Tampereen yliopisto

Aya Shibly

L'HOSPITALIN SÄÄNTÖ

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Toukokuu 2023

Tiivistelmä

Aya Shibly: L'Hospitalin sääntö
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Toukokuu 2023

Tässä tutkielmassa esitetään ja todistetaan L'Hospitalin sääntö tapauksissa $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$. Ensin tutustutaan L'Hospitalin säännön historiaan, minkä jälkeen syvennytään tarkemmin raja-arvon määräämättömään muotoon sekä itse L'Hospitalin sääntöön.

Luvussa 2 perehdytään Guillaume de L'Hôpitalin historiaan sekä siihen, kuinka L'Hospitalin sääntö sai alkunsa. Samalla kerrotaan myös lyhyesti L'Hôpitalin opettajasta, Johann Bernoullista, ja siitä, miksi hän on tärkeä osa L'Hospitalin säännön historiaa.

Luvussa 3 esitetään valmistelevia raja-arvojen tuloksia. Jotta L'Hospitalin säännön voi todistaa, on siihen käytettävä muun muassa Cauchyn väliarvolausetta sekä Rollen lausetta. Lisäksi esitetään osamääräfunktion raja-arvotulos, jota hyödynnetään väliarvolauseiden lisäksi luvussa 4.

L'Hospitalin sääntöön syvennytään tarkemmin luvussa 4. Aluksi tarkastellaan määräämätöntä muotoa, ja perehdytään siihen, mitä se käytännössä tarkoittaa, keskittymällä tarkemmin määräämättömään muotoon $\frac{0}{0}$. Alaluvussa 4.1 esitetään myös muita mahdollisia määräämättömiä muotoja. Ensiksi todistetaan, kuinka kahden samalla välillä määritellyn funktion osamäärän raja-arvo on olemassa, mikäli molemmat funktiot ovat derivoituvia. Seuraassa alaluvussa todistetaan L'Hospitalin sääntö määräämättömälle muodolle $\frac{0}{0}$. Tätä lausetta hyödynnetään alaluvun esimerkeissä.

Seuraavassa alaluvussa, 4.3, todistetaan L'Hospitalin sääntö määräämättömälle muodolle $\frac{\infty}{\infty}$. Tässä hyödynnetään jälleen Cauchyn väliarvolausetta. Todistuksen jälkeen käydään vielä läpi kaksi esimerkkiä, joista toisessa raja-arvo tuottaa määrämättömän muodon $\frac{\infty}{\infty}$ ja toisessa määräämättömän muodon 0^0.

Avainsanat: raja-arvo, derivaatta, funktio, määräämätön muoto, L’Hospitalin sääntö

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdymme määräämättömän muotoisiin raja-arvoihin, sekä L'Hospitalin sääntöön, joka auttaa kyseisenlaisten raja-arvojen ratkaisemisessa. Käytännössä, mikäli osamääräfunktion f/g osoittaja ja nimittäjä ovat derivoituvia ja osamääräfunktion raja-arvo on määräämätöntä muotoa, voimme silti saada sen selville derivoimalla funktiot f ja g erikseen.

Luvussa 2 tutustumme ensin Guillaume de L'Hôpitalin historiaan, sekä siihen, kuinka L'Hospitalin sääntö sai alkunsa. Tässä tekstissä käytämme nimeä L'Hôpital, kun puhumme itse matemaatikosta Guillaume de L'Hôpital. L'Hospitalilla viittaamme taas itse L'Hospitalin sääntöön. Tämä erottelu on tehty selkeyttääksemme lukijalle, kumpi on kyseessä. Lisäksi tutkielmassa käytetyissä lähteissä puhuttiin L'Hospitalin säännöstä, sekä matemaatikosta Guillaume de L'Hôpital vastaavasti.

Luvussa 3 esitämme esitietoina muun muassa Cauchyn väliarvolauseen sekä Rollen lauseen, joiden todistukset on tässä tutkielmassa sivuutettu. Näitä lauseita käytämme L'Hospitalin säännön todistamiseen. Itse L'Hospitalin sääntöön syvennymme luvussa 4. Ensin perehdymme määräämättömään muotoon, sekä siihen, onko sillä matemaattista merkitystä. Kun raja-arvo tuottaa tulokseksi määräämättömän muodon, esimerkiksi $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$, on raja-arvoa tarkasteltava tarkemmin. Tällöin saamme selvitettyä, onko raja-arvoa olemassa, ja mikä sen arvo tällöin on.

Alaluvussa 4.2 todistamme L'Hospitalin säännön määräämättömälle muodolle $\frac{0}{0}$. Se antaa meille keinon selvittää muotoa $\frac{0}{0}$ olevia raja-arvoja derivoimalla osamääräfunktion osoittajaa ja nimittäjää. Alaluvussa 4.3 todistamme L'Hospitalin säännön määräämättömälle muodolle $\frac{\infty}{\infty}$. Lisäksi tutkielmassa on annettu esimerkkejä raja-arvon laskemiseksi hyödyntäen L'Hospitalin sääntöä.

Tutkielman lukijan oletamme hallitsevan derivaatan ja raja-arvon laskusäännöt, sekä kurssin Analyysi A perusteet. Tutkielman päälähteenä käytämme Bartle & Sherbertin kirjaa Introduction to Real Analysis [1]. L'Hôpitalin historian lähteenä käytämme nettisivua MacTutor [4].

2 Historiaa

Guillaume François-Antoine Marquis de L'Hôpital syntyi Ranskassa, Pariisissa vuonna 1661. Hänen vanhempansa tulivat molemmat sotilaallisista taustoista, missä hänen isänsä, Anne-Alexandre de L'Hôpital oli kuninkaan armeijan kenraaliluutnantti. Hänen äitinsä, Elisabeth Babil, taas oli kuninkaan armeijan intendentin tytär ja itse valtionvaltuutettu. Guillaume de L'Hôpital seurasi vanhempiensa jalanjälkiä, ja toimi kapteenina ratsuväen rykmentissä, kunnes hän joutui luopumaan työstään likinäköisyytensä vuoksi. Lopulta hän palasi takaisin intohimonsa, matematiikan ja luonnontieteiden, pariin.

Kuva 2.1. Guillaume de L'Hôpital [6]

Vuonna 1691 L'Hôpital tapasi Johann Bernoullin. Bernoulli oli sveitsiläinen matemaatikko Baselista [1, s. 180], ja hän oli tullut Ranskaan pitämään luentoja Leibnizin differentiaalilaskennasta. L'Hôpital, joka näihin aikoihin oli yksi Ranskan pätevimpiä matemaatikoita, totesi voivansa oppia paljon Bernoullilta. Lopulta Bernoulli päätyikin pitämään luentoja L'Hôpitalille ja tämän kollegoille. Luennot jatkuivat neljästi viikossa puolen vuoden ajan, kunnes L'Hôpitalin täytyi muuttaa Pariisista Ouquesiin, jossa hän palkkasi Bernoullin pitämään hänelle yksityisiä oppitunteja. Marraskuussa 1692 Bernoulli palasi takaisin Baseliin, josta hän jatkoi L'Hôpitalin opettamista kirjeenvaihdoilla.

Kun Bernoulli vielä opetti L'Hôpitalia Ouquesissa vuonna 1692, L'Hôpital lähetti Florimand de Beaunelle ratkaisun tämän tehtävään. Kyseinen ratkaisu oli kuitenkin alun perin Bernaullin laatima, ja vaikka L'Hôpital ei asiasta erikseen maininnut mitään, oletti Beaune ratkaisun olevan L'Hôpitalin oma. L'Hôpital julkaisi kyseisen ratkaisun myöhemmin salanimellä, mistä Beronulli sai tietää vasta palattuaan takaisin Baseliin, eikä ollut lainkaan tyytyväinen. Hän katkaisi kirjeenvaihtonsa L'Hôpitalin kanssa, ja kyseinen tauko kesti noin puoli vuotta. Maaliskuussa 1694 L'Hôpital pyysi kuitenkin kirjeessään Bernoullia jatkamaan tämän oppitunteja ennakkopalkkioita vastaan, mihin Bernaulli lopulta suostui.

Vuonna 1696 L'Hôpital julkaisi kuuluisan teoksensa *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Teos oli ensimmäinen oppikirja, joka käsitteli differentiaalilaskentaa. Siitä tehtiin uusia versioita jopa vuoteen 1781 asti ja

Kuva 2.2. Johann Bernoulli [5]

se toimi mallina tulevien sukupolvien laskentaa käsitteleville kirjoille. Vaikka teosta ei julkaistu L'Hôpitalin nimellä, oli hänen henkilökuvansa kuitenkin kirjan etukappaleessa [1, s. 180]. Esipuheessa L'Hôpital mainitsi kiitollisuudenvelkansa Bernoullille, mutta esitti teoksen tulokset silti ominaan.

L'Hôpitalin teos sisälsi raja-arvoihin liittyvät lauseet, jotka myöhemmin tultiin tuntemaan L'Hospitalin sääntönä. Bernoullin mukaan kirjan sisältö oli pohjimmiltaan hänen kirjoittamansa, mutta hän ei maininnut asiasta ennen L'Hôpitalin kuolemaa (1704). Bernoullia ei kuitenkaan juurikaan uskottu, sillä L'Hôpital oli kunnioitettu ja suosittu matemaatikko, jonka puolelle moni hänen kollegoistaan päätyi.

Kuitenkin, vuonna 1921 nousi esiin kopio Bernoullin kurssimateriaaleista. Niistä selvisi, kuinka läheltä L'Hôpitalin teos seurasi materiaaleja ja kuinka riippuvainen teos oli Bernoullin opetuksesta. Bernoullin ja L'Hôpitalin väliset kirjeenvaihdot myös julkaistiin Saksassa vuonna 1955 [1, s. 180].

3 Valmistelevia tuloksia

Alla on valmistelevia tuloksia, joita tulemme tarvitsemaan L'Hospitalin säännön todistamisessa. Tässä luvussa lauseiden todistukset on sivuutettu, mutta ne löytyvät merkityistä lähteistä.

Rollen lause on hyödyllinen derivaatan ja raja-arvojen ymmärtämisessä.

Lause 3.1 (Rollen lause)**.** *Oletetaan, että f on jatkuva suljetulla välillä $I := [a, b]$, että on olemassa derivaatta f' avoimen välin $]a, b[$ jokaisessa pisteessä ja että $f(a) = f(b) = 0$. Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $c \in]a, b[$ siten, että $f'(c) = 0$.*

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [1, s. 172-173]. □

Tässä tutkielmassa on usein oletuksena, että käsittelemiimme raja-arvoihin liittyvät funktiot ovat derivoituvia. Käsitelläksemme raja-arvoja, joiden funktiot f ja g eivät ole derivoituvia pisteessä c, tarvitsemme yleisemmän version Cauchyn väliarvolauseesta [1, s.182].

Lause 3.2 (Cauchyn väliarvolause)**.** *Olkoot f ja g jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$, sekä derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$. Oletetaan myös, että $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tälllöin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [1, s. 182]. □

Alla oleva raja-arvolause osoittaa, kuinka osamääräfunktion raja-arvo käyttäytyy.

Lause 3.3. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, olkoot f ja g funktioita joukolta A joukkoon $\mathbb{R}$ ja olkoon $c \in \mathbb{R}$ joukon A kasautumispiste. Jos $g \colon A \to \mathbb{R}$, jos $g(x) \neq 0$ kaikille $x \in A$ ja jos $\lim_{x \to c} f = L$ ja $\lim_{x \to c} g = H \neq 0$, niin*

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{L}{H}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Ks. [1, s. 111-112]. □

4 L'Hospitalin sääntö

Luvussa 4 käsittelemme L'Hospitalin sääntöä. Ensin perehdymme raja-arvon määräämättömään muotoon, sillä se on koko L'Hospitalin säännön perusta. Tutustumme sen jälkeen raja-arvon ratkaisuun, ja todistamme L'Hospitalin säännön tapauksessa, jossa raja-arvo tuottaa määräämättömän muodon $\frac{0}{0}$. Tilannetta havainnollistamme esimerkkien avuin. Sen jälkeen tutustumme raja-arvoon, joka tuottaa määrämättömän muodon $\frac{\infty}{\infty}$, ja todistamme sitä vastaavan L'Hospitalin säännön. Lopuksi havainnollistamme tilannetta esimerkkien avuin. Luvun päälähteenä on käytetty Bartle & Sherbertin kirjaa Introduction to Real Analysis [1, s. 181–185].

4.1 Määräämätön muoto

Lauseessa 3.3 totesimme, että jos $A := \lim_{x\to c} f(x)$ ja $B := \lim_{x\to c} g(x)$ ja $B \neq 0$, niin

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Toisaalta, jos $B = 0$, niin vastausta ei annettu. Tilanne, missä $A = B = 0$, johtaa määräämättömään muottoon, jossa raja-arvon olemassaolo on mahdollinen, muttei taattu. Tämä riippuu tarkemmin funktioista f ja g. Yleisimmin tätä määräämätöntä muotoa merkitään muodolla $\frac{0}{0}$. Valitaan esimerkiksi mielivaltainen $\alpha \in \mathbb{R}$. Olkoot sitten $f(x) := \alpha x$ ja $g(x) := c$. Nyt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} = \lim_{x\to 0} \alpha = \alpha.$$

Siis määrämätön muoto voi johtaa mihin tahansa reaalilukuun α raja-arvona.

On kuitenkin tärkeä muistaa, että määräämättömät muodot, kuten aiemmin mainittu $\frac{0}{0}$, tai $\frac{\infty}{\infty}$, johon tutustumme myöhemmin, eivät osoita, onko raja-arvoa olemassa [3, s. 596]. Tutkitaan esimerkiksi seuraavia raja-arvoja:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} x+5 = 5+5 = 10,$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$$

ja

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-10x+5} = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5},$$

joka ei ole määritelty. Kaikki kolme raja-arvoa tuottavat määräämättömän muodon $\frac{0}{0}$, mutta eivät sisällä mitään muita yhtäläisyyksiä. Toisin sanoen, määräämätön muoto $\frac{0}{0}$ tarkoittaa sitä, että osoittaja ja nimittäjä lähestyvät nollaa [3, s. 596]. Jotta saisimme tarkempia tuloksia raja-arvosta, on sitä tutkittava erikseen lähemmin. Sama pätee myös määräämättömälle muodolle $\frac{\infty}{\infty}$. Muita määräämättömiä muotoja, joihin emme perehdy tässä tutkielmassa, ovat esimerkiksi $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 ja $\infty - \infty$.

Tässä tutkielmassa keskitymme erityisesti määräämättömiin muotoihin $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$. Muita muotoja voi käsitellä esimerkiksi muuttamalla ne ensin muotoon $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$, kuten teemme esimerkissä 4.4.

Lause 4.1. *Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ määriteltyjä funktioita ja olkoon $f(a) = g(a) = 0$. Olkoon myös $g(x) \neq 0$ aina, kun $a < x < b$. Jos f ja g ovat derivoituvia pisteessä a ja jos $g'(a) \neq 0$, niin on olemassa raja-arvo pisteessä a, jolle*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Todistus (vrt. [1, s. 181]). Koska $f(a) = g(a) = 0$, voidaan $f(x)/g(x)$, kun $a < x < b$, esittää seuraavalla tavalla:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)}{\left(\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}\right)}.$$

Lauseen 3.3 nojalla saadaan

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \qquad \square$$

On tärkeää, että raja-arvo esiintyy nimenomaan määräämättömässä muodossa, kuten $\frac{0}{0}$, jotta voimme hyödyntää lausetta 4.1. Valitaan esimerkiksi funktiot $f(x) := x^3 + 4x^2$ ja $g(x) := x^2 + x$. Nyt

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + x} = \frac{8 + 16}{4 + 2} = 4,$$

mutta

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 8x}{2x + 1} = \frac{12 + 16}{4 + 1} = \frac{28}{5} \neq 4.$$

4.2 L'Hospitalin sääntö tapauksessa $\frac{0}{0}$

Alla on todistettu ensimmäinen osa L'Hospitalin säännöstä. Selkeyden vuoksi tarkastelemme raja-arvoa, kun $x \to a+$, vaikka käytännössä vasemmalta tai molemmilta puolilta lähestyttäessä raja-arvot käsitellään täsmälleen samalla tavalla. Sääntö itse asiassa käsittää myös tapauksen, missä $a = -\infty$. Toisin kuin lauseessa 4.1, tässä lauseessa ei oleteta funktioiden olevan derivoituvia pisteessä a. Tulos osoittaa raja-arvon $f(x)/g(x)$ käyttäytyvän samoin kuin raja-arvon $f'(x)/g'(x)$, kun $x \to a+$, mukaanlukien tapauksen, missä raja-arvo on ääretön. Tärkeä oletus on, että funktiot f ja g lähestyvät nollaa, kun $x \to a+$.

Lause 4.2 (L'Hospitalin sääntö $\frac{0}{0}$)**.** *Olkoon $-\infty \le a < b \le \infty$ ja olkoot f ja g sellaisia derivoituvia funktioita välillä $]a, b[$, että $g'(x) \neq 0$ kaikille $x \in]a, b[$. Oletetaan, että*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+} g(x).$$

a) *Jos* $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$*, niin* $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

b) *Jos* $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$*, niin* $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Todistus (vrt. [1, s. 183–184]). Oletetaan, että $a < \alpha < \beta < b$. Koska $g'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin lauseen 3.1 mukaan $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Lisäksi lauseen 3.2 nojalla on olemassa $u \in]\alpha, \beta[$ siten, että

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{4.1}$$

Kohta (a): Oletetaan, että $\lim_{x \to a+} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}$ ja valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Nyt on olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että

$$L - \varepsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \varepsilon, \text{ kun } u \in]a, c[.$$

Tällöin yhtälöstä (4.1) seuraa, että

$$L - \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon, \text{ kun } a < \alpha < \beta \le c. \tag{4.2}$$

Jos valitsemme epäyhtälön (4.2) raja-arvoksi $\alpha \to a^+$, saamme

$$L - \varepsilon \le \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \le L + \varepsilon, \text{ kun } \beta \in]a, c].$$

Koska ε on mielivaltainen, niin väite pätee.

Kohta (b): Oletetaan, että $\lim_{x \to a+} f'(x)/g'(x) = L \in \{-\infty, \infty\}$ ja valitaan mielivaltainen $M > 0$. Nyt on olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} > M, \text{ kun } u \in]a, c[.$$

Tällöin yhtälöstä (4.1) seuraa, että

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M, \text{ kun } a < \alpha < \beta < c. \tag{4.3}$$

Jos valitsemme yhtälössä (4.3) raja-arvoksi $\alpha \to a^+$, saamme

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M, \text{ kun } \beta \in]a, c[.$$

Koska $M > 0$ on mielivaltainen, niin väite pätee. Mikäli $L = -\infty$, tehdään todistus vastaavalla tavalla. □

Vastaava lause vasemmanpuoleisille raja-arvoille todistetaan samalla tavalla. Lisäksi, jos molemmat toispuoleiset raja-arvot ovat samat, seuraa siitä myös molemminpuoleisen raja-arvon tulos.

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{x - 3}.$$

Funktiot $f(x) = \ln \frac{x}{3}$ ja $g(x) = x - 3$ ovat molemmat derivoituvia pisteessä $x = 3$. Lisäksi $g'(a) = 1 \neq 0$, joten lauseen 4.1 nojalla raja-arvo on olemassa. Koska

$$\lim_{x \to 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{x - 3},$$

tuottaa määräämättömän muodon $\frac{0}{0}$, voimme hyödyntää L'Hospitalin sääntöä. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{x - 3} &\overset{\text{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 3} \frac{\frac{d}{dx}(\ln \frac{x}{3})}{\frac{d}{dx}(x - 3)} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.2. (Vrt. [1, s. 184]) Tarkastellaan seuraavaksi raja-arvoa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Nyt nimittäjä ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$, joten emme voi hyödyntää lausetta 4.1. Funktiot $f(x) := \sin x$ ja $g(x) := \sqrt{x}$ ovat kuitenkin derivoituvia avoimella välillä $]0, \infty[$ ja molemmat lähestyvät nollaa, kun $x \to 0^+$. Lisäksi $g'(x) \neq 0$ avoimella välillä $]0, \infty[$, joten voimme hyödyntää L'Hospitalin sääntöä, ja raja-arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} &\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{x})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis lauseen 4.2 nojalla

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

4.3 L'Hospitalin sääntö tapauksessa $\frac{\infty}{\infty}$

Alla oleva lause on hyvin samankaltainen kuin lause 4.2. Erona on nyt nimittäjä, josta tässä tapauksessa tulee ääretön, kun $x \to a+$. Käsittelemme jälleen vain oikeanpuoleisia raja-arvoja. On kuitenkin myös mahdollista, että $a = -\infty$. Vasemman- ja molemminpuoleiset raja-arvot käsitellään vastaavasti.

Lause 4.3 (L'Hospitalin sääntö $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Olkoot $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ja olkoot f ja g sellaisia derivoituvia funktioita välillä $]a, b[$, että $g'(x) \neq 0$ kaikille $x \in]a, b[$. Oletetaan, että*

$$\lim_{x\to a+} g(x) = \infty.$$

a) *Jos* $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *niin* $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

b) *Jos* $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, *niin* $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Todistus (vrt. [1, s. 184-185]). Oletetaan, että

$$\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty.$$

Lauseen 3.1 nojalla $g(\beta) \neq g(\alpha)$, kun $\alpha, \beta \in]a, b[$ ja $\alpha < \beta$. Lisäksi, lauseen 3.2 mukaan yhtälö

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

pätee jollekin $u \in]a, b[$.

Kohta (a): Oletetaan, että $\lim_{x \to a+} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}$ ja valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Nyt on olemassa sellainen $c \in]a, b[$, että lauseen 4.2 todistuksen yhtälö (4.2) pätee, kun $a < \alpha < \beta \leq c$. Koska $g(x) \to \infty$, voimme myös olettaa, että $g(x) > 0$. Valitaan $\beta = c$, jolloin yhtälöstä (4.2) saadaan:

$$L - \varepsilon < \frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)} < L + \varepsilon, \text{ kun } \alpha \in]a, c[. \tag{4.4}$$

Koska $g(c)/g(\alpha) \to 0$, kun $\alpha \to a^+$, voimme olettaa, että $0 < g(c)/g(\alpha) < 1$ kaikilla $\alpha \in]a, c[$. Tästä seuraa, että

$$\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)} = 1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)} > 0, \text{ kun } \alpha \in]a, c[.$$

Jos yhtälö (4.4) kerrotaan lausekkeella $\dfrac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)} > 0$, saamme

$$(L-\varepsilon)\left(\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)}\right) < \left(\frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)}\right)\left(\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)}\right) < (L+\varepsilon)\left(\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)}\right).$$

Ensin voimme muuttaa osoittajan termin negatiiviseksi:

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) < \left(\frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)}\right)\left(\frac{-(g(c) - g(\alpha))}{g(\alpha)}\right) < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right).$$

Nyt osoittajan, ja nimittäjän termit kumoutuvat, ja saamme

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) < \left(\frac{f(c) - f(\alpha)}{1}\right)\left(\frac{-1}{g(\alpha)}\right) < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right).$$

Tämän jälkeen voimme kertoa termit keskenään, jolloin saamme

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) < \frac{f(\alpha) - f(c)}{g(\alpha)} < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right),$$

joka tuottaa lopulta epäyhtälön

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right). \tag{4.5}$$

Nyt, koska $g(c)/g(\alpha) \to 0$ ja $f(c)/g(\alpha) \to 0$, kun $\alpha \to a^+$, niin kaikille δ, kun $0 < \delta < 1$, on olemasssa sellainen $d \in]a, c[$, että $0 < g(c)/g(\alpha) < \delta$ ja $|f(c)|/g(\alpha) < \delta$ kaikille $\alpha \in]a, d[$. Tällöin yhtälöstä (4.5) voimme havaita, että

$$(L - \varepsilon)\underbrace{\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right)}_{>1-\delta} < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L + \varepsilon)\underbrace{\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right)}_{<1}.$$

Tällöin saamme seuraavan epäyhtälön

$$(L-\varepsilon)(1-\delta) < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L+\varepsilon),$$

missä $-\delta < \dfrac{f(c)}{g(\alpha)} < \delta$. Siis epäyhtälö (4.5) tuottaa lopuksi tuloksen

$$(L-\varepsilon)(1-\delta) - \delta < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (L+\varepsilon) + \delta. \tag{4.6}$$

Valitaan $\delta := \min\{1, \varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{|L|+1}\}$. Osoitamme seuraavaksi, että

$$L - 2\varepsilon \leq \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq L + 2\varepsilon.$$

Tarkastellaan ensin epäyhtälön (4.6) vasenta puolta ja oletetaan, että $\varepsilon < L$. Koska $L-\varepsilon > 0$ ja $1-\varepsilon > 0$ ja koska $\delta \leq \varepsilon/(|L|+1) \overset{L\geq 0}{=} \varepsilon/(L+1)$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} &\geq (L-\varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon}{L+1}\right) - \frac{\varepsilon}{L+1} \\
&= (L-\varepsilon) - (L-\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{L+1}\right) - \frac{\varepsilon}{L+1} \\
&= (L-\varepsilon) - (L-\varepsilon+1)\cdot\frac{\varepsilon}{L+1} \\
&= (L-\varepsilon) - (L+1)\cdot\frac{\varepsilon}{L+1} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{L+1}}_{>0} \\
&\geq L - \varepsilon - \varepsilon \\
&= L - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi epäyhtälön (4.6) oikeaa puolta. Koska $\delta < \varepsilon$, saamme tulokseksi

$$\begin{aligned}
\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} &< (L+\varepsilon) + \varepsilon \\
&= L + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis

$$L - 2\varepsilon \leq \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq L + 2\varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin väitteet pätevät. Tapaukset $L = 0$ ja $L < 0$ käsitellään vastaavalla tavalla.

Kohta (b): Oletetaan, että $\lim_{x\to a+} f'(x)/g'(x) = L \in \{-\infty, \infty\}$. Olkoon $M > 1$ mielivaltainen ja olkoon $c \in]a, b[$ sellainen, että $f'(u)g'(u) > M$ kaikille $u \in]a, c[$. Nyt

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M, \text{ kaikilla } a < \alpha < \beta \leq c. \tag{4.7}$$

Koska $g(x) \to \infty$, kun $x \to a^+$, voimme myös olettaa, että luvulle c pätee $g(c) > 0$, $|f(c)|/g(\alpha) < 1/2$ ja $0 < g(c)/g(\alpha) < 1/2$ kaikille $\alpha \in]a, c[$. Jos sijoitamme $\beta = c$ yhtälöön (4.7) ja kerromme sen lausekkeella $1 - g(c)/g(\alpha) > 1/2$, saamme

$$\frac{f(\alpha) - f(c)}{g(\alpha)} > M\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) > \frac{1}{2}M,$$

jolloin myös

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} > \frac{1}{2}M + \frac{f(c)}{g(\alpha)} > \frac{1}{2}(M-1), \text{ kun } \alpha \in]a, c[.$$

Koska $M > 1$ on mielivaltainen, seuraa siitä, että $\lim\limits_{a \to a^+} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \infty$. □

Esimerkki 4.3. ([2, s. 599 Harjoitustehtävä 14]) Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Funktiot $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ja $g(x) = x$ ovat molemmat derivoituvia kaikkialla. Lisäksi $g'(x) = 1 \neq 0$, joten lauseen 4.1 nojalla raja-arvo on olemassa. Koska raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

saa määräämättömän muodon $\frac{\infty}{\infty}$, voimme hyödyntää L'Hospitalin sääntöä. Siis lauseen 4.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\frac{d}{dx}(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.4. Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 0+} (e^x - 1)^{x^2}$$

Nyt raja-arvo saa määräämättömän muodon 0^0. Muutetaan raja-arvo ensin sellaiseen muotoon, että se saa määräämättömän muodon $\frac{-\infty}{\infty}$, jonka jälkeen voimme hyödyntää kahdesti L'Hospitalin sääntöä. Siis

$$\lim_{x \to 0+} (e^x - 1)^{x^2} = \lim_{x \to 0+} e^{\ln (e^x - 1)^{x^2}} = \lim_{x \to 0+} e^{x^2 \ln (e^x - 1)}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x^2 \ln (e^x - 1) &= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln (e^x - 1)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \left(= \frac{-\infty}{\infty}\right) \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0+} \frac{\left(\dfrac{e^x}{e^x - 1}\right)}{\left(\frac{2}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x \to 0+} -\frac{e^x \cdot x^3}{2e^x - 2} \left(= \frac{0}{0}\right) \\
&\overset{\mathrm{H}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0+} -\frac{e^x \cdot 3x^2}{2e^x} \\
&= -\frac{e^0 \cdot 3 \cdot 0^2}{2e^0} \\
&= -\frac{0}{2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

jolloin lauseen 4.3 nojalla

$$\lim_{x \to 0+} (e^x - 1)^{x^2} = \lim_{x \to 0+} e^{x^2 \ln (e^x - 1)} = e^0 = 1.$$

Lähteet

[1] Bartle, R., Sherbert, D. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. University of Illinois, Urbana Champaign, 2011.

[2] Salas, S. L., Hille, E. *Calculus: One and Several Variables*. Sixth edition. John Wiley & Sons Inc., 1990.

[3] Smith, R. T., Minton, R. B. *Calculus*. Second edition. The McGraw-Hill Companies, Inc., 2002.

[4] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. *MacTutor.* https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_LHopital/ , julkaistu joulukuussa 2008. Luettu 16.3.2023.

[5] *Picryl.* https://picryl.com/media/bernoulli-johann-337911 , luettu 31.3.2023.

[6] *Picryl.* https://picryl.com/media/guillaume-de-lhopital-2-c5862e , luettu 16.3.2023.