaa kokonaisesta. Pituusmalli sen sijaan auttaa oppilaita ymmärtämään, kuinka jokaisen kahden murtoluvun välistä voidaan löytää aina uusi murtoluku. Pituusmallissa vertaillaan alueen sijaan pituutta, jota voidaan esittää joko piirretyillä lukusuorilla tai mittaa kuvaavilla fyysisillä materiaaleilla. Lukusuoran käyttäminen auttaa oppilasta hahmottamaan murtoluvun suuruutta verrattuna muihin lukuihin, mikä ei ole yhtä helppoa esimerkiksi pinta-alamallia käytettäessä. Joukkomallissa kokonainen nähdään joukkona objekteja, ja osa tästä joukosta muodostaa murtoluvun. Esimerkiksi 3 objektia on $\frac{1}{4}$ 12 objektin joukosta. Joukkomalli on siitä hyödyllinen, että se auttaa löytämään murtoluvun ja suhteen käsitteille arkielämän yhteyksiä. [41] Seuraavaan taulukkoon on esitelty Van de Wallen ym. [41] esitys murtolukumallien ominaisuuksista.

Taulukosta 3.1 nähdään, että pinta-alamallissa murtoluvulle kokonaisen määrittelee tietyn alueen, esimerkiksi ympyrän pinta-ala. Osat pinta-alamallissa määrittelee alueen samankokoiset osat, esimerkiksi ympyrän neljä samankokoista osaa ja murtoluvulla kuvataan pinta-alamallissa tietyn osan tai osien suhdetta kokonaiseen eli esimerkiksi yhden ympyrän osan suhdetta kaikkiin neljään osaan. Pituusmallissa kokonaisen määrittelee pituuden yksikkö tai jokin luku lukusuoralla, esimerkiksi 1 m mittanauhalla. Osat pituusmallissa määrittelee pituuden saman pituiset osat, esimerkiksi metri voisi olla jaettuna kymmenen sentin välein osiin. Pituusmallissa murtoluvulla kuvataan pisteen sijainnin suhdetta lukuun

Taulukko 3.1. Kuviokielen mallit murtoluvuille (muokattu Van de Wallin, Karpin ja Bay-Williamsin teoksesta [41])

Malli	Mikä määrittelee kokonaisen	Mikä määrittelee osat	Mitä murtoluvulla kuvataan
Pinta-ala	Tietyn alueen pinta-ala	Alueen samankokoiset osat	Osan/osien suhde kokonaiseen
Pituus	Pituuden yksikkö / luku lukusuoralla	Pituuden samanpituiset osat	Pisteen sijainnin suhde lukuun 0 ja muihin lukusuoran arvoihin
Joukko	Määritelty joukko	Joukon objektien määrä	Osan joukosta suhde koko joukkoon

0, esimerkiksi 10 cm on 1 metrin mittanauhalla $\frac{1}{10}$. Joukkomallissa kokonaisen määrittelee määritelty joukko, esimerkiksi kourallinen puuhelmiä. Osat joukkomallissa määrittelee joukon objektien määrä, esimerkiksi 12 puuhelmeä. Murtoluvulla kuvataan joukkomallissa osan joukosta suhdetta koko joukkoon, esimerkiksi jos puuhelmistä 3 olisi valkoisia, olisi valkoisten puuhelmien suhde kaikkiin puuhelmiin $\frac{1}{4}$.

3.3 Murtoluvut opetussuunnitelmassa

Murtolukuja voidaan pitää osana peruskoulun matematiikan keskeisimpiä sisältöjä, sillä niistä löytyy maininnat jokaisen vuosiluokan matematiikan sisällöistä perusopetuksen opetussuunnitelmasta [34]. Alkuopetuksen, eli 1-2 vuosiluokkien sisällöissä murtoluvut mainitaan sisältöalueessa Luvut ja laskutoimitukset seuraavasti: *"Pohjustetaan murtoluvun käsitettä jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin."* [34, s. 129]. Oppilaan murtolukukäsitystä lähdetään siis rakentamaan peruskoulun alimmilla luokilla jakolaskun kautta. Vuosiluokkien 3-6 tavoitteisiin liittyvissä sisällöissä mainitaan murtoluvut seuraavassa yhteydessä:

> "Opitaan murtoluvun käsite ja harjoitellaan murtolukujen peruslaskutoimituksia eri tilanteissa...Perehdytään prosentin käsitteeseen...Hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä."[34, s. 236]

Koska prosentteja laskiessa lasketaan jotakin osaa kokonaisesta, voidaan sanoa, että sisältö liittyy murtolukumerkinnän merkitykseen osa kokonaisuudesta. Vuosiluokkien 7-9 sisällöissä murtolukuihin liittyy seuraava tavoite: "Vahvistetaan laskutaitoa murtoluvuilla ja opitaan murtoluvun kertominen ja jakaminen murtoluvulla"[34, s. 375]. Kaikki maininnat murtoluvusta perusopetuksen opetussuunnitelmassa liittyvät jollakin tapaa laskutoimituksiin, eikä siitä löydy mainintaa murtolukumerkinnän eri merkityksistä lainkaan. Jakolaskun merkitys murtolukumerkinnälle tulee ilmi 1-2 vuosiluokkien matematiikan sisällöistä, mutta suhteen merkitystä ei mainita lainkaan. Kuitenkin suhdetta hyödynnetään esimerkiksi mittakaavoissa ja verrannollisuudessa, joista löytyy joitakin mainintoja matematiikan oppiaineen sisällöistä.

3.4 Aikaisemmat tutkimukset

Murtolukumerkinnän eri merkitysten tuntemista on tutkittu aikaisemmin useissa tutkimuksissa useilla ikäluokilla. Esimerkiksi Joutsenlahti ja Perkkilä [11] tutkivat tutkimuksessaan "Sustainability Development in Mathematics Education - A Case Study of What Kind of Meaning Do Prospective Class Teahers Find for the Mathematical Symbol "$\frac{2}{3}$"?", minkälaisia merkityksiä luokanopettajaopiskelijat löytävät merkinnälle "$\frac{2}{3}$". Tämän lisäksi he tutkivat, minkälaisen yhteyden opiskelijat löytävät tutkimuksessa annettujen kuvien sekä merkinnän "$\frac{2}{3}$"välille [11]. Tämän tutkimuksen kaksi ensimmäistä tehtävää on muodostettu Joutsenlahden ja Perkkilän kyseisen tutkimuksen tehtävien pohjalta. Tutkimuksessa huomattiin, että tutkimuksen toinen tehtävä, jossa oli merkinnän "$\frac{2}{3}$"lisäksi kuvia, tuotti enemmän vastauksia, kuin pelkkä matemaattinen merkintä [11]. Tyypillisin tulkinta murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"oli tutkimuksessa murtoluku, mikä selittyy sillä, että se on myös opetussuunnitelmassa ja oppikirjoissa eniten käytetty merkitys [11].

Joutsenlahden ja Perkkilän tutkimuksen kanssa vastaavaan tulokseen on päästy myös Novitan ym. [32] tutkimuksessa, joka toteutettiin myös luokanopettajaopiskelijoilla. Tutkimukseen osallistui 112 luokanopettajaopiskelijaa kahdesta yksityisestä yliopistosta Indonesiasta. Osallistujien tehtävänä oli vastata kyselylomakkeen tehtäviin, jotka liittyivät murtolukumerkinnän merkityksiin. Tutkimuksessa huomattiin, että osallistujien yleisin tulkinta murtoluvulle oli osa kokonaisuudesta -merkitys. Muut neljä merkitystä, tässä tutkimuksessa suhde, osamäärä, mitta ja operaattori, mainittiin vastauksissa hyvin harvoin tai ei lainkaan. [32]

Luokanopettajaopiskelijoiden lisäksi myös valmiiden luokanopettajien tietämystä murtoluvun eri merkityksistä ja niiden välisistä yhteyksistä on tutkittu aiemmin. Doğanin ja Termizin [3] tutkimukseen osallistui yhteensä 266 peruskoulun opettajaa Turkista. Tutkimuksen tuloksena saatiin selville, että opettajilla oli eniten tietämystä murtoluvun merkityksistä operaattori ja osa kokonaisuudesta. Mitan, osamäärän ja suhteen merkityksistä opettajilla oli vähiten tietämystä. [3]

Opettajien ja opettajaopiskelijoiden lisäksi murtolukumerkinnän eri merkitysten tuntemista on tutkittu myös oppilailla. Stewart [31] tutki kuudesluokkalaisten murtolukujen merkitysten ymmärrystä. Tutkimukseen osallistui 20 kuudesluokkalaista Yhdysvalloissa Floridan osavaltiossa. Tutkimuksessa selvisi, että oppilailla oli hyvin vähän ymmärrystä murtoluvuista ja sen merkityksistä sen merkitsemistapaa lukuun ottamatta. Kuitenkin tutkimuksessa yllättäen yhtä lukuun ottamatta yksikään oppilas ei kuvaillut murtolukua osa kokonaisesta -merkityksellä. Murtolukuja kuviokielellä kuvatessaan oppilaat käyttivät pääosin pinta-alamallia ja yksi oppilas joukkomallia. [31]

Vaikka murtolukumerkinnän merkitysten tuntemista on tutkittu aikaisemmin useilla kouluasteilla, aiheesta on tehty hyvin vähän opinnäytetöitä etenkin yläkouluikäisistä oppilaista. Vihervaara [42] tutki pro gradu -tutkimuksessaan, mitä eri rationaaliluvun representaatioita yläkouluikäiset oppilaat tuntevat, sekä millainen on yhteys eri representaatioiden tuntemisen ja matematiikan opinnoissa menestymisen välillä. Tutkimukseen osallistui 69 seitsemännen ja kahdeksannen luokan oppilasta. Tutkimuksessa kaksi ensimmäistä tutkimuslomakkeen tehtävää olivat vastaavat tässä tutkimuksessa käytettyjen tehtävien kanssa. Tutkimuslomakkeen kolmas tutkimustehtävä tutki oppilaiden suhteen ymmärrystä ja neljäs tehtävä oppilaiden taitoa vertailla murtolukujen suuruuksia. Vihervaaran tutkimuksessa havaittiin, että oppilaille tutuin merkitys oli osa kokonaisuudesta, jonka vastasi 54 oppilasta. Vähiten tunnetut merkitykset olivat suhde kuudella vastauksella ja mitta neljällä vastauksella. Vastaavasti kuitenkin annetuista kuvista suhteen merkityksen löysi vain yksi oppilas. ([42] Vihervaaran tutkimukseen osallistui vain 7. ja 8. luokan oppilaita, joten siinä ei vertailtu kaikkien yläkoulun luokka-asteiden murtolukumerkinnän merkitysten tietämyksen eroja. Lisäksi tämä tutkimus eroaa Vihervaaran tutkimuksesta sillä, että tutkimuksessa halutaan tutkia lisäksi murtolukujen kirjallista kielentämistä sekä oppilaiden kokemuksia kirjallisesta kielentämisestä.

4. MURTOLUKUJEN YLEISTÄMINEN KOKONAISALUEISIIN

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen aihetta, murtolukuja yliopistomatematiikan tasolla. Luvussa esitellyt määritelmät, lauseet ja esimerkit pohjautuvat pääasiassa Judsonin teokseen *Abstract Algebra: Theory and Applications* [15]. Lisäksi luvun lähteenä on käytetty Sharman teosta *Algebra I: a basic course in abstract algebra* [36].

Tutkimuksessa oppilaat pohtivat murtolukumerkinnälle eri merkityksiä ja laskivat yksinkertaisia murtolukutehtäviä. Tässä luvussa esitellyt asiat eivät vastaa tutkimukseen osallistuneiden tekemiä tehtäviä, vaan luvussa käsitellään murtolukuja huomattavasti syvemmällä tasolla. Luku on jaettu neljään alalukuun; aluksi esitellään lyhyenä pohjustuksena algebralliset struktuurit ryhmä ja Abelin ryhmä. Toisessa alaluvussa esitellään renkaan määritelmä sekä joitakin renkaisiin liittyviä ominaisuuksia ja esimerkkejä erilaisista renkaista. Kolmas alaluku käsittelee kokonaisalueita ja kuntia. Alaluvussa käsitellään kokonaisalueita ja kuntia useiden esimerkkien kautta sekä siinä esitellään joitakin näiden algebrallisten struktuurien ominaisuuksia. Luvun viimeisessä alaluvussa esitellään murtolukujen yleistäminen kokonaisalueisiin.

4.1 Ryhmä

Määritelmä 4.1. Laskutoimitus $\circ$ joukossa G on funktio $G \times G \to G$, jota merkitään $a \circ b$ tai ab. [15, s. 33]

Määritelmä 4.2. Olkoon G joukko, joka on varusteltu laskutoimituksella $\circ$. Pari $(G, \circ)$ on *ryhmä*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa.

1. Operaatio $\circ$ on *liitännäinen*, eli $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ kaikilla $a, b, c \in G$.
2. On olemassa sellainen alkio $e \in G$, että $e \circ a = a \circ e = a$ kaikilla $a \in G$. Alkiota e kutsutaan *neutraalialkioksi*.
3. Jokaista alkiota $a \in G$ kohti on olemassa sellainen alkio a^{-1}, että $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Alkiota a^{-1} kutsutaan alkion a *vasta-alkioksi*.

[15, s. 33-34]

Määritelmä 4.3. Ryhmää kutsutaan *Abelin ryhmäksi*, jos sille pätee lisäksi, että $a \circ b = b \circ a$ kaikilla $a, b \in G$. [15, s. 34]

4.2 Renkaat

Määritelmä 4.4. Epätyhjä joukko R on *rengas*, jos siinä on määritelty yhteenlasku ja kertolasku seuraavien ehtojen ollessa voimassa.

1. $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in R$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ kaikilla $a, b, c \in R$.
3. On olemassa sellainen alkio $0 \in R$, jolle $a + 0 = a$ kaikilla $a \in R$.
4. Jokaiselle alkiolle $a \in R$ on olemassa sellainen alkio $-a \in R$, että $a + (-a) = 0$.
5. $(ab)c = a(bc)$ kaikilla $a, b, c \in R$.
6. $a(b + c) = ab + ac$ kaikilla $a, b, c \in R$ ja $(a + b)c = ac + bc$ kaikilla $a, b, c \in R$.

[15, s. 190]

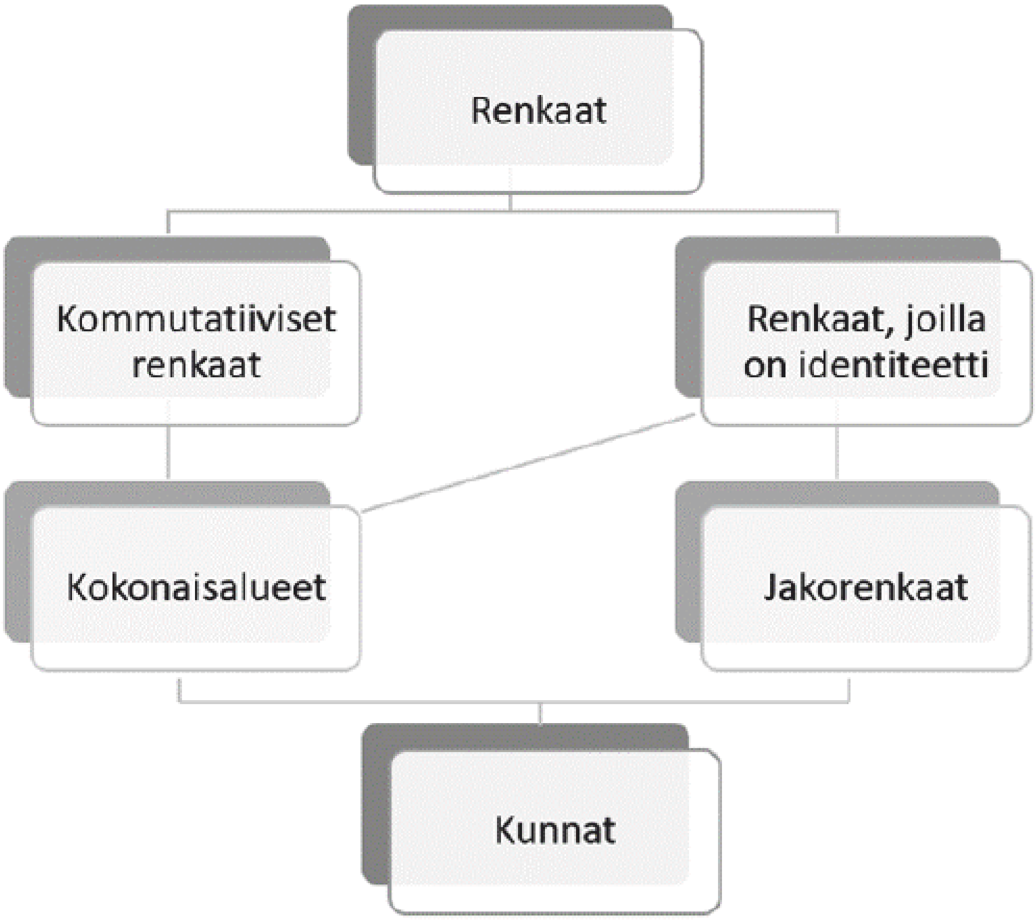
Huomautus. Listan neljä ensimmäistä ehtoa tarkoittaa sitä, että rengas on Abelin ryhmä yhteenlaskun suhteen. Renkaan voitaisiin siis määritellä olevan Abelin ryhmä $(R, +)$, joka lisäksi toteuttaa yllä esitetyt viidennen ja kuudennen ehdon kertolaskun suhteen. [15, s. 190]

Määritelmä 4.5. Rengas R

1. on *kommutatiivinen*, jos $ab = ba$ kaikilla $a, b \in R$.
2. sisältää *ykkösalkion* tai *yksikön*, jos on olemassa sellainen alkio $1 \in R$, että $1 \neq 0$ ja $1a = a1 = a$ kaikilla $a \in R$.
3. on *kokonaisalue*, jos se on kommutatiivinen, se sisältää ykkösalkion sekä, jos kaikilla $a, b \in R$, joille $ab = 0$ pätee joko $a = 0$ tai $b = 0$.
4. on jakorengas, jos se sisältää ykkösalkion ja jokaista alkiota $a \in R$, jolle $a \neq 0$, kohti on olemassa sellainen yksikäsitteinen alkio a^{-1}, että $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.
5. on *kunta*, jos se on kommutatiivinen jakorengas.

[15, s. 190-191]

Alla olevaan kuvioon on esitetty renkaiden, kokonaisalueiden, jakorenkaiden ja kuntien suhteet toisiinsa. Kuviota luetaan ylhäältä alaspäin. Kuviossa yläkäsitteenä on renkaat, joihin sisältyy kaikki alla olevat käsitteet. Renkaat jaetaan kommutatiivisiin renkaisiin ja renkaisiin, joilla on identiteetti. Lisäksi sellaiset renkaat, jotka ovat kommutatiivisia ja, joilla on identiteetti, ovat kokonaisalueita. Jakorenkaat ovat alakäsite sellaisille renkaille, joilla on identiteetti. Lopuksi rengas on kunta, jos se on kokonaisalue ja jakorengas.



Kuva 4.1. Erilaisia renkaita (muokattu lähteestä [15, s. 191])

Esimerkki 4.1. Kokonaisluvut muodostavat renkaan. Itse asiassa kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue. Nimittäin jos $ab = 0$, kun $a, b \in \mathbb{Z}$, joko $a = 0$ tai $b = 0$. Silti kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ei ole kunta. Tämä on seurausta siitä, että ei ole olemassa kokonaislukua, joka olisi esimerkiksi luvun 2 käänteisluku. Ainoat kokonaisluvut, joiden käänteisluku on kokonaisluku ovat luvut 1 ja -1. [15, s. 191]

Esimerkki 4.2. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ ovat renkaita yhteen- ja kertolaskulla varustettuna. [15, s. 191]

Esimerkki 4.3. Kokonaislukujen joukkoa modulo n voidaan merkitä $\mathbb{Z}_n$. Esimerkiksi joukossa $\mathbb{Z}_{12}$, $5 \cdot 7 \equiv 11 \pmod{12}$. Tämä tulo tekee Abelin ryhmästä $\mathbb{Z}_n$ renkaan. Rengas $\mathbb{Z}_n$ on kommutatiivinen rengas, mutta se ei kuitenkaan välttämättä ole kokonaisalue. Tarkasteltaessa esimerkiksi yhtälöä $3 \cdot 4 \equiv 0 \pmod{12}$ renkaassa $\mathbb{Z}_{12}$, huomataan, että renkaassa kahden nollasta poikkeavan alkion tulo voi olla nolla. [15, s. 191]

Määritelmä 4.6. Nollasta poikkeavaa alkiota a kommutatiivisessa renkaassa R kutsutaan *nollanjakajaksi*, jos on olemassa sellainen nollasta poikkeava alkio b renkaassa R, että $ab = 0$. Edellisessä esimerkissä luvut 3 ja 4 ovat nollanjakajia renkaassa $\mathbb{Z}_{12}$. [15, s. 191]

Esimerkki 4.4. Matriisi $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{smallmatrix}\right]$ on nollanjakaja renkaassa $M_2(\mathbb{R})$, missä operaatiot ovat matriisien yhteenlasku ja matriisitulo, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Esimerkki 4.5. Differentiaali- ja integraalilaskennassa jatkuvat reaaliarvoiset funktiot välillä $[a, b]$ muodostavat kommutatiivisen renkaan. Kahden funktion yhteen- tai kertolasku tapahtuu lisäämällä tai kertomalla funktion arvot keskenään. Jos esimerkiksi $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \cos x$, niin silloin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \cos x \tag{4.2}$$

ja

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2 \cos x. \tag{4.3}$$

[15, s. 191]

Esimerkki 4.6. Sellaiset 2×2 -matriisit, joiden alkiot kuuluvat reaalilukujen joukkoon, muodostavat renkaan yhteenlaskulla ja matriisien kertolaskulla varustettuna. Tällainen rengas ei ole vaihdannainen, sillä useimmiten $AB \neq BA$. Tämä pätee esimerkiksi matriiseille

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, xy \neq 0. \tag{4.4}$$

Lisäksi tässä tapauksessa voi olla $AB = 0$, vaikka kumpikaan matriiseista A tai B ei olisi nollamatriisi, eli sellainen matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. [15, s. 191]

Esimerkki 4.7. Esitetään esimerkki ei-kommutatiivisesta jakorenkaasta. Tässä esimerkissä käytetään kompleksisia 2×2 -matriiseja, joissa merkintä i tarkoittaa kompleksiluvun imaginääriyksikköä. Olkoon

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

missä $i^2 = -1$. Näille matriiseille pätee seuraavat yhtälöt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1 \\
\mathbf{ij} &= \mathbf{k} \\
\mathbf{jk} &= \mathbf{i} \\
\mathbf{ki} &= \mathbf{j} \\
\mathbf{ji} &= -\mathbf{k} \\
\mathbf{kj} &= -\mathbf{i} \\
\mathbf{ik} &= -\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Olkoon $\mathbb{H}$ joukko, joka koostuu sellaisista matriiseista, jotka ovat muotoa $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, missä a, b, c ja d ovat reaalilukuja. Yhtäpitävästi voidaan joukon $\mathbb{H}$ määritellä olevan joukko 2×2 -matriiseja, jotka ovat muotoa

$$
\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{4.7}
$$

missä $\alpha = a + di$ ja $\beta = b + ci$ ovat kompleksilukuja ja $\overline{\alpha}$ sekä $\overline{\beta}$ niitä vastaavat kompleksikonjugaatit $\overline{\alpha} = a - di$ ja $\overline{\beta} = b - ci$. Yhteenlasku ja kertolasku joukossa $\mathbb{H}$ voidaan määritellä joko tavanomaisilla matriisioperaatiolla tai virittäjien 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\
=&(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

ja

$$
(a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})(a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) = \alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j} + \delta\mathbf{k}, \tag{4.9}
$$

missä

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 \\
\beta &= a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 + d_1c_2 \\
\gamma &= a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 \\
\delta &= a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Rengasta $\mathbb{H}$ kutsutaan *kvaternioksi.*

Jotta kvaterniot voidaan osoittaa jakorenkaiksi, tulee löytää käänteisalkiot kullekin nollasta poikkeavalle alkiolle. Huomataan, että

$$
(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{4.11}
$$

Tämä alkio voi olla nolla ainoastaan silloin, kun $a = b = c = d = 0$. Eli, jos $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \neq 0$,

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \left(\frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right) = 1. \tag{4.12}$$

[15, s. 49, 191–192]

Lause 4.1. *Olkoon R rengas ja olkoot $a, b \in R$. Tällöin on voimassa*

1. $a0 = 0a = 0$,
2. $a(-b) = (-a)b = -ab$ *ja*
3. $(-a)(-b) = ab$.

Todistus.

1. Huomataan, että $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Nyt vähentämällä yhtälön molemmin puolin $a0$ saadaan $a0 = 0$. Vastaavasti $0a = 0$.
2. $ab + a(-b) = a(b - b) = a0 = 0$, jonka seurauksena $-ab = a(-b)$. Vastaavasti $-ab = (-a)b$
3. Kolmannen kohdan todistus seuraa kohdan 2 todistuksesta, sillä

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab. \tag{4.13}$$

[15, s. 192-193] □

Aivan kuten ryhmillä on aliryhmiä, on myös renkailla alirenkaita.

Määritelmä 4.7. Renkaan R *alirengas* S on renkaan R sellainen osajoukko, joka on myös rengas ja, jolla on samat laskutoimitukset, kuin renkaalla R. [15, s. 193]

Esimerkki 4.8. Rengas $n\mathbb{Z}$, eli kokonaisluvulla n jaollisten lukujen joukko, on renkaan $\mathbb{Z}$ alirengas. Vaikka renkaalla olisi identiteetti, on huomattava, että alirenkaalla ei välttämättä tarvitse olla. Seuraava ketju esittää lukualueet toistensa alirenkaina:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{4.14}$$

[15, s. 193]

Lause 4.2 (Alirengaskriteerit). *Olkoon R rengas ja S renkaan R osajoukko. Osajoukko S on renkaan R alirengas jos, ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat.*

1. $S \neq \emptyset$.
2. $rs \in S$ *kaikilla* $r, s \in S$.
3. $r - s \in S$ *kaikilla* $r, s \in S$. *[15, s. 193]*

Esimerkki 4.9. Olkoon $R = M_2(\mathbb{R})$ 2×2 -matriisien rengas, joiden alkiot kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}$. Jos T on yläkolmiomatriisien joukko renkaassa R eli

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \tag{4.15}$$

niin T on renkaan R alirengas. Nimittäin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ja } B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

ovat osajoukossa T ja tällöin selkeästi $A - B$ on myös osajoukossa T. Lisäksi

$$AB = \begin{bmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

on osajoukossa T. [15, s. 193]

4.3 Kokonaisalueet ja kunnat

Tässä alaluvussa käsitellään tarkemmin kokonaisalueita sekä kuntia muutamien lauseiden ja esimerkkien kautta. Lisäksi määritellään renkaan karakteristika sekä esitellään kaksi siihen liittyvää lausetta.

Esimerkki 4.10. Jos $i^2 = -1$, niin silloin joukko $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ muodostaa renkaan, jota kutsutaan *Gaussin kokonaisluvuiksi*. Gaussin kokonaisluvut ovat kompleksilukujen alirengas, sillä se on suljettu yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Gaussin kokonaislukua kutsutaan *yksiköksi*, jos se jakaa luvun 1. Olkoon $\alpha = a + bi$ yksikkö joukossa $\mathbb{Z}[i]$. Tällöin luvun α kompleksikonjugaatti $\overline{\alpha} = a - bi$ on myös yksikkö, sillä jos $\alpha\beta = 1$, niin myös $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 1$. Jos $\beta = c + di$, niin

$$1 = \alpha\beta\overline{\alpha}\overline{\beta} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \tag{4.18}$$

Täten $a^2 + b^2$ täytyy olla joko 1 tai -1, tai yhtäpitävästi, $a + bi = \pm 1$ tai $a + bi = \pm i$. Täten tämän renkaan yksiköt ovat ± 1 ja $\pm i$. Gaussin kokonaisluvut ei ole kunta, sillä renkaassa $\mathbb{Z}[i]$ käänteisalkio on olemassa vain alkioille $1, -1, i$ ja -1. [15, s. 194] [35, s. 581]

Lause 4.3. *Olkoon D kommutatiivinen rengas, jolla on yksikkö. Tällöin D on kokonaisalue, jos ja vain jos kaikilla nollasta poikkeavilla alkioilla $a \in D$ ja kaikilla b ja c, joilla $ab = ac$ pätee $b = c$.*

Todistus. $\Rightarrow$ Olkoon D kokonaisalue. Tällöin renkaalla D ei ole nollanjakajia. Olkoon $ab = ac$, jolle $a \neq 0$. Tällöin $a(b - c) = 0$, josta seuraa, että $b - c = 0$ eli $b = c$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että $ab = ac$ edellyttää, että $b = c$. Olkoon $ab = 0$. Jos $a \neq 0$, niin silloin $ab = a0$, joten $b = 0$. Täten alkio a ei voi olla nollanjakaja. [15, s. 194] $\square$

Lause 4.4. *Jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.*

Todistus. Olkoon D äärellinen kokonaisalue ja D^* kokonaisalueen D nollasta poikkeavien alkioiden joukko. Täytyy osoittaa, että jokaisella alkiolla joukossa D^* on käänteisalkio. Jokaiselle $a \in D^*$ voidaan määritellä kuvaus $\lambda_a : D^* \to D^*$, $\lambda_a(d) = ad$. Tämä kuvaus on hyvin määritelty, sillä jos $a \neq 0$ ja $d \neq 0$, niin $ad \neq 0$. Kuvaus λ_a on injektio, sillä jos

$$ad_1 = \lambda_a(d_1) = \lambda_a(d_2) = ad_2, \qquad d_1, d_2 \in D^*, \tag{4.19}$$

niin lauseen 4.3 nojalla seuraa, että $d_1 = d_2$. Koska joukko D^* on äärellinen, kuvauksen λ_a täytyy olla myös surjektiivinen, eli tällöin on olemassa sellainen $d \in D^*$, jolle $\lambda_a(d) = ad = 1$. Koska kokonaisalue D on kommutatiivinen, täytyy alkion d olla alkion a käänteisalkio. Tämän seurauksena kokonaisalue D on kunta. [15, s. 194] $\square$

Esimerkki 4.11.

1. Rengas $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue. Koska esimerkiksi luvulla 2 ei ole käänteislukua, rengas $\mathbb{Z}$ ei ole kunta.
2. Rengas $\mathbb{Q}$ on kokonaisalue. Lisäksi jokaisella nollasta poikkeavalla alkiolla on käänteisalkio. Täten $\mathbb{Q}$ on myös kunta.
3. Rengas $\mathbb{R}$ eli reaaliluvut ja rengas $\mathbb{C}$ eli kompleksiluvut ovat kuntia. [36]

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan kommutatiivista rengasta $\mathbb{Z}_9$. Renkaalla on yksikkö, mutta se ei kuitenkaan ole kokonaisalue. Tämä johtuu siitä, että renkaalla $\mathbb{Z}_9$ on nollanjakaja, sillä $3 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 9$. Rengas $\mathbb{Z}_9$ ei myöskään ole kunta, sillä esimerkiksi luvulle $3 \in \mathbb{Z}_9$ ei ole käänteislukua. [36]

Määritelmä 4.8. Renkaan R *karakteristika* tarkoittaa pienintä sellaista kokonaislukua n, että

$$nr = 0, \qquad \text{kaikilla } r \in \mathbb{R}, \tag{4.20}$$

missä $nr = r + r + \cdots + r$ (n kertaa). Jos tällaista lukua ei ole olemassa, renkaan R karakteristika määritellään nollaksi. Renkaan R karakteristikaa merkitään char R. [15, s. 194]

Määritelmä 4.9. Alkion $a \in G$ *kertaluku* on pienin sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $a^n = e$. [15, s. 47]

Lause 4.5. *Olkoon renkaalla R yksikkö. Jos alkion 1 kertaluku on n, niin renkaan R karakteristika on n.*

Todistus. Jos alkion 1 kertaluku on n, niin silloin n on sellainen pienin positiivinen kokonaisluku, että $n1 = 0$. Tällöin

$$nr = n(1r) = (n1)r = 0r = 0, \qquad \text{kaikilla } r \in R. \tag{4.21}$$

Toisaalta, jos ei ole olemassa sellaista positiivista lukua n, että $n1 = 0$, niin renkaan R karakteristika on nolla. [15, s. 195] □

Lause 4.6. *Kokonaisalueen karakteristika on joko alkuluku tai nolla.*

Todistus. Olkoon D kokonaisalue ja oletetaan, että kokonaisalueen D karakteristika on $n \neq 0$. Jos luku n ei ole alkuluku, niin $n = ab$, missä $1 < a < n$ ja $1 < b < n$. Edellisen lauseen perusteella tarvitsee tarkastella vain tapausta $n1 = 0$. Koska $0 = n1 = (ab)1 = (a1)(b1)$ ja, koska kokonaisalueessa D ei ole nollanjakajia, niin joko $a1 = 0$ tai $b1 = 0$. Täten kokonaisalueen D karakteristika täytyy olla pienempi kuin n, joka on ristiriita. Täten luvun n täytyy olla alkuluku. [15, s. 195] □

4.4 Kokonaisalueen murtolukujen kunta

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Alkio $p/q \in \mathbb{Q}$ on kokonaislukujen p ja q osamäärä. Kuitenkin kaksi eri kokonaislukuparia voi vastata samaa rationaalilukua. Esimerkiksi $1/2 = 2/4 = 3/6$. Tiedetään, että

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{4.22}$$

jos ja vain jos $ad = bc$. Täsmällisempi tapa on esittää murtolukuja ekvivalenssin avulla. Alkioita rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$ voidaan ajatella järjestettynä parina joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Tällöin osamäärä p/q voidaan kirjoittaa muodossa (p, q). Esimerkiksi $(3, 7)$ esittää murtolukua $3/7$. Kuitenkin tähän liittyy joitakin ongelmia, jos mietitään kaikkia pareja joukossa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ei ole murtolukua $5/0$ joka vastaisi lukuparia $(5, 0)$. Lisäksi lukuparit $(3, 6)$ ja $(2, 4)$ esittävät molemmat murtolukua $1/2$. Ensimmäinen ongelma ratkeaa sillä, että vaaditaan lukuparin toisen koordinaatin olevan erisuuri kuin nolla. Toinen ongelma ratkeaa pitämällä lukupareja (a, b) ja (c, d) ekvivalentteina, jos $ad = bc$. Murtoluvut voidaan yleistää kokonaisalueisiin, kun ne esitetään järjestettynä parina. [15, s. 225]

Määritelmä 4.10. Olkoon D mikä tahansa kokonaisalue ja olkoon

$$S = \{(a, b) : a, b \in D \text{ ja } b \neq 0\}. \tag{4.23}$$

Ekvivalenssirelaatio joukossa S määritellään asettamalla

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ jos ja vain jos } ad = bc. \text{ [15, s. 225]} \tag{4.24}$$

Lause 4.7. *Joukon S relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Koska kokonaisalue D on vaihdannainen, eli $ab = ba$, on relaatio $\sim$ refleksiivinen kokonaisalueessa D. Oletetaan, että $(a, b) \sim (c, d)$. Tällöin $ad = bc$ eli $cb = da$. Täten $(c, d) \sim (a, b)$ ja relaatio $\sim$ on symmetrinen. Jotta voidaan osoittaa relaation transitiivisuus, oletetaan, että $(a, b) \sim (c, d)$ ja $(c, d) \sim (e, f)$. Tässä tapauksessa $ad = bc$ ja $cf = de$. Kerrotaan lausekkeen $ad = bc$ molemmat puolet termillä f, jolloin saadaan

$$afd = adf = bcf = bde = bed. \tag{4.25}$$

Koska D on kokonaisalue, voidaan päätellä, että $af = be$ eli $(a, b) \sim (e, f)$. [15, s. 225-226] □

Palautetaan mieleen millainen on joukossa $\mathbb{Q}$ murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{4.26}$$

ja

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{4.27}$$

[15, s. 226]

Merkitään joukon S relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkien joukkoa F_D. Määritellään yhteenlasku ja kertolasku joukossa F_D vastaavalla tavalla.

Määritelmä 4.11. Merkitään järjestetyn parin $(a, b) \in S$ ekvivalenssiluokkia $[a, b]$. Tällöin joukon F_D yhteen- ja vähennyslasku määritetään seuraavasti

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd] \tag{4.28}$$

ja

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd] \tag{4.29}$$

[15, s. 226]

Lause 4.8. *Yhteen- ja kertolasku joukossa F_D ovat hyvin määriteltyjä.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että yhteenlasku on hyvin määritelty. Olkoon $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$

ja $[c_1, d_1] = [c_2, d_2]$. Pitää osoittaa, että

$$[a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1] = [a_2d_2 + b_2c_2, b_2d_2] \tag{4.30}$$

eli toisin sanoen, että

$$(a_1d_1 + b_1c_1)(b_2d_2) = (b_1d_1)(a_2d_2 + b_2c_2). \tag{4.31}$$

Koska $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ ja $[c_1, d_1] = [c_2, d_2]$, tiedetään, että $a_1b_2 = b_1a_2$ ja $c_1d_2 = d_1c_2$. Täten

$$\begin{aligned}(a_1d_1 + b_1c_1)(b_2d_2) &= a_1d_1b_2d_2 + b_1c_1b_2d_2 \\ &= a_1b_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 \\ &= b_1a_2d_1d_2 + b_1b_2d_1c_2 \\ &= (b_1d_1)(a_2d_2 + b_2c_2).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Osoitetaan sitten, että kertolasku on hyvin määritelty. Olkoon taas $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ ja $[c_1, d_1] = [c_2, d_2]$. Nyt pitää osoittaa, että

$$[a_1c_1, b_1d_1] = [a_2c_2, b_2d_2] \tag{4.33}$$

tai vastaavasti, että

$$(a_1c_1)(b_2d_2) = (b_1d_1)(a_2c_2). \tag{4.34}$$

Nyt koska $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$ ja $[c_1, d_1] = [c_2, d_2]$, tiedetään, että $a_1c_1 = a_2c_2$ ja $b_2d_2 = b_1d_1$.

Täten

$$\begin{aligned}(a_1c_1)(b_2d_2) &= a_1c_1b_2d_2 \\ &= b_2d_2a_1c_1 \\ &= b_1d_1a_2c_2 \\ &= (b_1d_1)(a_2c_2)\end{aligned} \tag{4.35}$$

[15, s. 226] □

Lause 4.9. *Joukon S ekvivalenssiluokkien joukko F_D on kunta yhteen- ja kertolaskulla seuraavasti varusteltuna*

$$\begin{aligned}[a, b] + [c, d] &= [ad + bc, bd] \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [ac, bd].\end{aligned} \tag{4.36}$$

Todistus. Neutraalialkiot yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen ovat $[0, 1]$ ja $[1, 1]$. Ensinnäkin alkiolla $[0,1]$ pätee

$$[a,b]+[0,1]=[a1+b0,b1]=[a,b], \tag{4.37}$$

josta huomataan, että $[0,1]$ todella on neutraalialkio yhteenlaskun suhteen. Myös se, että $[1,1]$ on neutraalialkio kertolaskun suhteen, on helppo osoittaa. Olkoon $[a,b]\in F_D$ siten, että $a\neq 0$. Tällöin myös $[b,a]\in F_D$ ja $[a,b]\cdot[b,a]=[1,1]$. Täten $[b,a]$ on alkion $[a,b]$ käänteisalkio. Samaan tapaan alkio $[-a,b]$ on alkion $[a,b]$ vasta-alkio.

Osoitetaan, että kertolaskun liitännäisyys ja vaihdannaisuus pätee joukossa F_D. Olkoot $[a,b]$, $[c,d]$ ja $[e,f]\in F_D$. Liitännäisyyden toteamiseksi tulee osoittaa, että

$$([a,b]\cdot[c,d])\cdot[e,f]=[a,b]\cdot([c,d]\cdot[e,f]). \tag{4.38}$$

Nyt

$$\begin{aligned}([a,b]\cdot[c,d])\cdot[e,f]&=[ac,bd]\cdot[e,f]\\&=[ace,bdf]\\&=[a,b]\cdot[ce,df]\\&=[a,b]\cdot([c,d]\cdot[e,f]).\end{aligned} \tag{4.39}$$

Lisäksi kertolaskun vaihdannaisuuden osoittamiseksi tulee osoittaa, että

$$[a,b]\cdot[c,d]=[c,d]\cdot[a,b]. \tag{4.40}$$

Nyt

$$\begin{aligned}[a,b]\cdot[c,d]&=[ac,bd]\\&=[ca,db]\\&=[c,d]\cdot[a,b].\end{aligned} \tag{4.41}$$

Kertolaskun liitännäisyys ja vaihdannaisuus pätee siis joukossa F_D.

Lisäksi tulee osoittaa, että joukko F_D on Abelin ryhmä yhteenlaskun suhteen. Koska yllä osoitettiin, että joukossa F_D on olemassa neutraalialkio ja vasta-alkio yhteenlaskun suhteen, jää jäljelle osoittaa yhteenlaskun liitännäisyys ja vaihdannaisuus. Olkoot jälleen $[a,b]$, $[c,d]$ ja $[e,f]\in F_D$. Liitännäisyyden osoittamiseksi tulee osoittaa, että

$$([a,b]+[c,d])+[e,f]=[a,b]+([c,d]+[e,f]). \tag{4.42}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
([a, b] + [c, d]) + [e, f] &= [ad + bc, bd] + [e, f] \\
&= [(ad + bc)f + bde, bdf] \\
&= [adf + bcf + bde, bdf] \\
&= [adf + b(cf + de), bdf] \\
&= [a, b] + [cf + de, df] \\
&= [a, b] + ([c, d] + [e, f]).
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Yhteenlaskun vaihdannaisuuden osoittamiseksi tulee osoittaa, että

$$[a, b] + [c, d] = [c, d] + [a, b]. \tag{4.44}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
[a, b] + [c, d] &= [ad + bc, bd] \\
&= [da + cb, db] \\
&= [cb + da, db] \\
&= [c, d] + [a, b].
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Joukko F_D on siis Abelin ryhmä yhteenlaskun suhteen. Viimeisenä kunnan ehtona on osoittaa, että osittelulaki pätee joukossa F_D eli, että

$$
\begin{aligned}
[a, b][e, f] + [c, d][e, f] &= [ae, bf] + [ce, df] \\
&= [aedf + bfce, bdf^2] \\
&= [aed + bce, bdf] \\
&= [ade + bce, bdf] \\
&= ([a, b] + [c, d])[e, f].
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Joukko F_D on siis kunta. [15, s. 226-227] □

Määritelmä 4.12. Edellisen lauseen kuntaa F_D kutsutaan kokonaisalueen D *murtolukujen kunnaksi* tai *osamäärien kunnaksi*. [15, s. 227]

Tämän luvun myötä nähdään, että yllä esitellyn mukaisesti voidaan rationaalilukujen idea yleistää mielivaltaiselle kokonaisalueelle. Seuraavassa luvussa esitellään tutkimuksen tutkimusongelmat sekä tutkimuskysymykset.

5. TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimuksen ensimmäisenä tutkimusongelmana on selvittää, minkälaisia merkityksiä yläkouluikäiset oppilaat löytävät murtolukumerkinnälle. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, kuinka monta eri murtolukumerkinnän merkitystä oppilaat löytävät sekä spontaanisti että kuvien avulla. Erityisesti on kiinnostavaa selvittää, esiintyykö vastauksissa jokin tietty murtolukumerkinnän merkitys muita useammin ja onko joitakin sellaisia merkityksiä, jotka oppilailta jäävät kokonaan keksimättä. Tutkimuksessa pyritään myös selvittämään, millä tavoin yläasteen eri luokka-asteiden oppilaiden löytämät merkitykset murtolukumerkinnästä eroavat toisistaan. Esimerkiksi suhteen käsitettä käsitellään yläasteella tarkemmin kahdeksannella luokalla verrannon yhteydessä ja yhdeksännellä luokalla mittakaavoja laskiessa, joten on mielenkiintoista selvittää, löytävätkö seitsemäsluokkalaiset suhteen merkityksen murtolukumerkinnälle.

Toinen tutkimusongelma on, millaisia kuviokielen malleja oppilaat käyttävät murtolukutehtävien kirjallisessa kielentämisessä. Kuten jo teoriassa mainittu; useimmiten oppilaat kuvaavat murtolukuja ainoastaan pinta-alamallin avulla. Tarkoituksena on selvittää, pitääkö väite paikkansa myös tässä tutkimuksessa vai hyödyntävätkö yläasteikäiset oppilaat muitakin kuviokielen malleja havainnollistaessa murtolukuja kuvan avulla. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, mitkä ovat murtolukutehtävien ratkaisuissa esiintyvät yleisimmät virheet ja mitkä ovat näiden virheiden yhteydet tehtävässä käytettyyn luonnolliseen kieleen ja kuviokieleen. Toisin sanottuna; tapahtuuko ratkaisuissa enemmän virheitä, jos niissä ei ole hyödynnetty omin sanoin selittämistä tai ratkaisun havainnollistamista kuvan avulla.

Kolmantena tutkimusongelmana on selvittää oppilaiden kokemuksia kirjallisen kielentämisen hyödyntämisestä osana tehtävän ratkaisua. Yläasteikäisten mielipiteitä kirjallisesta kielentämisestä on mielenkiintoista selvittää, sillä kirjallista kielentämistä ei matematiikan oppimateriaalit kannusta tekemään, eikä se ole koulumaailmassa juurikaan käytetty keino matematiikan oppimisessa. On etenkin mielenkiintoista selvittää, kokevatko yläasteikäiset hyötyvänsä kirjallisesta kielentämisestä osana ratkaisua, sekä tuntuuko kirjallinen kielentäminen yläasteikäisistä vaivattomalta tai mieluisalta.

Näiden tutkimusongelmien pohjalta tutkimuskysymyksiksi muotoutuivat seuraavat kysymykset alakysymyksineen:

1. Millaisia merkityksiä yläkoulun oppilaat keksivät murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"?

   1.1. Kuinka monta merkitystä oppilaat löytävät murtolukumerkinnälle?
   1.2. Millainen yhteys on oppilaan luokka-asteen ja murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten välillä?
   1.3. Millainen yhteys on oppilaan matematiikan arvosanan ja murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten lukumäärän välillä?
2. Millaisia merkityksiä oppilaat keksivät murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"annetuista kuvista?
3. Millaisia kuviokielen malleja oppilaat käyttävät murtolukutehtävien kirjallisessa kielentämisessä?
   3.1. Minkä tyyppisiä virhepäätelmiä oppilaat tekivät murtolukutehtävissä sekä mikä on niiden yhteys tehtävissä käytettyyn luonnolliseen kieleen ja kuviokieleen?
4. Millaisena oppilaat kokevat matematiikan kirjallisen kielentämisen osana murtolukutehtävien ratkaisemista?

Tutkimusmenetelmänä tutkimuksessa käytetään Mixed Methods (MMR) -menetelmää. Tutkimusmenetelmää ja tutkimuksen etenemistä kuvaillaan tarkemmin seuraavassa luvussa.

6. TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

6.1 Tutkimuslomake

Tutkimusaineisto kerättiin tutkimukseen oppilailla teetetyllä tutkimuslomakkeella. Tutkimuslomakkeen ensimmäisen sivun (Liite A) aluksi on osio, johon oppilas täyttää tietoja itsestään. Ensimmäisenä kohtana lomakkeessa kysytään oppilaan nimikirjaimia. Nimikirjaimet oppilailta kysytään vain, jotta tutkimuslomakepaperit pystytään yhdistämään toisiinsa. Seuraavaksi lomakkeessa kysytään oppilaan luokka-astetta. Tämän on annettu vaihtoehdoiksi lyhenteet 7lk, 8lk ja 9lk. Lisäksi tutkimuslomakkeessa kysytään oppilaan sukupuolta, johon vastausvaihtoehdoiksi annettiin vaihtoehtojen "tyttö" ja "poika" lisäksi vaihtoehdot "muu" ja "en halua kertoa". Viimeisenä tutkimuslomakkeen alussa kysytään saako oppilaan vastauksia käyttää tutkimukseen. Vaikka tutkimukseen osallistuvilla oppilailla tulee olla huoltajan lupa, on mielestäni järkevää kysyä tutkimustehtävien käyttämiseen myös oppilaan lupa, sillä esimerkiksi lastensuojelulain mukaan yli 12-vuotiaan lapsen mielipidettä on kuultava, eikä pelkkä vanhemman suostumus riitä tutkimukseen osallistumiseen [19]. Tutkimuslomakkeessa painotetaan oppilaille, kuinka tutkimuksen vastauksia käsitellään anonyymisti ja hyvää tieteellistä tapaa noudattaen. Lisäksi mainitaan, että nimikirjaimet tarvitaan ainoastaan tehtävälomakepapereiden yhdistämiseen sekä, että tutkimuksen tuloksista ei pysty tunnistamaan yksittäistä vastaajaa.

Tutkimuslomakkeessa oppilaan tietoja koskevan osuuden jälkeen on ensimmäinen tehtävä, joka on laadittu Joutsenlahden ja Perkkilän [13] aikaisemmassa tutkimuksessa. Tehtävässä oppilaan on tarkoituksena kirjoittaa mahdollisimman monta eri merkitystä merkinnälle "$\frac{2}{3}$". Merkinnän alla on useita rivejä kirjoitustilaa oppilaan vastauksille. Tutkimuslomakkeen ensimmäinen tehtävä on erillisellä paperilla, jotta oppilaat vastaisivat siihen mahdollisimman spontaanisti, ilman toisen tehtävän kuvien antamia vihjeitä. Ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on tuottaa vastauksia ensimmäiseen tutkimuskysymykseen.

Tutkimuslomakkeen toinen osio (Liite A) alkaa ensimmäisen sivun tapaan kohdalla, johon oppilas laittaa nimikirjaimensa lomakkeiden yhdistämistä varten. Lisäksi toisella sivulla kysytään ensimmäisestä sivusta poiketen oppilaan arvosanaa matematiikassa kevättodistuksessa. Tämän kysymyksen avulla pyritään selvittämään, onko oppilaan matematiikan koulumenestyksen ja murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten välillä yhteyttä.

Toinen tehtävä on myös laadittu Joutsenlahden ja Perkkilän [13] aikaisemmassa tutkimuksessa. Siinä annetaan neljä kuvaa, joiden viereen oppilaiden on tarkoitus kirjoittaa, miten kuviot heidän mielestään kuvaavat matemaattista merkintää "$\frac{2}{3}$". Ensimmäinen kuva on ympyrä, joka on jaettu kolmeen osaan, joista yksi on väritetty, eli kuva on perinteisen murtokakun näköinen. Ensimmäisellä kuvalla haetaan vastauksia, jotka kuvaisivat murtolukumerkinnän merkitystä osana kokonaisuudesta. Lisäksi tarkoituksena on selvittää, ymmärtävätkö oppilaat, että murtokakulla ilmaistussa murtoluvussa osoittaja ei aina välttämättä ole väritettyjen palasten määrä, vaan se voidaan katsoa myös värittämättömistä osista.

Tehtävässä 2 toinen kuva esittää lukujen 2 ja 3 suhdetta neliöiden avulla. Kuvassa on viisi neliötä peräkkäin, josta kaksi vasemmanpuoleista on väritetty ja loput kolme neliötä on valkoisia. Kuvalla haetaan vastauksia, joiden mukaan kuvio kuvaisi merkintää "$\frac{2}{3}$" neliöiden määrien suhteena. Kolmannessa kuvassa on kaksi neliöitä, jotka kaksi murtoviivaa jakaa kolmeen osaan sekä ensimmäisen osan kohdalla merkintä "0,67". Tällä kuvalla haetaan erityisesti vastauksia, joiden mukaan kuvio kuvaa merkintää "$\frac{2}{3}$" jakolaskuna tai osamääränä. Neljäs kuva on lukusuora, jossa lukujen 0 ja 1 välille osoittaa nuoli ja merkintä "$\frac{2}{3}$". Tällä kuvalla haetaan mittaan viittaavia vastauksia. Toisella tehtävällä pyritään saamaan vastauksia toiseen tutkimuskysymykseen.

Kolmas tehtävä koostuu kolmesta yksinkertaisesta murtoluvuilla tehtävästä laskutehtävästä, joiden ratkaisemisen lisäksi oppilaiden tehtävänä on selittää ratkaisu omin sanoin sekä piirtää tehtävän ratkaisua havainnollistava kuva. Tehtävän tarkoituksena on selvittää, millaisia kirjallisen kielentämisen malleja oppilaat käyttävät tehtävässä, minkälaisia käsitteitä he käyttävät ratkaisuissaan sekä, mitkä ovat yleisimpiä virheitä näissä tehtävissä. Tehtävän tarkoituksena on lisäksi selvittää, kuinka oppilaat hallitsevat murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvät taidot, kuten laventamisen, murtolukujen jakolaskun ja yhteenlaskun, ja, kuinka he hyödyntävät ratkaisuissaan kuviokieltä sekä luonnollista kieltä. Kolmannella tehtävällä pyritään saamaan vastauksia kolmanteen tutkimuskysymykseen.

Tutkimuslomakkeen lopuksi oppilaita pyydetään vastamaan tehtäviä koskeviin väittämiin rastittamalla kutakin väittämää vastaavan vaihtoehdon. Tehtävään käytettiin Likert -asteikkoa (*Likert scale*), sillä se sopii erityisesti mittareihin, joissa vastaaja arvioi omaa käsitystään väitteen sisällöstä [27, s. 39]. Vastausvaihtoehtoja kuvataan lomakkeessa hymiöin, jotka on selitetty vastaavan vaihtoehtoja "täysin samaa mieltä", "samaa mieltä", "ei samaa, eikä eri mieltä", "osittain eri mieltä" ja "täysin eri mieltä". Tutkimukseen osallistuvien ikää ajatellen hymiöiden koettiin olevan helppotajuisempi versio vaihtoehtojen kuvaukseen, kuin niiden kuvaaminen esimerkiksi numeroin 1-5. Loppukyselyn tarkoituksena on selvittää oppilaiden omat kokemukset tehtävistä sekä miten kuviokielen ja luonnollisen kielen hyödyntäminen vaikuttaa tehtävien ratkaisuun oppilaiden kokemuksen mukaan ja täten saada vastaukset neljänteen tutkimuskysymykseen.

6.2 Aineistonkeruu

Aineisto kerättiin eräässä Pirkanmaalla sijaitsevassa yhtenäiskoulussa. Tutkimuksen toteuttamisesta sovittiin koulun rehtorin kanssa alustavasti vuoden 2022 syyskuussa ja tutkimuksen toteutus tapahtui loka-marraskuun vaihteessa vuonna 2022. Tutkimuksen otos ei ollut täysin satunnainen, vaan muodostui saatavuuden mukaan, mikä on ei-satunnaisille otoksille tyypillistä [27]. Tutkimukseen osallistui kaksi seitsemännen luokan ryhmää, kaksi yhdeksännen luokan ryhmää sekä kolme kahdeksannen luokan ryhmää. Kahdeksannen luokan ryhmiä valittiin mukaan kolme, sillä niiden ryhmäkoot olivat pienempiä seitsemännen ja yhdeksännen luokan ryhmiin verrattuna. Tutkimukseen osallistui oppilaita eri luokka-asteilta, sillä tarkoituksena on selvittää, onko oppilaan luokka-asteella vaikutusta murtolukumerkinnän eri merkitysten löytämisen välillä. Näistä seitsemästä tutkimukseen valikoituneesta ryhmästä tutkimukseen osallistui 64 oppilasta, joista lopulta 62 oppilaan vastaukset muodostivat tutkimusaineiston, sillä kaksi oppilasta palautti tutkimuslomakkeet tyhjinä tai lähes tyhjinä.

Taulukko 6.1. *Tutkimukseen osallistuneet oppilaat sukupuolittain ja luokittain*

	Tyttö	Poika	Muu / En halua kertoa	Yhteensä
7. luokka	11 (17,7 %)	13 (21,0 %)	0 (0 %)	24 (38,7 %)
8. luokka	12 (19,4 %)	6 (9,7 %)	2 (3,2 %)	20 (32,3 %)
9. luokka	9 (14,5 %)	8 (12,9 %)	1 (1,6 %)	18 (29,0 %)
Yhteensä	32 (51,6 %)	27 (43,5 %)	3 (4,8 %)	62 (100 %)

Taulukossa 6.1 on esiteltynä tutkimukseen osallistuneet oppilaat sukupuolittain sekä luokittain. Taulukosta nähdään, että noin puolet osallistuneista oli tyttöjä, hieman yli 40 % poikia ja vajaa 5 % vastasi sukupuolensa olevan jokin muu tai ei halunnut kertoa sukupuoltaan. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden luokka-asteet jakautuivat melko tasaisesti, kunkin luokka-asteen osuuden ollen noin kolmasosan osallistujista. Seitsemäsluokkalaisia oli hieman enemmän, kun taas yhdeksäsluokkalaisia hieman vähemmän.

Rehtorilta saadun suostumuksen jälkeen tutkimuslupaa pyydettiin kaupungin opetuspäälliköltä, joka myönsi tutkimusluvan lokakuussa 2022. Tutkimusluvan myöntämisen jälkeen tutkimukseen osallistuvien ryhmien oppilaille jaettiin tutkimuslupalaput (Liite B), jotka heidän tuli käyttää huoltajillaan luettavana ja allekirjoitettavana. Koska tutkimuksesta annetut tiedot voivat vaikuttaa ihmisten halukkuuteen osallistua tutkimukseen [19], painotettiin oppilaille jo lupalappuja jakaessa sitä, kuinka tutkimuksen tuloksista ei pystyisi tunnistamaan yksittäistä vastaajaa. Tutkimuslupalapussa kerrottiin lyhyesti tutkimuksesta sekä ilmoitettiin yhteystiedot, joista tutkimuksesta saa halutessaan lisätietoa. Kuulan [19] mukaan antaessa tietoa tutkimuksesta ehdottomin osa on kertoa tutkittaville, keneltä tutkimuksesta voi pyytää lisätietoa. Oppilaille annettiin lupalappujen palauttamiseen ennen tutkimuksen toteutusta muutama viikko aikaa, jotta huoltajat ehtivät tutustumaan tutkimuslupalappuun sekä kysymään lisätietoa tutkimuksesta halutessaan, ja, jotta mahdollisimman moni oppilas muistaisi palauttaa lupalapun ennen tutkimuksen toteutusta.

Tutkimus toteutettiin kunkin ryhmän kanssa yhden 45 minuuttia kestävän matematiikan tunnin aikana opettajan kanssa. Osallistuin itse viiden ryhmän oppitunnille, jolla tutkimusta tehtiin. Kaksi muuta ryhmää toteutti tutkimuksen opettajalle antamani ohjeistuksen mukaisesti. Tutkimusaineistoa kerätessä tulee tutkittaville kertoa tutkimusaineiston käyttötarkoituksesta [19]. Tämän vuoksi oppitunnin aluksi kertasin oppilaille lyhyesti, mihin tutkimustuloksia käytetään ja mitä tutkimuksessa halutaan tutkia. Oppilaille ei nähty tarpeelliseksi kertoa tutkimuksesta kovinkaan teoreettisesti, sillä heitä vaikutti pitkästyttävän tutkimuksen lyhytkin esittely. Kuulan [19] mukaan tutkimustavoitteiden esittäminen kannattaakin suunnitella kohderyhmää ajatellen. Lisäksi kävin tutkimustehtävät kohta kohdalta läpi. Oppilaille painotettiin tutkimuksen vapaaehtoisuutta, jotta oppilaille ei tulisi tunnetta, että tutkimuksen tekeminen vaikuttaisi esimerkiksi kouluarvosanoihin.

Tutkimuksen lyhyen esittelyn jälkeen jaoin tutkimuslomakkeen ensimmäisen tehtävän erillisellä paperilla niille oppilaille, jotka olivat saaneet huoltajalta luvan tutkimukseen osallistumiseen. Oppilaat, jotka eivät olleet saaneet lupaa tutkimukseen osallistumiseen saivat myös halutessaan omat tutkimuslomakkeet silmäiltäväksi, mutta näitä lomakkeita ei luonnollisesti otettu mukaan tutkimusaineistoon. Pyysin oppilaita nostamaan käden merkiksi siitä, että on saanut ensimmäisen tehtävän valmiiksi, minkä jälkeen annoin oppilaalle loput tutkimuslomakkeesta tehtäväksi, eli tehtävät 2 ja 3 sekä loppukyselyn. Tunnin loputtua keräsin tutkimuslomakkeet oppilailta ja säilytin niitä kotona. Kahden ryhmän lomakkeet kävin noutamassa heidän opettajaltaan tutkimuksen toteutuksen jälkeen.

6.3 Aineiston analyysi

Tutkimusmenetelmänä käytetään Mixed methods -lähestymistapaa (MMR), joka yhdistää laadullisen ja määrällisen tutkimuksen [38]. Laadullisen aineiston analysoinnissa hyödynnetään sisällönanalyysia, joka on tekstin analyysia, jossa esimerkiksi kuvataan missä yhteydessä tiettyjä käsitteitä käytetään [38]. Jyväskylän yliopiston filosofian laitoksen tutkijan Timo Laineen mukaan laadullisen tutkimuksen analyysissa tulisi ensin päättää, mikä aineistossa kiinnostaa, jonka jälkeen aineisto käydään läpi ja merkitään itseä kiinnostavat asiat [38]. Tässä tutkimuksessa ennen tutkimuksen läpikäyntiä tiedettiin, että aineistossa kiinnostaa oppilaiden murtolukumerkinnälle esittämät merkitykset, kirjallisen kielentämisen hyödyntäminen sekä mielipiteet kirjallisen kielentämisen hyödyntämisestä. Nämä asiat koottiin yhteen tiedostoon, jossa aineisto luokiteltiin. Aineiston analysointiin hyödynnettiin teoriaohjaavaa analyysia, eli siinä käytettiin luokitteluun valmiita teorioiden esittämiä luokkia ja teoriasta poikkeaville vastauksille muodostettiin ylimääräiset muu -luokat [38]. Sisällönanalyysia jatkettiin sisällön erittelyllä eli aineiston kvantifioinnilla, jossa laskettiin esimerkiksi, kuinka moni oppilas mainitsi saman asian vastauksessaan [4]. Aineistoa analysoidessa tutkimuskysymyksiä muokattiin vielä hieman aineistoon sopivimmaksi, mikä on tutkimusprosesseissa usein tyypillistä [19].

Aineiston käsittely aloitettiin käymällä jokainen tutkimuslomakepaperi läpi. Tässä vaiheessa varmistettiin oppilaiden nimikirjainten avulla, että jokainen tutkimukseen osallistunut oppilas oli palauttanut molemmat tutkimuslomakkeen osat, jotka tässä kohtaa liitettiin yhteen. Oppilaiden vastauspaperit numeroitiin myöhemmän taulukoinnin helpottamiseksi. Eskolan ja Suorannan [4] mukaan aineiston numerointi helpottaa sen jatkokäsittelyä. Palautetuista tutkimuslomakkeista karsittiin pois ne, joihin ei ollut kirjattu tehtäviin mitään tai lähes mitään sekä ne, joihin oppilas oli merkinnyt ruudun, jonka mukaan hänen vastauksiaan ei saisi käyttää tutkimukseen. Nämä lomakkeet tuhottiin asianmukaisesti. Tämän karsimisen jälkeen tutkimusaineisto muodostuu lopulta 62 oppilaan vastauksista.

Vastausten käsittelyyn hyödynnettiin Microsoft Excel -taulukointiohjelmaa, johon muodostettiin tehtäväkohtaiset taulukot tehtävistä selvitettävien tietojen helpottamiseksi. Oppilaat järjestettiin taulukoihin aluksi juoksevan numeroinnin mukaan, minkä jälkeen oppilasnumerot värikoodattiin sukupuolen ja luokka-asteen mukaan. Oppilaat järjestettiin taulukkoon värijärjestykseen, jotta yksittäistä ryhmää, esimerkiksi 7. luokan tyttöjä oli helpompi tarkastella kokonaisuutena. Taulukkoon kirjattiin myös niiden 50 oppilaan matematiikan arvosana, jotka olivat arvosanan tutkimuslomakkeeseen ilmoittaneet. Taulukointia hyödynnettiin vastausten luokitteluun, vastausten määrien laskemiseen sekä taulukoiden ja kaavioiden tekemiseen. Ensimmäisen ja toisen tehtävän vastaukset luokiteltiin niissä esiintyvien murtolukumerkinnän merkitysten mukaan. Luokittelussa hyödynnettiin teoriassa esiteltyä Joutsenlahden esittämää jaottelua murtolukumerkinnän eri merkityksistä. Tässä luokittelussa oppilaiden vastauksista tehtiin tulkintoja niin, että ne pystyttiin luokittelemaan teoriaosuudessa esitellyn neljän eri murtolukumerkinnän merkityksen sekä kategorian "muut" alle. Tulkinnat on esitetty seuraavassa luvussa. Kolmannen tehtävän vastaukset luokiteltiin tehtävän lopullisen vastauksen mukaan. Tyhjistä vastauksista ja niistä, joissa ei ollut saatu lopullista vastausta muodostettiin myös oma luokkansa. Virheellisistä vastauksista kirjattiin virhe ylös, minkä jälkeen ne luokiteltiin tyypillisimpiin virhetyyppeihin. Näiden lisäksi kolmannesta tehtävästä on mahdollista tutkia myös kielentämisen hyödyntämistä ratkaisussa, joten vastauksista luokiteltiin lisäksi niissä käytetyt kuviokielen mallit. Tässä luokitteluun käytettiin teoriaosuudessa esiteltyä Van de Wallin ym. [41] kuviokielen mallien jaottelua kolmeen eri kategoriaan.

Kyselylomakkeen analysoinnin helpottamiseksi Likert-asteikon vastaukset muutettiin numeroiksi 1-5, missä 1 vastaa vastausta "Täysin eri mieltä" ja 5 vastausta "Täysin samaa mieltä". Vastaukset yhdistettiin vielä tämän jälkeen niin, että lopullisia luokkia tehtävässä oli kolme; 1 eri mieltä, 2 ei samaa eikä eri mieltä sekä 3 samaa mieltä. Luokkaan 1 jaettiin vastaukset täysin eri mieltä ja eri mieltä, ja luokkaan 3 vastaukset samaa mieltä ja täysin samaa mieltä. Kyselylomakkeesta saadun määrällisen aineiston analysoinnissa hyödynnettiin sekä Excel -taulukointiohjelmaa että IBM SPSS Statistics -ohjelmaa. Lomakkeen seitsemää väittämää tarkasteltiin frekvenssijakauman avulla.

6.3.1 Vastausten luokittelu

Oppilaiden ensimmäisen ja toisen tehtävän vastausten luokitteluun hyödynnettiin teoriaosuudessa esiteltyjä Joutsenlahden ja Perkkilän [10] esittelemiä merkityksiä murtolukumerkinnälle. Jotta vastaukset pystyttiin jakamaan näihin merkityksiin, oppilaiden vastauksista tehtiin tulkintoja abduktiivisen päättelyn keinoin, jossa tutkija yhdistelee aineiston tuloksia aineiston valmiisiin malleihin [38]. Tässä alaluvussa esitellään, millaisia tulkintoja oppilaiden vastauksista tehtiin.

Osa kokonaisuudesta -luokka muodostuu kahdesta vastaustyypistä. Ensimmäisessä vastaustyypissä oppilas on kuvannut osan ottamista kokonaisesta eli, kuinka jokin yksi kokonainen jaetaan kolmeen osaan ja kolmesta osasta otetaan kaksi. Vastauksissa tyypillisin jaettava oli jokin syötävä asia, kuten kakku oppilaan 6 vastauksessa.

> "Kakku on jaettu kolmeen osaan, josta on syöty yksi pala pois. Tämä jättää kaksi palaa kolmesta." (T1, Oppilas 6)

Toisessa vastaustyypissä vastauksessa kuvailtiin osan ottamista kokonaisuudesta eli kahta jostain kolmen joukosta. Tässäkin vastaustyypissä yleisimmät vastaukset liittyivät ruokaan tai muuhun oppilaan arkipäivään liittyviin konkreettisiin asioihin, kuten harrastus- tai kouluvälineisiin.

> "Karkkeja on syöty 2 kolmesta karkista." (T1, Oppilas 8)

Osa kokonaisuudesta -vastauksiksi tulkittiin vastaukset "kaksi kolmasosaa" ja "kaksi kolmesta osasta" sillä jo niiden sanamuoto viittaa johonkin kokonaisuuteen tai kokonaiseen, joka on jaettu kolmeen osaan tai kolmasosiin. Myös vastaukset "yli puolet" ja "melkein kokonainen" tulkittiin osaksi kokonaisuudesta. Toisen tehtävän kuvaan B ehdotetut vastaukset "$\frac{2}{5}$" ja "$\frac{3}{5}$" tulkittiin merkitsevän osaa kokonaisuudesta, sillä niissä kuvataan väritettyjen tai värittämättömien neliöiden määrää kaikista viidestä neliöstä.

Jakolasku -luokkaan luokiteltiin myös kahdenlaisia vastauksia. Luokkaan otettiin mukaan vastaukset, joissa oli jollakin tapaa mainittu sana jakolasku, mutta myös sellaiset vastaukset, jotka voitiin tulkita jakolaskun tuloksena eli osamääränä. Vastaukset "$\frac{2}{3}$ = 0,666... ≈ 0,67 = 67 %" ja "0,6666..." tulkittiin jakolasku -luokkaan, sillä niissä on laskettu jakolasku kaksi jaettuna kolmella.

Murtoluvun merkityksistä suhde oli kaikista vaikein tulkita. Aineistoa analysoidessa päädyttiin suhteeksi tulkita sellaiset vastaukset, joista jollain tapaa ilmeni kahden eri luvun suuruuden vertailu. Lisäksi sellaiset vastaukset, joissa esitettiin mittakaava, tulkittiin suhteeksi, sillä mittakaavalla ilmoitetaan jonkin pituuden kuvassa suhde pituuteen luonnossa. Näiden tulkintojen perusteella esimerkiksi seuraavat vastaukset luokiteltiin suhteeksi.

> "Laskemalla mittakaavaa voidaan saada vastaukseksi $\frac{2}{3}$, mutta se pitää muuttaa oikeaan muotoon eli 2:3." (T1, Oppilas 17)

> "Merkintä voi tarkoittaa, että vaikka toisella joukkueella on kaksi pistettä ja toisella kolme pistettä." (T1, Oppilas 61)

> "Viisi palloa, joista kaksi on mustia ja kolme valkoisia." (T1, Oppilas 6)

Murtoluvun merkitykseksi mitta tulkittiin sellaisista vastauksista, joissa oppilas kuvaili jonkinlaista pituus -mallia. Vastaus "Matkasta on menty tietyn verran"(T1, Oppilas 40) tulkittiin mitaksi. Lisäksi koordinaatiston mainitseva vastaus "Kuva voi liittyä myös koordinaatistoon"(T1, Oppilas 62), sillä koordinaatisto on nimenomaan mittoja hyödyntävä järjestelmä.

Muu -luokkaan luokiteltiin sellaiset vastaukset, jotka eivät sopineet mihinkään neljästä muusta luokasta. Tällaisia vastauksia olivat esimerkiksi sellaiset, joissa kuvailtiin merkinnän ulkoasua kertomalla, että merkintä koostuu kahdesta luvusta ja väliviivasta. Muu -luokkaan tulkittiin myös vastaukset, joissa murtoluvun merkitys nähtiin kahtena erillisenä lukuna. Oppilaalle 29 sen sijaan murtoluvun merkitys luultavasti oli koulusta tuttu muistisääntö.

> "2 on otsassa ja 3 on nenässä"(T1, Oppilas 29)

Muu -luokkaan sisällytettiin myös yhden sanan vastaukset "murtoluku". Vastauksen ajateltiin olevan niin epämääräinen, että siitä olisi ollut mahdoton tulkita, mitä murtolukumerkinnän merkitystä oppilas sillä tarkoittaa.

7. TUTKIMUSTULOKSET

7.1 Millaisia merkityksiä yläkoulun oppilaat keksivät murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"?

Oppilaiden keksimiä merkityksiä murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"mitattiin tutkimuslomakkeen tehtävässä 1. Oppilaiden vastaukset tehtävään vaihtelivat yhdestä sanasta muutamiin lauseisiin. Vastaukset luokiteltiin luvussa 6.3.1 esiteltyjen tulkintojen mukaan viiteen eri luokkaan; osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde, mitta ja muu. Alla olevassa taulukossa esitetään oppilaiden vastauksissa esiintyneiden eri merkitysten saamien vastausten määrät sekä niiden suhteellinen osuus oppilaiden määrään.

Taulukko 7.1. *Murtolukumerkinnälle löytyneet merkitykset*

Merkitys	Osa kokonaisuudesta	Jakolasku	Suhde	Mitta	Muu
Vastauksia	54	43	8	3	35
Osuus (%)	87,1 %	69,4 %	12,9 %	4,8 %	56,5 %

Taulukosta 7.1 nähdään, että huomattavasti yleisin vastaus on osa kokonaisuudesta, jonka on vastannut 54 osallistujaa eli 87,1 % oppilaista. Myös jakolasku on vastauksena suosittu; sen on vastannut lähes 70 % oppilaista. Suhteeseen ja mittaan viittaavia vastauksia on antanut 12,9 % ja 4,8 % vastaajista. Vastauksen, joissa murtoluvun merkitys on jokin muu, on antanut yli puolet vastaajista. Näihin vastauksiin luettiin esimerkiksi sellaiset vastaukset, joissa on kuvailtu merkintää erillisinä lukuina 2 ja 3 tai vastattu vain epämääräisesti merkinnän merkitsevän murtolukua.

7.1.1 Murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrät

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen alakysymyksenä on, kuinka monta merkitystä oppilaat löytävät murtolukumerkinnälle ja, millainen yhteys on oppilaan luokka-asteen ja murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten välillä. Seuraavaan taulukkoon on koottuna, kuinka moni oppilas löysi tietyn määrän merkityksiä, sekä prosenttiosuudet kaikista oppilaista. Taulukon merkitysten määrä vaihtelee nollasta merkityksestä kolmeen, sillä murtoluvun merkityksiksi laskettiin tässä tehtävässä vain aiemmin esitellyistä merkityksistä neljä ensimmäistä. Merkityksiksi luettiin siis osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde ja mitta, kun taas muut merkitykset jätettiin tässä kohtaa huomioimatta.

***Taulukko 7.2.** Murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten lukumäärät*

Merkitysten lukumäärä	0	1	2	3
Vastauksia	2 (3,2 %)	20 (32,3 %)	32 (51,6 %)	8 (12,9 %)

Taulukosta 7.2 huomataan, että lähes kaikki osallistuneista löysivät murtolukumerkinnälle jonkin neljästä merkityksestä, sillä ainoastaan 2 oppilasta (3,2 %) ei löytänyt näistä merkityksistä yhtäkään. Oppilaista 20 eli noin kolmasosa löysi merkityksistä yhden ja 32 eli noin puolet löysi kaksi merkitystä. Kolme merkitystä löytäneitä oppilaita oli 8 eli kaikista osallistuneista 12,9 %. Yksikään oppilas ei löytänyt kaikkia neljää murtoluvun merkitystä ensimmäisestä tehtävästä, joten se jätettiin tässä kohtaa kokonaan taulukoimatta.

7.1.2 Luokka-asteen yhteys murtolukumerkinnälle löytyneille merkityksille

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen toisen alakysymyksen tarkoituksena on selvittää, miten tutkimuslomakkeen ensimmäisen tehtävän vastaukset eroavat seitsemäs-, kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisten välillä. Seuraavaan taulukkoon on koottu oppilaiden murtolukumerkinnälle löytyneet merkitykset vuosiluokkakohtaisesti. Taulukossa esitetään merkityksen löytäneiden oppilaiden määrät sekä niiden prosenttiosuudet kaikista tietyn vuosiluokan oppilaista.

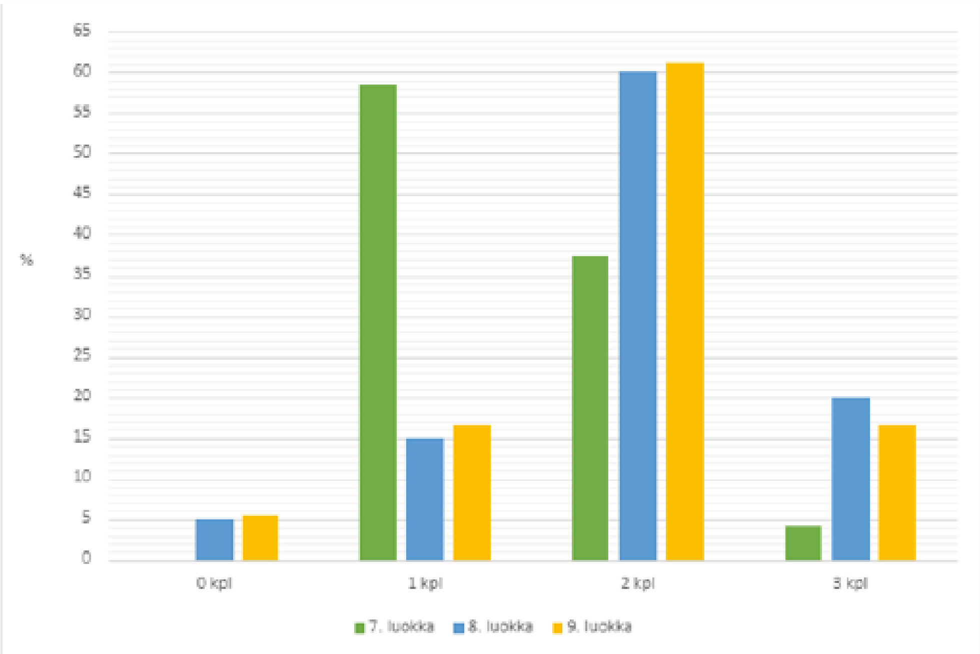
***Taulukko 7.3.** Murtolukumerkinnälle löytyneet merkitykset vuosiluokittain*

	Osa kokonaisuudesta	Jakolasku	Suhde	Mitta	Muu
7. luokka	20 (83,3 %)	13 (54,2 %)	2 (8,3 %)	0 (0 %)	21 (87,5 %)
8. luokka	19 (95,0 %)	15 (75,0 %)	3 (15,0 %)	2 (10,0 %)	6 (30,0 %)
9. luokka	15 (83,3 %)	15 (83,3 %)	3 (16,7 %)	1 (5,6 %)	6 (33,3 %)

Taulukosta 7.3 huomataan, kuinka osa kokonaisuudesta -merkityksen on löytänyt kultakin vuosiluokalta suurin osa oppilaista. Seitsemännen ja yhdeksännen luokan oppilaista yli 80 % on löytänyt murtolukumerkinnälle osa kokonaisuudesta -merkityksen ja kahdeksannen luokan oppilaista vieläkin suurempi osa; 95,0 %. Jakolasku -luokassa voidaan

huomata merkityksen löytäneiden oppilaiden osuuksien kasvavan vuosiluokalta toiselle. Seitsemännen luokan oppilaista hieman yli puolet on vastannut murtoluvun merkitykseksi jakolaskun. Kahdeksasluokkalaisista näin vastasi 75,0 % ja yhdeksäsluokkalaisista yli 80 %. Suhde -merkityksen mainitsi vastauksessaan seitsemäsluokkalaisista alle 10 %. Kahdeksasluokkalaisista suhteen merkityksen löysi 15,0 % ja yhdeksäsluokkalaisista hieman enemmän; 16,7 %. Mitan merkitystä ei löytänyt yksikään seitsemäsluokkalainen ja kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisistakin vain 10,0 % sekä 5,6 % oppilaista. Muita merkityksiä murtolukumerkinnälle keksi eniten seitsemäsluokkalaiset, joista 87,5 % oli vastannut murtolukumerkinnälle jonkin muun kuin taulukossa esiintyvät merkitykset. Kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaista noin kolmasosat oppilaista löysi murtolukumerkinnälle muun merkityksen.

Aineistosta pyritään lisäksi selvittämään, onko oppilaiden luokka-asteella ja murtoluvulle löytämien merkitysten määrällä yhteyttä. Seuraavassa diagrammissa esitetään oppilaiden murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten lukumäärät vuosiluokkakohtaisesti. Tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden lukumäärät on suhteutettu koko vuosiluokan oppilaiden määrään, jotta tuloksia voitaisiin vertailla vuosiluokkakohtaisesti. Diagrammin vaaka-akselilla on murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrät pienimmästä suurimpaan; vasemmalla 0 kpl löytyneitä merkityksiä ja oikealla 3 kpl. Pystyakselilta voidaan lukea tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden osuudet prosentteina koko vuosiluokan oppilaista. Kukin vuosiluokka on kuvattu diagrammiin eri värisin pylväin.



***Kuva 7.1.** Murtoluvulle tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden osuudet koko vuosiluokasta*

Kuvan 7.1 pylväsdiagrammista voidaan huomata, että kolme merkitystä löytäneiden oppilaiden osuus koko vuosiluokasta on suuremmat kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisilla, kuin seitsemäsluokkalaisilla. Kahdeksasluokkalaisista 20 % löysi kolme merkitystä murtolukumerkinnälle, yhdeksäsluokkalaisista hieman yli 15 %. Seitsemäsluokkalaisista kolme merkitystä löysi puolestaan alle 5 % oppilaista.

Kahden merkityksen löytäneiden oppilaiden osuudet koko vuosiluokasta ovat samoin suuremmat yhdeksäs- ja kahdeksasluokkalaisilla 7. luokan oppilaisiin verrattuna. Diagrammista nähdään, että 8. luokan ja 9. luokan oppilaista noin 60 % löysi murtolukumerkinnälle kaksi merkitystä. Seitsemännen luokan oppilaista alle 40 % löysi murtolukumerkinnän merkityksiä kaksi kappaletta, joka on 8. luokan ja 9. luokan oppilaisiin verrattuna yli 20 prosenttiyksikön ero.

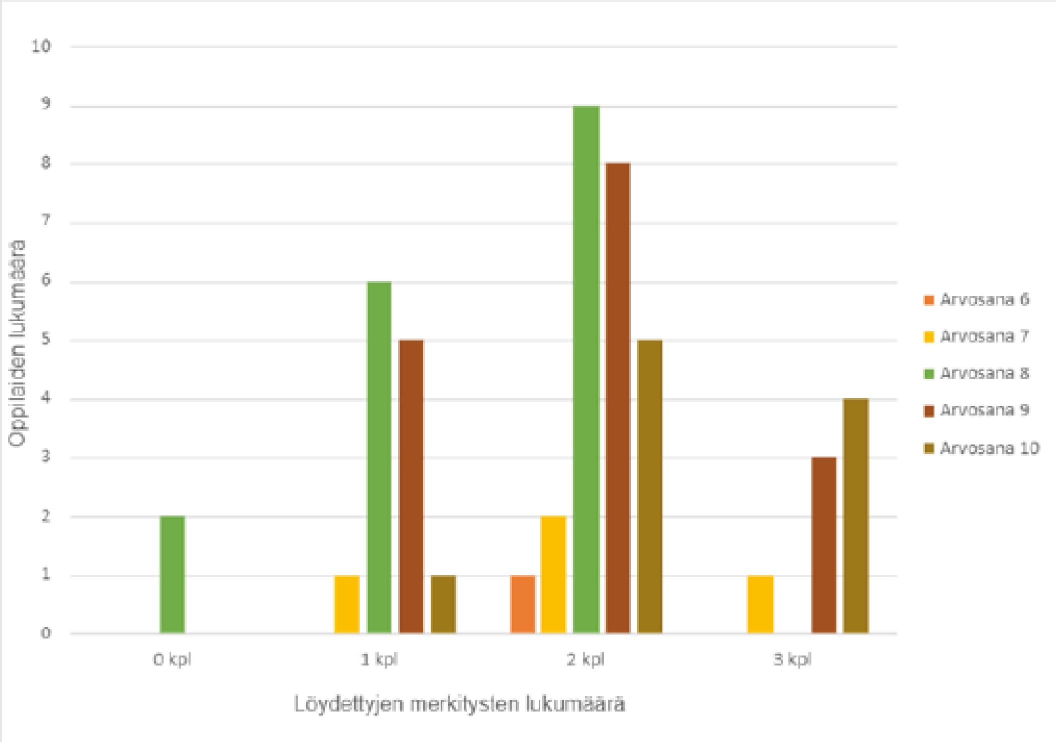
Vain yhden merkityksen murtolukumerkinnälle löysi suuri osa seitsemäsluokkalaisista. Taulukosta voidaan nähdä, että yhden merkityksen löytämiä seitsemäsluokkalaisia on lähes 60 %. Vastaavasti vain yhden merkityksen löytäneiden oppilaiden osuudet kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilaista on yli 40 prosenttiyksikköä pienemmät seitsemäsluokkalaisiin verrattuna. Kahdeksasluokkalaisista 15 % löysi murtolukumerkinnälle yhden merkityksen ja yhdeksäsluokkalaisista hieman yli 15 %.

Oppilaita, jotka eivät löytäneet murtolukumerkinnälle yhtäkään neljästä merkityksestä oli molemmista, kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisista noin 5 %. Seitsemäsluokkalaisista siis jokainen onnistui löytämään vähintään yhden neljästä merkityksestä.

Kuvasta 7.1 voidaan huomata, että kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilaat löysivät huomattavasti enemmän merkityksiä murtolukumerkinnälle seitsemännen luokan oppilaisiin verrattuna. Oppilaan vuosiluokalla nähdään siis olevan selkeä yhteys siihen, kuinka monta merkitystä oppilas löytää murtolukumerkinnälle. Selkeästi oppilas, joka on ylemmillä vuosiluokilla löytää enemmän merkityksiä murtolukumerkinnälle alemman vuosiluokan oppilaaseen verrattuna. Kuitenkaan vastausten perusteella kahdeksannen ja yhdeksännen luokan oppilaita verrattaessa ei murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten välillä ole huomattavaa yhteyttä vuosiluokan kanssa. Yhteys on kuitenkin selkeä verrattaessa seitsemäsluokkalaisten löytämiä murtolukumerkinnän merkitysten määriä ylempiin vuosiluokkiin.

7.1.3 Matematiikan arvosanan yhteys murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrään

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen kolmantena alakysymyksenä oli selvittää matematiikan arvosanan mahdollista vaikutusta oppilaiden murtolukumerkinnälle löytämien merkitysten määrään. Seuraavaan pylväsdiagrammiin on esitetty oppilaiden arvosanojen mukaan eri värein, kuinka moni oppilas on löytänyt minkäkin määrän merkityksiä murtolukumerkinnälle. Diagrammin vaaka-akseli kertoo oppilaiden löytämien merkitysten määrän murtoluvulle pienempänä määränä jälleen 0 ja suurimpana 3. Pystyakseli kertoo oppilaiden lukumäärän. Diagrammin eri värit kuvaavat oppilaiden matematiikan arvosanoja väliltä 6-10. Yksikään oppilas ei vastannut arvosanakseen 4 tai 5, joten ne jätettiin diagrammista pois. Tutkimukseen osallistuneista 62 oppilaasta 50 kertoi matematiikan arvosanansa edellisessä todistuksessa.



***Kuva 7.2.** Murtoluvulle tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden lukumäärät matematiikan arvosanan mukaan jaoteltuna*

Kuvasta 7.2 nähdään, että arvosanan 10 saaneiden oppilaiden löytämien murtolukumerkinnän merkitysten määrät painottuvat kahteen ja kolmeen kappaleeseen. Ainoastaan yksi arvosanan 10 todistukseensa saanut oppilas löysi vain yhden merkityksen, ja loput löysivät kaksi tai kolme merkitystä. Puolet arvosanan 9 saaneista oppilaista löysi murtolukumerkinnälle 2 merkitystä. Arvosanan 9 saaneista oppilaista lisäksi kolme löysi kolme merkitystä ja viisi oppilasta yhden merkityksen. Yksikään arvosanan 9 saaneista oppilaista ei arvosanan 10 oppilaiden tavoin ollut sellainen, joka ei olisi löytänyt murtolukumerkinnälle yhtäkään merkitystä. Arvosanan 8 saaneiden oppilaiden löytämien murtolukumerkinnän merkitysten määrä vaihtelee nollasta kahteen. Yli puolet oppilaista löysi murtolukumerkinnälle kaksi merkitystä, kaksi oppilasta ei löytänyt yhtäkään merkitystä ja loput yhden merkityksen. Taulukosta voidaan huomata yhden merkityksen kohdalla, että ero arvosanan 8 ja arvosanan 10 oppilaan välillä on merkittävä. Arvosanojen 7 ja 6 oppilaiden vastauksista löytyy murtolukujen merkityksiä yhden ja kolmen kappaleen väliltä. Arvosanan 6 oppilaita oli ainoastaan yksi, joka löysi murtolukumerkinnälle kaksi merkitystä. Arvosanan 7 oppilaitakin oli vähän; ainoastaan neljä kappaletta, joista yksi oppilas löysi jopa kolme merkitystä murtolukumerkinnälle ja loput yhden tai kaksi merkitystä. Huomattavaa on, että arvosanojen 6 ja 7 oppilaista jokainen löysi vähintään yhden merkityksistä.

Pylväsdiagrammin lisäksi oppilaan matematiikan arvosanan yhteyttä murtolukumerkinnälle löytämien merkityksen määrään tutkittiin IBM SPSS Statistics -ohjelman avulla keskiarvoja vertaillen. Alla oleva taulukko esittää murtolukumerkinnälle tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden matematiikan arvosanojen keskiarvot, oppilaiden määrän sekä keskihajonnan.

Taulukko 7.4. *Murtolukumerkinnälle tietyn määrän merkityksiä löytäneiden oppilaiden määrät, keskiarvot ja keskihajonnat*

Löytyneiden merkitysten määrä	Arvosanan keskiarvo	Vastauksia	Keskihajonta
0	8,00	2	0,000
1	8,46	13	0,776
2	8,63	27	1,043
3	9,25	8	1,035
Yhteensä	8,66	50	0,982

Taulukosta 7.4 nähdään, että kaikkien 50 arvosanansa vastanneiden oppilaiden matematiikan keskiarvo on 8,66 ja näiden keskihajonta 0,982. Taulukosta voidaan huomata, että niiden oppilaiden, jotka löysivät murtolukumerkinnälle vähemmän merkityksiä, arvosanojen keskiarvo on matalampi, kuin enemmän merkityksiä löytäneiden oppilaiden. Yhden ja kahden merkityksen löytäneiden oppilaiden välillä ei ole paljoa eroa arvosanojen keskiarvoissa, mutta kahden ja kolmen merkityksen löytäneiden välillä ero on jo merkittävä. Keskiarvojen vertailusta voidaan päätellä, että oppilaan arvosanalla on yhteys siihen, kuinka monta merkitystä hän murtolukumerkinnälle löytää. Kuitenkaan murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrän ja oppilaan arvosanan välistä riippuvuutta ei voida pitää tilastollisesti merkittävänä (Khiin neliö 12,368, p-arvo 0,417 ja korrelaatio 0,276).

7.2 Millaisia merkityksiä oppilaat keksivät murtolukumerkinnälle "$\frac{2}{3}$"annetuista kuvista?

Tutkimuksen toista tutkimuskysymystä tutkitaan oppilaiden vastauksista tutkimuslomakkeen (Liite A) toiseen tehtävään, jossa oppilaiden oli tehtävänä kertoa, millä tavoin neljä eri kuvaa kuvastavat matemaattista merkintää $\frac{2}{3}$. Alla olevaan taulukkoon on eriteltynä kuviokohtaisesti kunkin merkityksen vastanneiden oppilaiden määrät sekä osuudet kaikista vastauksista. Merkitykset ovat aiemman tehtävän tavoin luokiteltu luokkiin osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde ja mitta. Tämän näistä merkityksistä eroaville vastauksille luotiin luokka muu ja tyhjäksi jätetyille vastauksille oma luokkansa.

Taulukosta 7.5 nähdään, että ensimmäiseen kuvaan yleisin vastattu merkitys oli osa koko-

Taulukko 7.5. Murtolukumerkinnälle löytyneet merkitykset annetuista kuvista ja niiden prosenttiosuudet kaikista vastauksista

Merkitys	Osa kokonaisuudesta	Jakolasku	Suhde	Mitta	Muu	Tyhjä
Kuva A	54 (87,1 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	7 (11,3 %)	1 (1,6 %)
Kuva B	18 (29,0 %)	0 (0 %)	3 (4,8 %)	0 (0 %)	29 (46,8 %)	12 (19,4 %)
Kuva C	2 (3,2 %)	31 (50,0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	12 (19,4 %)	17 (27,4 %)
Kuva D	3 (4,8 %)	3 (4,8 %)	0 (0 %)	37 (59,7 %)	5 (8,1 %)	14 (22,6 %)

naisuudesta. Merkityksen vastasi 87,1 % oppilaista. Tämän lisäksi 7 oppilasta eli 11,3 % osallistujista vastasi jonkin muun merkityksen, kuin osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde tai mitta ja yksi oppilas jätti kohdan tyhjäksi. Kuvaan A yksikään oppilas ei vastannut merkityksiä jakolasku, suhde tai mitta.

Ensimmäisen kuvan vastaukset koostuivat lähinnä kahdenlaisesta vastaustyypistä, joista molemmista murtolukumerkinnän merkitys oli osa kokonaisuudesta. Ensimmäisessä vastaustyypissä oppilas kiisti kuvan kuvaavan merkintää $\frac{2}{3}$. Useimmiten sektoridiagrammimallissa murtoluvun osoittajaa kuvastaa väritetty osuus ja nimittäjää palasten määrä [29, s. 320]. Moni oppilas väittikin ensimmäisen kuvan kuvastavan ennemmin merkintää $\frac{1}{3}$ kuin merkintää $\frac{2}{3}$.

> ”Se on yksi kolmasosaa, koska ympyrä on jaettu kolmeen eri osaan, joista on väritetty yksi osa.” (T2.A, oppilas 25)
>
> ”Tämä kuvio on 1/3 eli kolme palaa, joista yksi on täytetty” (T2.A, oppilas 26)
>
> ”se on yksi kolmasosa, koska ympyrässä on kolme osaa ja yksi osaa on väritetty” (T2.A, oppilas 23)

Toisessa vastaustyypissä oppilas käsitti sen, että kuviolla voidaan kuvata murtolukua myös niin, ettei väritetty osuus kuvasta murtolukumerkinnän osoittajaa. Tällaisista vastauksista esimerkkeinä alla olevat lainaukset.

> ”Sen voi joko ajatella 1/3 värillisiä tai 2/3 valkoisia. Normaalisti se olisi 1/3” (T2.A, oppilas 54)
>
> "Siitä on syöty yksi kolmasosa, joten jäljellä on kaksi"(T2.A, oppilas 53)
>
> "Kolmesta osasta valkoisia on kaksi"(T2.A, oppilas 17)

Taulukosta 7.5 voidaan nähdä, että toisen kuvan vastauksista yleisin oli jokin muu, kuin osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde tai mitta. Osa kokonaisuudesta vastauksen antaneita oli 18 eli noin kolmasosa oppilaista. Suhteen merkityksen kuvasta löysi ainoastaan kolme oppilasta. Jakolaskun tai mitan merkitystä ei ehdottanut toiseen kuvaan yksikään oppilas ja kohdan jätti tyhjäksi 12 oppilasta eli lähes 20 % oppilaista.

Oppilaat, jotka olivat vastanneet toisen kuvan merkitykseksi osan kokonaisuudesta, ajattelivat tehtävän perinteisenä pinta-alamallina, jossa väritettyjen osien määrä kertoo murtolukumerkinnän nimittäjän ja osien määrä osoittajan. Tämä pääteltiin siitä, että oppilaat ehdottivat kuvan kuvastavan merkintää $\frac{2}{5}$ merkinnän $\frac{2}{3}$ sijaan, joka huomataan esimerkiksi seuraavista nostoista.

> ” Se on kaksi viidesosaa, koska se on jaettu viiteen eri osaan” (T2.B, oppilas 25)
>
> "Ei kuvaa 2/3! Se kuvaa 2/5. Siinä on viisi nelikulmiota"(T2.B, oppilas 38)
>
> "Tämä ei kuvaa hyvin merkintää 2/3, koska kuvassa on 2/5"(T2.B, oppilas 62)

Sen lisäksi, että oppilaat vastasivat usein toisen kuvan kuvastavan jotain muuta, kuin merkintää $\frac{2}{3}$, toinen yleinen vastaus oppilailta oli kertoa kuvan kuvastavan merkintää $\frac{2}{5}$, jonka kerrottiin olevan sama kuin $\frac{2}{3}$. Tästä esimerkkinä oppilaan 9 vastaus *"Kuvassa on 2/5 väritetty eli about kaks kolmasosaa"*.

Taulukosta 7.5 voidaan huomata, että kolmannesta kuvasta eli kuvasta C oppilaista puolet löysi murtolukumerkinnälle $\frac{2}{3}$ jakolaskun merkityksen. Lisäksi kaksi oppilasta eli 3,2 % löysi kuvalle osa kokonaisuudesta merkityksen. Oppilasta 12 eli 19,4 % osallistujista löysi kuvasta murtolukumerkinnälle jonkin muun merkityksen, kuin osa kokonaisuudesta, jakolasku, suhde tai mitta. Kuvan C vastauskentän suhteellisen moni oppilas jätti tyhjäksi; yli neljäsosa ei vastannut kuvaan mitään.

Kuvaan D iso osa oppilaista (59,7 %) vastasi mitan merkityksen jollakin tapaa. Molemmat osa kokonaisuudesta sekä jakolasku merkityksen löysi kolme oppilasta. Jonkin muun merkityksen murtolukumerkinnälle löysi kuvasta D viisi oppilasta ja kohdan jätti tyhjäksi 14 oppilasta. Kuten jo kappaleessa 6.3.1 esiteltiin, mitta -luokkaan luokiteltiin sellaiset vastaukset, joissa oli kuvailtu esimerkiksi matkaa. Matkaan liittyvät vastaukset olivat erittäin yleisiä neljänteen kuvaan, joista esimerkkeinä seuraavat lainaukset oppilaiden vastauksista.

> "Matkasta on menty 2/3"(T2.D, oppilas 36)
>
> "Nuoli on kulkenut nollan ja ykkösen välisestä matkasta kaksi kolmasosaa"(T2.D, oppilas 41)
>
> "Kuvassa nuoli osoittaa lukusuoran kohtaa, jossa on liikuttu nollasta kohti ykköstä 2/3 matkasta" (T2.D, oppilas 22)

Kokonaisuudessaan annetuista kuvista eniten vastauksia saanut murtolukumerkinnän merkitys oli osa kokonaisuudesta, joka sai kaikista kuvista yhteensä 77 vastausta. Osa kokonaisuudesta oli myös parhaiten tunnistettu annetusta kuvasta. Kuvan A tarkoituksena oli kuvata osaa kokonaisuudesta. Merkityksistä suhde oli puolestaan vähiten löydetty merkitys ja kaikista kuvista se saikin yhteensä vain 3 vastausta. Kaikki näistä kolmesta vastauksesta, jotka mainitsivat suhteen, tulivat kuitenkin kuvaan B, jonka tarkoituksena oli kuvata nimenomaan suhdetta. Jakolasku sai merkityksenä melko paljon vastauksia, joista suurin osa tuli kuvaan C, jonka tarkoituksena oli kuvata nimenomaan jakolaskua. Mitan merkitystä kuvaavia vastauksia tuli ainoastaan kuvaan D, jolla juuri pyrittiin kuvaamaan mittaa.

7.3 Millaisia kuviokielen malleja oppilaat käyttävät murtolukutehtävien kirjallisessa kielentämisessä

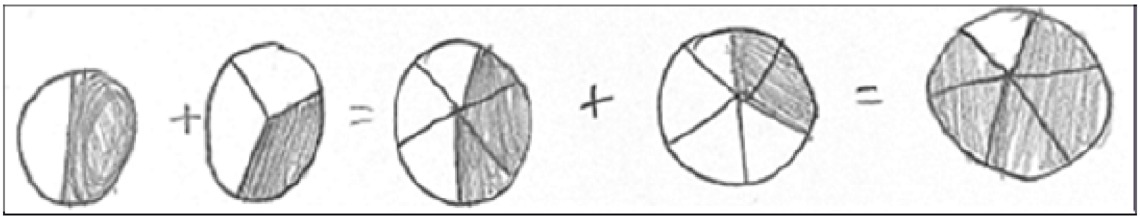
Tutkimuksen kolmantena tutkimuskysymyksenä on selvittää, millaisia kuviokielen malleja oppilaat käyttävät murtolukutehtävien kirjallisessa kielentämisessä. Seuraavaan taulukkoon on luokiteltuna tehtäväkohtaisesti kutakin kuviokieltä käyttäneiden oppilaiden määrät. Kuviokielen mallit luokiteltiin pinta-alamalliin, pituusmalliin ja joukkomalliin. Muu -luokkaan luokiteltiin ne vastaukset, jotka eivät sopineet mihinkään edellä mainituista malleista ja ei kuviota -luokkaan ne vastaukset, joissa ei ollut ollenkaan kuviokielen vastausta.

Taulukko 7.6. *Murtolukutehtävissä tiettyä kuviokielen mallia käyttäneiden oppilaiden määrät ja osuudet kaikista osallistujista*

Kuviokielen malli	Pinta-ala	Pituus	Joukko	Muu	Ei kuviota
Tehtävä 3.A	53 (85,5 %)	0 (0 %)	2 (3,2 %)	1 (1,6 %)	6 (9,7 %)
Tehtävä 3.B	41 (66,1 %)	0 (0 %)	3 (4,8 %)	2 (3,2 %)	16 (25,8 %)
Tehtävä 3.C	15 (24,2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	24 (38,7 %)	23 (37,1 %)

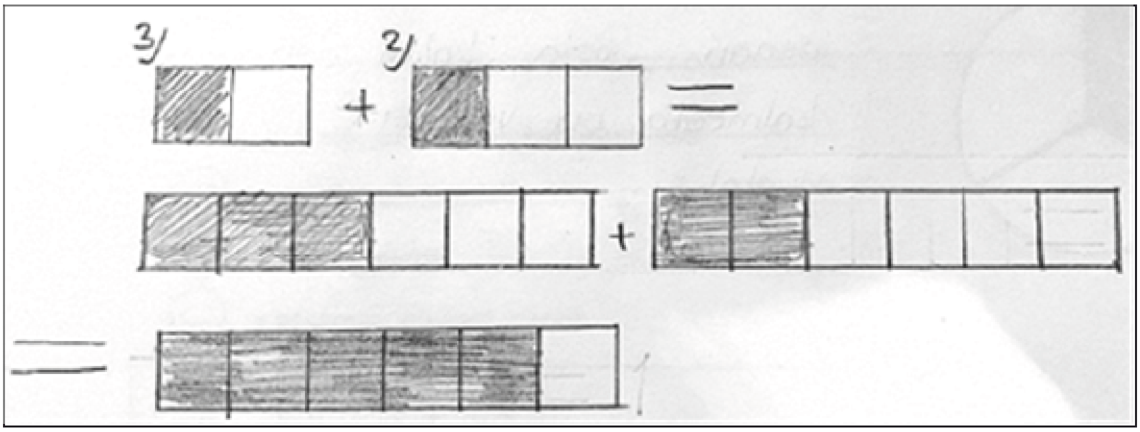
Taulukosta 7.6 nähdään, että tehtävän 3 A-kohdassa yleisin käytetty kuviokielen malli oli pinta-alamalli, jota käytti vastauksessaan yli 85 % osallistuneista oppilaista. Pituusmallia A-kohtaan ei käyttänyt yksikään oppilaista. Oppilaista kaksi (3,2 %) käytti A-kohdassa murtoluvun kuvaamiseen joukkomallia ja yksi oppilas käytti jotakin muuta mallia. Tehtävän A-kohtaan kuviokielen vastauksen jätti tekemättä vain 6 oppilasta eli 9,7 % osallistujista.

Seuraavassa kuvassa on erään tutkimukseen osallistuneen piirtämä vastaus tehtävän 3 A -kohtaan. Oppilas on käyttänyt murtolukujen laskutoimituksen havainnollistamiseen osiin jaettuja ympyröitä.



***Kuva 7.3.** Oppilas 10, T3.A*

Toinen kuva on myöskin erään oppilaan piirtämä vastaus 3 A -kohtaan, hieman erityylistä pinta-mallia käyttäen.

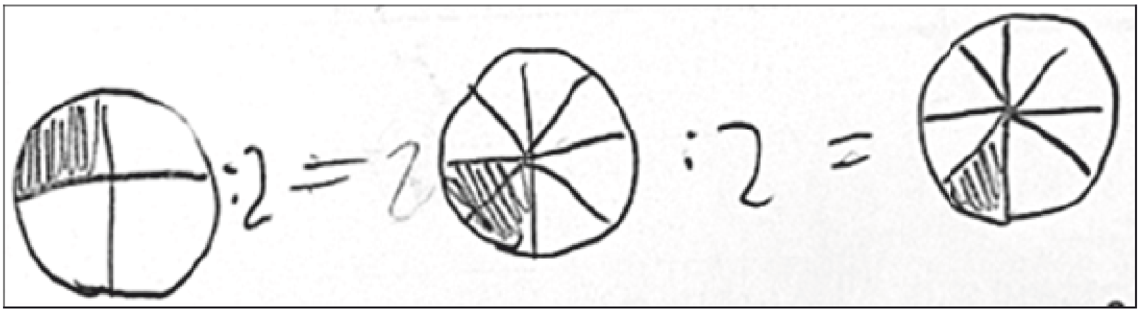


***Kuva 7.4.** Oppilas 2, T3.A*

Molemmat oppilaat ovat käyttäneet kuviokielen vastauksessaan pinta-alamallia. Oppilas 10 on käyttänyt kuviona ympyröitä, jotka on jaettu murtoluvun mukaisiin osiin eli niin sanottua piirakkamallia. Oppilas 2 on käyttänyt pinta-alojen kuvaamisessa peräkkäisistä neliöistä muodostuvia suorakulmioita, joista on väritetty murtoluvun osoittajan kertoma määrä osia.

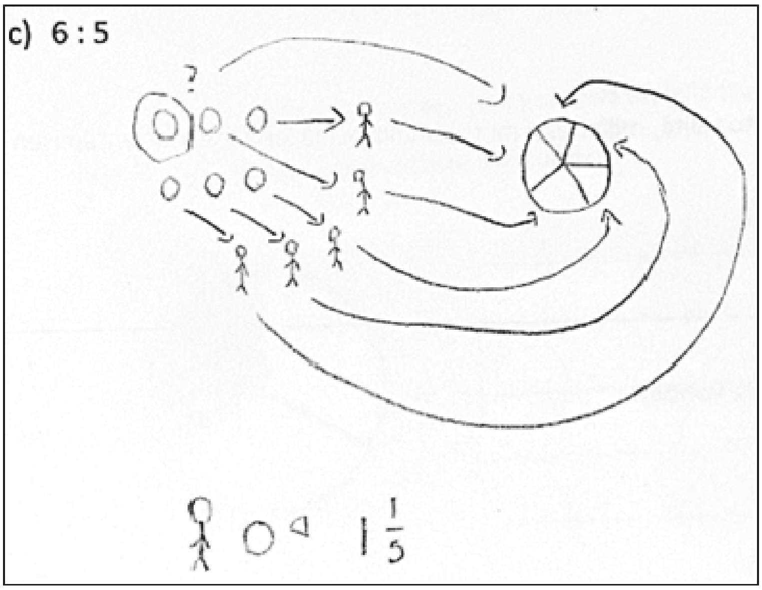
Taulukosta 7.6 nähdään, että myös tehtävän B-kohdassa yleisin käytetty kuviokielen malli oli pinta-alamalli. Pinta-alamallia tehtävään käytti 41 oppilasta eli 66,1 % osallistujista. Ensimmäisen kohdan tavoin, myöskään B-kohtaan yksikään oppilas ei käyttänyt pituusmallia. Joukkomallia C-kohdassa käytti 3 oppilasta ja jotakin muuta mallia 2 oppilasta. Toisen kohdan jätti kuviokielen vastauksen osalta tyhjäksi huomattavasti isompi määrä oppilaita verrattuna ensimmäiseen kohtaan. Kuviokielen vastauksen jätti tekemättä 16 oppilasta, joka on yli neljäsosa osallistujista.

Kuvassa 7.5 on erään tutkimukseen osallistuneen oppilaan kuviokielen vastaus tehtävän 3 B-kohtaan. Oppilas on käyttänyt murtolukumerkinnän kuvaamiseen pinta-alamallia. Oppilas on piirtänyt murtolukua kuvaamaan ympyrädiagrammin, tutummin piirakkamallin. Lähes kaikki pinta-alamallia käyttäneiden oppilaiden vastaukset olivat juuri piirakkamallia.



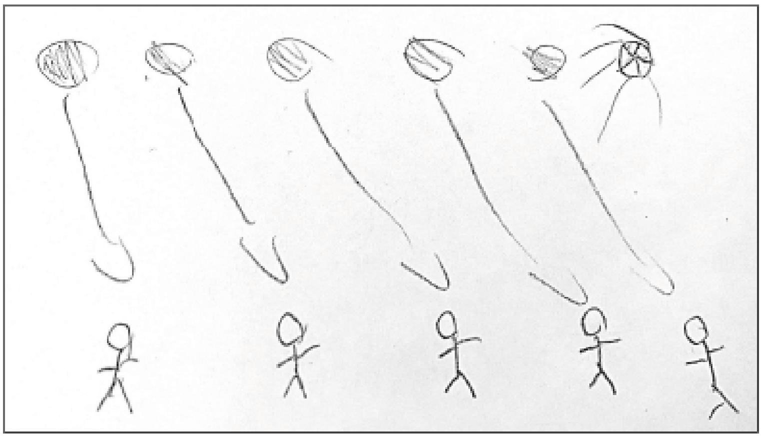
Kuva 7.5. *Oppilas 11, T3.B*

Taulukosta 7.6 voidaan huomata, että tehtävän C-kohtaan suurin osa oppilaista on vastannut joko jonkin muun kuviokielen mallin, kuin pinta-ala-, pituus- tai joukkomallin tai jättänyt kuvion kokonaan piirtämättä. Oppilaista yhteensä 47 ei käyttänyt vastauksessaan pinta-ala-, pituus- tai joukkomallia. Ainoastaan 15 oppilasta, joka vastaa 24,2 % osallistujista, käytti vastauksessaan pinta-alamallia. Iso osa oppilaista piirsi C-kohtaan kuusi jotakin objektia, yleisimmin ruokaa, jotka jaettiin viidelle ihmiselle. Tällaista vastausta ei nähty minään kolmesta kuviokielen mallista. Alla esimerkit tämän tyylisistä oppilaiden vastauksista.



Kuva 7.6. *Oppilas 14, T3.C*

Kuvien 7.6 ja 7.7 vastauksissa molemmat oppilaat jakoivat kuutta kokonaista ympyrää viidelle ihmiselle, joita kuvissa kuvastaa piirretyt tikku-ukot. Molemmat oppilaista on jakanut ensin kokonaiset ihmisten kesken ja sitten viimeisen ympyrän viiteen osaan. Osiin jaossa molemmat oppilaat ovat käyttänyt tuttua piirakkamallia eli jakanut ympyrän viiteen samankokoiseen sektoriin. Oppilaiden vastauksista löytyi myös muutama sellainen vastaus, joissa yhden kokonaisen ympyrän jako viiteen osaan ei tapahtunutkaan sektoreittain, vaan esimerkiksi pystysuunnassa, jolloin jako ei mennytkään pinta-alallisesti tasan.



Kuva 7.7. *Oppilas 1, T3.C*

Kaiken kaikkiaan eniten oppilaiden käyttämä kuviokielen malli oli pinta-alamalli. Pituusmallia sen sijaan ei käyttänyt yksikään oppilaista yhteenkään tehtävään. Joukkomallia käytti tehtävissä muutama oppilas. Mielenkiintoista on myös se, kuinka paljon C-kohtaan käytettiin jotakin muuta mallia, kuin pinta-ala-, pituus- tai joukkomallia.

7.3.1 Oppilaiden tekemät virhepäätelmät murtolukutehtävissä

Kolmannen tutkimuskysymyksen alakysymyksenä oli, minkä tyyppisiä virhepäätelmiä oppilaat tekevät murtolukutehtävissä sekä mikä on niiden yhteys tehtävissä käytettyyn luonnolliseen kieleen ja kuviokieleen. Tässä luvussa käsitellään tehtävässä 3 esiintyneitä virheitä murtolukuja laskiessa. Tehtävässä 3.A oli tehtävänä laskea yhteen kaksi erinimistä murtolukua. Kohdassa esiintyi ainoastaan yksi yleinen virhetyyppi. Tässä virhetyypissä oppilaat laskivat annetun tehtävän siten, että he laskivat murtolukujen osoittajat ja nimittäjät erikseen yhteen ilman, että he muuttivat lukuja aluksi samannimisiksi. Laskiessaan laskutoimituksen $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ päätyivät he siten tulokseen $\frac{2}{5}$. Tämän virheen tehtävässä teki 10 oppilasta. Näiden lisäksi virheellisiä vastauksia tehtävään antoi kolme muuta oppilasta, joiden lopulliset tulokset tehtävälle olivat 1, $\frac{2}{3}$ ja $1\frac{1}{3}$. Näistä vastauksista ei kuitenkaan näkynyt, miten vastaukseen oli päädytty, eikä niissä tehdyissä virheissä nähty yhtäläisyyksiä. Täten murtolukujen yhteenlaskussa osoittajan ja nimittäjän laskemista erikseen yhteen voidaan pitää A-kohdan ainoana yleisenä virhetyyppinä.

Tehtävän 3 B -kohdassa oli tehtävänä jakaa murtolukua kokonaisluvulla. Tehtävän ratkaisuissa havaittiin useita erityyppisiä virheitä. Näistä virhetyypeistä viisi oli sellaisia, jonka teki useampi, kuin yksi oppilas. Ensimmäinen ja huomattavasti yleisin virhetyyppi tehtävässä oli murtoluvun sekä osoittajan että nimittäjän jakaminen luvulla 2. Oppilaat ratkaisivat tehtävän siis seuraavasti $\frac{1}{4}:2=\frac{0{,}5}{2}$. Samaan virhetyyppiin luettiin myös oppilaat, jotka ensin lavensivat murtoluvun, minkä jälkeen jakoivat sekä osoittajan että nimittäjän kahdella. Tällöin he päätyivät tulokseen $\frac{1}{4}$. Tämän virheen tehtävässä teki kymmenen oppilasta. Toinen virhetyyppi oli pelkän nimittäjän jakaminen kahdella, jolloin ratkaisu oli seuraavanlainen $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2}$. Tämän virheen teki kaksi oppilasta. Kolmannessa virhetyypissä oppilas on jakanut pelkkää osoittajaa kahdella, jolla on päästy periaatteessa oikeaan vastaukseen, mutta ratkaisu virheellinen siksi, että sitä ei ole lopuksi enää lavennettu. Kolmannessa virhetyypissä ratkaisu on siis ollut $\frac{1}{4} : 2 = \frac{0,5}{4}$. Kolmannenkin virhetyypin teki ratkaisussaan ainoastaan kaksi oppilasta. Neljännessä virhetyypissä nimittäjän kertomisen sijaan oppilas onkin kertonut osoittajaa kahdella. Ratkaisu on tällöin ollut seuraavanlainen: $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2}$. Tämän virhetyypin teki kaksi oppilasta. Näiden neljän virhetyypin lisäksi tehtävän ratkaisuissa esiintyi kaksi muuta virhettä, jotka eivät kuitenkaan olleet samanlaisia keskenään eivätkä muiden virhetyyppien kanssa. Toisessa näistä oppilas oli jakanut ensin molemmat, sekä osoittajan että nimittäjän kahdella, minkä jälkeen jakanut osoittajan vielä uudelleen kahdella. Toinen oppilaista oli sen sijaan kertonut osoittajaa sekä nimittäjää molempia kahdella.

Tehtävän 3 C -kohdassa oli tehtävänä jakaa kokonaislukua kokonaisluvulla. Tehtävässä 9 oppilasta teki jonkinlaisen virheen, mutta näistä ei löydetty yhteyttä toisiinsa. Ensinnäkin näistä vastauksista viidessä ei ollut lainkaan välivaiheita, joten niistä oli hyvin vaikeaa päätellä, minkälainen lasku- tai ajatusvirhe ratkaisussa on tapahtunut. Näissä viidessä oppilaiden vastaukset tehtävään olivat $1\frac{1}{2}$, $\frac{6}{30}, 1, 0, 75$ ja $1, 5$. Näiden lisäksi tehtävässä kaksi vastausta oli annettu epätarkassa muodossa, ensimmäinen muodossa "1 jää 1"ja toinen "$1\frac{20}{100}$". Yksi oppilas oli merkinnyt laventavansa kokonaislukua 6 viidellä, josta tuli lavennuksen jälkeen 35. Kun 35 jaettiin luvulla 5 saatiin vastaukseksi 6. Lasku näytti siis seuraavalta: $^{5)}6 : 5 = 35 : 5 = 6$. Lisäksi yksi oppilas oli yrittänyt muuttaa kokonaislukuja murtoluvuiksi, eikä ollut luultavimmin muistanut murtolukujen jakolaskun laskusääntöjä ja päätynyt väärään vastaukseen. Hänen ratkaisunsa näytti seuraavanlaiselta: $\frac{6}{6} : \frac{5}{5} = \frac{6}{30} = \frac{2}{10}$.

7.3.2 Murtolukutehtävässä tehtyjen virheiden yhteys siinä käytettyyn luonnolliseen kieleen ja kuviokieleen

Kolmannen tutkimuskysymyksen alakohtana oli tehtävässä käytetyn kuviokielen lisäksi tutkia, onko sillä, että tehtävän vastaus on kielennetty luonnollisella kielellä tai kuviokielellä yhteyttä siihen, onko tehtävässä tullut virhettä. Alla olevaan taulukkoon on eritelty tehtäväkohtaisesti vastaukset sen mukaan, onko niissä tullut virhettä sekä sen mukaan, onko tehtävän ratkaisussa käytetty luonnollista kieltä tai kuviokieltä. Taulukossa prosentit kuvaavat osuuksia kaikista tehtävään oikein vastanneista tai väärin vastanneet.

Taulukosta 7.7 nähdään, että tehtävän A-kohtaan oikein vastanneista 77,6 % eli 38 oppilasta oli kielentänyt tehtävän joko luonnollista kieltä tai kuviokieltä käyttäen ja 22,4 % eli 11 oppilasta ei ollut käyttänyt matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollista kieltä tai kuviokieltä ratkaisussaan. Sen sijaan tehtävään väärin vastanneista vain 53,8 % eli 7 oppilasta oli kielentänyt tehtävän vastauksen ja lähes puolet ei ollut kielentänyt vastaustaan.

Taulukko 7.7. Murtolukutehtävän vastaukset jaoteltuna virheiden ja kirjallisen kielentämisen mukaan

Tehtävä	Tehtävä oikein ja kielennetty	Tehtävä oikein ja ei kielennetty	Tehtävä väärin ja kielennetty	Tehtävä väärin ja ei kielennetty
A	38 (77,6 %)	11 (22,4 %)	7 (53,8 %)	6 (46,2 %)
B	29 (85,3 %)	5 (14,7 %)	10 (52,6 %)	9 (47,4 %)
C	25 (54,3 %)	21 (45,7 %)	5 (55,6 %)	4 (44,4 %)

Tehtävän A-kohdasta voidaan siis huomata, että tehtävän oikein laskeneista suurempi osa oli käyttänyt kirjallista kielentämistä ratkaisussaan kuin väärin laskeneista.

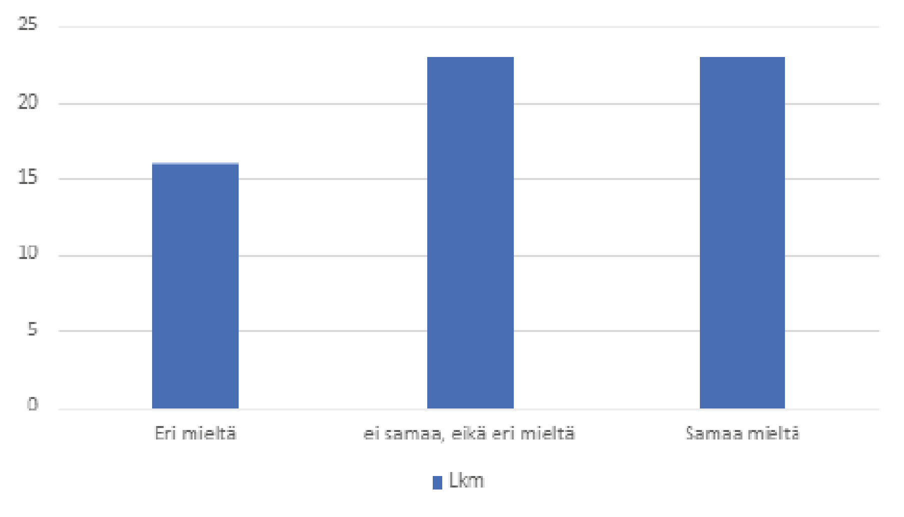
Tehtävän B-kohdan osalta tulokset ovat vastaavanlaiset kuin A-kohdassa. Tehtävään oikein vastanneista 85,3 % eli 29 oppilasta oli käyttänyt ratkaisussaan matematiikan symbolikielen lisäksi luonnollista kieltä tai kuviokieltä ja 14,7 % eli 5 oppilasta ei ollut. Tehtävään väärin vastanneista puolestaan vain hieman yli puolet oli käyttänyt ratkaisunsa tukena kirjallista kielentämistä ja vajaa puolet ei laisinkaan. Ero oikein ja väärin vastanneiden kirjallista kielentämistä käyttäneiden osuuksista on merkittävä, yli 30 prosenttiyksikköä.

Tehtävän C -kohdan tulokset olivat vastakkaiset A ja B-kohtiin verrattuna. Tehtävän oikein tehneistä 54,3 % oli kielentänyt vastauksensa ja 45,7 % ei ollut. Sen sijaan väärin vastanneista vastaavat osuudet olivat 55,6 % ja 44,4 %. Tehtävän C -kohdassa siis tehtävän oikein laskeneista hieman pienempi osa oli käyttänyt tehtävässä kirjallista kielentämistä kuin väärin vastanneista. Ero ei ole merkittävä, mutta tulos on päinvastainen ensimmäisen kahden kohdan tuloksiin verrattuna.

Tehtävän oikein ratkaisemisen ja kirjallisen kielentämisen välillä nähdään yhteys tehtävän A ja B kohdissa. Niistä oppilaista, jotka olivat ratkaisseet tehtävän oikein, isompi osa oli käyttänyt ratkaisussaan joko luonnollista kieltä tai kuviokieltä väärin vastanneisiin verrattuna. Sen sijaan kolmannessa kohtaa kirjallisella kielentämisellä ei näyttäisi olevan vaikutusta tehtävän oikein ratkaisemisen kanssa.

7.4 Millaisena oppilaat kokevat matematiikan kirjallisen kielentämisen osana murtolukutehtävien ratkaisua?

Tutkimuksen viimeisenä tehtävänä oli selvittää, millaisena oppilaat kokevat matematiikan kirjallisen kielentämisen murtolukutehtävien ratkaisussa. Aineisto kerättiin tutkimuslomakkeessa olleen kyselyn avulla, joka muodostui seitsemästä kirjalliseen kielentämiseen liittyvästä väittämästä. Oppilaiden vastaukset väittämiin on esitetty pylväsdiagrammein, joissa pystyakseli kertoo vaihtoehdon vastanneiden oppilaiden määrän ja vaaka-akseli vastausvaihtoehdot "eri mieltä", "ei samaa, eikä eri mieltä"ja "samaa mieltä". Ensimmäisenä väittämänä lomakkeessa oli: "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni mukavaa". Oppilaiden vastaukset väittämään on esitetty alla olevaan kaavioon.



Kuva 7.8. *Oppilaiden vastaukset väittämään 1: "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni mukavaa"*

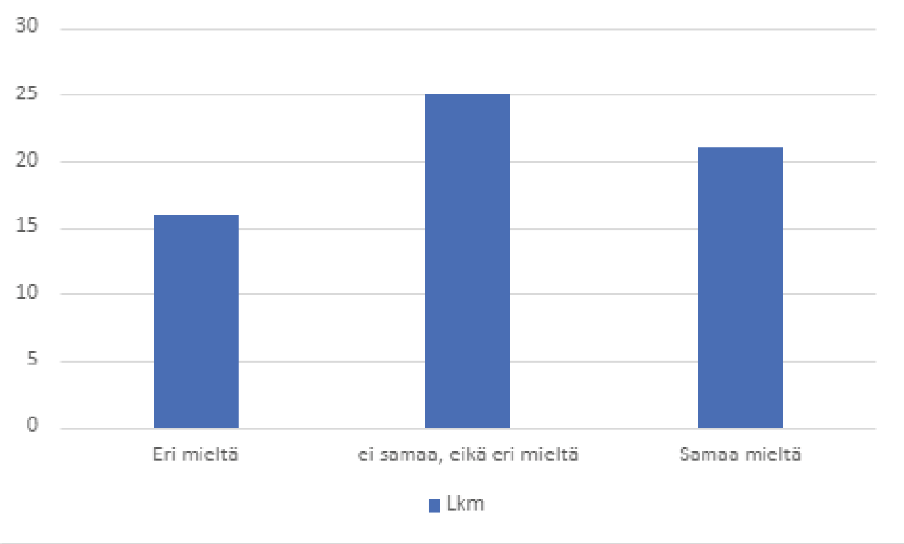
Kuvasta 7.8 huomataan, että useampi piti murtolukutehtävän selittämistä omin sanoin mukavana kuin epämukavana. Väite sai paljon neutraaleja vastauksia, mutta myös yhtä paljon myöntäviä vastauksia. Väittämään eri mieltä olevien määrä oli pienempi samaa mieltä oleviin verrattuna. Enemmistö oppilaista siis joko piti omin sanoin selittämistä osana ratkaisua joko mukavana tai neutraalina.

Toisena väittämänä kyselylomakkeessa oli: "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni helppoa". Oppilaiden vastaukset väittämään on esitetty seuraavaan kaavioon.

Toisen väittämän vastaukset ovat samankaltaiset ensimmäisen väittämän kanssa. Kaikista eniten väittämään vastattiin vaihtoehtoa "ei sama, eikä eri mieltä". Toiseksi eniten vastauksia sai vastaus "samaa mieltä"ja vähiten vastaus "eri mieltä". Enemmistön oppilaista voidaan siis sanoa pitäneen murtolukutehtävän selittämistä omin sanoin helppona tai neutraalina.

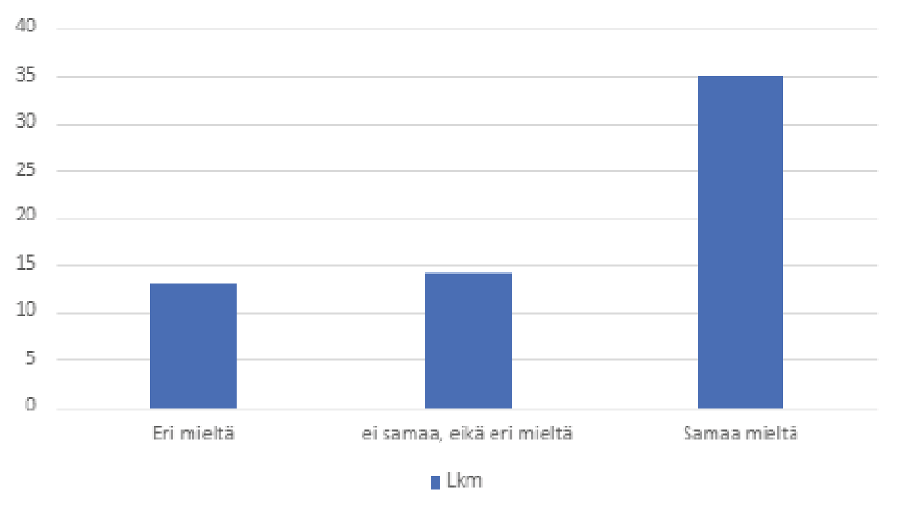
Kahden ensimmäisen väittämän välisen korrelaatiokertoimen arvoksi laskettiin 0,5465. Arvoa voidaan pitää melko korkeana [27, s. 305]. Korrelaatiokertoimesta voidaan päätellä, että murtolukutehtävän omin sanoin selittämisestä pitämisellä on yhteys sen helpoksi kokemiseen. Lisäksi khiin neliö -riippumattomuustestisuureen arvoksi (Pearson Chi-Square) laskettiin 20,423 ja p-arvoksi <0,001. Täten väittämien välistä riippuvuutta voidaan pitää tilastollisesti merkitsevänä.

Kolmas väittämä kyselylomakkeessa oli "Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli



Kuva 7.9. Oppilaiden vastaukset väittämään 2: "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni helppoa"

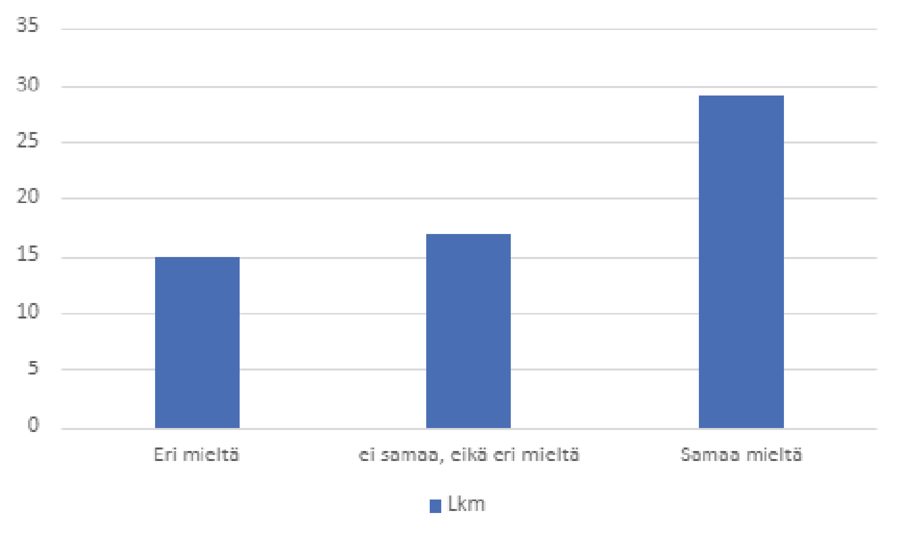
mielestäni mukavaa". Ensimmäiset kaksi väittämää liittyivät omin sanoin selittämiseen, eli luonnollisen kielen käyttöön osana tehtävän ratkaisua ja seuraavat kaksi väittämää kuviokielen käyttöön. Alla olevaan kaavion on esitetty oppilaiden vastaukset kolmanteen väittämään.



Kuva 7.10. Oppilaiden vastaukset väittämään 3: "Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli mielestäni mukavaa"

Kolmannen väittämän vastaukset eroavat merkittävästi ensimmäisen kahden väittämän vastauksista. Kuvan avulla murtolukutehtävän selittämistä pidettiin mukavampana, kuin omin sanoin selittämistä. Oppilaista 35 eli melkein puolet vastasi väittämään vaihtoehdon "samaa mieltä". Vaihtoehdon "eri mieltä"ja "ei samaa, eikä eri mieltä"vastasi lähes saman verran oppilaita, molemman vajaa 15 oppilasta.

Neljäntenä väittämänä lomakkeessa oli "Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli mielestäni helppoa". Alla olevaan kaavioon on koottuna oppilaiden vastaukset neljänteen väittämään.

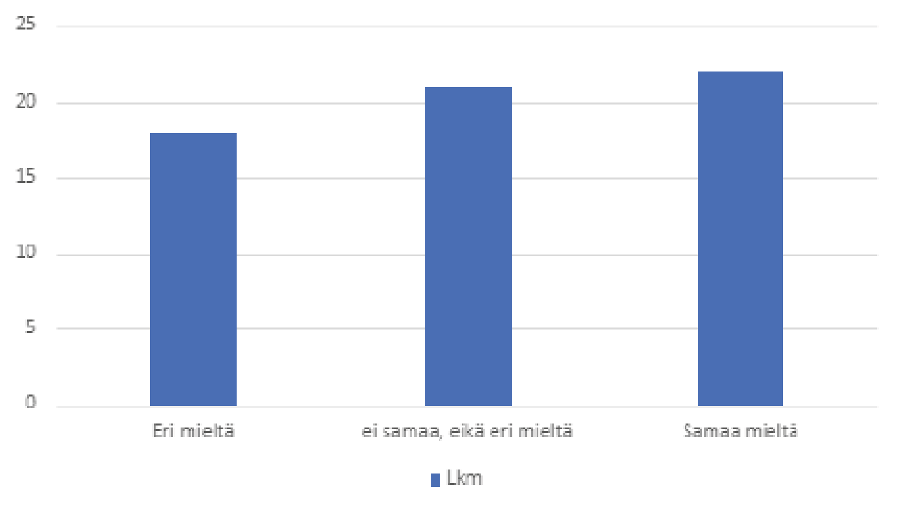


Kuva 7.11. *Oppilaiden vastaukset väittämään 4: "Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli mielestäni helppoa"*

Kuvasta 7.11 nähdään, että väittämän 4 vastaukset olivat samankaltaiset kolmannen väittämän kanssa. Kuitenkin hieman harvempi oppilas vastasi neljänteen väittämään vaihtoehdon "samaa mieltä", kuin kolmannessa väittämässä. Väittämään vastasi "eri mieltä"15 oppilaista ja "ei samaa, eikä eri mieltä"hieman yli 15 oppilasta. Vajaa 30 oppilasta sen sijaan vastasi väittämän "samaa mieltä".

Kolmannen ja neljännen väittämän väliseksi korrelaatioksi laskettiin 0,6. Sitä voidaan pitää melko korkeana korrelaationa. Lisäksi khiin neliö -riippumattomuustestisuureen arvoksi saatiin 28,117 ja p-arvoksi <0,001, jota voidaan pitää tilastollisesti merkitsevänä. Murtolukutehtävän kuviokielen avulla kielentämisestä pitämisellä on siis yhteys sen kokemiseen helpoksi. Myös ensimmäisen ja kolmannen väittämän väliset korrelaatiot ja toisen ja neljännen väittämän väliset korrelaatiot laskettiin. Niiden arvoiksi saatiin 0,447 ja 0,6692. Lisäksi väittämien 1 ja 3 välistä riippuvuutta laskiessa khiin neliö -riippumattomuustestisuureen arvoksi saatiin 17,943 ja p-arvoksi 0,001. Väittämille 2 ja 4 riippumattomuustestisuureen arvoksi saatiin 33,920 ja p-arvoksi <0,001. Näitä riippuvuuksia voidaan molempia pitää tilastollisesti merkittävinä. Murtolukutehtävän omin sanoin selittämisen mukavana pitämisellä on siis melko suuri yhteys sen kanssa, että pitää murtolukutehtävän selittämistä kuvan avulla mukavana. Vielä suurempi yhteys on näiden selitystapojen helppona pitämisellä.

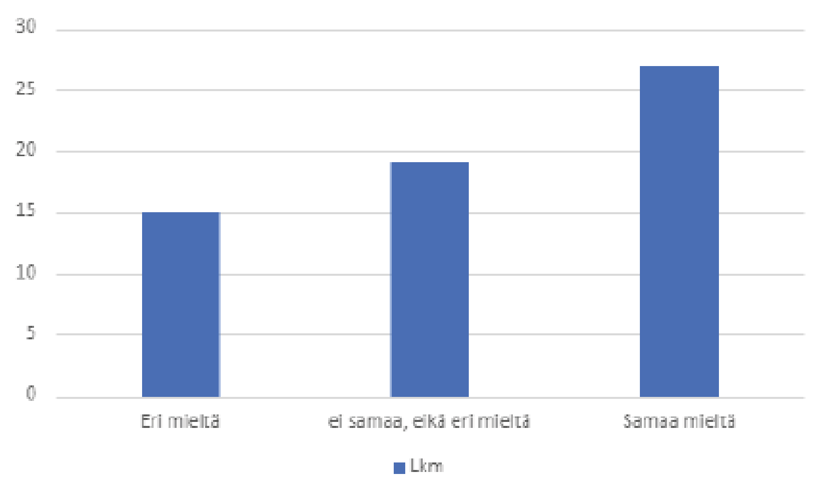
Viidentenä väittämänä lomakkeessa oli "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa". Seuraavaan kaavioon on esitetty väittämän 5 vastaukset.



Kuva 7.12. Oppilaiden vastaukset väittämään 5: "Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa"

Kuvasta 7.12 nähdään, että vastaukset väittämään jakautuivat melko tasaisesti aikaisempiin väittämiin verrattuna. Vaihtoehdon "eri mieltä"vastasi melkein 20 oppilasta, vaihtoehdon "ei samaa, eikä eri mieltä"hieman yli 20 oppilasta ja vaihtoehdon "samaa mieltä"myös hieman yli 20 oppilasta. Väittämän vastausten perusteella ei voida tehdä päätelmiä siitä, oliko oppilaiden mielestä murtolukutehtävän selittämisestä omin sanoin hyötyä vaiko ei, sillä vastaukset olivat niin tasaisia eri vaihtoehtojen välillä.

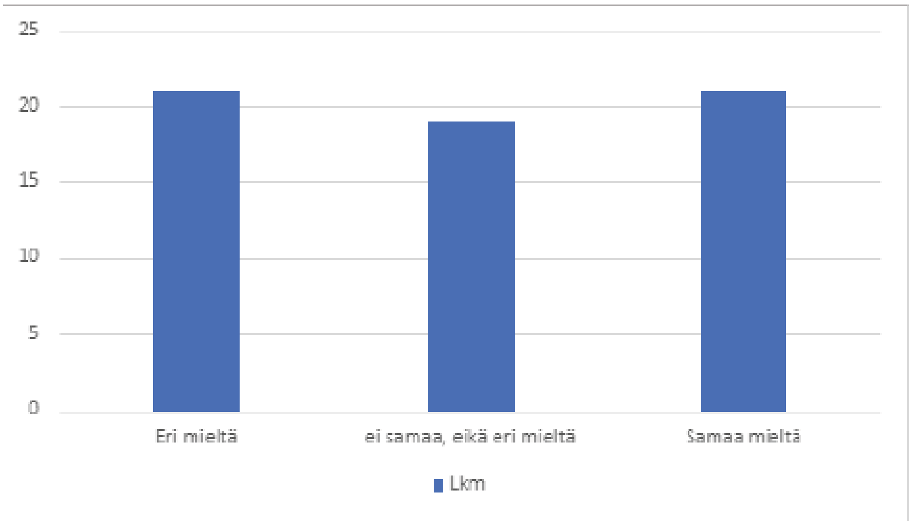
Kuudes väittämä lomakkeessa oli "Murtolukutehtävästä kuvan piirtäminen auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa". Kuudes väittämä oli siis muuten sama, kuin viides väittämä, mutta siinä selvitettiin omin sanoin selittämisen hyödyn sijaan kuviokielen hyödyllisyyttä. Alla olevaan kaavioon on koottu oppilaiden vastaukset kuudenteen väittämään.



Kuva 7.13. Oppilaiden vastaukset väittämään 6: "Murtolukutehtävästä kuvan piirtäminen auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa"

Kuudennen väittämän kuvasta 7.13 huomataan, että kuvan piirtämisen oppilaat kokivat hyödyllisempänä kuin omin sanoin selittämisen. Väittämään vaihtoehdon "samaa mieltä"vastasi yli 25 oppilasta, vaihtoehdon "ei samaa, eikä eri mieltä"vajaa 20 oppilasta ja vaihtoehdon "eri mieltä"15 oppilasta. Koska huomattavasti eniten vastauksia sai vaihtoehto "samaa mieltä", voidaan päätellä, että oppilaat kokivat murtolukutehtävän ratkaisussa kuviokielen hyödyntämisen hyödyllisenä.

Seitsemäntenä ja viimeisenä väittämänä lomakkeessa oli "Aion jatkossa hyödyntää omin sanoin selittämistä ja/tai kuvan piirtämistä tehtävän ratkaisussa". Seuraavaan kaavioon on esitetty oppilaiden vastaukset väittämään.



Kuva 7.14. *Oppilaiden vastaukset väittämään 7: "Aion jatkossa hyödyntää omin sanoin selittämistä ja/tai kuvan piirtämistä tehtävän ratkaisussa"*

Kuvasta 7.14 voidaan ensinnäkin nähdä se, että se on aikaisempiin kaavioihin painottunut enemmän vaihtoehtoon "eri mieltä". Vaihtoehdon "eri mieltä"on nimittäin vastannut yhtä moni oppilas kuin vaihtoehdon "samaa mieltä". Vaihtoehdon "ei samaa, eikä eri mieltä"on vastannut hieman alle 20 oppilasta. Väittämän vastauksista huomataan, että moni oppilas aikoo jatkossa hyödyntää kirjallista kielentämistä tehtävän ratkaisussa. Kuitenkin moni oppilas ei aio hyödyntää omin sanoin selittämistä tai kuvan piirtämistä tehtävän ratkaisussa jatkossa. Seitsemännen väittämän vastausten väliset korrelaatiot laskettiin väittämien 5 ja 6 vastausten kanssa. Korrelaatio väittämien 5 ja 7 vastausten välillä on 0,7343, jota voidaan pitää korkeana korrelaationa [27, s. 305]. Lisäksi väittämien välille lasketun khiin neliö -riippumattomuustestisuureen arvoksi saatiin 39,800 ja p-arvoksi <0,001. Sillä, että oppilas on kokenut omin sanoin selittämisen auttavan tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemissa on siis yhteys sen kanssa, että oppilas aikoo jatkossa hyödyntää kirjallista kielentämistä tehtävän ratkaisussa. Lisäksi väittämien 6 ja 7 vastausten väliseksi korrelaatioksi laskettiin 0,6127, jota voidaan myös pitää korkeana korrelaationa. Khiin neliö -testisuureen arvoksi saatiin 30,838 ja p-arvoksi <0,001. Täten myös sillä, että koki kuvan piirtämisen auttavan tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa on yhteys siihen, että aikoo jatkossakin hyödyntää kirjallista kielentämistä tehtävän ratkaisussa.

Kyselylomakkeen tuloksista voidaan päätellä, että kokonaisuudessaan oppilaiden suhtautuminen kirjallisen kielentämisen hyödyntämiseen tehtävän ratkaisussa oli keskimäärin positiivista. Vaikka vastauksissa oli paljon vaihtelua, yhdenkään väittämän vastauksissa ei ollut enempää "eri mieltä"vastauksia, kuin "samaa mieltä"vastauksia. Tehtävän selittäminen kuviokielen avulla koettiin enemmän helpoksi, mukavaksi ja hyödylliseksi kuin luonnollisen kielen avulla.

7.5 Tulosten tarkastelua

Tutkimuksessa päästiin vastaaviin tuloksiin kuin aikaisemmissa tutkimuksissa, muun muassa murtolukumerkinnälle tunnetuin merkitys oli osa kokonaisuudesta, joka on myös muissa tutkimuksissa saatu tulos. Tämän lisäksi tutkimuksessa huomattiin, että mitan ja suhteen merkitykset olivat muiden tutkimusten tapaan vähiten tunnetut merkitykset. Vihervaaran tutkimuksessa vain 8,8 prosenttia tutkimukseen osallistuneista löysi murtolukumerkinnälle suhteen merkityksen [42]. Tämä tutkimus tuotti vastaavan tuloksen, sillä suhteen merkityksen löysi 12,9 prosenttia osallistuneista. Myös jakolaskun merkityksen tunnistaneiden oppilaiden suuruusluokka oli jo etukäteen pääteltävissä, sillä murtolukumerkintää käytetään melko paljon peruskoulussa jakolaskun kuvaamiseen. Eräs mielenkiintoinen huomio tutkimustuloksissa oli se, että harvempi oppilaista löysi suhteen merkityksen murtolukumerkinnälle kuvasta kuin spontaanisti pelkän merkinnän nähtyään. Voidaan pohtia, onko tutkimuksessa suhteen kuvaamiseen käytetty kuva oppilaista epäselkeä ja olisiko eri tyylisellä kuvalla saatu erilaiset tulokset.

Murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrällä näyttäisi tutkimuksen mukaan olevan yhteys oppilaan luokka-asteeseen ainakin verrattaessa seitsemäsluokkalaisia kahdeksas- ja yhdeksäsluokkalaisiin, sillä suurimmat erot olivat näiden välillä. Eroa selittänee se, että sellaiset sisällöt matematiikassa, joissa esiintyy esimerkiksi suhteen merkitys, opiskellaan kyseisessä koulussa yläasteella vasta myöhemmin tarkemmin. Esimerkiksi verrannollisuuden laskeminen käydään läpi kahdeksannella luokalla ja mittakaavan laskeminen yhdeksännellä luokalla. Myös oppilaan matematiikan arvosanan ja murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten lukumäärän välillä nähtiin jonkinlainen yhteys, mutta sitä ei voida kuitenkaan pitää tilastollisesti merkitsevänä.

Murtolukutehtävän kirjallisessa kielentämisessä oppilaat käyttivät kuviokielen vastauksissaan lähinnä pinta-alamallia, mikä ei tuloksena yllättänyt, sillä pinta-alamalli on oppikirjoissa ja täten luultavasti myös opetuksessa kaikista käytetyin malli. Murtolukutehtävän kolmanteen kohtaan, jossa oli tehtävänä ratkaista lasku $6 : 5$, oppilaat hyödynsivät kaikista vähiten kuviokieltä vastauksen selittämiseen. Syynä tähän voidaan olettaa olevan se, että oppilailla ei ollut tietoa sellaisista malleista, joilla esitetään kokonaisia, sillä yleisimmin tunnettu pinta-alamalli on eniten käytetty osan kokonaisuudesta kuvaamiseen.

Murtolukutehtävän a- ja b-kohdissa kirjallisella kielentämisellä nähtiin olevan yhteys sen kanssa, onko tehtävän ratkaisu oikein. Kuitenkaan c-kohdassa kirjallisella kielentämisellä ei ollut vaikutusta tehtävän oikein ratkaisun kanssa. Syynä voidaan nähdä tehtävien erilaisuus. Tehtävän kahdessa ensimmäisessä kohdassa tehtävänannon luvut olivat murtolukumuodossa, jotka on oppilaille helpompi havainnollistaa kuvan avulla toisin kuin c-kohdan kokonaisluvut.

Murtolukutehtävien kirjallisen kielentämisen oppilaat kokivat yleisesti ottaen mukava. Lisäksi kuviokielen käyttäminen koettiin helpommaksi kuin sanallisen selittäminen. Monet oppilaista vastasivat kirjallisen kielentämisen auttavan tehtävän ratkaisussa, mutta silti useat vastasivat, että eivät aio hyödyntää sitä jatkossa. Tämä voisi johtua esimerkiksi siitä, että oppilailla on valmiiksi sellainen kuva matematiikasta, että tehtävät ovat lyhyitä ja nopeita kirjoittaa, joten sanallinen selittäminen voi tuntua oppilaista vaivalloiselta. Kirjallisen kielentämisen hyödyntämisen hyödyt eivät siis kuitenkaan ole osan oppilaista mielestä kirjoittamisen vaivan arvoisia.

8. LOPUKSI

8.1 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Tutkimuksen luotettavuutta voidaan tarkastella validiteetin ja reliabiliteetin käsitteiden kautta [38]. Validiteetilla tarkoitetaan sitä, onko tutkimuksessa tutkittu sitä, mitä on ollut tarkoituskin tutkia [27]. Yksi tapa arvioida tutkimuksessa validiteettia on triangulaatio, joka yksinkertaistettuna tarkoittaa erilaisten metodien, tutkijoiden, tiedonlähteiden tai teorioiden yhdistämistä. Triangulaatiolla pyritään mahdollisimman objektiivisiin tuloksiin. Triangulaatio voidaan jakaa Denzinin (1978) mukaan neljään eri päätyyppiin, jotka ovat 1) tutkimusaineistoon liittyvä triangulaatio, 2) tutkijaan liittyvä triangulaatio, 3) teoriaan liittyvä triangulaatio ja 4) metodologinen triangulaatio. [38] Tässä tutkimuksessa toteutuu tutkimusaineistoon liittyvä triangulaatio, teoriaan liittyvä triangulaatio sekä metodologinen triangulaatio. Tutkimuksen luotettavuutta lisää erilaisten aineistojen käyttö ja tässä tutkimuksessa aineisto koostuikin sekä likert -asteikollisista suljettujen kysymysten vastauksista sekä avoimien kysymysten vastauksista. Tämän tutkimuksen luotettavuutta lisää myös se, että siihen on yhdistetty monenlaisia teorioita näkökulman laajentamiseksi. Murtolukumerkitysten teoriapohjaa muodostaessa otettiin huomioon Joutsenlahden ja Perkkilän, Murdock-Stewartin sekä Van de Wallen esittelemät merkitykset murtolukumerkinnälle. Luotettavuutta tutkimuksessa lisää lisäksi eri metodien käyttö. Aineistoa hankittiin sekä suljettujen että avointen kysymysten avulla ja sitä tulkittiin sekä kvalitatiivisesti teemoittelun ja luokittelun keinoin, että kvantitatiivisesti Excel ja IBM SPSS Statistics -ohjelmistojen avulla.

Reliabiliteetilla tarkoitetaan puolestaan tutkimuksen toistettavuutta [38]. Tutkimusta voidaan pitää toistettavana, sillä sen kahta ensimmäistä tutkimustehtävää on käytetty aikaisemmin jo ainakin kahdessa tutkimuksessa. Lisäksi tutkimuksen toteuttamisen ja analysoinnin vaiheet on kuvailtu tarkkaan ja tutkimustehtävät löytyvät sellaisenaan liitteistä, joten tutkimuksen pystyy toistamaan melko sujuvasti. Parkkila ym. (2000) määrittävät erään luotettavuuden kriteerin, uskottavuuden (*credibility*) tarkoittavan sitä, että tutkimukseen osallistuneet kuvaillaan riittävästi ja kerätyn aineiston totuudenmukaisuutta arvioidaan [38]. Tässä tutkimuksessa tutkimukseen osallistuneet kuvattiin mahdollisimman tarkasti, mutta kuitenkin niin, että heidän henkilöllisyytensä ei tutkimuksesta paljastu. Tutkimuksen aineistoa voidaan pitää totuudenmukaisena siksi, että tutkimukseen osallistuminen oli oppilaille vapaaehtoista, eikä heillä täten ollut syytä vääristellä vastauksiaan, esimerkiksi parempien arvosanojen toivossa.

Eräs tutkimuksen luotettavuuden kriteeri on tutkimustilanteen arviointi (*dependability*), jossa Tynjälän (1991) mukaan tutkijan tulee ottaa huomioon sekä tutkimukseen vaihtelua aiheuttavat ulkoiset tekijät sekä tutkimuksesta itsestään johtuvat tekijät [38]. Tässä tutkimuksessa tutkimustuloksiin vaikuttavia ulkoisia tekijöitä on esimerkiksi se, miten oppilaiden oppikirjat ottavat kantaa murtolukumerkinnän eri merkityksiin. Lisäksi se, miten perusopetuksen opetussuunnitelma ottaa kantaa murtolukumerkinnän eri merkityksiin ja täten myös, miten opettajat opettavat tästä, on tutkimustuloksiin vaikuttava ulkoinen tekijä. Tutkimuksessa tulee ottaa lisäksi huomioon se, että oppilaiden matemaattiset taidot olivat hyvin eri tasoisia niin ryhmien, kuin oppilaidenkin kesken. Tämä tosin on sellainen tekijä, joka lisää tutkimuksen luotettavuutta, sillä yleisestikin oppilaiden taitotaso on vaihtelevaa. Jos tutkimus olisi toteutettu vain tietyn arvosanan saaneilla oppilailla, ei tutkimuksen tuloksia voisi yleistää suuremmille joukoille. Tutkimuksesta itsestään johtuvia tekijöitä on muun muassa tutkimuksen ajankohta, joka vaikuttaa osaltaan siihen, missä määrin oppilaat ovat ehtineet opiskella murtolukuja sekä siihen liittyviä eri merkityksiä. Tutkimus toteutettiin syyslukukaudella, jolloin esimerkiksi seitsemäsluokkalaiset olivat jo ehtineet käydä murtolukujen laskutoimitukset ja yhdeksäsluokkalaiset yhdenmuotoisuuden ohessa mittakaavan. Tutkimus kuitenkin toteutettiin kaikilla osallistuneilla samojen muutaman viikon sisällä, minkä avulla pyrittiin siihen, että kullakin saman luokka-asteen oppilaalla olisi samat pohjatiedot tutkimusta tehdessä.

Tutkimuksen luotettavuutta lisää myös sen eettisyys [38]. Tutkimuseettisen tiedekunnan [40] mukaan tutkimus voi olla eettisesti hyväksyttävää ja luotettavaa ja sen tulokset voivat olla uskottavia ainoastaan silloin, kun tutkimus on suoritettu hyvää tieteellistä käytäntöä noudattaen. Hyvän tieteellisen käytännön lähtökohtiin kuuluu tutkimusetiikan kannalta muiden muassa tutkimustyössä, tulosten tallentamisessa, esittämisessä sekä tulosten arvioinnissa rehellisten, huolellisten ja tarkkojen toimintatapojen noudattaminen [40]. Tämän tutkimuksen kaikissa vaiheissa noudatettiin rehellisiä, huolellisia ja tarkkoja toimintatapoja. Aineisto kerättiin ja säilytettiin suurta huolellisuutta käyttäen. Tulokset esitettiin sellaisenaan, eikä niitä muokattu millään tavalla tutkimuksessa kerrotun lisäksi. Tutkimuksessa tulee lisäksi ottaa huomioon muiden tutkijoiden työt ja kunnioittaa niitä ja viitata töihin asianmukaisesti [40]. Tässä tutkimuksessa on mahdollisimman tarkkojen lähdeviitteiden ja niihin liittyvän lähdeluettelon avulla esitetty, mitkä ajatukset ovat muiden tutkijoiden sekä mitkä opinnäytetyön tekijän omia. Hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluu lisäksi tarvittavien tutkimuslupien hankkiminen [40]. Tässä tutkimuksessa rehtorilta saadun luvan jälkeen virallinen tutkimuslupa haettiin ensin asianmukaisesti kaupungilta, jossa tutkimus toteutettiin. Ennen tutkimuksen toteuttamista myös osallistuneiden oppilaiden huoltajilta pyydettiin lupaa tutkimukseen osallistumiseen, sillä oppilaat olivat kaikki alaikäisiä.

Tutkimuksen otannan ollessa suhteellisen pieni, ei tuloksia voida yleistää kaikille yläasteikäisille oppilaille, mutta niiden voidaan ajatella antavan kuitenkin hyvän kuvan yläasteikäisten tunnistamista merkityksistä murtolukumerkinnälle. Mikäli tutkimus toistettaisiin saman ikäisillä oppilailla, kuin tutkimukseen osallistuneet, voidaan olettaa, että tulokset olisivat samansuuntaiset. Yksilön käsitykset tietystä asiasta, tässä tapauksessa murtolukumerkinnän eri merkityksistä ja murtolukutehtävien kirjallisesta kielentämisestä, ei muodostu ainoastaan omien kokemusten kautta, vaan ne ovat elämämme ihmisyhteisöistä kotoisin [21]. Ihmisen käsitykset muotoutuvat viestinnän, kasvatuksen ja opetuksen myötä, eivätkä täten välttämättä ole omakohtaisia [21]. Myös oppilaiden käsitykset murtoluvuista ovat muotoutuneet kasvatuksen ja opetuksen kautta ja voivat yhteisen opetussuunnitelman takia olla hyvinkin samankaltaiset muiden suomalaisten yläasteikäisten oppilaiden kanssa.

8.2 Pohdinta

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia merkityksiä yläkouluikäiset löytävät murtolukumerkinnälle sekä millaisia kuviokielen malleja oppilaat hyödyntävät murtolukutehtävien kielentämisessä. Lisäksi selvitettiin lyhyesti, miten oppilaat kokevat kirjallisen kielentämisen osana tehtävän ratkaisua. Tutkimuksella onnistuttiin saamaan vastaukset kaikkiin tutkimuskysymyksiin. Tutkimuksessa kerätty aineisto antaa kuvaa siitä, millainen on yläkouluikäisen oppilaan käsitys murtolukumerkinnästä. Kuten aikaisempien tutkimusten perusteella oletettiin, murtolukumerkinnän merkityksistä osa kokonaisuudesta -merkitys oli oppilaille huomattavasti tutuin. Oppilaat eivät juurikaan löytäneet murtolukumerkinnälle suhteen tai mitan merkityksiä, mikä oli myös oletettavissa aikaisempien tutkimusten ja oman kokemuksen perusteella. Murtolukutehtävän kirjallisessa kielentämisessä useimmiten käytetty kuviokielen malli oli pinta-alamalli, joka on myös koulumaailmassa eniten käytetty murtolukujen kuvaamiseen. Muita malleja ei juurikaan esiintynyt vastauksissa, mikä kertoo siitä, kuinka vähän muita malleja oppilaat ylipäänsä osaavat hyödyntää. Tuloksena tämä on harmillinen, sillä eri kuviokielen mallien avulla oppilaalla olisi välineet muidenkin murtolukumerkinnän merkitysten havainnollistamiseen. Tuntuu luontevammalta kuvata esimerkiksi suhdetta joukkomallin avulla pinta-alamallin sijaan. Useiden kuviokielen mallien käytön hallitseminen olisi hyödyllistä myös siksi, että kuten tämänkin tutkimus osoittaa, kuviokielen avulla selittämisestä voisi olla apua tehtävän oikein ratkaisussa.

Tutkimuksen tuloksia pohdittua on mielekästä miettiä, miten saatuja tuloksia tulee hyödynnettyä tulevana opettajana. Koska tutkimuksesta selvisi lisäksi, että oppilaat kokivat kirjallisen kielentämisen käytön tehtävän ratkaisussa yleisesti ottaen mukavana ja auttavan tehtävän ratkaisussa, voisi sitä hyödyntää enemmän matematiikan opiskelussa. Sen lisäksi, että luonnollisella kielellä oman ratkaisun selittämisellä on hyötynsä sekä oppilaalle että opettajalle, voisi eri kuviokielen mallien opettelu ja käyttö auttaa oppilaita myös eri murtolukumerkinnän merkitysten ymmärtämisessä. Esimerkiksi suhde voisi olla oppilaille helpompi ymmärtää, kun se esitettäisiin joukkomallin avulla. Koen, että oppikirjat ovat liian jumittuneet kuvaamaan murtolukuja perinteisten murtokakkujen avulla ja tutkimuksen tekeminen avasi silmäni myös muille vaihtoehdoille, joita tulen varmasti hyödyntämään työssäni opettajana. Uskon myös, että kielentäminen tulee omassa työssäni olemaan menetelmä, josta tulen pitämään kiinni. Esimerkiksi oppilaiden työskentely pareittain luokassa voi olla äärimmäisen hedelmällistä, kun oppilaat pääsevät suullisesti kielentämään omia ajatuksiaan toiselle ja toisaalta myös kuulemaan toisen oppilaan käsityksen opittavasta asiasta.

Tutkimuslomakkeen ollessa melko laaja, saatiin tutkimusaineistosta analysoitua monia asioita ja täten myös tutkimuskysymyksiä oli useita. Jälkikäteen mietittynä tutkimuksen olisi voinut rajata suppeammaksi esimerkiksi käsittelemään ainoastaan murtolukumerkinnän eri merkityksien hallintaa. Myös tutkimustehtävien kuvia olisi voinut harkita muokkaavan jollakin tapaa selkeämmäksi. Tutkimusta tehdessä pohdin myös ideoita jatkotutkimuksille. Olisi mielenkiintoista selvittää, miten oppilaat hyödyntäisivät eri kuviokielen malleja eri murtolukumerkinnän merkityksien kuvaamiseen, mikäli heille olisi etukäteen esitelty eri murtolukumerkinnän merkitykset sekä kuviokielen mallit. Lisäksi, koska tämän tutkimuksen tulokset olivat samansuuntaisia luokanopettajaopiskelijoille tehdyn tutkimuksen kanssa, olisi mielenkiintoista selvittää, millaisia tuloksia saataisiin matematiikan aineenopettajaopiskelijoilla. Koska matematiikan aineenopettajat ovat niitä, jotka jatkavat oppilaiden murtolukumerkinnän käsityksen muodostumista, olisi mielenkiintoista tietää, mitkä ovat heidän käsityksensä murtolukumerkinnän eri merkityksistä ja, kuinka ne eroavat luokanopettajien käsityksistä. Lisäksi koska oppilaat tunnistavat murtolukumerkinnälle vain osan sen merkityksistä, voisi kehitystutkimuksena luoda oppimateriaalin, jonka avulla pyrittäisiin vahvistamaan oppilaiden tietämystä muistakin murtolukumerkinnän merkityksistä.

LÄHTEET

[1] Bailey, D., Siegler, R. ja Geary, D. "Early predictors of middle school fraction knowledge". *Developmental science* 17.5 (2014), s. 775–785.

[2] Bereiter, C. *Education and mind in the knowledge age*. 1. painos. New York: Routledge, 2002.

[3] Doğan, A. ja Tertemiz, N.I. "Investigating Primary School Teachers' Knowledge towards Meanings of Fractions". *International Education Studies* 12.6 (2019). URL: https://doi.org/10.5539/ies.v12n6p56.

[4] Eskola, J. ja Suoranta, J. *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino, 1998.

[5] Haapasalo, L. "Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta". Teoksessa: *Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Koulutuksen tutkimuslaitos, 1998, s. 52–79.

[6] Hihnala, K. "Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen: peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä". *Jyväskylä studies in education, psychology and social research* 278 (2005). URL: https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/13329/9513922790.pdf?se.

[7] Joutsenlahti, J. "Kielentäminen matematiikan opiskelussa". Teoksessa: *Virta, A. & Marttila, O. (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium*. Vol. 7. 2003, s. 188–196.

[8] Joutsenlahti, J. "Matematiikan oppimateriaali ja oppilaan matemaattinen ajattelu". Teoksessa: *Polkuja tutkimukselliseen opettamiseen ja oppimiseen matemaattisissa aineissa*. 2006, s. 231–242.

[9] Joutsenlahti, J. ja Kulju, P. "Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä". Teoksessa: *Kaartinen T. (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa*. Tampere, 2015, s. 57–76.

[10] Joutsenlahti, J. ja Perkkilä, P. "Murtoluku vai suhde?" *FMSERA Journal* 4.1 (2021), s. 61–74. URL: https://journal.fi/fmsera/article/view/95634.

[11] Joutsenlahti, J. ja Perkkilä, P. "Sustainability Development in Mathematics Education—A Case Study of What Kind of Meanings Do Prospective Class Teachers Find for the Mathematical Symbol "$\frac{2}{3}$"?" *Sustainability* 11.2 (2019), s. 457. URL: https://doi.org/10.3390/su11020457.

[12] Joutsenlahti, J. ja Rättyä, K. "Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa". Teoksessa: *Kauppinen, M., Rautiainen, M. & Tarnanen, M. (toim.) Rajaton tulevai-*

suus: Kohti kokonaisvaltaista oppimista. 2015, s. 45–62. URL: https://core.ac.uk/download/pdf/33733355.pdf#page=48.

[13] Joutsenlahti, J. ja Tossavainen, T. ”Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa”. Teoksessa: *Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018.

[14] Joutsenlahti, J. et al. ”Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa”. Teoksessa: Jyväskylän yliopisto. 2013, s. 59–70. URL: https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/42264/1/ML_JKL2012_proc.pdf.

[15] Judson, T.W. ”Abstract Algebra, Theory and Applications” (2022).

[16] Julin, S ja Rautopuro, J. ”Läksyt tekijäänsä neuvovat. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9. vuosiluokalla 2015”. *Julkaisut* 20 (2015). URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/karvi_20161.pdf.

[17] Kilpatrick, J., Swafford, J. ja Findell, B. *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, D.C: National Academy Press, 2001.

[18] Kupari, P. ja Hiltunen, J. ”Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa”. Teoksessa: *Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti, 2018, s. 16–53.

[19] Kuula, A. *Tutkimusetiikka: aineistojen hankinta, käyttö ja säilytys. 2. uud. p.* Tampere: Vastapaino., 2011.

[20] Kärki, J. ja E., Lehtinen. ”Improving rational number knowledge using the NanoRoboMath digital game”. *Educational Studies in Mathematics* 110.1 (2022), s. 101–123. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-021-10120-6.

[21] Laine, T. ”Miten kokemusta voidaan tutkia? Fenomenologinen näkökulma.” Teoksessa: *Aaltola, J. & Valli, R. (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2 - näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin.* Jyväskylä: PS-Kustannus, 2018.

[22] Laitinen, M., Rantamäki, H. ja Joutsenlahti, J. ”Puhutko matematiikkaa?” Teoksessa: *Kaartinen, T. (toim.) Monilukutaito kaikki kaikessa*. Tampereen yliopiston normaalikoulu, 2015. URL: https://trepo.tuni.fi/handle/10024/98023.

[23] Lee, C. *Language for learning mathematics: assessment for learning in practice: Assessment for learning in practice*. Maidenhead: Open University Press, 2006.

[24] Lortie-Forgues, H., Tian, J. ja Siegler, R.S. ”Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?” *Developmental Review* 38 (2015), s. 201–221. URL: https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008.

[25] McMullen, J. et al. ”Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s)”. *Learning and Instruction* 37 (2015), s. 14–20. URL: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004.

[26] Merenluoto, K. ja Pehkonen, E. ”Luokanopettajiksi opiskelevien matemaattinen osaaminen ja ymmärtäminen”. Teoksessa: *Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen*

T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 2004, s. 414–436.

[27] Metsämuuronen, J. *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. Helsinki: International Methelp Ky, 2003.

[28] Morgan, C. "The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics". Teoksessa: *Gates, P. (toim.) Issues in mathematics teaching*. Taylor & Francis, 2002, s. 248–260.

[29] Moss, J. "Pipes, Tubes, and Beakers: New Approaches to Teaching the Rational-Number System". Teoksessa: *Bransford, J.D. & Donovan M.S. (toim.) How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the classroom*. Washington, DC: National Academic Press, 2005, s. 309–350.

[30] Mullis, I.V.S. et al. *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA u.a: TIMSS & PIRLS International Study Center u.a, 2012.

[31] Murdock-Stewart, V. "Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real world representations". The Florida State University, 2005. URL: https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:168517/datastream/PDF/view.

[32] Novita, R. et al. "Analyzing Second-Year University Students' Rational Number Understanding: A Case on Interpreting and Representing Fraction." *European Journal of Educational Research* 11.3 (2022), s. 1747–1762. URL: https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1747.

[33] Näveri, L. "Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana". Helsinki: Helsingin yliopisto, 2009.

[34] Opetushallitus. "Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 (4.p.). Määräykset ja ohjeet 2014:96." (2016). URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

[35] Rosen, Kenneth H. *Elementary number theory*. eng. Sixth edition, Pearson New International Edition. Harlow, England: Pearson Education Limited, 2014 - 2014. ISBN: 9781292055145.

[36] Sharma, R.K. *Algebra I : a basic course in abstract algebra*. eng. 1st edition. Always Learning. Place of publication not identified: Pearson Education India, 2011. ISBN: 93-325-1569-7.

[37] Shaughnessy, M.M. "Students' flexible use of multiple representations for rational number: Decimals, fractions, parts of area, and number lines". University of California, Berkeley, 2009.

[38] Tuomi, J. ja Sarajärvi, A. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Uudistettu laitos. Helsinki: Tammi, 2018.

[39] Tuominen, A. "Murtolukujen peruslaskutoimitusten sujuminen 7. luokan aikana". Teoksessa: *Pakula, H.-M., Kouki, E., Silfverberg, H. & Yli-Panula E. (toim.) Uu-*

distuva ja uusiutuva ainedidaktiikka. Vol. 11. 2016, s. 111–136. URL: https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/174336/AD11-v2.pdf?sequence=3&#page=112.

[40] Tutkimuseettinen neuvottelukunta. ”Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohje 2012.” (2013). URL: https://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf.

[41] Van de Walle, J.A., Karp, K.S. ja Bay-Williams, J.M. *Elementary and middle school mathematics: Teaching Developmentally, Eight edition*. Pearson, 2014.

[42] Vihervaara, Sami. ”Rationaaliluvun ja sen eri merkitysten hallinta yläkoulussa”. Tutkielma. Tampereen yliopisto, 2018. URL: https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/10024/104295/1537427475.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[43] Vygotski, L.S. *Ajattelu ja kieli*. Espoo: Weilin+ Göös, 1982.

LIITE A: TUTKIMUSLOMAKE

1

Nimikirjaimet ____________ Luokka-aste ☐ 7lk ☐ 8lk ☐ 9lk

Sukupuoli ☐ tyttö ☐ poika ☐ muu ☐ en halua kertoa

Rastita toinen vaihtoehdoista: Vastauksiani ☐ SAA KÄYTTÄÄ ☐ EI SAA KÄYTTÄÄ

tutkimukseen.

Tutkimuksessa vastauksia käsitellään anonyymisti ja hyvää tieteellistä tapaa noudattaen. Nimikirjaimet tarvitaan kyselyyn, jotta tehtävälomakkeet pystytään yhdistämään toisiinsa. Tutkimuksen tuloksista ei pysty tunnistamaan yksittäistä vastaajaa.

---

1. Mitä merkityksiä alla olevalla merkinnällä mielestäsi voisi olla? Voit kirjoittaa esimerkkilauseita, joissa käytät keksimiäsi erilaisia merkityksiä. Keksi mahdollisimman monta erilaista merkitystä ja kirjoita ne kuvan alla oleville numeroiduille riveille.

$$\frac{2}{3}$$

1. ____

____

____

2. ____

____

____

3. ____

____

____

4. ____

____

____

5. ____

____

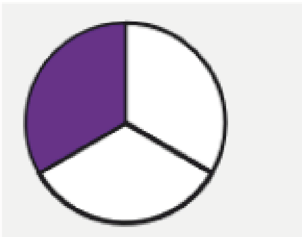
____

Nimikirjaimet ______________ Luokka-aste ☐7lk ☐8lk ☐9lk

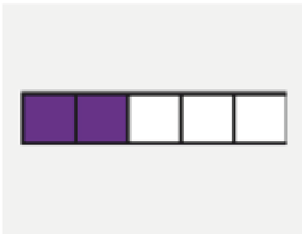
Arvosanani matematiikassa kevättodistuksessa _____

1. Kirjoita alla olevien kuvien viereen luonnollisella kielellä (suomeksi), millä tavoin kuviot mielestäsi kuvaavat matemaattista merkintää $\frac{2}{3}$.

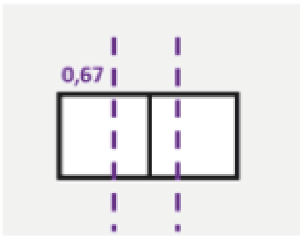
A.



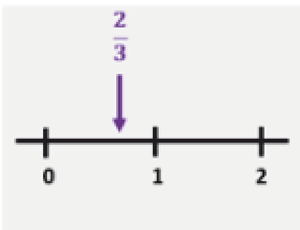
B.



C.



D.



3

2. Ratkaise tehtävät. Selitä lisäksi tehtävien ratkaisut omin sanoin **ja** piirrä tehtävien ratkaisuja havainnollistavat kuvat.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}:2$

4

c) 6 : 5

Loppukysely

Kiitos, että olit mukana!

Tämän kyselyn avulla kerään tietoa siitä, millaiseksi murtolukulaskut ja kirjallisen kielentämisen tehtävät koetaan.

Kiitos vastaamisesta huolellisesti!

Jenni Riutta

Rastita yksi vaihtoehto väittämää kohden.

 = täysin samaa mieltä

 = samaa mieltä

 = ei samaa, eikä eri mieltä

 = osittain eri mieltä

 = täysin eri mieltä

Väittämä					
1.Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni mukavaa.					
2.Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin oli mielestäni helppoa.					
3.Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli mielestäni mukavaa.					
4.Murtolukutehtävän selittäminen kuvan avulla oli mielestäni helppoa.					
5.Murtolukutehtävän selittäminen omin sanoin auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemisessa.					
6.Murtolukutehtävässä kuvan piirtäminen auttoi minua tehtävän ymmärtämisessä ja ratkaisemissa.					
7.Aion jatkossa hyödyntää omin sanoin selittämistä ja/tai kuvan piirtämistä tehtävän ratkaisussa.					

LIITE B: TUTKIMUSLUPALAPPU HUOLTAJILLE

Hei,

olen matematiikan aineenopettajaopiskelija Tampereen yliopistosta ja teen tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaa. Työssäni tutkin yläasteikäisten oppilaiden murtolukumerkinnän eri merkitysten hallintaa sekä mitä murtolukumerkinnän merkityksiä oppilaat hyödyntävät kirjallisen kielentämisen tehtävissä. Kirjallisella kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista luonnollisen kielen, matematiikan symbolikielen tai kuviokielen avulla.

Lokakuussa 2022 kerään ainestoa tutkimukseen lapsenne luokasta. Tarkoituksena on, että oppilaat tekevät suunnittelemani tehtävät sekä vastaavat tehtäviin liittyviin kysymyksiin.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista. Oppilaan nimeä tai koulua ei mainita tutkielmassa. Aineistoa hyödynnetään ainoastaan tässä tutkimuksessa ja sitä käsitellään luottamuksellisesti. Aineisto hävitetään tutkielman julkaisun jälkeen.

Pro gradu -tutkielmani ohjaajana toimii dosentti Jorma Joutsenlahti, (jorma.joutsenlahti@tuni.fi).

Toivon, että nuorenne saisi osallistua tutkimukseeni, ja pyydän teitä täyttämään oheisen lupalapun.

Mikäli tutkimuksesta herää kysyttävää, annan mielelläni lisätietoja.

Ystävällisin terveisin

Jenni Riutta

jenni.riutta@tuni.fi

____

Oppilaan nimi

saa osallistua tutkimukseen. ☐

ei saa osallistua tutkimukseen. ☐

____

Huoltajan allekirjoitus

LIITE C: SPSS TAULUKOT

Arvosana

Määrä	Mean	N	Std. Deviation
0	8,00	2	,000
1	8,46	13	,776
2	8,63	27	1,043
3	9,25	8	1,035
Total	8,66	50	,982

***Kuva C.1.** Murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrät oppilaan keskiarvoon verrattuna.*

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	12,368[a]	12	,417
Likelihood Ratio	15,416	12	,219
N of Valid Cases	50		

a. 17 cells (85,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,04.

***Kuva C.2.** Murtolukumerkinnälle löytyneiden merkitysten määrän ja arvosanan välinen riippuvuus*

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	20,423[a]	4	<,001
Likelihood Ratio	21,515	4	<,001
Linear-by-Linear Association	18,217	1	<,001
N of Valid Cases	62		

a. 1 cells (11,1%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,13.

Kuva C.3. Väittämien 1 ja 2 välinen riippuvuus

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	28,117[a]	4	<,001
Likelihood Ratio	29,378	4	<,001
Linear-by-Linear Association	21,597	1	<,001
N of Valid Cases	61		

a. 4 cells (44,4%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,95.

Kuva C.4. Väittämien 3 ja 4 välinen riippuvuus

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	17,943[a]	4	,001
Likelihood Ratio	18,403	4	,001
Linear-by-Linear Association	12,186	1	<,001
N of Valid Cases	62		

a. 4 cells (44,4%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3,35.

Kuva C.5. Väittämien 1 ja 3 välinen riippuvuus

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	33,920[a]	4	<,001
Likelihood Ratio	36,339	4	<,001
Linear-by-Linear Association	26,870	1	<,001
N of Valid Cases	61		

a. 2 cells (22,2%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 3,93.

Kuva C.6. *Väittämien 2 ja 4 välinen riippuvuus*

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymptotic Significance (2-sided)
Pearson Chi-Square	39,800[a]	4	<,001
Likelihood Ratio	43,718	4	<,001
Linear-by-Linear Association	32,355	1	<,001
N of Valid Cases	61		

a. 0 cells (0,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 5,61.

Kuva C.7. *Väittämien 5 ja 7 välinen riippuvuus*