

# Dissertation

Indirekte modellprädiktive Regelung  
von Windenergieanlagen sowie  
deren energie-optimale und  
deren schädigungsarme Konfiguration

Colin Maximilian Schwarz

2023



# Indirekte modellprädiktive Regelung von Windenergieanlagen sowie deren energie-optimale und deren schädigungsarme Konfiguration

Der Fakultät Maschinenwesen

der

Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegte Dissertation

Dipl.-Math. Colin Maximilian Schwarz

1. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht
2. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Carsten Schulz (OTH Regensburg)
Tag der Einreichung:	27. Juni 2022
Tag der Verteidigung:	24. April 2023



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist in zwei aufeinander folgenden Abschnitten entstanden. In dem ersten Teil habe ich mich im Rahmen eines Stipendiums der Siemens AG mit der Methodik der indirekten modellprädiktiven Regelung von Windenergieanlagen beschäftigt. In dem darauf folgenden zweiten Teil habe ich den Einfluss der modellprädiktiven Regelung hinsichtlich der Betriebsfestigkeit des Triebstranges untersucht, welcher durch diese Form der Regelung überproportional beansprucht wird.

Meinem Doktorvater, Prof. Dr.-Ing. Carsten Schulz möchte ich an dieser Stelle ganz besonders für die herausragende Betreuung danken. Durch eine Vielzahl an Diskussionen und Gesprächen konnte ich so mein Verständnis für Regelung, die Notwendigkeit einer ganzheitlichen Systemanalyse und Methoden der Simulation und insbesondere der Betriebsfestigkeit ausbauen und festigen. In seiner stets sehr geschickten Art gab er mir den einen oder anderen Denkanstoß oder hat mich in meiner Vorgehensweise bekräftigt. Ganz besonders danken möchte ich ihm auch für die lehrreiche Zusammenarbeit in der Vorbereitung zur Veröffentlichung in einem international anerkanntem Fachjournal, durch welche ich meine Fähigkeiten ausbauen konnte ingenieurwissenschaftliche Inhalte entsprechend darstellen zu können.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht gilt ebenfalls ein ganz besonderer Dank für die Begutachtung der vorliegenden Arbeit und für die Möglichkeit, dass ich die Arbeit an meiner Dissertation unter seiner Leitung fortsetzen konnte. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Andrei Szabo für die Betreuung des ersten Teils der Arbeit im Rahmen eines Stipendiums der Siemens AG. Mein Dank geht auch an Anne Salbach für die außerordentlich gründliche Korrektur der Arbeit.

In einer ganz besonderen Weise dankbar bin ich meiner Frau Nelly Schwarz, die mir stets mit viel Verständnis und Unterstützung die für die vorliegende Arbeit notwendige Zeit zur Verfügung stellte. In gleicherweise möchte ich meiner gesamten Familie für die Unterstützung danken, die sie mir jederzeit zukommen hat lassen.

Ich möchte diese Arbeit meiner Frau Nelly und meinen beiden Kindern Elina Aurelia und Leon Alexander widmen.

Colin Schwarz, Bad Bentheim, den 28. April 2023



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen der modellprädiktiven Regelung</b>	<b>11</b>
2.1 Optimalsteuerung . . . . .	12
2.1.1 Historische Entwicklung . . . . .	12
2.1.2 Grundlagen und notwendige Bedingungen . . . . .	13
2.1.3 Singuläre Steuerung . . . . .	20
2.1.4 Optimalsteuerung mit regulärer Hamiltonfunktion . . . . .	26
2.2 Modellprädiktive Regelung . . . . .	28
2.2.1 Grundsätzliche Eigenschaften eines Regelsystems . . . . .	28
2.2.2 Konzept der modellprädiktiven Regelung . . . . .	32
2.2.3 Stabilität der modellprädiktiven Regelung . . . . .	34
<b>3 Grundlagen der Betriebsfestigkeitsrechnung</b>	<b>37</b>
3.1 Beanspruchung und Belastung von Bauteilen . . . . .	38
3.2 Die Wöhlerlinie . . . . .	39
3.3 Bestimmung eines mittelspannungsfreien Lastkollektivs aus einer Beanspruchungs-Zeit-Funktion . . . . .	41
3.4 Schädigungsfunktion und Schädigungssumme . . . . .	44
3.5 Der Auslastungsgrad $a_T$ nach FKM-Richtlinie . . . . .	46
3.6 Schädigungsäquivalente Last DEL . . . . .	48
<b>4 Indirekte modellprädiktive Regelung</b>	<b>51</b>
4.1 Direkte und indirekte Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen .	52
4.2 Das Mehrfach-Schießverfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen .	56
4.2.1 Einfach-Schießverfahren . . . . .	56
4.2.2 Sensitivitätsmatrizen . . . . .	57
4.2.3 Mehrfach-Schießverfahren . . . . .	59
4.3 Steuerungsbeschränkungen von Optimalsteuerungsproblemen mit regulärer Hamiltonfunktion . . . . .	60

4.4	Zustandsbeschränkungen von Optimalsteuerungsproblemen mit regulärer Hamiltonfunktion . . . . .	65
4.4.1	Physikalisch sinnvolle Relaxierung von Zustandsbeschränkungen . . . .	68
4.4.2	Bestimmung einer initialen Lösung . . . . .	70
4.4.3	Berechnung eines indirekten MPC-Schrittes . . . . .	72
4.4.4	Automatisiertes Auflösen von Strukturänderungen . . . . .	75
4.5	Grenzen der Anwendung indirekter modellprädiktiver Regelung . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Indirekte modellprädiktive Regelung von Windenergieanlagen</b>	<b>85</b>
5.1	Mehrkörpersimulations-Modell . . . . .	86
5.1.1	Allgemeines . . . . .	86
5.1.2	Mehrkörpersimulations-Modell der Windenergieanlage . . . . .	89
5.2	Ersatzmodell zur Bestimmung der Rotordrehzahl . . . . .	91
5.3	Problemstellung der modellprädiktiven Regelung einer Windenergieanlage . . .	97
5.3.1	Erste Problemstellung . . . . .	97
5.3.2	Relaxierung der Beschränkungen höherer Ordnung . . . . .	100
5.3.3	Regularisierung des Optimalsteuerungsproblems . . . . .	103
5.3.4	Vollständige Problemstellung und Diskussion des Optimalsteuerungsproblems . . . . .	107
5.4	Definition der Analyseszenarien . . . . .	115
5.5	Reine energie-optimale modellprädiktive Regelung . . . . .	119
5.6	Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges . . . . .	126
5.7	Konfiguration der modellprädiktiven Regelung für ein breites Spektrum an Betriebslasten . . . . .	133
5.7.1	Definition der beiden betrachteten Betriebskonfigurationen . . . . .	133
5.7.2	Wahl der Lastfälle zur Bestimmung der Konfigurationsparameter . . . .	134
5.7.3	Parametervariation . . . . .	137
5.7.4	Validierung der Betriebskonfigurationen . . . . .	140
5.8	Rechenzeitvergleich mit einem Ansatz der direkten Verfahren . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>



# Abkürzungsverzeichnis

**DGL** Differentialgleichung

**ESV** Einfach-Schießverfahren

**FEM** Finite Elemente Methode

**MKS** Mehrkörpersimulation

**MPC** Modellprädiktive Regelung

**MSV** Mehrfach-Schießverfahren

**OSP** Optimalsteuerungsproblem

**PDE** Partielle Differentialgleichung

**RWP** Randwertproblem

**WEA** Windenergieanlage



# Symbolverzeichnis

$\mathbf{0}$  Kennzeichnung eines Spaltenvektors, dessen Einträge alle 0 sind

$\mathbb{N}$  Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

$\mathbb{N}_0$  Menge der natürlichen Zahlen mit 0

$\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^+$  Menge der nicht negativen reellen Zahlen:  $\{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$

$\mathbb{C}$  Menge der komplexen Zahlen

$\mathcal{C}_k$  Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen

$\mathcal{L}^\infty$  Raum der wesentlich beschränkten Funktionen

$\mathcal{U}(x)$  Menge der zulässigen Werte für Steuerungsvariablen  $u$  in Abhängigkeit von  $x$

$\mathcal{X}$  Menge der zulässigen Werte für Zustandsvariablen  $x$

$t$  Unabhängige Variable – in der Regel die Zeit

$t_0$  Anfangszeitpunkt

$t_f$  Endzeitpunkt

$m$  Anzahl von Steuerungsvariablen

$u$  Steuerungsvariable, Vektor der Dimension  $m$

$u^*$  Steuerungsvariable als Lösung eines OSP, Vektor der Dimension  $m$

$n$  Anzahl von Zustandsvariablen

$n_{aus}$  Anzahl von Regelgrößen oder Ausgangsvariablen eines Zustandsraummodells

$x$  Zustandsvariable, Vektor der Dimension  $n$

$y$  Regelgröße oder Ausgangsvariable eines Zustandsraummodells, Vektor der Dimension  $n$

$\mathbf{x}^*$  Zustandsvariable als Lösung eines OSP, Vektor der Dimension  $n$

$\lambda$  Adjungierte Zustandsvariable, Vektor der Dimension  $n$

$f$  Rechte Seite eines autonomen dynamischen Systems, d.h.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

$\mathbf{k}$  Ausgangsfunktion eines nichtlinearen Zustandsraummodells, d.h.  $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

$\mathbf{b}$  Ungleichungsbedingung zum Endzeitpunkt  $t_f$  eines OSP

$p$  Anzahl von Steuerungsbeschränkungen

$\mathbf{g}$  Steuerungsbeschränkungen, Vektor der Dimension  $p$

$\mu_g$  Multiplikator zu den Steuerungsbeschränkungen, Vektor der Dimension  $p$

$q$  Anzahl von Zustandsbeschränkungen

$\mathbf{h}$  Zustandsbeschränkungen, Vektor der Dimension  $q$

$\mu_h$  Multiplikator zu den Zustandsbeschränkungen, Vektor der Dimension  $q$

$\mathcal{Q}_1$  Indexmenge der Zustandsbeschränkungen der Kategorie 1,  $\mathcal{Q}_1 \subset \{1, \dots, q\}$

$\mathcal{Q}_2$  Indexmenge der Zustandsbeschränkungen der Kategorie 2,  $\mathcal{Q}_2 = \{1, \dots, q\} \setminus \mathcal{Q}_1$

$Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  Optimalsteuerungsproblem zum Anfangswert  $\mathbf{x}_0$ , zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  und zum Endzeitpunkt  $t_f$

$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  Mit  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  assoziiertes Randwertproblem

$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})$  Hamiltonfunktion in  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda$  und  $\mathbf{u}$

$\mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, \mu_g, \mu_h)$  Erweiterte Hamiltonfunktion in  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mu_g$  und  $\mu_h$

$\mathcal{I}_g(t)$  Indexmenge der zum Zeitpunkt  $t$  aktiven Steuerungsbeschränkungen

$\mathcal{I}_{g,\alpha}(t)$  Indexmenge der zum Zeitpunkt  $t$  aktiven und fast aktiven Steuerungsbeschränkungen

$\mathcal{I}_h(t)$  Indexmenge der zum Zeitpunkt  $t$  aktiven Zustandsbeschränkungen

$\mathcal{T}_S$  Aufsteigend geordnete Menge aller Auf- und Absprungzeitpunkte von Zustandsbeschränkungen auf dem Intervall  $[t_0, t_f]$ . Zusammen mit  $\mathcal{I}_S$  definiert  $\mathcal{T}_S$  die Lösungsstruktur eines OSP

$\mathcal{I}_S$  Tensorprodukt von Indexmengen aller aktiven Zustandsbeschränkungen auf den Intervallen definiert durch  $\mathcal{T}_S$ . Zusammen mit  $\mathcal{T}_S$  definiert  $\mathcal{I}_S$  die Lösungsstruktur eines OSP

$\Gamma_h$  Länge des Regelintervalls einer modellprädiktiven Regelung

- $\mathcal{T}_h(\tau)$  Länge des Vorhersagehorizontes einer modellprädiktiven Regelung
- $\mathcal{D}$  Schädigungssumme
- $\mathcal{S}$  Schädigungsfunktion
- $DEL$  Schädigungsäquivalente Last - Damage equivalent load
- $T_{\text{aero}}$  Rotor-effektives aerodynamisches Drehmoment
- $C_P$  Aerodynamischer Leistungsbeiwert
- $V_{\mathbf{w}}$  Skalare rotor-effektive Windgeschwindigkeit,  $V_{\mathbf{w}} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$
- $\bar{V}_{\mathbf{w}}$  Mittlere Windgeschwindigkeit einer Lastfalldefinition
- $\mathbf{V}_{\mathbf{w},3D}$  Geschwindigkeitsfeld des einströmenden Windes,  $\mathbf{V}_{\mathbf{w},3D} : \mathbb{R}^2 \times [0, 660s] \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $M_{\text{gen}}$  Drehmoment des Generators
- $g_{\text{ratio}}$  Übersetzungsverhältnis des Getriebes



# 1 Einleitung und Motivation

Große Teile Europas erleben heute eine bisher unbekannte Form des Wohlstandes. Grundlegendste Bedürfnisse einer Gesellschaft wie beispielsweise das Verlangen nach einem langfristig gesicherten und vielfältigen Nahrungsmittelangebot, nach einer verlässlichen Rechtsordnung oder nach dem Zugang zu einer breiten Gesundheitsversorgung – um nur drei von vielen dieser Aspekte zu nennen – können heute von der Exekutive garantiert werden. Politische und gesellschaftliche Debatten finden vielmehr über deren gerechte Verteilung als über deren grundsätzliche Verfügbarkeit statt. Nicht zuletzt hat Forschung und Entwicklung in einem marktwirtschaftlichen Umfeld dazu beigetragen, dies in seiner jetzigen Form zu erreichen. Um diese Errungenschaften für die heutigen und die nachfolgenden Generationen zu sichern, gilt die Wende hin zu einer Energieversorgung, welche in weiten Teilen auf erneuerbaren Quellen basiert, als eine der größten Herausforderungen für mindestens die erste Hälfte des 21. Jahrhunderts.

Eine der wichtigsten und aus heutiger Sicht nahezu unerschöpflichen Energiequellen bildet dabei die Sonne. Ihre elektromagnetische Strahlung, welche aus der Kernfusion von Wasserstoff zu Helium Atomen resultiert, gilt als Grundvoraussetzung für Leben auf der Erde. Diese Quelle versucht sich der Mensch über verschiedene Wege wirtschaftlich nutzbar zu machen. Etwa 1 % der Sonnenenergie, welche täglich auf die Erde einstrahlt, wird in kinetische Energie der Atmosphäre – Wind – umgewandelt [1, S. 3]. Mit 27 % der im 1. Quartal 2019 in das deutsche Stromnetz eingespeisten 62 Milliarden kWh liegt die Windenergie mittlerweile auf dem zweiten Platz der wichtigsten Energieträger für die Stromerzeugung [2]. Zwischen 3,99 €-ct und 8,23 €-ct sind notwendig, um mittels *onshore*<sup>1</sup> installierter Windenergieanlagen (WEA) eine Kilowattstunde elektrischer Energie zu erzeugen, was Windenergie bereits zur zweitgünstigsten Stromerzeugungstechnologie in Deutschland macht [3]. Gleichzeitig sank die bei Auktionen erzielte Einspeisevergütung von durchschnittlich 9,2 €-ct/kWh im April 2015 auf 6,6 €-ct/kWh im Februar 2017 [4, S. 480]. Für das Jahr 2021 wird eine durchschnittliche Vergütung für Onshore-WEA von 8,8 €-ct/kWh nach EEG (Erneuerbare-Energien-Gesetz) prognostiziert [5]. In einem marktwirtschaftlichen Umfeld gilt es mittels neuer und bekannter Technologien, diese Entwicklung sowohl fortzuführen als auch nachhaltig zu sichern und so deren Effizienz weiter zu steigern.

---

<sup>1</sup>an Land

"Die Stromgestehungskosten [einer WEA] ergeben sich aus der Gegenüberstellung aller über die Lebensdauer der Anlage für die Errichtung und den Betrieb der Anlage anfallenden Kosten und der Summe der erzeugten Energiemenge über die Nutzungsdauer" [6, S. 31]. Diese Kosten können somit entweder durch eine erhöhte Energieausbeute oder durch geringere Betriebskosten gesenkt werden. Neben konstruktiven Maßnahmen lässt sich dies auch durch den Einsatz moderner Regelverfahren erreichen, welche bisher aufgrund ihrer Komplexität in der Berechnung eines Stellgrößensignals vorwiegend theoretische Relevanz hatten. Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete Verfahren ist der *modellprädiktiven Regelung* (MPC - engl. *model predictive control*) zuzuordnen. Es beschreibt ein Verfahren, welches die Berechnung der Stellgrößen – die *Steuerungen*  $\mathbf{u}(t)$  – auf ein mathematisches Modell  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  des zu regelnden Systems stützt. Bei bekanntem  $\mathbf{u}(t)$  kann die Systemdynamik vorhergesagt (lat. *prae-dicere* = *prophezeien*) werden. Muss von einer nichtlinearen Dynamik der Systemzustände  $x_i(t)$  für  $i = 1, \dots, n$  ausgegangen werden, beschränkt sich die Prädiktion aufgrund praktischer Rahmenbedingungen in aller Regel auf einen endlichen Zeithorizont  $t \in [t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$ . Die Stellgrößen  $u_j(t)$  für  $j = 1, \dots, m$  sind Funktionen der Zeit  $t$  und können innerhalb ihrer zulässigen Grenzen vollständig frei auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$  gewählt werden. Diese Wahl soll derart erfolgen, dass ein zuvor festgelegtes *Zielfunktional*  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  – häufig auch *Kostenfunktional* genannt – auf  $[t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$  minimiert wird [7, S. 2].  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  dient dementsprechend als skalares *Bewertungskriterium* für die Güte eines Stellgrößensignals  $\mathbf{u}(t)$ . Dabei ist  $\mathbf{u}(t)$  direkt als Lösung von  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  bestimmt und erfüllt somit mindestens notwendige Bedingungen erster Ordnung für eine Optimalität bzgl.  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann von einer Minimierung des Funktionals  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  ausgegangen werden. Gilt es  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  zu maximieren, wird entsprechend sein Negatives  $-\mathcal{J}(\mathbf{u})$  als Funktional herangezogen. In einem sich sequentiell wiederholenden Prozess wird in einer MPC die Lösung von  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  zum aktuellen Systemzustand bestimmt, auf das System in der Taktung des Reglers angewendet und  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  zum neuen Systemzustand erneut gelöst. Somit entsteht über den gemessenen oder geschätzten Systemzustand eine *Rückkopplungssteuerung*.

Die Steuerungen  $\mathbf{u}(t)$  sind Funktionen der Zeit und liegen damit zunächst in unendlich-dimensionalen Funktionenräumen. Jede für die numerische Lösung notwendige Diskretisierung ist damit eine Approximation an die tatsächliche Lösung. Probleme der Optimierung mit derartigen Unbekannten fallen in die Klasse der *Optimalsteuerung*, welche damit eine der Grundlagen der MPC darstellt, und werden *Optimalsteuerungsprobleme* (OSP) genannt. Für den praktischen Einsatz von MPC ist damit die effiziente Lösbarkeit dieser OSP essentielle Voraussetzung. Daher beschränken sich die im Rahmen einer MPC eingesetzten mathematischen Modelle zur Abschätzung der Systemdynamik in aller Regel auf wenige Freiheitsgrade und erfassen die dominanten dynamischen Systemcharakteristiken.

In der Literatur existieren zwei sich mitunter erheblich unterscheidende Ansätze zur Lösung von OSP: die *direkten* Verfahren und die *indirekten* Verfahren. Erstere sind derzeit in der Literatur vorherrschend und approximieren die Steuerungsfunktionen  $\mathbf{u}(t)$  für  $t \in [t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$



als stückweise konstante Funktionen. Dadurch wird das unendlich-dimensionale OSP in ein endlich-dimensionales Optimierungsproblem überführt [7, S. 4]. Die Anzahl der im Verfahren zu bestimmenden Unbekannten hängt damit von der Zahl der Steuerungsfunktionen  $m \in \mathbb{N}$  sowie von der Diskretisierungsschrittweite des Intervalls  $[t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$  ab. Um eine höhere Regularität für  $\mathbf{u}(t)$  zu erreichen, können weitere Interpolationsansätze mit einer endlichen Anzahl an Stützwerten herangezogen werden, beispielsweise stückweise lineare Interpolation [8, S. 32]. Letztendlich bedienen sich die direkten Verfahren verschiedener Ansatzfunktionen, die über zu bestimmende Parameter kombiniert die optimale Steuerung  $\mathbf{u}(t)$  als Lösung von  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  repräsentieren. Dem gegenüber stehen die indirekten Verfahren, welche auf dem *Pontryagin'schen Maximumsprinzip* beruhen [9]. Wie in Abschnitt 5.1 gezeigt wird, ist dieses eng verwandt mit den aus der klassischen Mechanik bekannten *Euler-Lagrange'schen* Gleichungen. Das Maximumsprinzip gibt Bedingungen an, welche jede Lösung<sup>2</sup>  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  eines OSP erfüllen muss, um als optimal zu gelten. Die wohl wichtigste dieser Bedingungen ist ein aus der Problemstellung abgeleitetes *Randwertproblem* (RWP) gewöhnlicher Differentialgleichungen (DGL). Zu jedem dynamischen Zustand  $x_i(t)$  entsteht dabei ein adjungierter Zustand  $\lambda_i(t)$ , dessen Dynamik ebenfalls über eine DGL bestimmt ist.

Wie in Abschnitt 2.1 diskutiert wird, lässt sich somit die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$ , unter gewissen Voraussetzungen an die Regularität der Problemstellung, aus  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  bestimmen. In anderen Worten, um  $\mathbf{u}^*(t)$  zu berechnen, genügt es  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  zu kennen<sup>3</sup>. Da die Funktionen  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  über die DGL zusammen mit ihren Anfangswerten  $\mathbf{x}(t_0)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$  festgelegt sind, sind  $\mathbf{x}(t_0)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$  die letztendlich zu bestimmenden Unbekannten bei Anwendung der indirekten Verfahren. Die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  wird nicht *direkt*, sondern *indirekt* über  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  bestimmt. Insbesondere ist es nicht notwendig, eine geeignete Wahl von Ansatzfunktionen zu identifizieren, um die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  zu beschreiben. Während  $\mathbf{x}(t_0)$  dem gemessenen oder geschätzten Systemzustand entspricht und damit grundsätzlich direkt bekannt ist, sind die Anfangswerte der adjungierten Zustände  $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$  unbekannt und müssen derart bestimmt werden, dass die Endbedingungen des RWP erfüllt sind. In anderen Worten, die adjungierten Zustände  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  sind nicht über ihre Werte zum Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  bestimmt, sondern durch ihre Sollwerte zum Endzeitpunkt  $t = t_f$ , und stehen damit im Gegensatz zu den Systemzuständen  $\mathbf{x}(t)$ .

Damit hängt die Anzahl der Unbekannten nicht von der Anzahl der Steuerungen und deren Diskretisierung – wie im Fall der direkten Verfahren – ab, sondern lediglich von der Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  der dynamischen Zustände  $\mathbf{x}(t)$ . Des Weiteren bleibt im Fall der indirekten Verfahren die Stetigkeit der optimalen Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  erhalten, falls auch die tatsächliche Lösung stetig ist. Bei der obigen Diskussion wurde implizit eine gewisse Regularität des OSP zugrunde gelegt,

<sup>2</sup>Im weiteren Verlauf wird die optimale Lösung  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  von  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  mit dem Symbol \* gekennzeichnet. Dies erleichtert eine klare Unterscheidung zwischen der eigentlichen, optimalen Lösung und einer allgemeinen Systemdynamik  $\mathbf{x}(t)$ , welche durch die Anwendung eines beliebigen Stellgrößensignals  $\mathbf{u}(t)$  entsteht.

<sup>3</sup>Alle adjungierten  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  sind grundsätzlich mit einer Lösung  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  assoziiert. Im weiteren Verlauf wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine Kennzeichnung der Adjungierten mit dem Symbol \* verzichtet.

welche sich in der Regel aus der praktischen Anwendbarkeit ableitet, vgl. Abschnitt 5.3.3. Eine genauere Gegenüberstellung der direkten und indirekten Verfahren wird in Abschnitt 5.8 diskutiert. Zu keinem Zeitpunkt kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Aussage darüber getroffen werden, welches Verfahren im Allgemeinen vorzuziehen ist. Beide weisen jeweils charakteristische Vor- und Nachteile auf, auf die in dem genannten Abschnitt möglichst objektiv eingegangen werden soll.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit kommen – aufgrund ihrer Effizienz – die indirekten Verfahren zum Einsatz. Sie erlauben es, im Mittel innerhalb von 7,5 ms ein Stellgrößensignal für die Regelung der WEA zur Verfügung zu stellen. In Abschnitt 5.8 wird dieser Rechenzeitbedarf mit Publikationen aus dem Gebiet der direkten MPC für WEA verglichen. Zwar ist vorwiegend aus der Luft- und Raumfahrt bereits bekannt, dass mittels indirekter Verfahren OSP hocheffizient gelöst werden können, jedoch setzt dies die Kenntnis einer Lösungsstruktur voraus [10], was eine erhebliche Beeinträchtigung der Anwendbarkeit im Rahmen einer MPC darstellt. Diese Lösungsstruktur beschreibt die Reihenfolge, mit der Beschränkungen der Form  $h(x^*(t)) \leq 0$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$  aktiv bzw. inaktiv werden. Sie werden *Zustandsbeschränkungen* genannt, da sie explizit nur von Zustandsvariablen  $x(t)$  abhängen. Beispiele aus dem Bereich der WEA sind – unter anderem – die Beschränkung der Drehzahl auf ein Maximum oder des Anstellwinkels auf ein Minimum. Diese Variablen  $x(t)$  sind gleichzeitig einer Dynamik  $\dot{x} = f(x, u)$  unterworfen, die jederzeit gültig sein muss. Dadurch hängt die optimale Steuerung  $u^*(t)$  im Lösungsverlauf bereits auch von zukünftigen Ereignissen wie der Aktivierung bzw. Inaktivierung solcher Zustandsbeschränkungen ab. Dem Lösungsverfahren wird diese Information in Form der Lösungsstruktur zur Verfügung gestellt [11]. Die Punkte, an denen Zustandsbeschränkungen aktiv werden, bezeichnet man als *Aufsprungpunkte*. Dementsprechend werden mit *Absprungpunkten* Zeitpunkte bezeichnet, an welchen eine Beschränkung inaktiv wird. Beide liegen im Inneren des Zeithorizontes  $[t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$  und sind durch *innere Punktbedingungen* als zusätzliche Randbedingungen des RWP gewöhnlicher DGL festgelegt. Die vollständige, allgemeine Form dieser Bedingungen ist bis heute Gegenstand aktueller Forschung, wobei verschiedene Ansätze existieren [12]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden nur Probleme mit einer zuvor festgelegten Regularität betrachtet, für die diese Bedingungen vollständig aufgestellt werden können [13].

Indirekte Verfahren konnten bereits erfolgreich zur Regelung praktischer Probleme eingesetzt werden. So kann mittels des *neighboring optimal feedback control* (engl. *gestörte optimale Rückkopplungssteuerung*) ein Stellgrößensignal hocheffizient bestimmt werden. Beispielsweise wird damit ein Kran zur Verladung von Containern derart gesteuert, dass der Winkel zwischen Laufkatze und angehobenem Gut möglichst klein bleibt, wobei Zustandsbeschränkungen an Vertikalgeschwindigkeiten zu berücksichtigen sind [14]. Auch lassen sich diese Methoden auf Probleme mit *singulärer Steuerung* erweitern [15][16]. Unter *singulärer Steuerung* wird ein Phänomen verstanden, in dem einige der notwendigen Bedingungen für ein Optimum bereits trivialerweise erfüllt sind, womit diese nicht zur Bestimmung einer optima-

---

len Steuerung herangezogen werden können [17, S. 3]. Da dieses Phänomen bei der MPC einer WEA bzw. in der Lösung des zugrundeliegenden OSP berücksichtigt werden muss, wird in Abschnitt 2.1.3 genauer darauf eingegangen. In der Literatur finden sich weitere Anwendungen, in denen beispielsweise der Anflug von Flugzeugen an Flughäfen gesteuert wird [18], die Spannung einer Tunnelodiode [19] oder die Flugbahn von Raumsonden [20]. Zusätzliche Beispiele finden sich in [21] und [22]. Bei dem Verfahren des neighboring optimal feedback control wird mittels klassischer indirekter Verfahren einmalig a-priori eine nominelle Lösung des OSP auf dem gesamten Betriebszeitraum berechnet. Die Kenntnis einer bereits gültigen Lösungsstruktur wird damit vorausgesetzt. Im Einsatz wird jede Abweichung von dieser nominellen Lösung als Störung betrachtet. Kann davon ausgegangen werden, dass die Lösungsstruktur sich durch diese Störung nicht ändert – d.h. es treten weder neue Auf- bzw. Absprungpunkte auf, noch verschwinden diese – so kann mittels Linearisierung eine der nominellen Lösung benachbarte Lösung hocheffizient bestimmt werden. Wie im Fall der MPC für WEA ersichtlich wird, kommt es bei der Regelung regelmäßig zu Änderungen der Lösungsstruktur. Das Generatormoment und der Anstellwinkel erreichen fortlaufend ihre Maximal- bzw. Minimalwerte und verlassen diese auch wieder, was den Einsatz des neighboring optimal feedback control ausschließt. Um von der Effizienz und Genauigkeit indirekter Verfahren innerhalb einer MPC für WEA profitieren zu können, muss damit die Lösungsstruktur automatisch bestimmt werden. Auf Basis von Verletzungen der Beschränkungen oder der notwendigen Bedingungen können Änderungen der Struktur erfasst und aufgelöst werden. Wie dies effizient bewerkstelligt werden kann, wird in dem ersten der beiden maßgeblichen Teile der vorliegenden Arbeit in Kapitel 4 beschrieben.

Eine weitere Möglichkeit die Effizienz von WEA zu steigern, sind immer größer werdende Rotordurchmesser und Turmhöhen. Damit einher gehen folglich immer schwerere Turmkopfgewichte, was zu einer erhöhten Turmschwingungssensitivität führt. Daher bestehen Bestrebungen, mechanische Schwingungstilger in WEA einzusetzen [4, S. 480]. Ein ähnliches Ziel wird regelungstechnisch mittels MPC verfolgt. Dazu muss jedoch die auf die Anlage einströmende Windgeschwindigkeit gemessen und dem Regler zur Verfügung gestellt werden. In der Praxis kann dies beispielsweise mittels LIDAR (engl. *light detection and ranging*) erreicht werden. So wird in [23] mittels LIDAR ein Ansatz für MPC von WEA vorgestellt, in dem die *schädigungsäquivalente Last* der Turm-Vor-Zurück-Schwingung – ein Kennwert, um verschiedene Belastungen auf ihre schädigende Wirkung hin zu vergleichen – um etwa 30 % gegenüber einer konventionellen Regelung reduziert werden kann. Die Beanspruchung des Triebstranges und die Energieausbeute bleiben dabei auf vergleichbarem Niveau. Als Zielfunktional wurde jedoch nicht auf die tatsächliche Energieausbeute, sondern auf die quadratische Abweichung zu einer zuvor berechneten Solldrehzahl zurückgegriffen, welche auch im Rahmen einer konventionellen Regelung herangezogen wird.

Eines der dabei nach wie vor nicht vollständig gelösten Probleme ist die Echtzeitfähigkeit einer MPC für WEA, welche aufgrund der nichtlinearen Modelle und der Komplexität in der Lösung der OSP schwierig zu erreichen ist. In [24] wird ein Ansatz auf Basis direkter Verfahren präsentiert, welcher auf einer 2,66 GHz CPU bei einer MPC-Schrittweite von 200 ms ca. 30 ms bis 100 ms benötigt, um die Lösung eines OSP zu bestimmen. Dabei wurde das Regelsignal jedoch nicht auf ein Modell angewendet, welches die Systemdynamik einer WEA detailliert erfasst, sondern auf das Modell, auf Basis dessen die Prädiktion der Systemdynamik in jeden MPC-Schritt stattgefunden hat. In einer MPC kommen in aller Regel reduzierte mathematische Modelle mit wenigen Freiheitsgraden zum Einsatz, damit die entsprechenden OSP möglichst effizient gelöst werden können. Somit ist mit einer nicht zu vernachlässigenden Abweichung zwischen tatsächlicher und mittels MPC prädizierter Systemdynamik zu rechnen, was somit aller Voraussicht nach auch Rückwirkung auf die Resultate und Rechengeschwindigkeiten hat. Mittels B-Spline Interpolation der Daten, über welche das nichtlineare effektive aerodynamische Rotormoment im Rahmen der mathematischen Modelle bestimmt wird, kann die Rechenzeit zur Bestimmung einer Lösung auf 35 ms reduziert werden [25, S. 939]. Auch hier wurde das berechnete Signal auf das gleiche Modell, welches auch zur Prädiktion verwendet wurde, appliziert. Damit ist mit hochgenauen Vorhersagen der Zustandsvariablen zu rechnen, was ein iteratives Optimierungsverfahren mittels guter Startwerte dementsprechend begünstigt. Insbesondere bleiben damit jedoch Ungenauigkeiten in der Erfassung der Systemdynamik durch das vereinfachte mathematische Modell genauso unberücksichtigt, wie Messtoleranzen innerhalb der Schätzung des Systemzustandes.

Einer der essentiellen Faktoren einer effizienten MPC für WEA ist die Wahl des reduzierten mathematischen Modells zur Erfassung des effektiven aerodynamischen Rotormomentes. Dieses wird auf Basis von Kennfeldern des *aerodynamischen Leistungsbeiwertes*  $C_P$  bestimmt, welche als dimensionslose Größe die Leistung, die im quasi-stationären Fall die Rotorscheibe passiert, in das Verhältnis zur extrahierten Leistung stellt [26, S. 98 ff.]. Diese Kurven sind typischerweise abhängig vom Anstellwinkel  $\beta$  der Rotorblätter und der *Schnelllaufzahl*  $\zeta$ . Sie ist das Verhältnis aus der Tangentialgeschwindigkeit der Rotorblattspitzen, welche sich aus dem Rotorradius  $R$  und der Rotordrehzahl  $\omega$  berechnen lässt, zur Windgeschwindigkeit  $V_W$ . Letztere ist im quasi-stationären Fall über die gesamte Rotorfläche als konstant anzusehen. Damit gilt  $\zeta = \frac{R\omega}{V_W}$ . Ein typischer Verlauf von  $C_P$  über  $\zeta$  ist in Abbildung 5.4 (Seite 96) dargestellt. Da  $\zeta$  sich nicht nur aus der Rotordrehzahl  $\omega$ , sondern auch aus der Windgeschwindigkeit  $V_W$  berechnet, muss für die Berechnung der Stützwerte des Kennfeldes für  $C_P(\zeta, \beta)$  eine konstante Windgeschwindigkeit angenommen werden. Dann verhält sich  $\zeta$  proportional zu  $\omega$ . Für die Regelung einer WEA ist der Maximalwert von  $C_P(\zeta, \beta)$  von zentraler Bedeutung, da in diesem Betriebsbereich die höchstmögliche Energieausbeute stattfindet. Wie in Abschnitt 5.2 diskutiert wird, variiert dieser Maximalwert für  $C_P(\zeta, \beta)$  für die im Rahmen der Arbeit betrachtete WEA um bis zu 6,3% in der Effizienz der Energieausbeute, je nachdem welche Windgeschwindigkeit der Berechnung von  $\zeta$  zu Grunde gelegt wird. Das zweidimensionale Kennfeld  $C_P(\zeta, \beta)$  reicht dementsprechend nicht aus, um

---

die Systemdynamik ausreichend zu erfassen, um gleichzeitig die Energieausbeute und die Schädigung der Triebstrangkomponenten berücksichtigen zu können. In Abschnitt 5.2 wird daher ein dreidimensionales Kennfeld  $C_P(\omega, V_W, \beta)$  vorgestellt, welches sich mittels *Spektralmethoden* hocheffizient und unter Vermeidung des für Interpolationen typischen Schwingungsphänomens nach Runge auswerten lässt [27]. In den oben angegebenen Referenzen wurde grundsätzlich  $C_P(\zeta, \beta)$  verwendet, was ebenfalls die Rechenzeit begünstigt.

Im Unterschied zu Standardreglern, muss einer MPC nicht zwingend ein a-priori berechnetes Referenzsignal zur Verfügung gestellt werden, zu dem es den quadratischen Abstand zu minimieren gilt. Während in einigen praktischen Anwendungen ein solches Referenzsignal Ziel der Regelung ist, z. B. das Halten von Sollgeschwindigkeiten in Fahrzeugen, so dürfen sich die Rotordrehzahl und weitere Zustands- und Stellgrößen einer WEA zunächst frei in ihren zulässigen Grenzen bewegen. Überlässt man der MPC die Wahl der Rotordrehzahl unter Berücksichtigung aller von außen vorgegebenen Beschränkungen und verlangt zunächst nur die Maximierung der Energieausbeute als Integral über die elektrische Leistung auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_0 + \mathcal{T}_h]$ , lässt diese sich je nach Lastfall um 1 % bis 1,5 % steigern, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.5. In [28] wird ein ähnlicher Ansatz verwendet, wobei auch hier wieder kein separates, komplexes Modell einer Mehrkörpersimulation (MKS) zum Einsatz kommt, welches die tatsächliche Dynamik der WEA hinreichend genau abbilden kann. In [29] wird diskutiert, wie sich ein reduziertes Modell für eine MPC von WEA aus einem komplexeren Tool zur Simulation von WEA ableitet. Eine MPC schwimmender WEA findet sich in [30].

Wie bereits erwähnt, kann die Energieausbeute deutlich gesteigert werden, falls eine MPC auf Basis einer direkten Maximierung der elektrischen Energie formuliert wird, anstatt auf Basis des Abstandsquadrat zu Referenzdrehzahlen. Eine der wesentlichen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit ist, dass es dabei zu einer drastischen Erhöhung der *Schädigungssumme* des Triebstranges um bis zu 300 % kommt. Diese Summe stellt erlittene Beanspruchungen in das Verhältnis zu ertragbaren Beanspruchungen zu verschiedenen Amplituden und erlaubt eine Abschätzung der Schädigung [31, S. 272], vgl. Abschnitt 3.4. Um derartige Wirkungen auf den Triebstrang einer WEA analysieren zu können, ist ein entsprechendes Modell mit einer gewissen Detailgüte notwendig [32], [33, S. 2]. Daher wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf ein Modell der 5 MW Referenzanlage von NREL<sup>4</sup> zurückgegriffen. Abgebildet als Modell einer MKS in der Software SIMULIA Simpack<sup>5</sup>, erlaubt es, die Triebstrangschädigungen durch verschiedene Regelsysteme untereinander zu vergleichen. Dazu wurde das Simpack-Modell der 5 MW Referenzanlage am Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion der Technischen Universität Dresden um einen entsprechenden Triebstrang erweitert. Die oben erwähnte, deutlich erhöhte Beanspruchung des Triebstranges kann auf die Charakteristik einer MPC zurückgeführt werden, welche rein darauf zielt, die Energieausbeute zu steigern. Im Gegensatz zur konventionellen Regelung, in der über die Trägheit des

---

<sup>4</sup>National Renewable Energy Laboratory

<sup>5</sup><https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/simpack/> - Zugriff am 3.10.2019

Rotors eine Art Tiefpass-Filterung von Schwankungen der Geschwindigkeit stattfindet, nutzt MPC das Generatormoment, um aktiv die Rotordrehzahl im optimalen Wirkungsbereich zu halten, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.5. Die dadurch verringerte Lebensdauer des Triebstranges muss wirtschaftlich dem Zugewinn an Energieausbeute gegenübergestellt werden. Andernfalls ist der Einsatz einer *reinen energie-optimalen* MPC für WEA nicht wettbewerbsfähig.

Diskutiert wird daher in Abschnitt 5.6 die Frage, wie die Triebstrangschädigung im Rahmen einer MPC beschränkt werden kann. Zu deren Bewertung werden zwei gängige Kenngrößen herangezogen. Zum einen kommt die oben erwähnte *Schädigungssumme*  $\mathcal{D}$  zum Einsatz. Zum anderen hat sich speziell in der Windindustrie zusätzlich das Konzept der *schädigungsäquivalenten Last* *DEL* durchgesetzt. Während  $\mathcal{D}$  auf mechanischen Nennspannungen beruht und somit auch konstruktionsbedingte Einflussfaktoren berücksichtigt, wird bei der Auswertung einer *DEL* rein auf Belastungs-Zeit-Signale zurückgegriffen. Dadurch kann keine absolute, jedoch eine vergleichende Aussage über das Schädigungspotential einer Belastung aus verschiedenen Regelansätzen gewonnen werden. Beide Konzepte werden genauer in Kapitel 3 vorgestellt.

Als Ursache für die Schädigung des Triebstranges können zwei Faktoren unterschieden werden. Auf der einen Seite stehen verhältnismäßig kleine Amplituden mit hohen Schwingungszahlen, auf der anderen Seite sehr hohe Amplituden mit einer kleinen Zahl an Wiederholungen. Erstere können beispielsweise entstehen, wenn Torsions-Eigenschwingungen des Triebstranges durch die Belastung angeregt werden. Mittels linear-quadratischer Zustandsregelung lässt sich deren Häufigkeit und somit deren Schädigung in Schaufelradantrieben reduzieren [34, S. 133 ff.]. Aufgrund kurzzeitig auffrischender und abflauender Winde entstehen im Belastungs-Zeit-Signal des Triebstranges einer WEA jedoch regelmäßig auch verhältnismäßig große Amplituden mit kleinen Schwingungszahlen. Da dies auf Zeitfenstern von über 60 s passiert, können diese mittels einer praxisnahen prädiktiven Regelung nicht erfasst werden. Für eine MPC von WEA liegen typische, verlässliche Vorhersagezeiträume bei 10 s bis 15 s. Daher haben die zur Berücksichtigung der Schädigung in Abschnitt 5.6 hergeleiteten Bedingungen vorwiegend rückblickenden als prädiktiven Charakter. Die maximale Amplitude des Generatormomentes wird abgeschätzt und beschränkt, womit letztendlich eine Konfiguration der MPC gefunden werden kann, die es erlaubt, die Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  auf dem Niveau einer konventionellen Regelung zu halten. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird dann von einer *schädigungs-neutralen* MPC gesprochen. Dennoch wird nach wie vor eine Steigerung der Energieausbeute um 0,5 % bis 1,0 % erreicht.

Gegenüber der konventionellen Regelung entsteht somit ein Spielraum. Kann eine erhöhte Schädigung des Triebstranges in Kauf genommen werden, ist eine Steigerung der Energieausbeute unter Anwendung einer rein energie-optimalen MPC möglich. Ist der Triebstrang jedoch bereits derart konstruiert, dass er unter Berücksichtigung von Sicherheiten mit dem Laufzeitende auch seine Lebensdauer erreicht hat, kann eine MPC auch dementsprechend

---

schädigungs-neutral konfiguriert werden. Einen nicht zu vernachlässigenden Anteil der Kosten am Betrieb einer WEA stellt die Wartung dar [32, S. 189]. Da die Schädigung in der oben erwähnten, schädigungs-neutralen MPC-Konfiguration beschränkt werden konnte und es nach wie vor zu einer Steigerung der Energieausbeute kommt, stellt sich ingenieurwissenschaftlich die Frage, ob die Lebensdauer des Triebstranges durch den Einsatz einer MPC verlängert werden kann, falls auf eine Steigerung der Energieausbeute verzichtet wird. In einer dritten Konfiguration wird auf diese Weise die Schädigungssumme um 30 % bis 40 % reduziert, wobei nach wie vor eine zur konventionellen Regelung äquivalente Energieausbeute erreicht wird. Alle drei Konfigurationen werden über eine Parametervariation für ein breites Spektrum an Betriebslastfällen ausgelegt.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen strukturiert. Optimale Steuerung bildet die Grundlage einer MPC. In Kapitel 2 wird daher deren Theorie in einer Detailtiefe vorgestellt, welche für die Beschreibung einer *indirekten* MPC notwendig ist. OSP mit regulärer Hamiltonfunktion bilden die Basis zur automatisierten Bestimmung der Lösungsstruktur und werden im Anschluss an die Beschreibung einer *singulären Steuerung* vorgestellt. Das Kapitel endet mit den Grundlagen zur MPC. In Kapitel 3 werden die Konzepte der *Schädigungssumme*, des *Auslastungsgrades* und der *schädigungsäquivalenten Last* vorgestellt, welche im späteren Verlauf zur Bewertung der Betriebsfestigkeit auf Basis des Nennspannungskonzeptes des Triebstranges verwendet werden. Eines der beiden Kernstücke der vorliegenden Arbeit stellt – wie bereits erwähnt – die Anwendung der indirekten Verfahren zur Lösung der OSP dar. Dazu ist das automatisierte Erkennen und Auflösen von Änderungen in der Lösungsstruktur notwendig. Nach einer kurzen Diskussion der Unterschiede zwischen *direkten* und *indirekten Methoden* wird das entsprechende Vorgehen in Kapitel 4 beschrieben. Es setzt sich aus der Beschreibung des zugehörigen numerischen Verfahrens des *Mehrfach-Schießens* und der jeweils separierten Diskussion von Änderungen bzgl. Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen zusammen. Eine kritische Diskussion des Verfahrens schließt das Kapitel ab. Das zweite der beiden Kernstücke stellt die Anwendung von indirekter MPC zur Regelung von WEA in Kapitel 5 dar. Hier liegt der Fokus auf dem Ausgleich der sich konkurrierenden Ziele einer möglichst hohen Energieausbeute und dem dabei möglichst schädigungsarmen Betrieb des Triebstranges. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick ab.





## 2 Grundlagen der modellprädiktiven Regelung

Die *Optimale Steuerung gewöhnlicher Differentialgleichungen* beschreibt Probleme aus der Optimierung, deren unbekannte und zu bestimmende Größen Funktionen einer unabhängigen Variablen sind – in der Regel ist dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Zeit  $t$ . Diese werden *Optimale Steuerungsprobleme* (OSP) genannt. Ein solches OSP besteht mindestens aus einem *Zielfunktional* – auch *Kostenfunktional* genannt – das es zu minimieren oder maximieren gilt. Beispielsweise ist durch den Treibstoffverbrauch einer interplanetaren Sonde, die von der Erde zum Planet Venus fliegen soll, ein Zielfunktional definiert [10, S. 185]. In einem anderen Beispiel ist das Kostenfunktional als die gesamte Zeit festgelegt, die ein Akrobatikflugzeug benötigt, um einen Kurs zu durchfliegen, der durch etwa 30 m hohe Pylonen vorgegeben ist [35]. Es gilt immer die zu steuernden Größen – die *Steuerungen* oder *Steuerungsvariablen*  $u(t)$  – im System derart zu bestimmen, dass die entsprechenden Zielfunktionale minimiert werden. Dabei kann jede Maximierung durch das Multiplizieren des Zielfunktionales mit  $-1$  in eine Minimierung überführt werden. Die zeitgleich zu berücksichtigende Systemdynamik wird als Nebenbedingung in Form gewöhnlicher DGL angekoppelt. Durch diese DGL wird die zeitliche Ableitung einiger Variablen festgelegt, wodurch sie nicht mehr zu jedem Zeitpunkt frei variierbar sind. Daher wird jede Größe, deren zeitliche Ableitung explizit über eine DGL in einem OSP festgelegt ist, im Gegensatz zu den frei wählbaren *Steuerungen* als *Zustand* oder *Zustandsvariablen*  $x(t)$  bezeichnet. In den oben genannten Beispielen sind Position, Orientierung und die jeweilige Geschwindigkeit Zustandsgrößen.

Als Lösung eines OSP erhält man die *optimale Steuerung*  $u^*(t)$  als Funktion der Zeit  $t$ . Wendet man  $u^*(t)$  als Stellgrößensignal ohne weitere Rückkopplung auf Zustandsmessungen direkt auf ein mechanisches System an, bezeichnet man diese Strategie als *Steuerung* (engl. *open loop control*). Aufgrund vieler Faktoren, wie beispielsweise notwendige Vereinfachungen und Annahmen bei der mathematischen Modellbildung, schwer messbare Störgrößen und allgemeines Messrauschen, greift man gewöhnlicherweise auf eine *Regelung* (engl. *closed loop control*) zurück, die eine Steuerung mit der Häufigkeit des Regeltaktes auf Basis einer Zustandsmessung neu bestimmt. Da das Lösen von OSP erheblich aufwendiger ist als die Anwendung klassischer Regelstrategien, werden mittels OSP beispielsweise a-priori Referenztrajektorien für die Systemzustände berechnet. Diese werden dann im praktischen Einsatz mittels konventioneller Regelstrategien abgefahren. In Kapitel 1 wurde das Verfahren der gestörten optimalen Rückkopplungssteuerung beschrieben. Hier dienen diese Referenztrajektorien als die genannten nominellen Lösungen. Das dynamische Verhalten von WEA

hängt jedoch stark von den sich zeitlich verändernden Windfeldern ab. Somit sind einmalig zuvor berechnete Referenztrajektorien in der Regel Kompromisse. Berechnet man während des Regelprozesses die optimale Steuerung  $u^*(t)$  auf Basis einer aktuellen Zustandsmessung oder Zustandsschätzung neu, erhält man eine Art Rückkopplungssteuerung auf Basis von OSP. Bei dieser Vorgehensweise spricht man von *modellprädiktiver Regelung* (engl. *model predictive control* – MPC). Ziel dieses Kapitels ist es, die Grundlagen der optimalen Steuerung und der MPC soweit zu erfassen, wie sie im späteren Verlauf der vorliegenden Arbeit benötigt werden.

## 2.1 Optimalsteuerung

### 2.1.1 Historische Entwicklung

Der Ursprung der Optimalen Steuerung wird in der Regel auf das Jahr 1697 datiert [36]. Der Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli (1667–1748) veröffentlichte in diesem Jahr das Problem zur Berechnung der Brachistochrone [37]. Gesucht wird eine Bahn in einer vertikalen Ebene, die eine Kugel in minimaler Zeit von einem Ort A zu einem tiefer gelegenen und horizontal versetzten Ort B führt (vgl. Abbildung 2.1). Die Kugel bewegt sich unter Vernachlässigung von Reibung und Rotationsträgheiten und wird ausschließlich durch eine konstante Gravitation beschleunigt. Zusätzlich zu seiner eigenen erhielt Bernoulli Lösungen von dem deutschen Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), seinem älteren Bruder Jacob Bernoulli (1655-1705), dem deutschen Naturforscher Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708) und von dem französischen Mathematiker und Adligen Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital (1661-1704). Eine fünfte, anonyme Eingabe wird heute aufgrund der Notation und Handschrift dem englischen Naturforscher Sir Isaac Newton (1643-1726) zugeordnet.

*"With the work of [these men] (...) optimal control got off to a spectacular start" [36].*

Es folgten eine Reihe weiterer Arbeiten, beispielsweise von dem Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler (1707-1783) zusammen mit dem italienischen Mathematiker und Astronom Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) und dem irischen Mathematiker und Physiker Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Als einer der Höhepunkte der Forschung auf dem Gebiet der Optimalen Steuerung kann die Veröffentlichung des Pontryagin'schen Maximumsprinzip durch den russischen Mathematiker Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908-1988) und seinen Kollegen im Jahr 1962 gesehen werden [9]. Im weiteren Verlauf konzentrierte sich viel Forschung auf die Herleitung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für gewisse Klassen von Ungleichungsbeschränkungen [12]. Zum Teil ist diese Arbeit bis heute noch nicht abgeschlossen.

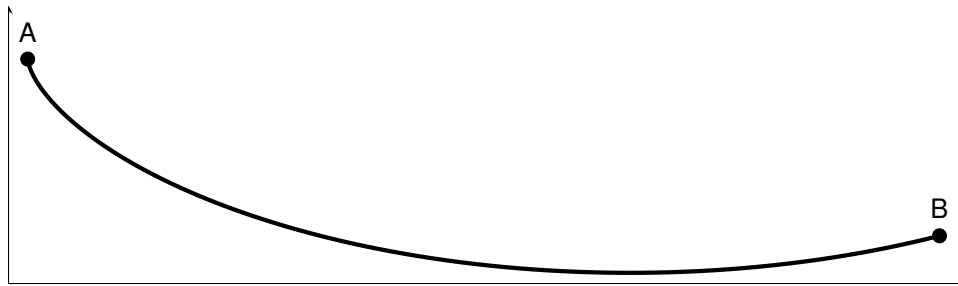


Abbildung 2.1: Die Brachistochrone

### 2.1.2 Grundlagen und notwendige Bedingungen

Die Theorie der Optimalen Steuerung stellt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Optimalität von Lösungen zur Verfügung. Bei der numerischen Berechnung dienen diese Bedingungen erster und zweiter Ordnung dazu, Kandidaten für eine Lösung zu berechnen. Diese Kandidaten werden in einem zweiten Schritt mittels weiterer notwendiger oder hinreichender Bedingungen als optimal bestätigt oder ausgeschlossen.

#### Definition eines Optimalen Steuerungsproblem

OSP können mit einer Vielzahl an verschiedenen Nebenbedingungen formuliert werden. Die in dieser Arbeit behandelten Probleme fallen in eine Klasse, welche sich allgemein wie folgt definieren lässt.

#### Problem 2.1 (Optimales Steuerungsproblem)

Für einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  und für einen Endzeitpunkt  $t_f$  mit  $t_0 < t_f$ , bezeichne  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  folgendes OSP.

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left[ \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \right] \quad (2.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \forall t \in ]t_0, t_f[ \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}(t_f)) \leq \mathbf{0} \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0} \quad (2.1.4)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (2.1.5)$$

Für (2.1.3), (2.1.4) und (2.1.5) ist das Ungleichungssymbol komponentenweise zu verstehen. Außerdem gelte die klassische Regularisierungs-Hypothese:

- $\Phi \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,
- $L \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ,
- $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,
- $g_k \in \mathcal{C}_{\tilde{k}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \forall k \in \{1, \dots, p\}$  mit  $\tilde{k} \geq 2$  hinreichend groß,
- $h_l \in \mathcal{C}_{\tilde{l}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \forall l \in \{1, \dots, q\}$  mit  $\tilde{l} \geq 2$  hinreichend groß,
- $h_l(\mathbf{x}_0) \leq 0 \forall l \in \{1, \dots, q\}$ .

### Größen eines Optimalen Steuerungsproblem

Wie eingangs erwähnt, werden in der Regel zwei Typen von Variablen innerhalb eines OSP unterschieden. Auf der einen Seite bezeichnet man Variablen  $\mathbf{x} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , deren Ableitungen bezüglich der unabhängigen Variablen  $t$  in der Problemstellung explizit auftreten, als *Zustandsvariablen* oder *Zustände*. In der Mehrheit der Fälle sind die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}$  durch eine Nebenbedingung in Form einer DGL gegeben (vgl. Nebenbedingung (2.1.2)). Ist diese *lokal Lipschitz-stetig* bezüglich  $\mathbf{x}$ , so sind alle Komponenten von  $\mathbf{x}$  eindeutig und können damit nicht frei gewählt werden [38, S. 544]. Diese lokale Lipschitz-Stetigkeit gilt in Folge der obigen klassischen Regularisierung-Hypothese. Dem gegenüber stehen die Variablen  $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , deren Ableitungen bezüglich der unabhängigen Variablen  $t$  nicht explizit in der Problemformulierung vorhanden sind, und welche als *Steuerungsvariablen* oder *Steuerungen* bezeichnet werden.

#### Definition 2.2 (Zustandsvariable)

Tritt die Ableitung einer Variablen bezüglich der unabhängigen Variablen  $t$  explizit in  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  auf, wird diese als *Zustandsvariable* bezeichnet und mit dem Symbol  $x$  gekennzeichnet. Die Anzahl der Zustandsvariablen von  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  ist  $n \in \mathbb{N}$ . Falls  $n > 1$ , werden alle Zustandsvariablen in dem Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefasst.

#### Definition 2.3 (Steuerungsvariable)

Tritt die Ableitung einer Variablen bezüglich der unabhängigen Variablen  $t$  nicht explizit in  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  auf, wird diese als *Steuerungsvariable* bezeichnet und mit dem Symbol  $u$  gekennzeichnet. Die Anzahl der Steuerungsvariablen von  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  ist  $m \in \mathbb{N}$ . Falls  $m > 1$ , werden alle Steuerungsvariablen in dem Vektor  $\mathbf{u}$  zusammengefasst.

### Transformation zeitabhängiger OSP

Die im Rahmen der MPC betrachteten Probleme für WEA sind nicht-autonom, da das Windfeld in aller Regel zeitabhängig zu berücksichtigen ist. Das durch die Definition 2.1 formulierte OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$  ist jedoch autonom und nicht explizit zeitabhängig.

#### Kommentar 2.4 (Transformation nicht-autonomer OSP)

*Nicht-autonome OSP können bei hinreichender Regularität durch eine Standardtransformation in autonome Problemstellungen überführt werden [39, S. 8 f.]. Dabei wird eine neue Zustandsvariable  $x_{n+1}$  und eine neue unabhängige Variable  $\xi$  definiert. Außerdem gelte*

$$x_{n+1}(\xi) := t(\xi) = \xi.$$

*Damit folgt für das übrige System*

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n+1}}{d\xi} &= 1 \\ \frac{dx_i}{d\xi} &= \frac{dx_i}{dx_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{d\xi} = \frac{dx_i}{dt}, \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Für eine anschaulichere Betrachtung werden im Folgenden daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit ausschließlich autonome OSP verwendet.

### Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen

Ungleichungsnebenbedingungen der Form (2.1.5) werden als *Zustandsbeschränkungen* bezeichnet. Sie hängen nicht explizit von mindestens einer der Steuerungsvariablen  $u$  ab [12, S. 182]. Dementsprechend hängen *Steuerungsbeschränkungen* wie (2.1.4) explizit von mindestens einer der Steuerungsvariablen  $u$  ab.

#### Definition 2.5 (Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen)

*Für beliebige  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathbb{R}^m$  werde folgende allgemeine Ungleichungsnebenbedingung  $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet<sup>1</sup>.*

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$$

<sup>1</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im weiteren Verlauf darauf verzichtet, zwischen dem Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  und der Funktion der Zeit  $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu unterscheiden. Ist dieser Unterschied explizit zu beachten, wird gesondert darauf hingewiesen.

- Falls folgende Bedingung

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \exists j \in [1, \dots, m] : \frac{\partial}{\partial u_j} a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq 0$$

gilt, wird  $a(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  als Steuerungsbeschränkung bezeichnet. Alle Steuerungsbeschränkungen von  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  werden durch  $g_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$  für  $k = 1, \dots, p$  definiert und im Vektor  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$  zusammengefasst, wobei das Ungleichungssymbol für die vektorwertige rechte und linke Seite jeweils komponentenweise zu verstehen ist.

- Falls dementsprechend folgende Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u_j} a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \wedge \forall j \in [1, \dots, m]$$

gilt, wird  $a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{x})$  als Zustandsbeschränkung bezeichnet. Alle Zustandsbeschränkungen von  $Q(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$  werden durch  $h_l(\mathbf{x}) \leq 0$  für  $l = 1, \dots, q$  definiert und im Vektor  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$  zusammengefasst.

Gilt zum Zeitpunkt  $t$  für  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  die Bedingung

$$g_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) < 0 \text{ oder } h_l(\mathbf{x}(t)) < 0,$$

dann ist  $g_k$  bzw.  $h_l$  zum Zeitpunkt  $t$  inaktiv oder nicht aktiv. Gilt dementsprechend

$$g_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 0 \text{ oder } h_l(\mathbf{x}(t)) = 0, \tag{2.1.6}$$

dann ist  $g_k$  bzw.  $h_l$  zum Zeitpunkt  $t$  aktiv.

Ist eine Steuerungs- oder Zustandsbeschränkung zu einem Zeitpunkt  $t$  aktiv, muss während der numerischen Berechnung eine Steuerung bestimmt werden, welche die Beschränkung im weiteren Verlauf nicht verletzt. Da Steuerungsbeschränkungen explizit von einer der Steuerungen abhängen, kann zusammen mit der im Satz 2.11 weiter unten definierten Optimalitätsbedingung eine zulässige Steuerung bestimmt werden. Falls dagegen eine Zustandsbeschränkung für ein  $l \in \{1, \dots, q\}$  zum Zeitpunkt  $t$  aktiv ist, muss nach Gleichung (2.1.6) die Bedingung  $h_l(\mathbf{x}(t)) = 0$  gelten.  $\mathbf{x}(t)$  ist gleichzeitig durch das DGL (2.1.2) festgelegt. Wenn daher  $\mathbf{x}(t)$  mindestens stetig differenzierbar ist (d.h. die optimale Steuerung  $\mathbf{u}(t)$  ist stetig, da  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ), muss auch die Ableitung der Zustandsbeschränkung zum Zeitpunkt  $t$  verschwinden:  $\frac{d}{dt} h_l(\mathbf{x}(t)) = 0$ . Andernfalls wäre die Zustandsbeschränkung in einer Umgebung von  $t$  verletzt. Vorausgesetzt sei, dass zum Zeitpunkt  $t$  die Zustandsbeschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t)) = 0$  aktiv ist. Falls für ein  $j \in [1, \dots, m]$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \frac{d}{dt} h_l(\mathbf{x}(t)) \neq 0$$

gilt, kann daraus ein  $u_j(t)$  so bestimmt werden, dass  $\frac{d}{dt}h_l(\mathbf{x}(t)) = 0$  erfüllt ist. Die Anzahl der zeitlichen Ableitungen von  $h_l(\mathbf{x}(t))$ , die benötigt werden um eine Steuerung  $u_j$  explizit zu berechnen, wird als *Ordnung* einer Zustandsbeschränkung bezeichnet.

**Definition 2.6** (Ordnung einer Zustandsbeschränkung)

Die *Ordnung einer Zustandsbeschränkung*  $h_l(\mathbf{x})$  ist definiert durch die kleinste Zahl  $q_l \in \mathbb{N}$ , für die mindestens ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  und ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass folgende Bedingung erfüllt ist [12, S. 183]:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \frac{d^{q_l}}{dt^{q_l}} h_l(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial u_{\tilde{i}}} \frac{d^{\tilde{q}}}{dt^{\tilde{q}}} h_l(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \tilde{q} \in \{0, \dots, q_l - 1\} \quad \wedge \quad \forall \tilde{i} \in \{1, \dots, m\}$$

**Kommentar 2.7**

Für manche OSP muss der Ordnungsbegriff für Zustandsbeschränkungen weiter verfeinert werden [40]. Betrachtet werde beispielsweise folgendes System.

$$\dot{x}_1 = u_1$$

$$h(x_1) = x_1(x_1 - 1) \tag{2.1.7}$$

$$\Rightarrow \dot{h}(x) = u_1(x_1 - 1) + x_1 u_1 = u_1(2x_1 - 1) \tag{2.1.8}$$

Die Funktion (2.1.7) ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Der farblich hinterlegte Bereich visualisiert dabei die gültigen Werte für  $x_1$  unter der Zustandsbeschränkung  $h(x_1) \leq 0$ .

Für alle gültigen  $x_1 \neq \frac{1}{2}$  ist die Zustandsbeschränkung  $h(x_1) \leq 0$  erster Ordnung. Für  $x_1 = \frac{1}{2}$  besitzt  $h(x_1) \leq 0$  jedoch eine höhere Ordnung, da sich die erste zeitliche totale Ableitung (2.1.8) nicht nach  $u_1$  auflösen lässt. Daher unterscheidet man zwischen *intrinsic* Ordnung und *lokaler* Ordnung. In dem Beispiel besitzt  $h(x_1) \leq 0$  die *intrinsic* Ordnung  $q_l = 1$  und für  $x_1 = \frac{1}{2}$  die *lokale* Ordnung  $\tilde{q}_l(\frac{1}{2}) = 2$ , da

$$\left. \frac{d}{dt}(2x_1 - 1) \right|_{x_1 = \frac{1}{2}} = 2u_1.$$

Während die *intrinsic* Ordnung unabhängig von einem  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  definiert ist, ist die *lokale* Ordnung für bestimmte  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  definiert. Die *intrinsic* Ordnung kann auch als das Minimum aller *lokaler* Ordnungen bezeichnet werden,  $q_l \leq \tilde{q}_l$ . Der Unterschied zwischen *intrinsic* und *lokaler* Ordnung spielt für die Problemstellung der WEA keine Rolle und sei an dieser Stelle zum Zweck der Vollständigkeit erwähnt.

Als einer der beiden zentralen Aussagen der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 4.4 unter anderem die automatische Auflösung der Struktur einer Lösung eines OSP diskutiert. Dies wiederum ist Grundvoraussetzung für die Anwendung der hier vorgestellten Methoden innerhalb einer MPC. Unter dem Begriff der *Struktur einer Lösung* oder *Lösungsstruktur* versteht

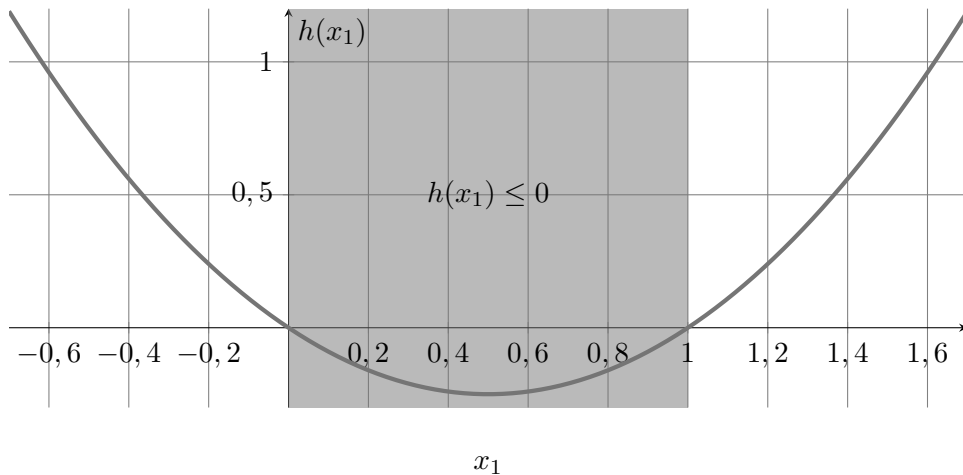


Abbildung 2.2: Beispiel für den Unterschied zwischen der intrinsischen und lokalen Ordnung

man ein Tupel zweier Mengen. Die erste der beiden Mengen  $\mathcal{T}_S$  enthält die aufsteigend geordneten Zeitpunkte, an denen Zustandsbeschränkungen aktiv bzw. inaktiv werden. Parallel dazu existiert die Indexmenge  $\mathcal{I}_S$ . Sie gibt für jedes Intervall, welches durch die Zeitpunkte in  $\mathcal{T}_S$  definiert wird, an, welche Zustandsbeschränkungen aktiv sind.

**Definition 2.8** (Struktur einer Lösung eines OSPs)

Es sei  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  eine Lösung des OSP 2.1. Die Mengen der aktiven Steuerungsbeschränkungen, der fast aktiven Steuerungsbeschränkungen und der aktiven Zustandsbeschränkungen seien definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_g(t) &:= \{k \in \{1, \dots, p\} : g_k(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) = 0\} \\ \mathcal{I}_{g,\alpha}(t) &:= \{k \in \{1, \dots, p\} : -\alpha \leq g_k(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \leq 0\} \\ \mathcal{I}_h(t) &:= \{l \in \{1, \dots, q\} : h_l(\mathbf{x}^*(t)) = 0\}. \end{aligned}$$

Des Weiteren seien dadurch die folgenden beiden Mengen definiert.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_S &:= \{t_0, t_1, \dots, t_f : t_0 < t_1 < \dots, t_f\} \\ \mathcal{I}_S &:= \bigotimes_{t_\kappa \in \mathcal{T}_S} \mathcal{I}_g(t_\kappa) = \mathcal{I}_g(t_0) \times \mathcal{I}_g(t_1) \times \dots \times \mathcal{I}_g(t_f) \end{aligned}$$

Für das Tupel  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  gelte zusätzlich

$$\mathcal{I}_S(t) = \mathcal{I}_S(t_\kappa), \quad \forall t \in ]t_\kappa, t_{\kappa+1}[ , \quad \forall \kappa \in \{1, \dots, |\mathcal{T}_S| - 1\}. \quad (2.1.9)$$

Dann bezeichnet  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  die Struktur einer Lösung eines OSP.



Gleichung (2.1.9) aus Definition 2.8 stellt hierbei sicher, dass auf dem Inneren der Intervalle  $]t_\kappa, t_{\kappa+1}[$  keine Zustandsbeschränkung aktiv oder inaktiv wird.

Zum Abschluss des Abschnittes über Ungleichungsbeschränkungen lassen sich für das OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$  die Mengen der zulässigen Werte für Zustands- und Steuerungsvariablen mittels  $g(x, u)$  und  $h(x)$  wie folgt definieren.

### Definition 2.9

Es seien die folgenden Mengen definiert.

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &:= \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\} \\ \mathcal{U}(x) &:= \{u \in \mathbb{R}^m : g(x, u) \leq 0\}\end{aligned}$$

### Notwendige Bedingungen erster und zweiter Ordnung

Auf Basis der beschriebenen Größen  $x$  und  $u$  sollen nun diejenigen notwendigen Bedingungen erster und zweiter Ordnung formuliert werden, welche zur Berechnung einer optimalen Steuerung  $u^*$  für WEA im späteren Verlauf der Arbeit herangezogen werden. Diese lassen sich mittels der *Hamiltonfunktion* und der *erweiterten Hamiltonfunktion* vergleichsweise kompakt formulieren [41, S. 43], [13, S. 567].

### Definition 2.10 (Hamiltonfunktion und erweiterte Hamiltonfunktion)

Die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  und die erweiterte Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}$  zu einem OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$  seien definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, \lambda, u) &:= L(x, u) + \lambda^T \cdot f(x, u) \\ \mathcal{H}_{erw}(x, \lambda, u, \mu_g, \mu_h) &:= \mathcal{H}(x, \lambda, u) + \mu_g^T \cdot g(x, u) + \mu_h^T \cdot h(x).\end{aligned}$$

Dabei werden mit  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  die adjungierten Variablen, mit  $\mu_g \in \mathbb{R}^p$  die Multiplikatoren für die Steuerungsbeschränkungen und mit  $\mu_h \in \mathbb{R}^q$  die Multiplikatoren für die Zustandsbeschränkungen bezeichnet.

$\lambda$ ,  $\mu_g$  und  $\mu_h$  sind Variablen, die durch das Ankoppeln der Nebenbedingungen (2.1.2), (2.1.4) und (2.1.5) an das Zielfunktional entstehen [12], [41], [42].

### Satz 2.11

Es sei ein OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$  ohne Ungleichungsbedingungen zum Endzeitpunkt  $t_f$  gegeben, d.h. ohne eine Bedingung der Form  $b(x(t_f)) \leq 0$ . Es sei  $(x^*, u^*)$  eine Lösung des OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$ . Zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  gelte  $h(x_0) < 0$ . Dann existieren  $\lambda : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$\boldsymbol{\mu}_g : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $\boldsymbol{\mu}_h : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^q$  derart, dass

$$\dot{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*), \quad \boldsymbol{x}^*(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (2.1.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \mathcal{H}_{erw}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h) \right]^T, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}^*(t_f)) \right]^T \quad (2.1.11)$$

$$\boldsymbol{u}^* = \arg \min_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{x}^*)} \mathcal{H}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned} g_k(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \leq 0, & \quad \mu_{g,k}(t) \geq 0, & \quad \forall t \in [t_0, t_f], & \quad \forall k = 1, \dots, p \\ h_l(\boldsymbol{x}^*) \leq 0, & \quad \mu_{h,l}(t) \geq 0, & \quad \forall t \in [t_0, t_f], & \quad \forall l = 1, \dots, q \end{aligned}$$

*Beweis.* Für den Beweis wird auf [13, S. 567 ff.] verwiesen.

Satz 2.11 stellt notwendige Bedingungen bereit, die eine bereits bekannte Lösung  $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$  erfüllen muss. Für die numerische Bestimmung von  $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$  wird daraus ein RWP gewöhnlicher DGL abgeleitet. Das mit  $Q(\boldsymbol{x}_0, t_0, t_f)$  assoziierte RWP wird mit  $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}_0, t_0, t_f)$  bezeichnet.

### 2.1.3 Singuläre Steuerung

Als Folge der notwendigen Bedingung (2.1.12) kann die optimale Steuerung  $\boldsymbol{u}^*(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  als das Ergebnis einer von der Systemdynamik isolierten globalen Minimierung der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h(t))$  betrachtet werden. Dabei treten  $\boldsymbol{x}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  und  $\boldsymbol{\mu}_h(t)$  zu festem  $t \in [t_0, t_f]$  als unveränderliche Parameter auf. Ihr zeitlicher Verlauf ist durch die Differentialgleichungen (2.1.10) und (2.1.11) gegeben. Die Steuerungsbeschränkungen  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{x}^*(t)) \leq \mathbf{0}$  sind bereits an das Minimierungsproblem angekoppelt und man erhält neben  $\boldsymbol{u}^*(t)$  einen zeitlichen Verlauf der mit den Steuerungsbeschränkungen assoziierten Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$ .

### Lösungskandidaten einer linearen Steuerung

In einer Vielzahl von praktischen Problemen der Optimalen Steuerung ist die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u})$  linear in einer der Steuerungen  $u_j$  [41, S. 246], d.h.

$$\frac{\partial^2}{\partial u_j^2} \mathcal{H}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$  ist dann entweder linear fallend oder linear steigend oder konstant in  $u_j$  (vgl. Abbildung 2.3). Falls  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$  linear fallend oder steigend in  $u_j$  ist, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \neq 0,$$

liegt das Minimum von  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$  auf dem Rand bzgl.  $u_j$ . Dieser Rand ist durch  $u_{j,\min}(\mathbf{x}^*(t))$  und  $u_{j,\max}(\mathbf{x}^*(t))$  definiert. Damit nimmt die optimale Steuerung  $u_j^*(t)$  zum Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  und zum Zustand  $(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$  entweder seinen maximal zulässigen Wert  $u_{j,\max}(\mathbf{x}^*(t))$  oder seinen minimal zulässigen Wert  $u_{j,\min}(\mathbf{x}^*(t))$  an, d.h.  $\mathbf{u}^*(t)$  liegt auf dem Rand von  $\mathcal{U}(\mathbf{x}^*(t))$ . Ist dieser nicht definiert, also entweder negativ oder positiv infinit, muss überprüft werden, ob das entsprechende OSP vollständig physikalisch und ingenieurwissenschaftlich sinnvoll gestellt ist.

### Kommentar 2.12 (Bang-Bang Steuerung)

*Durch den zeitlich veränderlichen Verlauf von  $(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$  kann die Hamiltonfunktion von beispielsweise linear fallend in  $u_j$  zu linear steigend in  $u_j$  und wieder zurück wechseln. In diesem Fall springt die optimale Steuerung  $u_j^*$  von seinem Maximum  $u_{j,\max}(\mathbf{x}^*(t))$  zu seinem Minimum  $u_{j,\min}(\mathbf{x}^*(t))$  und zurück. Bei dieser schaltenden Steuerung spricht man auch von einer Bang-Bang Steuerung. Diese wird im weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt und sei an dieser Stelle zur Vollständigkeit erwähnt.*

### Berechnung einer singulären Steuerung

Ist eine in  $u_j$  lineare Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\lambda}(\hat{t}), \mathbf{u}(\hat{t}))$  zum Zeitpunkt  $\hat{t} \in [t_0, t_f]$  konstant in  $u_j$ , dann ist die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(\hat{t})$  nicht mehr allein durch die Minimierung von  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\lambda}(\hat{t}), \mathbf{u}(\hat{t}))$  bzgl.  $u_j$  festgelegt, da kein eindeutiges Minimum bezüglich  $u_j$  zum Zeitpunkt  $\hat{t} \in [t_0, t_f]$  existiert. Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung (2.1.12) ist damit trivialerweise erfüllt.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\lambda}(\hat{t}), \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}(\mathbf{x}^*(\hat{t})).$$

Ist  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\lambda}(\hat{t}), \mathbf{u})$  lediglich zu einem isolierten Zeitpunkt  $\hat{t}$  konstant in  $u_j$ , jedoch in jeder hinreichend kleinen Umgebung von  $\hat{t}$  ansonsten linear steigend oder fallend in  $u_j$ , dann bestimmt  $\hat{t}$  den Zeitpunkt, an dem die optimale Steuerung  $u_j^*$  von seinem Minimum zum seinem Maximum oder von seinem Maximum zu seinem Minimum springt. Daher bezeichnet man diese Zeitpunkte  $\hat{t}$  auch als *Schaltzeitpunkte* einer Bang-Bang Steuerung aus Kommentar 2.12 [43, S. 162]. Mathematisch formuliert existiert ein  $\epsilon_0 > 0$  derart, dass für

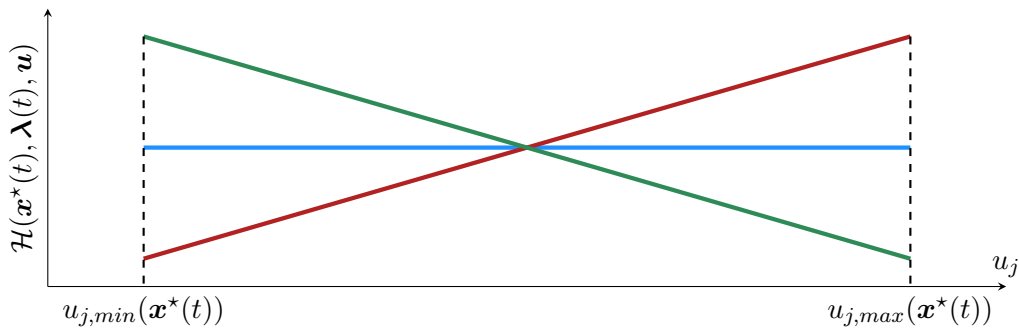


Abbildung 2.3: Verlauf von drei Hamiltonfunktionen  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$  in  $u_j$  zu festem  $t \in [t_0, t_f]$

alle  $\epsilon \in ]0, \epsilon_0]$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}) \begin{cases} = 0 & \text{für } t = \hat{t} \\ \neq 0 & \text{für } t \in ]\hat{t} - \epsilon, \hat{t}[ \cup ]\hat{t}, \hat{t} + \epsilon[ \end{cases}$$

gilt. Im Unterschied zur Bang-Bang Steuerung entsteht eine *singuläre Steuerung*, falls es ein  $\Delta t > 0$  gibt derart, dass  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u})$  auf einem nicht-verschwindenden Zeitfenster konstant in  $u_j$  ist, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}) = 0 \quad \forall t \in ]\hat{t} - \Delta t, \hat{t} + \Delta t[. \quad (2.1.13)$$

Wie bereits erwähnt, können nicht mehr nur einzelne Kandidaten für die optimale Steuerung  $u_j^*$  durch eine reine Minimierung der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(\hat{t}), \boldsymbol{\lambda}(\hat{t}), \mathbf{u})$  als notwendige Bedingung bestimmt werden. Als Folge von (2.1.13) ist die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u})$  auf einem Zeitfenster  $[t_1, t_2]$  mit nicht-verschwindender Länge  $t_1 < t_2$  im Fall von singulärer Steuerung in  $u_j$  konstant für alle zulässigen  $u_j$  und für alle Zeitpunkte  $t \in [t_1, t_2]$ . Daher muss das totale zeitliche Differential verschwinden [41, S. 252].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}) = 0 \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]$$

Daraus ergibt sich eine Vorschrift zur Bestimmung der optimalen Steuerung  $u_j^*$  auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$ : Unter der Annahme, dass die singuläre Steuerung in  $u_j$  optimal ist, kann  $u_j$  derart gewählt werden, dass die Bedingung (2.1.13) auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$  erhalten bleibt. Wie im Fall von Zustandsbeschränkungen kann es auch bei singulärer Steuerung mehr als eine totale zeitliche Ableitung benötigen, bis eine optimale Steuerung aus dieser Vorschrift berechnet werden kann. Somit besitzt jede singuläre Steuerung ähnlich zu Definition 2.6 eine Ordnung [40].

**Definition 2.13** (Ordnung einer singulären Steuerung)

Es sei das OSP  $Q(x_0, t_0, t_f)$  gegeben. Für eine der Steuerungen  $u_j$  mit  $j \in \{1, \dots, m\}$  gelte die folgende Bedingung für beliebige  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathbb{R}^m$ .

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(x, \lambda, u) = 0 \quad (2.1.14)$$

Die Ordnung der singulären Steuerung bzgl.  $u_j$  zum Zeitpunkt  $\hat{t}$  ist definiert durch die kleinste Zahl  $p_j \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \frac{d^{2p_j}}{dt^{2p_j}} \frac{\partial}{\partial u_j} \mathcal{H}(x, \lambda, u) \neq 0 \quad (2.1.15)$$

für ein beliebiges 3-Tupel  $(x, \lambda, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gilt.

Es wird somit solange zeitlich total differenziert, bis eine explizite Abhängigkeit von  $u_j$  auftritt. Im Unterschied zu Zustandsbeschränkungen kann diese explizite Abhängigkeit jedoch nicht in ungeradzahligen Ordnungen der zeitlichen Ableitung auftreten. Daher muss für eine singuläre Steuerung 1. Ordnung zweimal und für eine singuläre Steuerung 2. Ordnung viermal zeitlich differenziert werden. Die Ordnung einer singulären Steuerung ist nicht zwingend durch einen Maximalwert beschränkt.

**Kommentar 2.14** (Intrinsische und lokale Ordnung)

Ähnlich zu Kommentar 2.7 muss für manche OSP der Ordnungsbegriff für singuläre Steuerung verfeinert werden [40]. Die intrinsische Ordnung wird unabhängig von der Lösung  $(x^*, u^*)$  bestimmt und ist in Definition 2.13 verwendet worden. Es muss lediglich ein beliebiges 3-Tupel  $(x, \lambda, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gefunden werden, so dass (2.1.15) erfüllt ist. Zu diesem 3-Tupel  $(x, \lambda, u)$  kann dann ein Wert für  $u_j$  bestimmt werden. Die Definition der intrinsischen Ordnung  $p_j$  erfasst jedoch nicht den Fall, falls zwar ein 3-Tupel  $(x, \lambda, u)$  existiert derart, dass (2.1.15) erfüllt ist, dies jedoch nicht für den optimalen Zustand  $(x^*, \lambda^*, u^*)$  gilt. Dabei bezeichnet  $\lambda^*$  den zu  $(x^*, u^*)$  nach Satz 2.11 gehörenden adjungierten Zustandsvektor. In diesem Fall muss äquivalent zu Kommentar 2.7 eine lokale singuläre Ordnung bestimmt werden, wofür weitere totale zeitliche Differentiale von (2.1.14) gebildet werden müssen. Dieser Fall spielt im Rahmen dieser Arbeit keine Rolle und sei hier zur Vollständigkeit erwähnt.

**Kommentar 2.15** (Bewertung der Optimalität von singulärer Steuerung)

Die in Satz 2.11 definierten Bedingungen sind notwendige aber keine hinreichenden Bedingungen für die Optimalität von  $(x^*(t), u^*(t))$  auf  $t \in [t_0, t_f]$ . Bei der Berechnung der singulären Steuerung ist vorausgesetzt worden, dass diese auf dem Zeitfenster  $[t_1, t_2]$  optimal ist. Diese Optimalität kann im Nachgang auch für eine singuläre Steuerung mittels notwendiger Bedingungen höherer Ordnung bewertet und die singuläre Steuerung somit als Kandidat bestätigt oder ausgeschlossen werden [44], [45], [46], [47]. Eine solche Bedingung ist beispiels-

weise die Goh-Legendre-Clebsch Bedingung [48], [49]. Im späteren Verlauf werden Probleme mit regulärer Hamiltonfunktion verwendet, wodurch singuläre Steuerungen ausgeschlossen und somit diese Bedingungen nicht benötigt werden. Aufgrund ihrer Bedeutung innerhalb der Theorie zur singulären Steuerung werden sie daher nur zur Vollständigkeit erwähnt. Es sei an dieser Stelle auf weitere Arbeiten verwiesen, die sich mit dem Übergang zwischen singulärer und nicht-singulärer Steuerung beschäftigen [43], [50], [51].

Die bisherige Diskussion über singuläre Steuerung dient der Hinführung zu einem Steuerungsphänomen, welches in der Literatur unter den Begriff *Chattering Control* 2. Art fällt [52, S. 4 ff], [53, S. 442] und eine wichtige Rolle zur Formulierung einer MPC für WEA spielt [54]. Dieses Phänomen beschreibt einen Vorgang, in dem es zu einem beliebig schnellen Schalten einer Bang-Bang Steuerung innerhalb eines endlichen Zeitintervalls kommt. Es führt bei der numerischen Berechnung zu erheblichen Schwierigkeiten ohne unbedingten ingenieurwissenschaftlichen Mehrwert zu generieren und sollte daher im Vorfeld entsprechend analysiert und ausgeschlossen werden. Zudem tritt es in vielen praktischen Problemen auf [55], [56], [57], [58] und lässt sich anschaulich anhand der folgenden beiden akademischen Beispiele erklären. In Beispiel 2.16 tritt eine singuläre Steuerung ohne Chattering Control 2. Art auf, wohingegen im Beispiel 2.17 diese Phänomen zu beobachten ist. Beide Beispiele unterscheiden sich jedoch in ihrer Problemstellung nur geringfügig.

**Beispiel 2.16** (Singuläre Steuerung)

Betrachtet werde folgendes Problem

$$\begin{aligned} \min_{u \in [-1,1]} \int_0^8 \frac{x_1^2}{2} dt \\ \dot{x}_1 = u \\ x_1(0) = 2, \quad x_1(8) = 2. \end{aligned}$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion ist linear in  $u$  und lautet

$$\mathcal{H}(x_1, \lambda_1, u) = \frac{x_1^2}{2} + \lambda_1 u.$$

Die Berechnung der singulären Steuerung erfolgt durch

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}(x_1, \lambda_1, u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{x_1^2}{2} + \lambda_1 u \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^2}{dt^2} \lambda_1 = 0 \quad \text{mit } \dot{\lambda}_1 \stackrel{(2.1.11)}{=} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{H}(x_1, \lambda_1, u) \right] = -x_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} [-x_1] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -u = 0 \end{aligned}$$

Daher gilt  $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}(x_1, \lambda_1, u) = -1 \neq 0$ , und somit ist die singuläre Steuerung 1. Ordnung. Die optimale Steuerung  $u^*$  kann daher auf dem Intervall  $[0, 8]$  nur drei Werte annehmen,  $u^* \in \{-1, 0, 1\}$  (die Werte  $-1$  und  $1$  sind der jeweilige maximale und minimale Wert von  $u$ ). Der Lösungsverlauf ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Die singuläre Steuerung für  $u$  ist im Zeitintervall  $[2, 6]$  aktiv, auf dem auch  $x_1(t)$  und  $\lambda_1(t)$  verschwinden.

Im Vergleich zu Beispiel 2.16 soll nun Chattering Control 2. Art diskutiert werden. Dazu wird nun nicht mehr die erste Ableitung von  $x(t)$  sondern die zweite Ableitung als Steuerung gewählt. Die Problemstellung aus Beispiel 2.17 wird in der Literatur häufig als *Fuller's problem* bezeichnet [59].

**Beispiel 2.17** (Chattering Control - Fuller's problem)

Betrachtet werde folgendes Problem

$$\begin{aligned} \min_{u \in [-1, 1]} \int_0^8 \frac{x_1^2}{2} dt \\ \dot{x}_1 = x_2 \quad \text{für } t \in ]0, 8[, \quad x_1(0) = 2, \quad x_1(8) = 2 \\ \dot{x}_2 = u \quad \text{für } t \in ]0, 8[, \quad x_2(0) = -2, \quad x_2(8) = 2 \end{aligned}$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion ist ähnlich wie in Beispiel 2.16 linear in  $u$  und lautet hier

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u) = \frac{x_1^2}{2} + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u.$$

Für Fuller's Problem ist die singuläre Steuerung nun 2. Ordnung, weshalb insgesamt viermal total zeitlich differenziert werden muss.

$$\begin{aligned} & \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{x_1^2}{2} + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^4}{dt^4} \lambda_2 = 0 \quad \text{mit } \dot{\lambda}_2 \stackrel{(2.1.11)}{=} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u) \right] = -\lambda_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^3}{dt^3} [-\lambda_1] = 0 \quad \text{mit } \dot{\lambda}_1 \stackrel{(2.1.11)}{=} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_1} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u) \right] = -x_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{d^2}{dt^2} x_1 = 0 \end{aligned}$$

Gäbe es an dieser Stelle eine explizite Abhängigkeit von  $u$ , müsste nicht weiter differenziert werden und die singuläre Steuerung wäre 1. Ordnung.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} x_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & u = 0 \end{aligned}$$

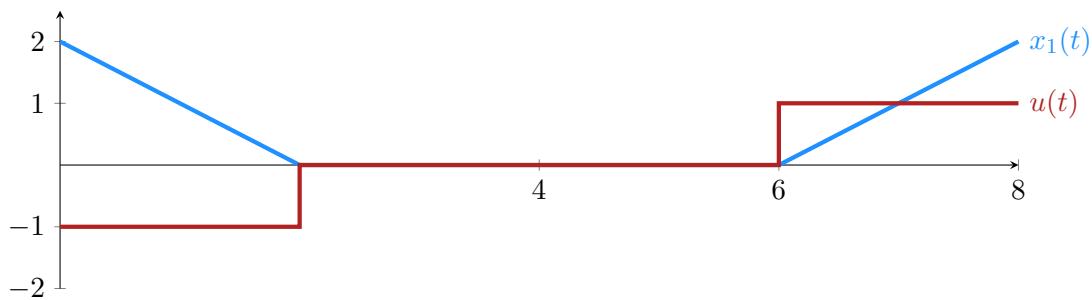


Abbildung 2.4: Lösungsverlauf zu Beispiel 2.16

Somit ist die singuläre Steuerung 2. Ordnung. Der Lösungsverlauf zu Beispiel 2.17 ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Zu erkennen ist eine Bang-Bang Steuerung auf den Intervallen  $[0, t_1[$  und  $]t_2, 8]$ . Als Chattering Control 2. Art bezeichnet man das Phänomen, dass die Zeitpunkt  $t_1$  und  $t_2$  Häufungspunkte von Schaltpunkten einer Bang-Bang Steuerung sind. Je näher man von links an  $t_1$  und von rechts an  $t_2$  kommt, desto schneller wird zwischen dem Maximum und dem Minimum von  $u$  geschaltet. In einer Umgebung von  $t_1$  bzw.  $t_2$  weist die analytische Lösung letztendlich unendlich viele Schaltpunkte auf.

Einerseits beschreibt dieses Phänomen die optimale Lösung, andererseits führt es in der praktischen Anwendung zu erheblichen Schwierigkeiten, deren Aufwand zur Lösung nicht durch eine ausreichende Effizienzsteigerung kompensiert werden. Eine ausführliche Diskussion dazu wird in Abschnitt 5.3.3 geführt. Im Fall der Regelung einer WEA gilt es dieses zu vermeiden. Chattering Control 2. Art ist bei OSP mit regulärer Hamiltonfunktion ausgeschlossen.

#### 2.1.4 Optimalsteuerung mit regulärer Hamiltonfunktion

OSP mit regulärer Hamiltonfunktion unterscheiden sich von Problemen mit nicht-regulärer Hamiltonfunktion darin, dass die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h(t))$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  in einer Umgebung von  $(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$  strikt konvex in allen Komponenten von  $\mathbf{u}$  ist. Diese strikte Konvexität garantiert, dass es zur notwendigen Bedingung (2.1.12) exakt eine Lösung  $\mathbf{u}^*(\hat{t})$  zu jedem  $\hat{t} \in [t_0, t_f]$  gibt. Ferner kann gezeigt werden, dass dann die Funktionen  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  und  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  unter weiteren gängigen Annahmen stetig auf dem gesamten Intervall  $t \in [t_0, t_f]$  sind [13, S. 567 ff.]. Dadurch ist die Möglichkeit von Bang-Bang Steuerung sowie Chattering Control 2. Art aus Kapitel 2.1.3 ausgeschlossen.



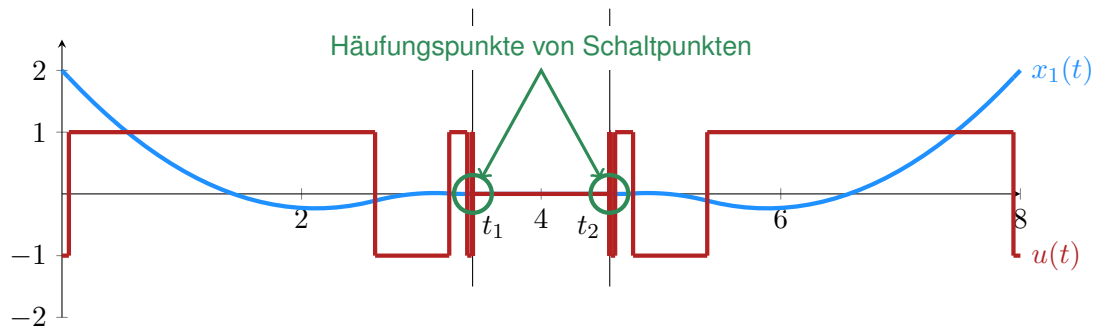


Abbildung 2.5: Lösungsverlauf zu Beispiel 2.17

### Kommentar 2.18

Erfüllen OSP die klassische Regularisierungs-Hypothese aus Problem 2.1, folgt daraus noch nicht, dass auch die zugehörige Hamiltonfunktion regulär ist. Während ersteres Bedingungen an die Differenzierbarkeit der Funktionen innerhalb der Problemdefinition darstellt, basiert zweiteres auf Bedingungen bzgl. der Konvexität einiger dieser Funktionen.

### Definition 2.19 (reguläre Hamiltonfunktion)

Es sei  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  eine Lösung des Problems 2.1. Es seien  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\mu}_h^*$  die nach Satz 2.11 zugehörigen adjungierten Variablen und Lagrange-Multiplikatoren. Dann wird die erweiterte Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h^*(t))$  als regulär bezeichnet, falls es ein  $\alpha > 0$  gibt, derart dass für fast alle  $t \in [t_0, t_f]$  folgende Bedingungen erfüllt sind.

1.  $\mathcal{H}_{erw}$  ist gleichmäßig strikt konvex:  $\forall (\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_g) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m$

$$\alpha \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mathbf{v}^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}^2} \mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h^*(t)) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

2. Es seien  $\{g_1, \dots, g_{|\mathcal{I}_{g,\alpha}(\hat{t})|}\}$  und  $\{h_1^{(q_1)}, \dots, h_{|\mathcal{I}_h(\hat{t})|}^{(q_{|\mathcal{I}_h(\hat{t})|})}\}$  die Mengen der zum Zeitpunkt  $\hat{t} \in [t_0, t_f]$  aktiven Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen (nach eventueller Re-Indizierung). Des Weiteren seien die Matrizen  $A_g$  und  $A_h$  wie folgt definiert.

$$(A_g)_{i,j} := \left( \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right), \quad i = 1, \dots, |\mathcal{I}_{g,\alpha}(\hat{t})|, \quad j = 1, \dots, m$$

$$(A_h)_{i,j} := \left( \frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right), \quad i = 1, \dots, |\mathcal{I}_h(\hat{t})|, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dann gelten folgende Bedingungen für  $A_g$  und  $A_h$ .

$$\begin{aligned} \text{rg } A_g = |\mathcal{I}_{g,\alpha}(t)| & \quad \wedge & \quad \alpha \|\mathbf{v}\| \leq \|A_g \cdot \mathbf{v}\|, & \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \\ \text{rg } A_h = |\mathcal{I}_h(t)| & \quad \wedge & \quad \alpha \|\mathbf{v}\| \leq \|A_h \cdot \mathbf{v}\|, & \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Folgendes Lemma stellt die Stetigkeit der optimalen Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$ , der adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  und der Lagrange-Multiplikatoren für die Steuerungsbeschränkungen  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  auf  $t \in [t_0, t_f]$  sicher und ist von zentraler Bedeutung für das automatisierte Auflösen von Änderungen in der Lösungsstruktur von OSP mit regulärer Hamiltonfunktion in den Abschnitten 4.3 und 4.4.

**Lemma 2.20**

*Es sei  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  eine Lösung des Problems 2.1. Es seien  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\boldsymbol{\mu}_h^*$  die nach Satz 2.11 zugehörigen adjungierten Variablen und Lagrange-Multiplikatoren für die Zustandsbeschränkungen. Alle Zustandsbeschränkungen haben die Ordnung 1. Es sei die zugehörige erweiterte Hamiltonfunktion regulär nach Definition 2.19. Dann ist  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  und  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$  stetig.*

*Beweis.* Für den Beweis wird auf [13, S. 568 ff.] verwiesen.

**2.2 Modellprädiktive Regelung**

**2.2.1 Grundsätzliche Eigenschaften eines Regelsystems**

Regelung kommt in mechanischen Systemen häufig dann zum Einsatz, wenn es diese zu stabilisieren oder Systemausgänge einer vorgegebenen Trajektorie – sogenanntes *Tracking* – folgen zu lassen gilt [7, S. 1]. Im Fall der WEA muss beispielsweise die maximale Drehzahl oder die maximal abgegebene elektrische Leistung unter Vorgabe von Generatormoment und Anstellwinkel der Rotorblätter eingehalten werden. Ein Einsatz der klassischen *stetigen linearen Standardregler* erfordert die Vorgabe einer *Führungsgröße*  $w(t)$  aus der über eine Regelabweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$  eine Stellgröße  $u(t)$  derart bestimmt wird, dass die Regelgröße  $y(t)$  möglichst *gut* der Führungsgröße folgt. Besteht der Regler beispielsweise aus einem Proportional-Anteil (P-Glied), einem Integral-Anteil (I-Glied) und einem Differential-Anteil (D-Glied), ist die Stellgröße durch

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\xi) d\xi + T_V \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

gegeben [60, S. 82]. Die *Verstärkung*  $K_P$ , die *Nachstellzeit*  $T_N$  und die *Vorhaltzeit*  $T_V$  sind im Vorfeld geeignet zu wählen, so dass das zu regelnde System beispielsweise der Führungsgröße folgt.

Um eine Bewertung der Güte eines Reglers vornehmen zu können, wird häufig ein Zustandsraummodell des Systems herangezogen, welches seine Dynamik mathematisch beschreibt.

**Definition 2.21** (Zustandsraummodell)

Im Rahmen dieser Arbeit wird zwischen einem linearen und einem nichtlinearen Zustandsraummodell unterschieden.

1. Es sei ein System mit  $n \in \mathbb{N}$  Zustandsgrößen,  $m \in \mathbb{N}$  Stellgrößen (Steuerungen) und  $n_{aus} \in \mathbb{N}$  Regelgrößen (Ausgabegrößen) gegeben.
2. Zusätzlich zu 1. seien die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_{aus} \times n}$  und  $D \in \mathbb{R}^{n_{aus} \times m}$  gegeben. Ein lineares Zustandsraummodell ist dann durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A \cdot \mathbf{x}(t) + B \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

definiert.

3. Es seien nun zusätzlich zu 1. die Funktionen  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  und  $\mathbf{k} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n_{aus}})$  gegeben. Ein nichtlineares Zustandsraummodell ist dann durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

definiert.

Eines der Kriterien, die die oben genannte Güte eines Reglers charakterisieren, ist seine Fähigkeit das zu regelnde System zu stabilisieren. Die Untersuchung von Stabilität ist ein wichtiger Teil der Analyse der Eigenschaften eines Reglers. Im Folgenden wird dies zunächst für lineare Systeme ausgeführt. Dabei wird Stabilität in einer Umgebung eines *kritischen Punktes* des dynamischen Systems untersucht [7, S. 89], [61, S. 160 f.].

Dazu sei zunächst ein lineares System (2.2.1) gegeben. Für Systeme dieser Form ist  $\mathbf{x}_{equi} = \mathbf{0}$  grundsätzlich ein kritischer Punkt, d.h. es gilt

$$\dot{\mathbf{x}}_{equi} = A \cdot \mathbf{x}_{equi} = \mathbf{0}.$$

Für nicht-singuläre Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist  $\mathbf{x}_{equi}$  sogar der einzige kritische Punkt.

**Definition 2.22** (Zustandsstabilität von linearen Systemen nach [62, S. 383])

Es sei ein lineares System der Form (2.2.1) mit  $u(t) \equiv \mathbf{0}$  gegeben. Es existiere zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $t > 0$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon \text{ für } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ und } \|\mathbf{x}_0\| \leq \delta$$

gilt.  $\mathbf{x}_{equi}$  heißt asymptotisch stabil, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

gilt.

Damit beschreibt Stabilität „die Eigenschaft eines Systems, auf eine beschränkte Erregung mit einer beschränkten Bewegung zu reagieren“ [62, S. 381]. Konvergiert das System nach einer beschränkten Auslenkung wieder zurück in den kritischen Punkt, dann ist es sogar asymptotisch stabil. In der Praxis wird Stabilität anhand von mathematischen Kriterien nachgewiesen oder widerlegt. Für lineare homogene Systeme (2.2.1) lässt sich Zustandsstabilität für kritische Punkte anhand der Eigenwerte der Systemmatrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  untersuchen. Ein *Fundamentalsystem* eines linearen homogenen Systems (2.2.1) ist eine Basis des Raumes, in dem die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  für (2.2.1) liegt [38, S. 557]. Ein solches System ist durch die Spalten der Matrixexponentialen  $\exp(At)$  gegeben [61, S. 149]. Für  $j = 1, \dots, r$  seien  $\xi_j \in \mathbb{C}$  die komplexwertigen Eigenwerte der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $k_j \in \mathbb{N}$  für  $j = 1, \dots, r$  seien ihre entsprechenden Vielfachheiten, wodurch  $\sum_{j=1}^n k_j = n$  gelten muss [61, S. 151]. Zählt man die Eigenwerte  $\xi_j$  gemäß ihren Vielfachheiten mehrfach, erhält man daher  $n$  Eigenwerte  $\bar{\xi}_j \in \mathbb{C}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Ihre Eigenvektoren seien mit  $\mathbf{v}_j$  für  $j = 1, \dots, n$  bezeichnet. Damit ist

$$e^{\bar{\xi}_1 t} \mathbf{v}_1, \dots, e^{\bar{\xi}_n t} \mathbf{v}_n$$

ein Fundamentalsystem für (2.2.1) [61, S. 151]. Jede Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des homogenen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}$$

ist daher eine Linearkombination der Vektoren des Fundamentalsystems.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{v}_j e^{\bar{\xi}_j t}$$

Die Koeffizienten  $c_j$  sind derart zu wählen, dass  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  gilt. Die Eigenwerte sind komplexwertig und lassen sich daher in einen Realteil und einen Imaginärteil separieren.

$$\bar{\xi}_j = a_j + ib_j$$

wobei  $a_j \in \mathbb{R}$  und  $b_j \in \mathbb{R}$  gilt und  $i$  hier die imaginäre Zahl derart bezeichnet, dass  $i^2 = -1$

gilt. Damit lässt sich der Term

$$e^{\bar{\xi}_j} = e^{a_j} e^{ib_j}$$

umformulieren. Folgende Stabilitätskriterien lassen sich daher direkt angeben.

### Satz 2.23

Es sei ein lineares System der Form (2.2.1) mit  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$  gegeben.

Ein kritischer Punkt  $\mathbf{x}_{equi}$  ist stabil, falls die Realteile aller Eigenwerte  $\xi_j$  nicht positiv sind, d.h.

$$\Re \{ \bar{\xi}_j \} \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Ein kritischer Punkt  $\mathbf{x}_{equi}$  ist asymptotisch stabil, falls die Realteile aller Eigenwerte  $\xi_j$  negativ sind, d.h.

$$\Re \{ \bar{\xi}_j \} < 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

*Beweis.* Für einen Beweis sei beispielsweise auf [61, S. 158 f.], [62, S. 384 f.] verwiesen.

Für nichtlineare Systeme der Form (2.2.2) erweiterte Alexander Ljapunow (1857 - 1918) den Stabilitätsbegriff. Um Stabilität eines Systems nach Ljapunow nachweisen zu können, wird eine sogenannte *Ljapunow-Funktion* benötigt.

### Definition 2.24 (Ljapunow-Funktion)

Für ein  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

gegeben.  $\mathbf{x}_{equi} \in \mathbb{R}^n$  sei ein kritischer Punkt, d.h. es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{equi}) = \mathbf{0}.$$

Als Ljapunow-Funktion wird ein  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit den beiden folgenden Eigenschaften bezeichnet.

1.  $L$  hat in  $\mathbf{x}_{equi}$  ein isoliertes Minimum mit  $L(\mathbf{x}_{equi}) = 0$ .
2. Die Ableitung  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}$  nimmt nur nicht positive oder nur nicht negative Werte an.

„Die Bedingung (...) [ $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \leq 0$  bzw.  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \geq 0$ ] auf  $\Omega$  impliziert also, dass die Funktion  $L$  auf jeder (...) Integralkurve monoton fällt bzw. wächst“ [61, S. 161].

**Satz 2.25** (Ljapunow)

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bilde  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x).$$

$\mathbf{x}_{equi} \in \mathbb{R}^n$  sei ein zugehöriger kritischer Punkt. Zu  $\mathbf{f}$  sei  $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Ljapunow-Funktion. Dann gilt:

1.  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} \leq 0$  auf  $\Omega \Rightarrow \mathbf{x}_{equi}$  ist ein stabiler Punkt.
2.  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} > 0$  auf  $\Omega \setminus \{\mathbf{x}_{equi}\} \Rightarrow \mathbf{x}_{equi}$  ist kein stabiler Punkt.

*Beweis.* Für den Beweis sei auf [61, S. 161 f.] verwiesen.

### 2.2.2 Konzept der modellprädiktiven Regelung

Mittels Optimaler Steuerung lassen sich Stellgrößen  $\mathbf{u}(t)$  derart bestimmen, dass sie ein Zielfunktional unter gegebenen Beschränkungen minimieren, vgl. Abschnitt 2.1. Diese Beschränkungen können in Form einer Systemdynamik, Anfangs- und Endbedingungen sowie Ungleichungsbeschränkungen auftreten. Vorausgesetzt wird dabei zunächst nur, dass eine Lösung überhaupt existiert. So kann ein Rennwagen in möglichst kurzer Zeit durch einen Kurs oder ein Raumfahrzeug beispielsweise mit minimalem Treibstoffverbrauch zum Planet Venus geführt werden.

Die Systemdynamik wird dabei in der Regel stark vereinfacht abgebildet. Ziel ist es, eine Trajektorie für das Gesamtsystem zu bestimmen, ohne dabei die Dynamik von Komponenten zu genau zu berücksichtigen, soweit dies nicht zwingend erforderlich ist. Ist auf Basis dieses Modells eine Referenztrajektorie mittels Optimaler Steuerung berechnet worden, können Störungen oder Modellungenauigkeiten nur noch durch den Regler berücksichtigt werden, der letztendlich das Abfahren der Trajektorie sicher stellt. Im Fall der WEA ist die optimale Energieausbeute abhängig von dem äußeren Einflussfaktor der Windgeschwindigkeit, aber auch von den Systemzuständen Rotordrehzahl und Rotorblattanstellwinkeln. Somit muss auch die Referenztrajektorie zumindest abhängig von der Drehzahl gewählt werden.

Die Idee der MPC ist es, über eine Rückkopplung mittels des aktuellen Systemzustandes im Verlauf der Regelung jeweils neu die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  zu berechnen [63, S. 792]. Implizit wird damit auch jeweils eine neue – nun zustandsabhängige – Referenztrajektorie für die Systemzustände berechnet, die jedoch beim Einsatz von MPC nicht mehr benötigt wird. Im Rahmen einer MPC wird eine optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  zu festen Abtastzeitpunkten neu berechnet. Im Fall der WEA wird sie beispielsweise im Takt von 100 ms berechnet, vgl. Abschnitt 5.4.

**Definition 2.26** (Abtastzeitpunkte der MPC)

Die Abtastzeitpunkte der MPC seien mit  $\iota_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , gekennzeichnet. Sie bilden eine äquidistante Diskretisierung des Intervalls  $[\iota_0, \infty[$ .  $\iota_0$  bezeichnet dabei den Zeitpunkt zu Beginn der Regelung. Sie werden in der Menge der Abtastzeitpunkte  $\Omega_\iota := \{\iota_i : i \in \mathbb{N}_0\}$  zusammengefasst.

Die berechnete optimale Steuerung wird jeweils für die Länge des Regelintervalls auf das System angewandt, bevor sie neu bestimmt werden muss.

**Definition 2.27** (Abtastrate und Länge des Regelintervalls)

Nach Definition 2.26 sind die Abtastzeitpunkte  $\iota_i$  äquidistant verteilt. Damit existiert ein  $\Gamma_h \in \mathbb{R}_{>0}$  derart, dass

$$\Gamma_h = \iota_{i+1} - \iota_i, \forall i \in \mathbb{N}_0$$

gilt.  $\Gamma_h$  wird im Folgenden als Länge des Regelintervalls bezeichnet. Ihr Inverses entspricht der klassischen Abtastrate eines Reglers.

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, ist das dynamische Modell, welches im Rahmen der optimalen Steuerung verwendet wird, in der Regel ein vereinfachtes Modell des mechanischen Systems. Modell- und Messungenauigkeiten führen zu einer Abweichung des vorhergesagten zum tatsächlichen Systemverlauf. Zu jedem Abtastzeitpunkt ist daher – wie in der Regelung üblich – ein Systemzustand zu bestimmen.

**Definition 2.28** (Systemzustand zum Abtastzeitpunkt  $\iota_i$ )

Es sei ein OSP 2.1 gegeben. Der gemessene oder geschätzte Systemzustand zum Abtastzeitpunkt  $\iota_i$  wird mit  $\mathbf{x}_0(\iota_i) \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet. Durch stückweise lineare Interpolation wird dies auf eine stetige Funktion  $\mathbf{x}_0(\iota) \in \mathcal{C}_0([\iota_0, \infty[, \mathbb{R}^n)$  erweitert.

Zur Abgrenzung des aktuellen Regelzeitpunktes  $\iota$  von der Zeit  $t$ , welche auf dem Vorhersagehorizont  $t \in [\iota, \iota + \mathcal{T}_h]$  definiert ist und auf dem die jeweiligen OSP gelöst werden, wird hier der griechische Buchstabe  $\iota$  verwendet. In der Literatur wird dazu auch das Symbol  $\tau$  herangezogen, welches im Rahmen der vorliegenden Arbeit der mechanischen Nennspannung aufgrund von Torsionbelastung vorbehalten ist, vgl. Kapitel 3.

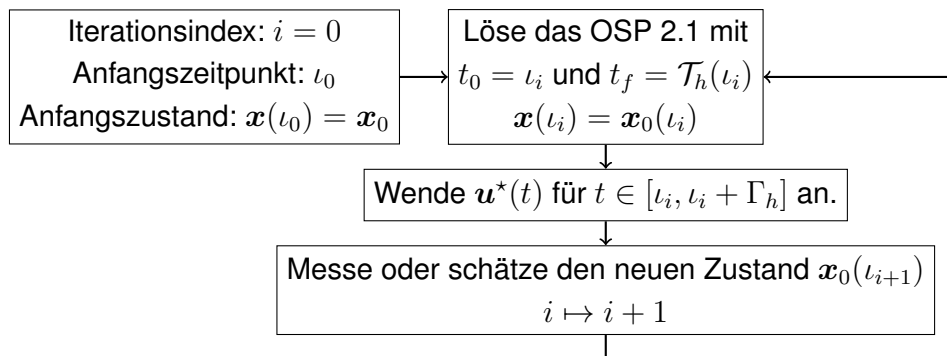
Zu jedem der Abtastzeitpunkte  $\iota_i$  gilt es, ein OSP zum jeweiligen Systemzustand  $\mathbf{x}_0(\iota_i)$  zu lösen. Diese OSP werden selten auf dem gesamten verbleibenden Regelintervall – möglicherweise ist dieser unendlich oder liegt im Bereich von mehreren Jahren – gelöst, sondern auf einem Vorhersagehorizont [63, S. 790].

**Definition 2.29** (Vorhersagehorizont  $\mathcal{T}_h(\ell)$ )

Die Funktion  $\mathcal{T}_h \in \mathcal{C}_0([\ell_0, \infty[, ]0, \infty[)$  wird als Vorhersagehorizont bezeichnet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Länge des Vorhersagehorizontes zu jedem  $\ell_i$  als konstant angenommen, es kann jedoch mit den  $\ell_i$  variieren, d.h. es kann  $\mathcal{T}_h(\ell_i) \neq \mathcal{T}_h(\ell_j)$  für  $i \neq j$  gelten.

Damit lässt sich nun das Konzept der MPC wie folgt beschreiben.



1. Ein MPC-Iterationsschritt zum Zeitpunkt  $\ell_i$  beginnt mit dem Lösen des OSP  $Q(\mathbf{x}_0(\ell_i), \ell_i, \ell_i + \mathcal{T}_h(\ell_i))$ .
2. Dann wird die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  für  $t \in [\ell_i, \ell_i + \Gamma_h(\ell_i)]$  auf das System angewendet.
3. Der Iterationsschritt endet mit dem Messen oder Schätzen des aktuellen Systemzustandes.

### 2.2.3 Stabilität der modellprädiktiven Regelung

Die Entwicklung von MPC verlief anfangs nicht einheitlich, sondern in einigen parallelen Strängen. So geht eine der ersten Arbeiten zu diesem Thema auf [64] zurück, worin lineare Programmierung für lineare Systeme mit harten Steuerungsbeschränkungen betrachtet wurden. Weitere Arbeiten folgten auf dem Gebiet der Prozesssteuerung [65], [66]. Für einen Überblick zur Entwicklung und zu industriellen Anwendungsbeispielen bis dahin sei auf [67] verwiesen. Mit steigender Rechenleistung und sinkenden Prozessorkosten kam MPC auch in der Robotik [68] und bei Verbrennungskraftmaschinen [69] zum Einsatz.

Die Analyse der Stabilität von zustandsbeschränkter nichtlinearer MPC hat mit der Entdeckung einen entscheidenden Durchbruch [63, S. 794], dass die *Werte-Funktion* (engl. *Value-function*) als Lösung der *Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung* (HJB) als Ljapunow-Funktion



herangezogen werden kann. Für unbeschränkte MPC konnte damit Stabilität mittels Gleichungsbedingungen zum Endzeitpunkt  $t = t_f$  gezeigt werden [70].

Die HJB-Gleichung ist integraler Bestandteil der *Dynamischen Programmierung*. Sie löst beispielsweise Probleme der Form [71, S. 552]

$$C_{x,t}[\mathbf{u}(\cdot)] := \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds \quad (2.2.3)$$

wobei

$$\frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s))$$

gilt. Als *Werte-Funktion* wird [71, S. 552]

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}, t) := \inf_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{A}} C_{x,t}[\mathbf{u}(\cdot)]$$

bezeichnet, welche das Funktional (2.2.3) unter allen zulässigen Steuerungen

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow A\}$$

zum Zustand  $\mathbf{x}$  und zu kompaktem  $A \in \mathbb{R}^m$  minimiert. Damit wird ebenfalls die Lösung des Problems 2.1 gesucht, wobei in diesem Beispiel keine Zustandsbeschränkungen der Form (2.1.5) auftreten. Als notwendige und hinreichende Bedingung für ein Optimum löst  $\mathcal{V}$  die HJB-Gleichung [71, S. 557 f.], welche eine partielle Differentialgleichung (PDE) 1. Ordnung ist.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{V} + \min_{\mathbf{a} \in A} \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \left[ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \right\} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times ]t_0, t_f[ \\ \mathcal{V} = \Phi \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times t = t_f \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Da die Bedingungen aus Satz 2.11 notwendig und die HJB-Gleichung notwendig und hinreichend für ein Optimum sind, muss jede Lösung von (2.2.4) auch die Bedingungen aus Satz 2.11 erfüllen. Damit müssen beide Bedingungen in einem Zusammenhang zueinander stehen. Eine Herangehensweise zur Bestimmung der Lösung einer PDE 1. Ordnung ist die *Methode der Charakteristiken* [71, S. 97]. Sie zerlegt die entsprechende PDE in die Lösung einer Schar benachbarter gewöhnlicher DGL, welche als *Charakteristiken* bezeichnet werden. Diese DGL entsprechen genau den beiden Bedingungen (2.1.10) und (2.1.11), was somit die HJB-Gleichung und die Bedingungen aus Satz 2.11 verbindet. Diesen Zusammenhang versucht man sich bei Untersuchungen von Stabilität zunutze zu machen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird zum Nachweis der Stabilität das Konzept der *dual-mode* Regelung angewandt [63, S. 799]. Dazu wird das Intervall  $[t_0, \infty]$  in die beiden Intervalle  $[t_0, t_f]$  und  $[t_f, \infty]$  aufgeteilt und ein Regelgesetz  $\kappa(\mathbf{x}(t))$  für das zweite Intervall aufgesetzt.

$$\mathbf{u}^*(t) = \kappa(\mathbf{x}(t)) \text{ für } t > t_f$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\kappa(\mathbf{x}(t))$  nie als Regelgesetz auf das System angewendet wird, da nach jedem MPC-Schritt ein neues OSP gelöst wird. Es wird lediglich zur Diskussion der Stabilität eingeführt [72, S. 33 f.]. In Erweiterung zu Definition 2.9 sei  $\mathcal{X}_f$  definiert, welche eine zulässige Menge an Zuständen zum Endzeitpunkt  $t = t_f$  festlegt, d.h. es wird  $\mathbf{x}^*(t_f) \in \mathcal{X}_f$  als weitere Bedingung gefordert. Dann ist MPC für zeit-kontinuierliche Systeme asymptotisch stabil, falls

- $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}_f$  abgeschlossen und  $\mathbf{0} \in \mathcal{X}_f$
- $\kappa(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_f$
- $\mathcal{X}_f$  ist positiv invariant für  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}))$
- $[\dot{\Phi} + L](\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x})) \leq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_f$

gilt [63, S. 799]. Für eine detailliertere Diskussion wird auf [63], [7, S. 87 ff.] und [7, S. 113 ff.] verwiesen.

### 3 Grundlagen der Betriebsfestigkeitsrechnung

Die Anfänge der *Betriebsfestigkeitsrechnung* werden häufig auf Ernst Gaßner und das Jahr 1939 zurückgeführt [31, S. 7], [73], [74, S. 1.1]. Dabei wird jedoch in der Regel auf zentrale Erkenntnisse von August Wöhler (1819-1914) zurückgegriffen. Als *königlich preußischer Obermaschinenmeister* hat er als Erster erkannt, dass ein Versagen von Eisenbahnachsen auch durch andauernde Belastungen verursacht werden kann, welche signifikant unterhalb der maximalen statischen Belastung liegen [75, S. 154]. Ähnliche Arbeiten im Bereich der Lebensdauerabschätzung von Wälzlagern gehen auf Richard Stribeck (1861-1850) – Professor für Maschinenelemente an der TU Dresden in den Jahren 1892 bis 1898 – und Arvid Palmgren (1890-1971) zurück [76, S. 189]. Unter dem Begriff der *Betriebsfestigkeit* versteht man heute „eine neuzeitliche, lebensdauerorientierte Auslegung schwingbeanspruchter Bauteile und Konstruktionen, die den gesetzmäßig fassbaren Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Größe der Schwingbeanspruchung berücksichtigt“ [31, S. 5]. Dabei unterscheidet man in der Regel zwischen einem *Gewaltbruch*, der auf eine einmalige bzw. kurzzeitige – unter Umständen auch missbräuchliche – Last zurückzuführen ist, die sofort zum Versagen des Bauteils führt, und einem *Schwing- bzw. Ermüdungsbruch*. Letzterer ist auf eine andauernde schwingende Beanspruchung des Bauteils zurückzuführen, welche in der Regel durch den Betrieb hervorgerufen wird.

Der im Rahmen dieser Arbeit herangezogene Weg zur Beurteilung der Betriebsfestigkeit folgt den entsprechenden Vorgaben der *FKM-Richtlinie* [77]. Sie reicht in Teilen bis in die 1960iger Jahre zurück, welche ihren Ursprung in Regelwerken der damaligen Deutschen Demokratischen Republik findet. Um das bis zur Wiedervereinigung Deutschlands und darüber hinaus erarbeitete Wissen zu erhalten, wurde beim Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (FKM) „ein durchgängiges Regelwerk für den rechnerischen Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile“ [78, S. 5] entwickelt und 1994 in ihrer ersten Auflage veröffentlicht.

Während sich die im vorangegangenen Kapitel 2 diskutierte Optimale Steuerung und MPC rein aus der Theorie herleiten lassen und dann erst in die praktische Anwendung überführt werden, leitet sich die Betriebsfestigkeitsrechnung aufgrund ihrer physikalischen Komplexität rein aus dem praktischen Versuch ab. Als zentraler Bestandteil dient der *Wöhler-Versuch* bzw. *Dauerschwing-Versuch*. Er „bezieht sich auf den einfachsten Fall einer Schwingbeanspruchung, eine zwischen festen Grenzwerten schwingende, z. B. sinusförmige mit der Zeit veränderliche Spannungs-Zeit-Funktion“ [31, S. 21]. Als Versuchsergebnis erhält man die An-

zahl der Schwingspiele, die ein Bauteil mit einem bestimmten Prüfquerschnitt zu verschiedenen Schwingamplituden um einen konstanten Mittelwert erträgt, bis es zum Schwingbruch bzw. Schwinganriss kommt, vgl. Abschnitt 3.2.

Aus einer Belastungs-Zeit-Funktion des realen Betriebs oder einer numerischen Simulation entsteht in der Regel eine Beanspruchung des Bauteils, die sich deutlich von den idealisierten Beanspruchungsannahmen des Wöhler-Versuchs unterscheidet. Mit den im Folgenden zusammengefassten Methoden der FKM-Richtlinie kann aus einer zeitlich in Amplitude und Mittelspannung variierenden Beanspruchungs-Zeit-Funktion eine äquivalente Amplitude zu entsprechender Mittelspannung berechnet werden, so dass diese der Wöhlerlinie gegenübergestellt werden kann. Man spricht auch vom *Rechnen gegen die Wöhlerlinie*, vgl. Abschnitt 3.3.

### 3.1 Beanspruchung und Belastung von Bauteilen

Zwischen einer *Beanspruchung* und *Belastung* besteht ein grundlegender Unterschied. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Begriff *Beanspruchung* folgendermaßen verwendet.

**Definition 3.1** (Beanspruchung und Beanspruchungs-Zeit-Funktion)

*Als Beanspruchung wird die Auswirkung auf das Innere eines Bauteils verstanden, welche durch eine äußere Belastung auf das Bauteil hervorgerufen wird. Die Beanspruchung wird in Form mechanischer Spannungen innerhalb eines Werkstoffs beschrieben. Ihr Zeitverlauf wird als Beanspruchungs-Zeit-Funktion bezeichnet.*

**Definition 3.2** (Belastung und Belastungs-Zeit-Funktion)

*Als Belastung werden allgemein Kräfte und Momente bezeichnet, die von außen auf ein Bauteil einwirken. Im Rahmen der Analyse der Betriebsfestigkeit des Triebstranges der WEA werden im Folgenden nur Momente betrachtet, die zu einer Torsion rotationssymmetrischer Bauteile – z. B. Wellen und Achsen – führen. Ihr Zeitverlauf wird als Belastungs-Zeit-Funktionen bezeichnet.*

Folglich werden nachfolgend auch ausschließlich Torsionsspannungen und deren Einflussgröße hinsichtlich Betriebsfestigkeit betrachtet. Die jeweiligen Spannungen als Maß für die Beanspruchung lassen sich im Allgemeinen mit den Gesetzen der Kontinuumsmechanik bzw. Festigkeitslehre berechnen. Bei linearen Werkstoffgesetzen stehen die Spannungen über das *Elastizitätsmodul* und die *Querkontraktionszahl* in einem linearen Zusammenhang mit den *Dehnungen*, welche die räumlichen Ableitungen der örtlichen *Verschiebungen* sind [79, S. 81 ff.]. Die Verschiebungen werden in der Regel mittels numerischer Verfahren wie der

*Finite Elemente Methode* (FEM) berechnet. Kann, wie im Fall stabförmiger Bauteile, ein Bezugsquerschnitt sinnvoll festgelegt werden, lässt sich jedoch bezüglich dieses Querschnittes eine *Nennspannung* berechnen. Im Unterschied zu den *lokalen* Spannungen kann sie ohne die FEM gewonnen werden. Eines der beiden Ziele der vorliegenden Arbeit ist es, die Betriebsfestigkeit des Triebstranges im Rahmen der MPC einer WEA als Randbedingung der Reglerkonfiguration zu berücksichtigen. Diese wird an der Hauptwelle als Bindeelement des Getriebes und Rotors bestimmt, womit auf das weniger komplexe Konzept der Nennspannung zurückgegriffen wird. Bezüglich Torsion ist sie folgendermaßen definiert [31, S. 151].

**Definition 3.3** (Torsions-Nennspannung)

Zum Durchmesser  $d > 0$  werde ein kreisförmiger Bezugsquerschnitt  $A = \frac{d^2}{4}\pi$  eines stabförmigen Bauteils betrachtet. Zusätzlich sei mit  $M_x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Torsionsmoment auf dem Zeitintervall  $[t_0, t_f]$  gegeben, welches im Flächenschwerpunkt senkrecht auf den Querschnitt  $A$  und damit in axialer Richtung des Bauteils wirkt. Die Torsions-Nennspannung  $\tau_t(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  ist dann über  $\tau_t(t) := \frac{M_x(t)}{W_t}$  definiert. Das Widerstandsmoment bei Torsion  $W_t$  zu dem kreisförmigen Bezugsquerschnitt  $A$  ist durch  $W_t = \frac{d^3\pi}{16}$  gegeben.

$\tau_t(t)$  ist damit nach Definition 3.1 eine Beanspruchungs-Zeit-Funktion.

## 3.2 Die Wöhlerlinie

Wie bereits erwähnt, ist die *Wöhlerlinie* (engl. *S-N-Curve*) das Ergebnis des Wöhler-Versuchs. Dabei wird eine Probe zu einem Prüfquerschnitt solange mit verschiedenen Amplituden  $\tau_{t,a}$  belastet, bis jeweils ein Schwingbruch oder Schwinganriss beobachtet wird. Die derart gewonnenen Versuchspunkte werden bestmöglich durch eine Ansatzfunktion approximiert. Eine von mehreren heute üblichen Funktionsansätzen für den Zeit- und Dauerfestigkeitsbereich ist dabei folgender [31, S. 26].

$$N_\tau = \begin{cases} N_D \left( \frac{\tau_{t,a}}{\tau_D} \right)^{-k} & \text{für } \tau_{t,a} \geq \tau_D, \\ \infty & \text{für } \tau_{t,a} < \tau_D. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$N_D$  wird als *Schwingenspielzahl im Knickpunkt* bzw. *Eckschwingspielzahl*,  $\tau_D$  als *Dauerfestigkeitswert* bzw. *dauerfeste Amplitude*,  $\tau_f$  als *Formdehngrenze* und  $k$  als *Wöhlerexponent* bezeichnet. Der typische Verlauf einer Wöhlerlinie ist in Abbildung 3.1 dargestellt, wobei dieser im Bereich des Knickpunktes  $N_D$  durch die Gleichung (3.2.1) in doppelt-logarithmischer Darstellung links- und rechtsseitig linearisiert wird [74, S. 8.4], [31, S. 26]. Auch flacht die Wöhlerlinie bei Amplituden im *Kurzzeitfestigkeitsbereich* in der Regel ab. Dieser Bereich der Wöhlerlinie wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet.

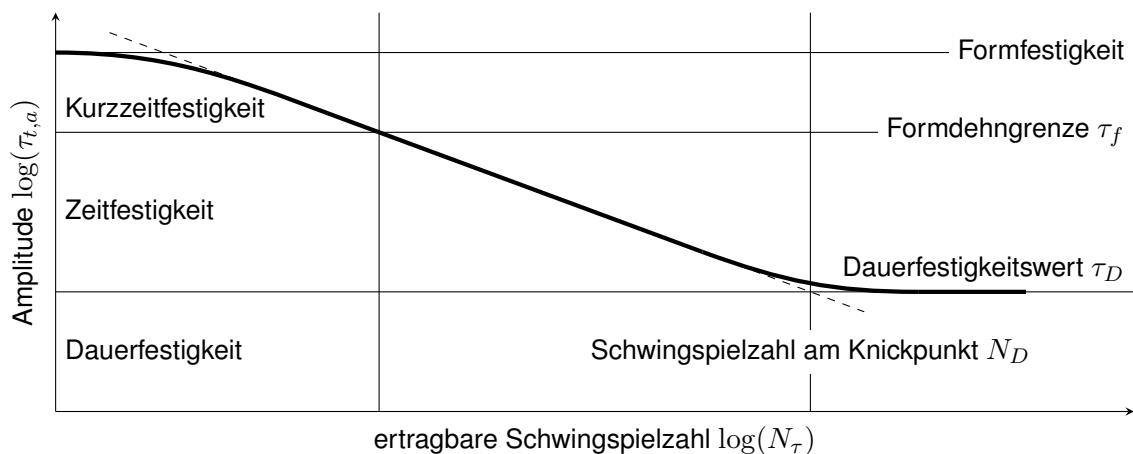


Abbildung 3.1: Beispiel einer Wöhlerlinie

Eine bisher noch nicht erwähnte, für die Betriebsfestigkeitsrechnung jedoch wichtige Größe ist das Spannungsverhältnis  $R$ .

**Definition 3.4** (Spannungsverhältnis  $R$ )

Es sei eine Amplitude  $\tau_{t,a}$  und eine Mittelspannung  $\tau_{t,m}$  gegeben. Das Spannungsverhältnis  $R$  ist definiert als das Verhältnis von minimaler Spannung bzw. Unterspannung und maximaler Spannung bzw. Oberspannung [31, S. 21].

$$R = \frac{\tau_{t,m} - \tau_{t,a}}{\tau_{t,m} + \tau_{t,a}} \quad (3.2.2)$$

Wöhlerlinien werden in der Regel entweder zu konstanter Mittelspannung  $\tau_{t,m}$  oder zu einem konstanten Spannungsverhältnis  $R$  bestimmt [74, S. 8.2]. In der vorliegenden Arbeit werden nur Wöhlerlinien betrachtet, die ein Spannungsverhältnis von  $R = -1$  aufweisen. Man spricht dabei von einer *Wechselbeanspruchung* [31, S. 22].

Streng genommen werden heute Wöhlerlinien in der Regel auf Basis von Proben mit einem Durchmesser von 10 mm bzw. 16 mm gewonnen [75, S. 155]. Diese *Proben-Wöhlerlinie* muss geeignet in eine *Bauteil-Wöhlerlinie* überführt werden, welche die geometrischen Abmessungen der zu prüfenden Welle berücksichtigt. Dabei spielt der Konstruktionsfaktor  $K_{WK}$  eine entscheidende Rolle. Da im weiteren Verlauf der Arbeit ein relativer Vergleich verschiedener Belastungs-Zeit-Funktionen, welche auf das selbe Bauteil wirken, durchgeführt wird, kann dieser Zusammenhang vernachlässigt werden. Darauf wird in Kommentar 3.12 weiter unten nochmals detailliert eingegangen.

### 3.3 Bestimmung eines mittelspannungsfreien Lastkollektivs aus einer Beanspruchungs-Zeit-Funktion

Vorwiegend maßgeblich für die Ermüdung eines Bauteils sind die in der Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau_t(t)$  enthaltenen *Schwingamplituden* bzw. *Ausschlagsamplituden*  $\tau_{t,a}$ , deren Mittelwerte bzw. *Mittelspannungen*  $\tau_{t,m}$  und deren Häufigkeit  $n_\tau$  – die sogenannten *Schwingspiele*, *Schwingspielzahlen*, *Lastspiele*, *Lastwechsel* oder *Zyklen* [31, S. 23], [74, S. 2.1]. Da in einer beliebigen Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau_t(t)$  verschiedene  $\tau_{t,a}$ ,  $\tau_{t,m}$  und  $n_\tau$  auftreten können, muss  $\tau_t(t)$  letztendlich in eine Menge von 3-Tupel  $\mathcal{R}_\tau := \{(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau)_i : i = 1, \dots, N_\tau\}$  überführt werden. Ziel dieses Abschnittes ist es,  $\tau_t(t)$  in ein *Lastkollektiv* zu überführen, welches gegen eine Wöhlerlinie gerechnet werden kann. Dies geschieht in der Regel mittels des zweiparametrischen *Rainflow*-Zählverfahrens [74, S. 6.20], [77, S. 36, 2.1.3.1]. In einem zweiten von drei Schritten werden geeignete Klassen von Schwingamplituden  $\tau_{t,a}^{(j)}$  für  $j = 1, \dots, N_a$  und Mittelspannungen  $\tau_{t,m}^{(k)}$  für  $k = 1, \dots, N_m$  gebildet, die jeweils einen bestimmten Bereich  $\Delta\tau_{t,a}$  bzw.  $\Delta\tau_{t,m}$  abdecken, d.h.  $(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau)_i \in \mathcal{R}_\tau$  fallen in  $\tau_{t,a}^{(j)}$  und  $\tau_{t,m}^{(k)}$ , falls

$$\left| \tau_{t,a} - \tau_{t,a}^{(j)} \right| \leq \frac{\Delta\tau_{t,a}}{2} \quad \text{und} \quad \left| \tau_{t,m} - \tau_{t,m}^{(k)} \right| \leq \frac{\Delta\tau_{t,m}}{2}$$

gilt. Die Schwingenspielzahlen  $n_\tau$  innerhalb einer Klasse werden jeweils addiert. Insgesamt wird dieser Vorgang auch als *Klassifizierung* bezeichnet.

#### Algorithmus 3.5 (Rainflow-Klassifizierung oder Rainflow-Zählverfahren)

Es sei eine Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau_t(t)$  gegeben. Des Weiteren bezeichne  $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1,\dots,\nu}$  mit  $\nu \geq 2$  die Folge aller Umkehrpunkte von  $\tau(t)$ , d.h.  $\hat{\tau}_i$  sind lokale Minima und Maxima von  $\tau_t(t)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2$ .

Das Rainflow-Verfahren zählt Halbzyklen oder halbe Schwingspiele. Jeder Halbzyklus besteht aus einer Ausschlagsamplitude  $\tau_{t,a}$  und einer Mittelspannung  $\tau_{t,m}$ . Bildlich gesprochen werden diese Größen durch die Bahnen von Regentropfen bestimmt, die von links in Richtung der Zeitachse auf dem Signal fließen. Haben sie ein Minimum oder Maximum erreicht, fallen sie entlang der Zeitachse, bis sie entweder wieder das Signal oder das Ende des Signals erreichen. Eine Bahn startet jeweils an einem Umkehrpunkt  $\hat{\tau}_i$  und legt letztendlich ein 3-Tupel  $(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, \frac{1}{2})$  fest, d.h. zur Schwingenspielzahl  $\frac{1}{2}$ .

Alle Halbzyklen werden in zwei Schritten bestimmt. In einem ersten Schritt startet eine Bahn jeweils in einem Minimum  $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1,3,\dots,\nu}$  und fließt zu den Maxima bei  $\{\hat{\tau}_i\}_{i=2,4,\dots,\nu}$  des Signals. Die Bahn, die bei  $\hat{\tau}_j$  mit  $j \in \{1, 3, \dots, \nu\}$  startet, endet, sobald eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist.

- Das Ende des Signal ist erreicht.
- Die Bahn vereinigt sich an einem Maximum mit einer Bahn, die zu einem früheren Minimum  $\hat{\tau}_k$  mit  $k < j$  gestartet ist.
- Die Bahn passiert eine Minimum  $\hat{\tau}_k$ , welches kleiner oder gleich dem Minimum  $\hat{\tau}_j$  ist, an dem die Bahn gestartet ist.

In dem zweiten Schritt startet eine Bahn jeweils in einem Maximum  $\{\hat{\tau}_i\}_{i=2,4,\dots,\nu}$  und fließt zu den Minima bei  $\{\hat{\tau}_i\}_{i=1,3,\dots,\nu}$  des Signals. Die Bahn, die bei  $\hat{\tau}_j$  mit  $j \in \{2, 4, \dots, \nu\}$  startet, endet, sobald eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist.

- Das Ende des Signal ist erreicht.
- Die Bahn vereinigt sich an einem Minimum mit einer Bahn, die zu einem früheren Maximum  $\hat{\tau}_k$  mit  $k < j$  gestartet ist.
- Die Bahn passiert eine Maximum  $\hat{\tau}_k$ , welches größer oder gleich dem Maximum  $\hat{\tau}_j$  ist, an dem die Bahn gestartet ist.

Letztendlich erhält man  $\nu - 1$  3-Tupel  $\{(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, \frac{1}{2})_i\}$ . Nun fasst man noch alle 3-Tupel zusammen, die in die gleichen Klassen von Ausschlagsamplituden und Mittelspannungen fallen. Dabei werden ihre Schwingenspielzahlen addiert und man erhält eine Menge an 3-Tupeln  $\mathcal{R}_\tau := \{(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau)_i : i = 1, \dots, N_\tau\}$ .

Nach dem Rainflow-Zählverfahren erhält man somit eine Matrix mit den Schwingenspielzahlen  $n_\tau$  als Einträgen. Alle Werte in einer Spalte gehören zur gleichen Ausschlagsamplitudenklasse  $\tau_{t,a}^{(j)}$ . Dementsprechend gehören alle Werte einer Zeile zur gleichen Mittelspannungsklasse  $\tau_{t,m}^{(k)}$ . Diese Matrix wird auch *Rainflow-Matrix* bezeichnet. Graphisch als dreidimensionales Balkendiagramm dargestellt, gibt sie dem Ingenieur einen ersten Überblick über die im Bezugsquerschnitt  $A$  herrschende Bauteilbeanspruchung, vgl. mittlerer Graph in der Abbildung 3.2.

Um aus den klassifizierten Einträgen der Rainflowmatrix direkt ihre Schädigungsbeiträge berechnen zu können, wäre eine ganze Schar entsprechender Wöhlerlinien notwendig. Auch muss ein solches Vorgehen werkstoffmechanisch mit erheblichen Vorbehalten gesehen werden [31, S. 268]. Vielmehr macht man sich die unter anderem empirisch aus Versuchsergebnissen gewonnenen Zusammenhänge des *Haigh-Schaubildes* zu nutze, mittels derer unterschiedliche Nennspannungsamplituden  $\tau_{t,a}$  und Mittelspannungen  $\tau_{t,m}$ , die aus einer Beanspruchungs-Zeit-Funktion gewonnen wurden, auf schädigungsgleiche Schwingenspiele zu veränderten Amplituden und Mittelspannungen überführt werden können [77, S. 37, 2.1.4], [31, S. 184 f., S. 282]. Wie bereits erwähnt – und in Einklang mit der gängigen Vorgehensweise [31, S. 282] – werden im Rahmen der Arbeit nur Wöhlerlinien betrachtet, die einer



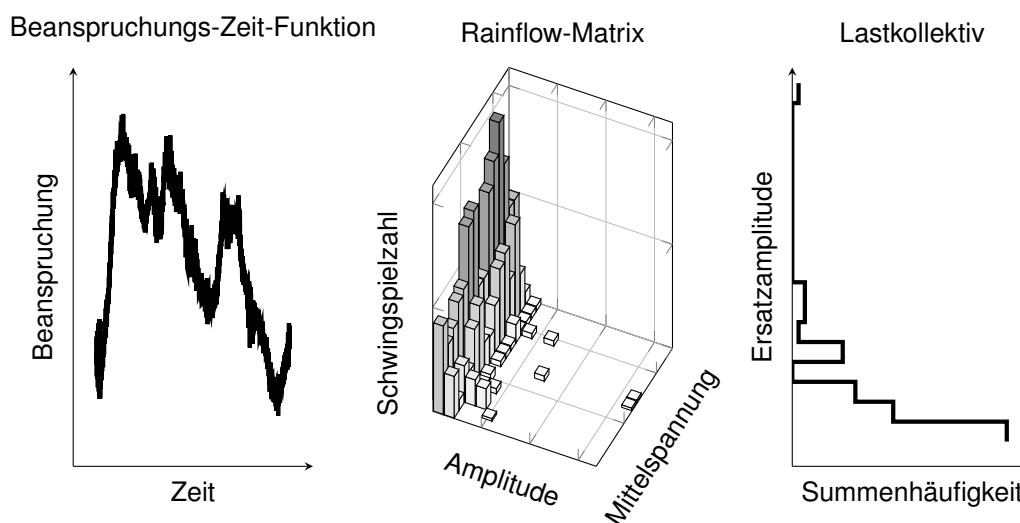


Abbildung 3.2: Von der Beanspruchungs-Zeit-Funktion zum Lastkollektiv

Mittelspannung  $\tau_{t,m} = 0$  unterliegen und damit einer Wechselbeanspruchung zum Spannungsverhältnis  $R = -1$  entsprechen. Daher gilt es, die gewonnenen Schwingspielzahlen aus der Rainflow-Klassifizierung in dem letzten von drei Schritten in ein mittlungs-freies Lastkollektiv zu überführen. Dabei wird jedem 3-Tupel  $(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau) \in \mathcal{R}_\tau$  ein 2-Tupel  $(\tau_{wk}, n_\tau) \in \mathcal{R}_{\tau, R=-1} := \{(\tau_{wk}, n_\tau)_i : i = 1, \dots, N_\tau\}$  zugeordnet, wobei die Amplitude  $\tau_{wk}$  unter Wechselbeanspruchung schädigungsäquivalent zum ursprünglichen 3-Tupel ist.

Ein für Schubbeanspruchung durch Torsion typisches *Haigh-Schaubild* oder *-Diagramm* ist in Abbildung 3.3 skizziert. Auf der Abszisse wird in der Regel die Mittelspannung  $\tau_{t,m}$  und auf der Ordinate die ertragbare Spannungsamplitude aufgetragen. Dargestellt sind äquivalente Spannungsamplituden zu verschiedenen Mittelspannungen. Ist ein 3-Tupel  $(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau) \in \mathcal{R}_\tau$  gegeben, kann dieses auf die mittlungs-freie ertragbare Äquivalenzamplitude  $\tau_{wk}$  bei  $R = -1$  zurückgeführt werden. Das Abfallen der ertragbaren Spannungsamplitude bei zu- oder abnehmender Mittelspannung wird auch als *Mittelspannungsempfindlichkeit* bezeichnet. Im Gegensatz zum Fall von Normalspannungen können unter Torsion keine Spannungsverhältnisse kleiner  $-1$  auftreten, weshalb in Gleichung (3.2.2) zur Berechnung des Spannungsverhältnisses  $R$  statt  $\tau_{t,m}$  der Betrag  $|\tau_{t,m}|$  zu verwenden und das gezeigte Diagramm achsensymmetrisch zur Ordinate ist [31, S. 185], [77, S. 49, 2.4.2.3].

**Beobachtung 3.6** (Mittlungs-freie ertragbare Äquivalenzamplitude)

Es sei  $(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau) \in \mathcal{R}_\tau$  ein 3-Tupel aus einer Rainflow-Klassifizierung einer Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau_t(t)$ . Die mittlungs-freie ertragbare Äquivalenzamplitude  $\tau_{wk}$  zu  $\tau_{t,a}$  und  $\tau_{t,m}$  berechnet sich durch [77, S. 49, 2.4.2.2.2]

$$(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau) \mapsto (\tau_{wk}, n_\tau) : \tau_{wk} = \frac{\tau_{t,a}}{K_{AK}}.$$

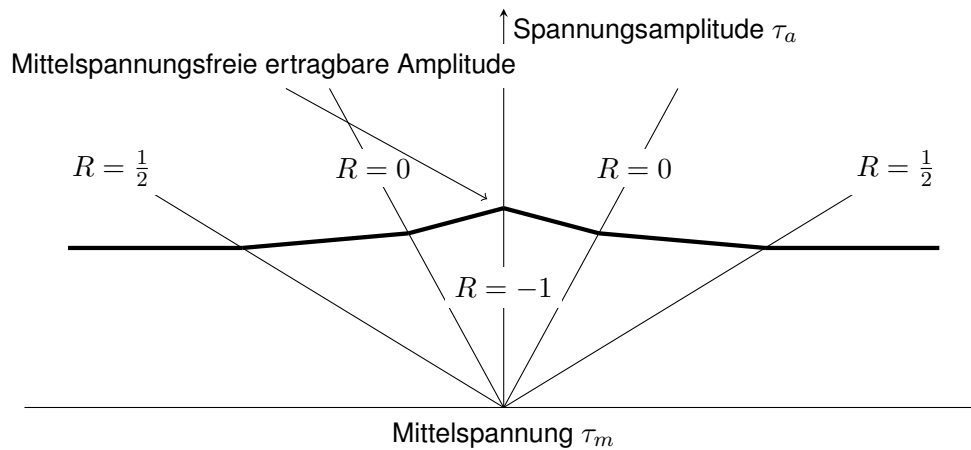


Abbildung 3.3: Haigh-Schaubild für Torsions-Nennspannung

Der Mittelspannungsfaktor  $K_{AK}$  berechnet sich dabei aus dem Spannungsverhältnis  $R$  für Torsionsbeanspruchungen und der Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\tau$ .

$$K_{AK} := \begin{cases} \frac{1}{1+M_\tau \frac{|\tau_{t,m}|}{\tau_{t,a}}} & \text{für } R \leq 0 \\ \frac{3+M_\tau}{(3+M_\tau) \left(3+M_\tau \frac{|\tau_{t,m}|}{\tau_{t,a}}\right)} & \text{für } 0 < R < 0,5 \\ \frac{3+M_\tau}{3(1+M_\tau)^2} & \text{für } R \geq 0,5. \end{cases}$$

Die Mittelspannungsempfindlichkeit  $M_\tau$  ist durch

$$M_\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ a_M \frac{R_m}{1000 \text{ MPa}} + b_m \right]$$

gegeben, wobei für Stahl  $a_m = 0,35$  und  $b_m = -0,1$  gilt [77, S. 48, 2.4.2.1.2].

Somit kann eine Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau_t(t)$  als Antwort auf eine torsionale Belastung eines wellenförmigen Bauteils über eine Rainflow-Klassifizierung  $\{(\tau_{t,a}, \tau_{t,m}, n_\tau)_i : i = 1, \dots, N_\tau\}$  in ein mittelspannungsfreies Lastkollektiv  $\{(\tau_{wk}, n_\tau)_i : i = 1, \dots, N_\tau\}$  überführt werden, vgl. Abbildung 3.2.

### 3.4 Schädigungsfunktion und Schädigungssumme

Liegt ein Lastkollektiv  $\mathcal{R}_{\tau, R=-1}$  aus Schwingamplituden  $\tau_{wk}$  und zugehörigen Häufigkeiten  $n_\tau$  vor, ist die *lineare Schädigungsakkumulations-Hypothese* nach Palmgren und Miner eines der einfachsten und bekanntesten Verfahren zur Bestimmung einer Lebensdauer, d.h. Gesamtanzahl von Schwingspielen bis zum theoretischen Bauteilversagen. „Grundgedanke

der lineare Schädigungsakkumulations-Hypothese ist, dass die schwingende Beanspruchung des Werkstoffs eine Schädigung bewirkt, die sich im Laufe ihrer Einwirkung akkumuliert, und zwar bis zum Erreichen eines kritischen Schädigungswertes“ [31, S. 266 f.]. Es gelten folgende Annahmen.

**Annahme 3.7**

Entweder überschreiten alle Schwingamplituden  $\tau_{wk}$  die Dauerfestigkeit  $\tau_D$  oder diese kann unberücksichtigt bleiben. In diesem Fall spricht man auch von der elementaren Form der Miner-Regel [31, S. 270].

**Annahme 3.8**

Die Wöhlerlinie kann entsprechend Gleichung (3.2.1) mathematisch beschrieben werden.

Dann können folgende Zusammenhänge hergeleitet werden [31, S. 270 f.]. Für einen Werkstoff seien der Wöhlerexponent  $k$  und eine ertragbare Schwingspielzahl  $N_A$  zur Amplitude  $\tau_A$  gegeben. Aus Gleichung (3.2.1) folgt dann für eine Amplitude  $\tau_{wk}$  und zugehöriger ertragbarer Schwingspielzahl  $N_\tau$

$$N_\tau \tau_{wk}^k = N_A \tau_A^k = N_D \tau_D^k = \text{konstant.}$$

Darauf basierend lässt sich zu jedem  $(\tau_{wk}, n_\tau)_i$  seine Schädigung  $D_i$  berechnen [31, S. 270].

**Definition 3.9** (Schädigung  $\mathcal{D}_i$ )

Die Schädigung  $\mathcal{D}_i$  zu einem 2-Tupel  $(\tau_{wk}, n_\tau)_i \in \mathcal{R}_{\tau, R=-1}$  ist das Verhältnis von tatsächlicher Schwingspielzahl  $n_\tau$  und der zur Amplitude  $\tau_{wk}$  ertragbaren Schwingspielzahl  $N_\tau$ .

$$\mathcal{D}_i = \frac{n_\tau}{N_\tau(\tau_{wk})} = \frac{n_\tau}{N_A} \left[ \frac{\tau_{wk}}{\tau_A} \right]^k$$

**Definition 3.10** (Schädigungssumme  $\mathcal{D}$ )

Auf Basis der linearen Schädigungsakkumulations-Hypothese berechnet sich die Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  zum Lastkollektiv  $\mathcal{R}_{\tau, R=-1}$  aus der Summe aller Schädigungen  $\mathcal{D}_i$ .

$$\mathcal{D} := \sum_i \mathcal{D}_i \tag{3.4.1}$$

Ein theoretisches Versagen des Bauteils tritt somit bei  $\mathcal{D} \geq 1$  ein.

Die sogenannte *Schädigungsfunktion* veranschaulicht den relativen Beitrag jedes 2-Tupels  $(\tau_{wk}, n_\tau)_i \in \mathcal{R}_{\tau, R=-1}$  zur Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  [31, S. 272].

**Definition 3.11** (Schädigungsfunktion)

Betrachtet werde das Lastkollektiv  $\mathcal{R}_{\tau, R=-1}$ . Die Schädigungsfunktion  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_i)$  gibt den prozentualen Anteil eines 2-Tupels zur Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  an und ist durch

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_i) = \frac{\mathcal{D}_i}{\mathcal{D}}$$

definiert.

### 3.5 Der Auslastungsgrad $a_\tau$ nach FKM-Richtlinie

Einer der zentralen Kennwerte zur Bewertung der Betriebsfestigkeit nach der FKM-Richtlinie ist der Auslastungsgrad  $a_\tau$ . Ähnlich dem Vorgehen, in dem aus dem eigentlichen Beanspruchungskollektiv  $\{(\tau_a, \tau_m, n_\tau)_i\}$  ein schädigungsäquivalentes Lastkollektiv  $\{(\tau_{wk}, n_\tau)_i\}$  berechnet wurde, wird aus diesem Lastkollektiv eine skalare Ersatzamplitude  $\tau_{BK}$ , die *Amplitude der Bauteilbetriebsfestigkeit*, bestimmt.

Wie zuvor bereits erwähnt, werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur Beanspruchungen durch Torsion auf Basis des Nennspannungskonzeptes betrachtet. Zunächst gilt es dazu die *Bauteildauerfestigkeit*  $\tau_{AK}$  aus der *Bauteilwechselfestigkeit*  $\tau_{WK}$  (nicht zu verwechseln mit den Amplituden des Lastkollektivs  $\tau_{wk}$ ) zu berechnen [78, S. 88 f.]. Dies geschieht mit dem Mittelspannungsfaktor  $K_{AK}$  aus der Beobachtung 3.6 durch [77, S. 47, Gl. (2.4.1)]

$$\tau_{AK} = K_{AK} \tau_{WK}.$$

Da das Beanspruchungskollektiv  $\{(\tau_a, \tau_m, n_\tau)_i\}$  bereits mittels der entsprechenden Mittelspannungsfaktoren  $K_{AK}$  auf ein äquivalentes Lastkollektiv  $\{(\tau_{wk}, n_\tau)_i\}$  unter Wechselbeanspruchung zum Verhältnis  $R = -1$  zurückgeführt wurde, kann an dieser Stelle mit  $K_{AK} = 1$  fortgefahren werden [77, S. 48, Gl. (2.4.3)].

**Kommentar 3.12**

*Ein wesentlicher Bestandteil der Berechnung der Bauteilwechselfestigkeit  $\tau_{WK}$  ist der Einfluss des Konstruktionsfaktors  $K_{WK}$ . Dieser bestimmt sich aus einer Kerbwirkungszahl, einem Rauheitsfaktor, einem Randschichtfaktor und einem Beschichtungsfaktor [77, S. 40, Gl. (2.3.1)].*

*Es liegt außerhalb des Rahmens der vorliegenden Arbeit, eine absolute Bewertung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges der WEA durchzuführen. Es wird davon ausgegangen, dass diese Bewertung für die zum Vergleich herangezogene konventionelle Regelung als derzeitiger Standard zur Drehzahlregelung einer WEA bereits geschehen ist und damit eine entsprechende Betriebsfestigkeit vorliegt. Vielmehr sollen die Lastkollektive aufgrund der verschie-*

denen Regelstrategien verglichen werden. Bei einer relativen Betrachtung des Auslastungsgrades  $a_\tau$  auf Basis der Torsionsspannung, die jeweils aus der Belastung an der identischen Stelle der Hauptwelle gewonnen wurden, kürzt sich der Konstruktionsfaktor  $K_{WK}$  entsprechend, wodurch er als konstant aber unbekannt betrachtet werden kann.

Zusammen mit der Schwingenspielzahl am Abknickpunkt  $N_D$  und dem Wöhlerexponenten  $k$  kann aus der Bauteildauerfestigkeit  $\tau_{AK}$  entsprechend Gleichung (3.2.1) eine Wöhlerlinie gebildet werden, gegen die letztendlich mittels linearer Schädigungsakkumulations-Hypothese gerechnet wird [78, S. 95]. Typische Werte für Torsionsbeanspruchung sind  $N_D = 10^6$  und  $k = 8$  [77, S. 55, 2.4.3.4].

Die Amplitude der Bauteilbetriebsfestigkeit  $\tau_{BK}$  ergibt sich aus dem *Betriebsfestigkeitsfaktor*  $K_{BK}$  durch [77, S. 53, Gl. (2.4.38)]

$$\tau_{BK} = K_{BK} \tau_{AK}. \quad (3.5.1)$$

Wie zuvor (vgl. Annahme 3.7) wird zur Berechnung von  $K_{BK}$  auf die elementare Version der Miner-Regel zurückgegriffen, wodurch die Dauerfestigkeit unberücksichtigt bleibt [78, S. 96]. Dementsprechend ergibt sich für die Schädigungssumme der Zusammenhang nach Gleichung (3.4.1), wobei für  $N_A$  der *Kollektivumfang*  $\bar{N} := \sum_i n_\tau$  und für  $\tau_A = \max_i(\tau_{wk})$  das Maximum des Lastkollektivs  $\{(\tau_{wk}, n_\tau)_i\}$  verwendet wird [78, S. 95 f.], [77, S. 57, 2.4.3.5.2]. Als Inverses ergibt sich dann das *Lebensdauervielfache*

$$A_{elementar} = \left[ \sum_{\{(\tau_{wk}, n_\tau)_i\}} \frac{n_\tau}{\bar{N}} \left( \frac{\tau_{wk}}{\tau_A} \right)^k \right]^{-1}. \quad (3.5.2)$$

### Kommentar 3.13

Die FKM-Richtlinie fordert – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – dass das betrachtete Lastkollektiv bezüglich der Amplituden absteigend sortiert ist. Dadurch gilt  $\tau_A = \max_i(\tau_{wk}) = \tau_{wk,1}$  [77, S. 36, 2.1.3.1].

„Da das Versagen des Bauteils in der Regel nicht bei der rechnerischen Schädigung  $\mathcal{D} = 1$  eintritt, was jedoch bei der linearen Schädigungsakkumulation unterstellt wird, sollte die errechnete Bauteillebensdauer (...) mithilfe einer effektiven Miner-Summe  $D_m$  korrigiert werden“ [78, S. 97 ff.]. Experimentell wurde dabei folgender Zusammenhang festgestellt [77, S. 56, 2.4.3.5.2]

**Beobachtung 3.14** (Effektive Miner-Summe)

Die effektive Miner-Summe ist abhängig von der Lebensdauervielfachen  $A_{elementar}$  aus Gleichung (3.5.2) und durch

$$\mathcal{D}_m = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[4]{A_{elementar}}} & \text{für } 0,3 \leq \frac{2}{\sqrt[4]{A_{elementar}}} \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < \frac{2}{\sqrt[4]{A_{elementar}}} \\ 0,3 & \text{für } \frac{2}{\sqrt[4]{A_{elementar}}} < 0,3 \end{cases}$$

definiert.

Somit ergibt sich der zum Kollektivumfang  $\bar{N}$  entsprechende Betriebsfestigkeitsfaktor  $K_{BK}$  aus [77, S. 56, Gl. (2.4.50)]

$$K_{BK} = \left[ A_{elementar} \mathcal{D}_m \frac{N_D}{\bar{N}} \right]^{\frac{1}{k}},$$

woraus sich entsprechend Gleichung (3.5.1) die Bauteilbetriebsfestigkeit  $\tau_{BK}$  berechnet.

Bei einer absoluten Bewertung der Betriebsfestigkeit – welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt wird (vgl. Kommentar 3.12) – verwendet man den *Auslastungsgrad*  $a_\tau$ , welcher sich aus dem Verhältnis der maximalen Spannungsamplitude im Lastkollektiv  $\tau_{wk,1}$  und der zulässigen Betriebsfestigkeit  $\tau_{BK}$  ergibt. Für einen Nachweis gegen Ermüdung wird  $a_\tau \leq 1$  gefordert [78, S. 107 f.].

$$a_\tau = \frac{\tau_{wk,1}}{\tau_{BK}}$$

**Kommentar 3.15**

Die FKM-Richtlinie sieht zusätzlich die Berücksichtigung von Sicherheitsfaktoren vor [77, S. 59, 2.5]. Äquivalent zur Diskussion in Kommentar 3.12 kann auf diese im Rahmen des hier angestrebten relativen Vergleichs verzichtet werden.

**3.6 Schädigungsäquivalente Last  $DEL$**

Neben den auf Spannung basierten Methoden existieren weitere Verfahren, beispielsweise zur vergleichenden bzw. relativen Bewertung der Betriebsfestigkeit. Bei der Auslegung von WEA hat sich zusätzlich das konstruktionsunabhängige Konzept der *schädigungsäquivalenten Last  $DEL$*  (engl. *damage-equivalent load*) etabliert [80, S. 1]. Sie erlaubt die rein relative Bewertung verschiedener Belastungs-Zeit-Funktionen bzw. einen ersten Vergleich ihrer schädigenden Wirkung untereinander. Es seien  $M_j(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$  verschiedene solcher Signa-

le, welche die im Rahmen der Arbeit betrachteten stabförmigen Bauteile auf Torsion belasten. Ziel ist es, jeweils die Amplitude  $DEL_j$  eines Einstufenkollektivs zu berechnen, welcher eine zu  $M_j(t)$  äquivalente Schädigung unterstellt werden kann. Deren Berechnung basiert alleine auf der Betrachtung von Lasten bzw. Momenten. Mechanische Spannungen gehen dabei nicht explizit ein.

Ähnlich der Diskussion in Abschnitt 3.3 muss dazu zunächst eine Klassifizierung aller  $M_j(t)$  durchgeführt werden. Dazu findet ebenfalls das Rainflow-Zählverfahren Anwendung [81, S. 5], vgl. Algorithmus 3.5. Dieses resultiert in einer Menge von 3-Tupeln  $\mathcal{R}_M := \{(M_a, M_m, n_M)_i : i = 1, \dots, N_M\}$  zu den Ausschlagsamplituden  $M_a$ , den *mittleren Lasten*  $M_m$  und den Lastspielen  $n_M$ . Ähnlich zu  $\mathcal{R}_\tau$  besteht auch das im späteren Verlauf gewonnene Belastungskollektiv  $\mathcal{R}_M$  aus 3-Tupeln zu verschiedenen mittleren Lasten. Um einheitlich gegen ein der Wöhlerlinie entsprechendes Schädigungsgesetz rechnen zu können, muss ebenfalls zu jedem 3-Tupel  $(M_a, M_m, n_M) \in \mathcal{R}_M$  ein mittelwertfreies 3-Tupel  $(M_{wk}, 0, n_M)$  zu einer Äquivalenzamplitude  $M_{wk}$  berechnet werden. Während dies in den weiter oben diskutierten spannungsbasierten Methoden mittels der Beobachtung 3.6 geschieht, kommt hier die *Goodman Korrektur* zum Einsatz [81, S. 5].

**Beobachtung 3.16** (Goodman Korrektur)

Es sei  $(M_a, M_m, n_M) \in \mathcal{R}_M$  ein 3-Tupel aus einer Rainflow-Klassifizierung der Belastungs-Zeit-Funktion  $M(t)$ . Die mittelwertfreie Äquivalenzamplitude  $M_{wk}$  zu  $M_a$  und  $M_m$  berechnet sich durch [81, S. 5, Gl. (3)]

$$M_{wk} = M_a \frac{M_{ult}}{M_{ult} - |M_m|}.$$

$M_{ult}$  bezeichnet die vom Bauteil maximal zu ertragene Last (engl. *ultimate load*) und ist eine Konstruktionsanforderung.

Somit können die Belastungs-Zeit-Funktionen  $M_j(t)$  jeweils in ein mittelwertfreies Kollektiv, das *Lastkollektiv*,  $\{(M_{wk}, n_M)_i : i = 1, \dots, N_M\}_j$  überführt werden.

Diese Kollektive werden auch im Konzept der schädigungsäquivalenten Belastung gegen Gesetzmäßigkeiten der Bauteilermüdung ähnlich der Wöhlerlinie – den sogenannten *M-N-Kurven* – gerechnet [80, S. 1]. Der Zusammenhang zwischen ertragbaren Lastspielen  $n_M$  und mittelwertfreier Drehmoment-Amplituden  $M_{wk}$  – d.h. unter Wechselbelastung – ist ähnlich zu (3.2.1) [81, S. 5, Gl. (2)].

$$N_M(M_{wk}) = \left( \frac{M_{ult}}{\frac{1}{2}M_{wk}} \right)^k \quad (3.6.1)$$

Dabei wird  $k$  ebenfalls als *Wöhlerexponent* bezeichnet.

Ähnlich zur Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  aus Definition 3.10 werden auf Basis der linearen Schädigungsakkumulations-Hypothese die Schädigungen aus den einzelnen Kollektivstufen addiert. Ursprüngliches Ziel des hier vorgestellten Konzeptes ist es, eine zu  $M_j(t)$  schädigungsäquivalente Last  $DEL_j$  eines Einstufenkollektivs zu bestimmen. Daher muss für  $\{(M_{wk}, n_M)_i : i = 1, \dots, N_M\}_j$

$$\sum_{(M_{wk}, n_M)} \frac{n_M}{N_M (M_{wk})} \stackrel{!}{=} \frac{n_{\text{eq}}}{N_M (DEL_j)} \quad (3.6.2)$$

gelten. Die äquivalente Lastspielzahl  $n_{\text{eq}}$  wird über die  $DEL$ -Frequenz  $f_{\text{eq}}$ , für welche in der Regel 1 Hz verwendet wird, und die Länge des Zeitsignals bestimmt.

$$n_{\text{eq}} = f_{\text{eq}}(t_f - t_0) \quad (3.6.3)$$

Löst man nun Gleichung (3.6.2) zusammen mit Gleichung (3.6.1) nach  $DEL_j$  auf, so erhält man für  $\{(M_{wk}, n_M)_i : i = 1, \dots, N_M\}_j$

$$DEL_j = \left[ \frac{\sum_{(M_{wk}, n_M)} n_M (M_{wk})^k}{n_{\text{eq}}} \right]^{\frac{1}{k}}. \quad (3.6.4)$$



## 4 Indirekte modellprädiktive Regelung

Der Einsatz von MPC zeigt erhebliche Vorteile gegenüber einer reinen klassischen Regelung. Diese sind ausführlich in Kapitel 1 diskutiert worden und lauten zusammengefasst:

- Die Vorgabe oder a-priori Berechnung einer Referenztrajektorie ist nicht notwendig. Vielmehr wird sie im Laufe der MPC implizit parallel mit dem dafür notwendigen Stellgrößensignal auf Basis eines Zielfunktional und Randbedingungen bestimmt.
- Es handelt sich um eine *Multi-Input Multi-Output* Regelung, d.h. zwei oder mehrere Stellgrößen werden durchgängig unter Berücksichtigung ihrer vollständigen Wechselwirkung innerhalb der Systemdynamik bestimmt.
- Der wohl wichtigste Vorteil betrifft die direkte Berücksichtigung von Ungleichungsbeschränkungen bei der Bestimmung der optimalen Steuerung  $u^*(t)$ . Insbesondere Maximal- und Minimalwerte von Zustandsvariablen sind expliziter Bestandteil der Minimierung des Zielfunktional. Sie müssen und werden schon vor Aktivwerden der entsprechenden Beschränkung bei der Bestimmung eines Stellgrößensignals berücksichtigt.

Als Ausgangssignal einer MPC könnte beispielsweise die optimale Steuerung  $u^*(t)$  – die optimierten Werte für die Stellgrößen – an sich verwendet werden. Dazu müssen sie jedoch physikalischen Größen entsprechen, die von Aktuatoren aufgebracht werden können – wie Kräfte oder Momente. Häufig weicht sowohl aus Gründen der numerischen Effizienz als auch aufgrund der Beschränkungen an Steuerungen und Zuständen das Modell, auf Basis dessen eine optimale Steuerung  $u^*(t)$  in jedem Schritt der MPC bestimmt wird, von der komplexen Dynamik eines realen Systems ab. Daher entsprechen die Steuerungsvariablen  $u(t)$  des OSP nicht zwingend den Ausgangssignalen der eigentlichen Aktuatoren. So wird im Fall der WEA die zeitliche Änderung des Generatormomentes – die Generatormomentrate – und die Geschwindigkeit des Anstellwinkels als Steuerung der OSP verwendet. Beides entspricht nicht den physikalischen Größe eines Aktuators. Jedoch kann das entsprechende Signal aus der Lösung der jeweiligen OSP, wie das des Generatormomentes und des Anstellwinkels im Fall der WEA, als Referenztrajektorie den Aktuatoren übergeben werden. Diese Trajektorien sind unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung innerhalb der Systemdynamik bestimmt, wodurch sie separat einer der MPC nachgeschalteten klassischen Regelung übergeben werden können. Die MPC dient in diesem Fall einer der klassischen Regelung vorgeschalteten Bestimmung von Sollzuständen.

Wie bereits in Kapitel 1 ausgeführt wurde, fanden MPC und Varianten davon bereits in einer Vielzahl von praktischen Fragestellungen Anwendung. Die oben aufgezählten Vorteile werden gegenüber einer klassischen Regelung durch sehr hohe Anforderungen an Hard- und Software teuer erkauft, worin wahrscheinlich auch der Grund zu suchen ist, weshalb sie heute nicht noch breiter im Einsatz ist. Der numerische Aufwand zur Berechnung einer Lösung und damit die dafür benötigte Rechenzeit stellt in vielen Fällen ein nach wie vor nicht vollständig gelöstes Problem dar [23, S. 1126 f.]. Dieser Aufwand skaliert erheblich mit der Komplexität des OSP, welches in jedem Iterationsschritt der MPC gelöst werden muss. Zum einen steigt der numerische Aufwand zur Bestimmung der optimalen Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  mit der Anzahl der in der Systemdynamik berücksichtigten Freiheitsgrade, zum anderen spielt auch die Diskretisierung des Zeithorizontes für eine numerische Berechnung eine zentrale Rolle. OSP können numerisch hauptsächlich auf zwei unterschiedliche Arten gelöst werden [82, S. 2 f.]: Den *direkten Verfahren* stehen die *indirekten Verfahren* gegenüber. Sie werden im Rahmen dieses Kapitels im Abschnitt 4.1 genauer gegenübergestellt.

Das vorliegende Kapitel diskutiert die *indirekte modellprädiktive Regelung* und beschreibt damit eine Methode, in der automatisiert die der MPC zugrunde liegenden OSP mittels der indirekten Verfahren gelöst werden. Die Herleitung und Diskussion dieser Methode ist – neben der Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges innerhalb einer MPC für WEA – eines der beiden Kernthemen der vorliegenden Arbeit. OSP auf Basis indirekter Verfahren können numerisch hocheffizient mittels Mehrfach-Schießverfahren gelöst werden [10], [13, S. 586 ff.]. Diese Verfahren werden genauer in Abschnitt 4.2 vorgestellt. Sie setzen voraus, dass eine nach Definition 2.8 gültige Struktur der Lösung bekannt ist. In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wird diskutiert, wie diese auf Basis einer vorangegangenen gültigen Struktur bestimmt werden kann, was letztendlich eine indirekte MPC ermöglicht. Eine kritische Diskussion über die Grenzen dieser Methode schließt das Kapitel ab.

### 4.1 Direkte und indirekte Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen

Beide Verfahren greifen auf notwendige Bedingungen für ein lokales Optimum zurück. Diese müssen von der optimalen Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  und den zugehörigen Zustandsvariablen  $\mathbf{x}^*(t)$  auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  erfüllt werden. Als zunächst beliebige und frei wählbare Funktion  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{L}^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$  ist das Problem unendlich dimensional [13, S. 562], da  $\mathbf{u}^*(t)$  nicht durch eine endliche Basis des Raums  $\mathcal{L}^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$  grundsätzlich linear-kombiniert werden kann. Für eine numerische Bestimmung der Lösung ist daher eine Diskretisierung notwendig. In ihrer Form der Diskretisierung unterscheiden sich die beiden genannten Verfahren erheblich.

Während direkte Verfahren die Steuerung  $\mathbf{u}(t)$  als Linearkombination einer endlichen Anzahl von Ansatzfunktionen auffassen, erfolgt die Diskretisierung bei indirekten Verfahren erst durch die Anwendung eines numerischen Integrationsverfahrens, z. B. Runge-Kutta-Einschrittverfahren. Durch einen verhältnismäßig frühen Zeitpunkt der Diskretisierung transformieren direkte Verfahren das OSP in eine Problemstellung der endlich-dimensionalen, nichtlinearen Programmierung [7, S. 4].

Für Problem 2.1 werde beispielsweise die folgende Diskretisierung mit  $N = 9$  Stützstellen des Zeitintervalls  $[t_0, t_f]$  betrachtet.



Häufig wählt man dann  $\mathbf{u}(t)$  als stückweise konstante Funktion und erhält somit

$$\mathbf{u}(t) := \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t) \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t)$  ist als Ansatzfunktion auf den Teilintervallen  $[t_i, t_{i+1}[$  wie folgt definiert.

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Die unbekanntenen Größen  $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \in \mathbb{R}^m$  sind die Stützwerte der Ansatzfunktion  $\mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t)$ . Durch diese Diskretisierung wird aus dem Integral des Funktionals (2.1.1) eine Summe von Integralen mit konstanter Steuerung auf den Teilintervallen  $[t_i, t_{i+1}[$ .

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \mapsto \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}) dt.$$

Aus der Differentialgleichung für die Systemdynamik (2.1.2) werden stückweise definierte Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^{(i)} &:= \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}[ , \quad i = 0, \dots, N-1 \\ \mathbf{x}^{(i)}(t_i) &= \begin{cases} \mathbf{x}_0 & \text{für } i = 0, \\ \mathbf{x}^{(i)}(t_{i+1}) & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Neben stückweiser konstanter Ansätze für  $\mathbf{u}(t)$  existieren auch solche mit höherer Interpolationsordnung [8, S. 32], worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Bisher treten in der Optimierung nur die Stützwerte der Steuerung  $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$  als unbekannte Größen auf. Aus Gründen der numerischen Stabilität werden beispielsweise beim Einsatz der *direkten Mehrfach-Schießverfahren* zusätzlich Stützwerte für die Zustände an den Diskretisierungszeitpunkten  $t_i$  eingeführt [82, S. 10 f.]. Bezeichnet man diese zusätzlichen Unbekannten mit  $\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$ , dann wird die Bedingung (4.1.1) durch folgende Differenzgleichungen ersetzt.

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i+1)}(t_{i+1}) - \mathbf{x}^{(i)}(t_{i+1}) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\}$$

**Kommentar 4.1** (Berücksichtigung der Ungleichungsbeschränkungen)

Die Ungleichungsbeschränkungen (2.1.4) und (2.1.5) werden durch die direkten Verfahren in der Regel nur an den jeweiligen Zeitpunkten der Diskretisierung  $t_i$  punktweise berücksichtigt [7, S. 49].

Dieses transformierte OSP kann mittels bekannter und etablierter Verfahren der nichtlinearen Programmierung gelöst werden. Diese Verfahren greifen in der Regel auf notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Optimum zurück, wobei die unbekannt Variablen in endlichen-dimensionalen Räumen liegen. Zusätzlich existieren Ansätze, die besser auf die Anforderungen der direkten optimalen Steuerung angepasst sind, wie das *direkte Mehrfach-Schießverfahren* [83], [24].

Dem gegenüber stehen die indirekten Verfahren. Wenn im weiteren Verlauf der Arbeit von *indirekter nichtlinearer MPC* gesprochen wird, werden die der MPC zugrundeliegenden OSP mittels indirekter Verfahren gelöst. Um ihren Vorteil – gerade im Bezug auf ihre Effizienz in der Bestimmung einer Lösung – genauer beleuchten zu können, soll zunächst die Form der Lösung  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  eines OSP nach Problem 2.1 diskutiert werden.

Wie bereits erwähnt, ist die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  als Funktion der Zeit über das Intervall  $[t_0, t_f]$  in der Regel Element des unendlich-dimensionalen Funktionenraums  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{L}^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$  [13, S. 562]. Wie in Beispiel 2.16 gezeigt wurde, ist  $\mathbf{u}^*(t)$  nicht unbedingt stetig auf  $[t_0, t_f]$ . Im Fall von *Chattering Control* zweiter Art ist die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  sogar nicht einmal stückweise stetig (vgl. Beispiel 2.17), sondern sie besitzt einen Häufungspunkt von Schaltpunkten. Wie in Abschnitt 5.3.3 diskutiert werden wird, tritt dieses Phänomen als theoretische Lösung der nicht-regularisierten OSP einer WEA auf. Aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht stellt sich insgesamt die Frage, ob die durch eine Optimierung erkaufte Wechselwirkungen in einem wirtschaftlichen Verhältnis zu den gewonnenen Vorteilen stehen. Unabhängig von der Wahl des numerischen Lösungsverfahrens sollte daher eine Analyse der Form der optimalen Steuerung grundsätzlich vorweg gehen. Denn, sind die Bedingungen aus Lemma 2.20 erfüllt, d.h. alle Zustandsbeschränkungen sind 1. Ordnung und die zugehörige Hamiltonfunktion ist regulär nach Definition 2.19, dann ist die Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$  stetig. Sind diese Bedingungen nicht direkt durch die Problemstellung gegeben, sollten weitere – ingenieurwissenschaftlich sinnvolle – Bedingungen herangezogen werden,

die das eigentliche OSP regularisieren. Im Fall der WEA wird dies ausführlich in Abschnitt 5.3.3 diskutiert.

Indirekte Verfahren lösen numerisch Probleme der Form 2.1 auf Basis der notwendigen Bedingungen aus Satz 2.11. Aus diesen Bedingungen wird ein Randwertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen  $\mathcal{B}(x_0, t_0, t_f)$  abgeleitet, welches dann numerisch gelöst wird. Dazu werde ein OSP nach 2.1 mit regulärer Hamiltonfunktion zunächst ohne Zustands- oder Steuerungsbeschränkung betrachtet. Aus der zugehörigen Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(x, \lambda, u)$  werden die Differentialgleichungen der adjungierten Variablen nach (2.1.11) sowie deren Wert zum Endzeitpunkt  $t_f$  abgeleitet. Das ergibt folgendes Randwertproblem.

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f(x^*, u^*), & x^*(t_0) &= x_0 \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x^*, \lambda, u^*), & \lambda(t_f) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x^*(t_f)) \right]^T \end{aligned}$$

Die optimale Steuerung  $u^*(t)$  berechnet sich aus der Vorschrift (2.1.12), wonach  $u^*(t)$  die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(x, \lambda, u)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  minimiert. Als reguläre Hamiltonfunktion ist  $\mathcal{H}(x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$  nach Definition 2.19 zu jedem Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_f]$  gleichmäßig strikt konvex, womit genau ein und nur ein  $u^*(t) \in \mathbb{R}^m$  existiert, welches die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(x^*(t), \lambda(t), u^*(t))$  minimiert. Damit lässt sich diese Steuerung durch eine Funktion  $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $u^* = k(x^*, \lambda)$  beschreiben. Auf diese Weise kann  $u$  aus obigen Gleichungen entfernt werden und es bleiben lediglich  $x^*$  und  $\lambda$  zurück.

$$u^*(t) = k(x^*(t), \lambda(t)) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}(t)} \mathcal{H}(x^*, \lambda, u)$$

$$\dot{x}^* = f(x^*, k(x^*(t), \lambda(t))), \quad x^*(t_0) = x_0 \quad (4.1.2)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x^*, \lambda, k(x^*(t), \lambda(t))), \quad \lambda(t_f) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x^*(t_f)) \right]^T \quad (4.1.3)$$

Im Übrigen ist  $k(x^*(t), \lambda(t))$  nach Lemma 2.20 stetig für  $t \in [t_0, t_f]$ . Sowohl  $x^*(t)$  als auch  $\lambda(t)$  sind eindeutig für alle Zeitpunkte  $t \in [t_0, t_f]$  durch die Differentialgleichungen festgelegt, sobald ihre Anfangswerte  $x(t_0)$  und  $\lambda(t_0)$  bekannt sind. Durch die Anfangsbedingung für die Zustandsvariablen  $x(t_0) = x_0$  sind die Anfangswerte  $x^*(t_0)$  bereits bekannt. Es muss lediglich  $\lambda(t_0)$  numerisch derart bestimmt werden, dass die Endbedingung  $\lambda(t_f) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x^*(t_f)) \right]^T$  nach Satz 2.11 erfüllt ist. Dies beantwortet die eingangs erwähnte Frage nach der Effizienz der indirekten Verfahren. Als zu bestimmende Unbekannte dienen nicht die Stützwerte der diskretisierten Stellgrößensignale, sondern die Anfangswerte von Differentialgleichungen, über die letztendlich das Stellgrößensignal bestimmt werden kann. Die Anzahl der unbekannt Variablen wird somit erheblich reduziert (vgl. Kommentar 4.4 und Kapitel 5.8). Im Fall von Zustandsbeschränkungen bei regulärer Hamiltonfunktion treten als Unbekannte zusätzlich die Zeitpunkte auf, an denen diese Beschränkungen aktiv bzw. inaktiv

werden und sich über *innere Punktbedingungen* bestimmen lassen. Zur numerischen Lösung kommen klassische *Mehrfach-Schießverfahren* (MSV) – welche sich von direkten Mehrfach-Schießverfahren unterscheiden – zum Einsatz. Gemeinsam ist ihnen jedoch die Eigenschaft, dass sie zur Verbesserung der numerischen Stabilität im Intervallinneren zusätzliche Stützwerte für Zustandsvariablen einführen. Das klassische MSV wird in Abschnitt 4.2 genauer diskutiert.

Eine weitere Diskussion der Leistungsfähigkeit beider Verfahren soll im Rahmen dieser Arbeit auf die Basis eines Rechenzeitvergleichs in Kapitel 5.8 reduziert werden. Dazu werden von dieser Arbeit unabhängige Publikationen herangezogen, in denen ein direktes Mehrfach-Schießverfahren verwendet wurde, um mittels MPC eine WEA zu regeln.

## 4.2 Das Mehrfach-Schießverfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen

Wie bereits erwähnt, resultieren die notwendigen Bedingungen aus Satz 2.11 in einem Randwertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen  $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, t_0, t_f)$ . Probleme dieser Form können numerisch sehr effizient mit MSV gelöst werden [13, S. 586 ff.]. Eines dieser Verfahren ist JANUS [10, S. 7 ff.], welches im Rahmen dieser Arbeit angewendet wird. Um die Funktionsweise dieser Verfahren zu erläutern, wird zunächst das *Einfach-Schießverfahren* (ESV) vorgestellt, aus dem sich das MSV ableiten lässt.

### 4.2.1 Einfach-Schießverfahren

Das ESV ist eine iterative Methode, welche mit einer Schätzung für die Werte  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  zum Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  startet, ein Residuum der Randbedingungen aus Soll- und Istwert bildet und dieses Residuum schrittweise in seiner Norm unterhalb eine gewählte Toleranz führt. Es greift dafür auf klassische numerische Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion  $\tilde{\mathbf{r}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  zurück. Für das RWP aus den Gleichungen (4.1.2) und (4.1.3) lautet diese Funktion  $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^*(t_0), \boldsymbol{\lambda}(t_f))$

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^*(t_0), \boldsymbol{\lambda}(t_f)) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}^*(t_f)) \right]^T \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (4.2.1)$$

Fasst man  $\mathbf{x}^*(t) \in \mathbb{R}^n$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$  in den Vektor  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$  zusammen und deren Dynamik in die Funktion  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , erhält man mit  $\mathbf{r} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} := \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*) \right] \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}(t_f)) \right]^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{k}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}).$$

Es gilt schlussendlich eine Nullstelle der folgenden Funktion zu finden [10, S. 8].

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f)) = \mathbf{0} \quad (4.2.3)$$

Da  $\mathbf{y}(t_f)$  durch  $\mathbf{y}(t_0)$  und die Systemdynamik  $\mathbf{F}(\mathbf{y}(t))$  über

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) dt$$

festgelegt sind, kann Gleichung (4.2.3) als nichtlineares Gleichungssystem zur Variablen  $\mathbf{y}(t_0)$  aufgefasst werden. Daher bezeichne im Folgenden  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  die Lösung von  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$  zum Zeitpunkt  $t \geq t_0$  für den Anfangszeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit Anfangswert  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . Dann kann Gleichung (4.2.3) in der Form

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}(t_f; t_0, \mathbf{y}_0)) = \mathbf{0} \quad (4.2.4)$$

geschrieben werden. Dieses System kann mit Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme gelöst werden. Eines der dafür bekanntesten Verfahren ist das *gedämpfte Newton-Verfahren*. Zur Vereinfachung der Nomenklatur werde (4.2.4) im Folgenden zu

$$\Lambda(\mathbf{y}_0) = \mathbf{0} \quad (4.2.5)$$

zusammengefasst.

#### 4.2.2 Sensitivitätsmatrizen

Die Effizienz, eine Lösung des OSP in jedem Schritt der MPC zu bestimmen, spielt eine zentrale Rolle, wenn es um ihre praktische Anwendbarkeit geht. Innerhalb von JANUS wird ein modifiziertes Newton-Verfahren verwendet [10, S. 13 f., S. 24 ff.]. Dieses Verfahren verlangt die Berechnung der Jacobi-Matrix  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \Lambda(\mathbf{y}_0)$  in jedem Iterationsschritt. „Den weitaus größten Teil des Aufwandes bei der numerischen Berechnung der Jacobi-Matrix (...) erfordert die Berechnung der Sensitivitätsmatrizen“ [10, S. 21].

**Definition 4.2** (Sensitivitätsmatrix)

Es sei ein Randwertproblem (4.2.1) gegeben, welches sich aus dem OSP 2.1 ableitet. Die Matrix der Form

$$J(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

wird als Sensitivitätsmatrix bezeichnet.

Die Sensitivitätsmatrix  $J(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  ist eine Funktion der Zeit und gibt als Ableitung 1. Ordnung die Sensitivität der Lösung  $\mathbf{y}(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  bezüglich einer Änderung der Werte  $\mathbf{y}_0$  des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (4.2.6)$$

an. Sie ist Lösung des folgenden linearen Differentialgleichungssystems [10, S. 50]

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot J(t; t_0, \mathbf{y}_0), J(t_0; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathcal{E}_{2n \times 2n}. \quad (4.2.7)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{E}_{2n \times 2n} := \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ .

Damit lässt sich die Jacobi-Matrix von  $\Lambda(\mathbf{y}_0)$  berechnen, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda(\mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} &= \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f))}{\partial \mathbf{y}_0} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f))}{\partial \mathbf{y}(t_0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}(t_0)}{\partial \mathbf{y}_0} + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f))}{\partial \mathbf{y}(t_f)} \cdot J(t_f; t_0, \mathbf{y}_0). \end{aligned}$$

Um den Anforderungen an eine hohe Lösungseffizienz für die praktische Anwendbarkeit einer MPC für WEA gerecht zu werden, wird der Term  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{F}(\mathbf{y})$  aus Gleichung (4.2.7) analytisch bestimmt. Die Sensitivitätsmatrix  $J(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  kann damit parallel zu der dynamischen Gleichungen (4.2.6) gelöst werden und steht somit in jedem Iterationsschritt des modifizierten Newton-Verfahrens mit nur geringem Mehraufwand zur Verfügung. Für eine detailliertere Diskussion von Sensitivitätsmatrizen wird auf [10, S. 49 ff.] verwiesen.

**Kommentar 4.3**

Die vollständige Berechnung der Sensitivitätsmatrizen führt zu weiteren  $4n^2$  Differentialgleichungen, welche parallel zu dem System (4.2.6) mit  $2n$  Gleichungen gelöst werden. Die Matrix  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$  besitzt unter Umständen eine hohe Zahl an Einträgen mit dem Wert 0. Da die Anfangswerte von  $J(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  über die Einheitsmatrix festgelegt sind, entstehen in  $J(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  Einträge, die über die Zeit  $t$  konstant den Wert 0 beinhalten und somit nicht mitintegriert werden müssen.



### 4.2.3 Mehrfach-Schießverfahren

„Die Sensitivität der zu lösenden Anfangswertprobleme und das kleine Konvergenzgebiet des Newton-Verfahrens beschränken den Einsatz des Einzelschießens“ [10, S. 8]. Zusätzlich können mit dem ESV nur Randbedingungen zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  und zum Endzeitpunkt  $t_f$  berücksichtigt werden. Zustandsbeschränkungen führen jedoch zu algebraischen Bedingungen zu den Zeitpunkten, an denen sie aktiv oder inaktiv werden. Durch diese Bedingungen sind letztendlich die optimalen Zeitpunkte für die Auf- bzw. Absprungpunkte einer Zustandsbeschränkung festgelegt. Sie basieren daher auf den Werten  $\mathbf{y}(t)$  aus dem Intervallinneren von  $[t_0, t_f]$ .

Es hat sich bewährt, das Integrationsintervall  $[t_0, t_f]$  in  $M - 1$  mit  $M \in \mathbb{N}$  kleinere Teilintervalle  $[t_\nu, t_{\nu+1}]$  zu zerlegen. Damit entsteht eine Diskretisierung des Intervalls  $[t_0, t_f]$  durch  $t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ . Die Werte  $\mathbf{y}_\nu := \mathbf{y}(t_\nu)$  zu jedem Gitterpunkt  $t_\nu$  für  $\nu = 1, \dots, M-1$  im Intervallinneren von  $[t_0, t_f]$  werden im MSV als zusätzlich zu bestimmende Größen verwendet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zwischen zwei Typen von Gitterpunkten unterschieden. Der erste Typ ist ein zeit-fester Stützwert zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens und der Stabilität des MSV. Sein Zeitpunkt  $t_\nu \in [t_0, t_f]$  bleibt während der Lösung des OSP unverändert. Die Stützwerte  $\mathbf{y}_\nu \in \mathbb{R}^{2n}$  werden dem nichtlinearen Gleichungssystem (4.2.5) hinzugefügt. Die Übergangsbedingungen, durch die die zu bestimmenden Werte  $\mathbf{y}_\nu \in \mathbb{R}^{2n}$  festgelegt werden, ergeben sich aus der Stetigkeit von  $\mathbf{y}(t)$  zum Zeitpunkt  $t_\nu \in [t_0, t_f]$ . Da im Rahmen dieser Arbeit nur OSP mit regulärer Hamiltonfunktion betrachtet werden, ergibt sich diese Stetigkeit auch für den Fall von Zustandsbeschränkungen aus Lemma 2.20.

$$\mathbf{y}_\nu - \mathbf{y}(t_\nu; t_{\nu-1}, \mathbf{y}_{\nu-1}) = \mathbf{0}$$

Da  $\nu = 0$  und  $\nu = M$  den Anfangs- bzw. Endzeitpunkt bezeichnen, kann kein zeit-fester Gitterpunkt diese Indizes erhalten.

Der zweite Typ von Gitterpunkten ergibt sich aus den Zeitpunkten, an denen Zustandsbeschränkungen im Intervallinneren von  $[t_0, t_f]$  aktiv oder inaktiv werden. Diese Zeitpunkte sind Teil der Optimierung und zeit-variant. Sie effizient, automatisiert und korrekt zu bestimmen, ist einer der Hauptgegenstände der Diskussion in Abschnitt 4.4.4 und neben der Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges innerhalb einer MPC von WEA einer der wesentlichen Teile der vorliegenden Arbeit. Diese zeit-varianten Auf- und Absprungpunkte sind durch algebraische Bedingungen an  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\lambda(t)$  festgelegt. Sie sind einer von zwei Teilen der Übergangsbedingung. Der zweite Teil legt den Übergang von  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\lambda(t)$  fest und wird im Abschnitt 4.4.4 diskutiert. Da die Zeitpunkte  $t_\nu$  variieren, müssen diese neben den Werten  $\mathbf{y}_\nu \in \mathbb{R}^{2n}$  auch dem nichtlinearen Gleichungssystem (4.2.5) als Unbekannte

hinzugefügt werden. Damit ergibt sich folgendes zu lösendes System.

$$\Lambda(\mathbf{y}_0, t_f, \mathbf{y}_1, t_1, \mathbf{y}_2, t_2, \mathbf{y}_3, t_3, \dots, \mathbf{y}_{M-1}, t_{M-1}) = \mathbf{0}$$

Für eine detailliertere Diskussion von MSV im Allgemeinen und JANUS im Speziellen wird auf [10] verwiesen.

#### **Kommentar 4.4**

*Ähnlich wie im Fall der direkten Methoden wird damit eine Diskretisierung des Intervalls  $[t_0, t_f]$  durchgeführt. Im Fall der Regelung der WEA mit direkten Verfahren entspricht die Diskretisierungsschrittweite häufig der Reglerschrittweite – z.B. 10 Hz. Das führt zu 99 Diskretisierungspunkten auf dem Intervall  $[t_0, t_f]$ . Im Fall der Regelung der WEA mit indirekten Verfahren wurde eine Diskretisierungsschrittweite von 2.5 s verwendet, was 3 Diskretisierungspunkten auf dem Intervall  $[t_0, t_f]$  entspricht. Eine genauere Diskussion für den Fall der WEA folgt im Abschnitt 5.8.*

### **4.3 Steuerungsbeschränkungen von Optimalsteuerungsproblemen mit regulärer Hamiltonfunktion**

In den bisherigen beiden Abschnitten ging es vorrangig darum, wie OSP numerisch gelöst werden. Für die indirekten Verfahren spielt dabei das in Abschnitt 4.2 vorgestellte MSV eine zentrale Rolle. Es basiert auf zwei Typen von Diskretisierungszeitpunkten innerhalb des Vorhersagehorizontes  $[t_0, t_f]$ . Während der erste Typ zeit-fest ist und der numerischen Stabilisierung des Verfahrens dient, handelt es sich beim zweiten Typ von Diskretisierungszeitpunkten um die Auf- und Absprungpunkte von Zustandsbeschränkungen der Form (2.1.5) des OSP. Diese Zeitpunkte sind durch die jeweilige Lösungsstruktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  nach Definition 2.8 gegeben. Die exakte Struktur ist Teil der Lösung des OSP und in der Regel a-priori nicht bekannt.

In der Literatur werden unter dem Begriff der Struktur einer Lösung nicht nur die Auf- und Absprungpunkte einer Zustandsbeschränkung 1. Ordnung verstanden. Für Zustandsbeschränkungen höherer Ordnung können neben diesen beiden Typen auch *Berührungspunkte* auftreten. Sie sind allgemein gleichermaßen Teil der Struktur ebenso wie die Auf- und Absprungpunkte einer singulären Steuerung, welche in Abschnitt 2.1.3 vorgestellt wurde. Das Beispiel 2.16 besitzt einen Aufsprungpunkt auf die singuläre Steuerung bei  $t = 2$  s und einen Absprungpunkt bei  $t = 6$  s. Gleichfalls sind die Schaltpunkte zwischen den Minimal- und Maximalwerten der Steuerung aus Beispiel 2.17 allgemein Teil der Lösungsstruktur. Für dieses Beispiel besitzt die Menge der Zeitpunkte  $\mathcal{T}_S$  unendlich viele Elemente, da die Lösung das Phänomen Chattering Control zweiter Art aufweist.

Nach Lemma 2.20 ist die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  für OSP mit regulärer Hamiltonfunktion und Zustandsbeschränkungen mit ausschließlich 1. Ordnung stetig auf dem gesamten Zeithorizont  $[t_0, t_f]$ . Dadurch kann weder singuläre Steuerung noch Chattering Control zweiter Art auftreten. Es treten lediglich zusätzlich zu den Auf- und Absprungpunkten von Zustandsbeschränkungen diejenigen Punkte von Steuerungsbeschränkungen auf, wie sie in Abbildung 4.1 für  $g_i(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \leq 0$  dargestellt sind. In der Regel sind diese auch Teil der Struktur einer Lösung. In der vorliegenden Arbeit werden sie – abweichend von der gängigen Literatur – nicht als Teil der Struktur aufgefasst. Der Grund hierfür ist, dass diese Zeitpunkte während des numerischen Lösens implizit mitbestimmt werden können und somit eine Schätzung dieser Punkte dem MSV nicht übergeben werden muss. Dazu gelten folgenden Annahmen.

#### **Annahme 4.5**

*Das OSP besitzt eine gemäß Definition 2.19 reguläre Hamiltonfunktion.*

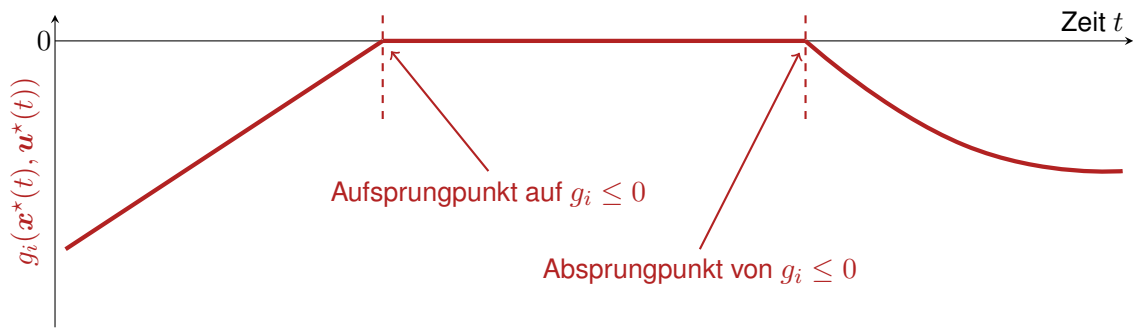
#### **Annahme 4.6**

*Alle Zustandsbeschränkungen des betrachteten OSP haben gemäß Definition 2.6 die Ordnung 1.*

Beide Annahmen lassen sich für viele Problemstellungen ingenieurwissenschaftlich rechtfertigen, was in Abschnitt 4.5 genauer diskutiert wird. Aus ihnen folgen, wie bereits erwähnt, Stetigkeitseigenschaften der Lösung des OSP. Die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}(t)$  sind als physikalische Zustände auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  stetig, was die Auf- und Absprungpunkte der Zustandsbeschränkungen einschließt. Mit diesen beiden Annahmen kann aus Lemma 2.20 formal Folgendes abgeleitet werden.

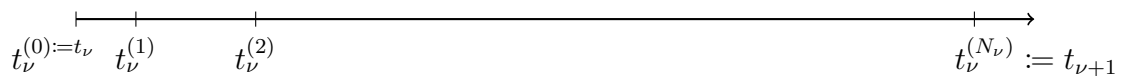
- Die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  ist stetig auf  $[t_0, t_f]$ .
- Die mit den Steuerungsbeschränkungen assoziierten Lagrange-Multiplikatoren  $\mu_g(t)$  sind für  $t \in [t_0, t_f]$  stetig.
- Die adjungierten Variablen  $\lambda(t)$  sind auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  stetig. Dies schließt explizit die Auf- und Absprungpunkte der Zustandsbeschränkungen mit ein.

Damit kann die zentrale Aussage dieses Abschnittes formuliert werden: Steuerungsbeschränkungen von OSP, die die Annahmen 4.5 und 4.6 erfüllen, können direkt im Rahmen der numerischen Integration des MSV berücksichtigt werden. Dies hat den gewichtigen Vorteil, dass keine Annahmen an die Struktur der Steuerungsbeschränkungen gemacht werden müssen. Daher sind die Auf- und Absprungpunkte von Steuerungsbeschränkungen nach Definition 2.8 nicht in  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  enthalten.


 Abbildung 4.1: Auf- und Absprungpunkt einer Steuerungsbeschränkung  $g_i(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ 

Wie im vorangegangenen Abschnitt 4.2 zu MSV diskutiert wurde, muss das Intervall  $[t_0, t_f]$  innerhalb des numerischen Lösungsverfahrens stückweise zwischen den Diskretisierungspunkten jeweils mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$  und  $\boldsymbol{\lambda}_\nu \in \mathbb{R}^n$  auf dem Intervall  $[t_\nu, t_{\nu+1}]$  für  $\nu = 0, \dots, M - 1$  integriert werden, um schlussendlich das Residuum für die Übergangs- und Randbedingungen zu erhalten. Da die erweiterte Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}$  nach Voraussetzung regulär ist, existiert zu jedem zulässigen  $\mathbf{x}(\bar{t})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(\bar{t})$  für  $\bar{t} \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  exakt eine zugehörige Steuerung  $\mathbf{u}(\bar{t})$ , die  $\mathcal{H}$  zum Zeitpunkt  $t = \bar{t}$  minimiert. Nach Gleichung (2.1.12) ist dies eine notwendige Bedingung für ein Optimum.

Beim Starten der numerischen Integration zum Zeitpunkt  $t = t_\nu$  kann somit für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$  bestimmt werden, ob die Steuerungsbeschränkung  $g_k(\mathbf{x}(t_\nu), \mathbf{u}(t_\nu)) \leq 0$  aktiv ist. Somit ist die Struktur aller Steuerungsbeschränkungen zu den Diskretisierungspunkten des MSV  $t = t_\nu$  eindeutig über  $\mathbf{x}_\nu$  und  $\boldsymbol{\lambda}_\nu$  festgelegt. Zur numerischen Integration wird beispielsweise ein explizites Runge-Kutta-Einschrittverfahren nach Dormand und Prince verwendet [84, S. 565 ff.], welches die Werte der zu integrierenden Variablen  $\mathbf{x}(\bar{t})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(\bar{t})$  zu den Integrationszeitpunkten  $\bar{t} \in \{t_\nu^{(1)}, t_\nu^{(2)}, \dots, t_\nu^{(N_\nu)} = t_{\nu+1}\}$  bestimmt.



Die jeweilige Schrittweite  $\xi^{(i)} := t_\nu^{(i)} - t_\nu^{(i-1)}$  kann dabei variabel über eine Schrittweitensteuerung festgelegt werden. Das Integrationsverfahren bestimmt somit die Werte  $\mathbf{x}(t_\nu^{(i)})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t_\nu^{(i)})$  zu den Integrationszeitpunkten  $t_\nu^{(i)} > t_\nu^{(i-1)}$ . Das Verfahren lässt sich wie folgt beschreiben.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_\nu^{(i)}) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_\nu^{(i)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_\nu^{(i-1)}) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_\nu^{(i-1)}) \end{pmatrix} + \Psi(\mathbf{x}(t_\nu^{(i-1)}), \boldsymbol{\lambda}(t_\nu^{(i-1)}), \mathbf{F}, \xi^{(i)}) \quad (4.3.1)$$

Dabei bezeichne  $\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{F}, \xi)$  die Verfahrensvorschrift der Integration. Wie in der Diskussion zum MSV in Abschnitt 4.2 sei  $\mathbf{F}$  nach Gleichung (4.2.2) die kombinierte rechte Seite der Differentialgleichungen für  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$ .

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \right] \end{pmatrix}$$

Für die eindeutige Berechnung von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  für  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  innerhalb der Integrationsschrittweite muss bekannt sein, welche Steuerungsbeschränkungen aktiv bzw. inaktiv sind.

Wie bereits diskutiert, ist dies bei regulärer Hamiltonfunktion für den Diskretisierungspunkt  $t_\nu^{(0)} := t_\nu$  des MSV eindeutig bestimmbar. Für die Berechnung der Werte  $\mathbf{x}(t)$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  für  $t = t_\nu^{(1)}$  nach Gleichung (4.3.1) wird vorerst angenommen, dass keine Steuerungsbeschränkung  $g_k$  innerhalb dieses Integrationsschrittes aktiv bzw. inaktiv wird. Liegt der Integrationspunkt  $t_\nu^{(1)}$  dann nach den Regeln der Schrittweitensteuerung innerhalb der gegebenen Fehlertoleranzen, ist er damit zulässig und wird akzeptiert. Andernfalls wird der Integrationsschritt verworfen und mit kleinerer Schrittweite wiederholt. Im Anschluss eines erfolgreichen Schrittes wird die Gültigkeit der Steuerungsbeschränkungen  $g_k$  für  $t = t_\nu^{(1)}$  überprüft. Dazu müssen die Bedingungen  $g_k(\mathbf{x}(t_\nu^{(1)}), \mathbf{u}(t_\nu^{(1)})) \leq 0$  und  $\mu_{g,k}(t_\nu^{(1)}) \geq 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$  verifiziert werden. Es tritt jeweils einer der vier folgenden Fälle auf.

1. Keine der Steuerungsbeschränkungen ändert seinen Status. Damit sind die nach Gleichung (4.3.1) bestimmten Werte  $\mathbf{x}(t_\nu^{(1)})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(t_\nu^{(1)})$  auch in Hinblick auf die Steuerungsbeschränkungen zulässig.
2. Für exakt ein  $\bar{k} \in \{1, \dots, p\}$  gilt

$$\begin{aligned} g_{\bar{k}}(\mathbf{x}(t_\nu^{(0)}), \mathbf{u}(t_\nu^{(0)})) &< 0 \\ g_{\bar{k}}(\mathbf{x}(t_\nu^{(1)}), \mathbf{u}(t_\nu^{(1)})) &> 0, \end{aligned}$$

siehe linker Graph in Abbildung 4.2. Außerdem gilt  $\mu_{g,k}(t_\nu^{(1)}) \geq 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Nach Lemma 2.20 ist sowohl  $\mathbf{u}(t)$  als auch  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$  stetig. Daher muss es ein  $\bar{t} \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  innerhalb des Integrationsschrittes geben, für das die Bedingung

$$g_{\bar{k}}(\mathbf{x}(\bar{t}), \mathbf{u}(\bar{t})) = 0$$

erfüllt ist. Dieses  $\bar{t} \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  kann hoch-effizient mittels des ableitungsfreien *Anderson-Björck-Verfahrens* bestimmt werden [54]. Die Schrittweite wird auf  $\bar{t} - t_\nu^{(0)}$  beschränkt und die Werte  $\mathbf{x}(\bar{t})$  und  $\boldsymbol{\lambda}(\bar{t})$  über Gleichung (4.3.1) bestimmt. Danach wird der Status der Steuerungsbeschränkungen  $g_{\bar{k}}$  von inaktiv auf aktiv geändert und die Integration kann mit gültigen Annahmen für die Steuerungsbeschränkungen fortgesetzt werden,

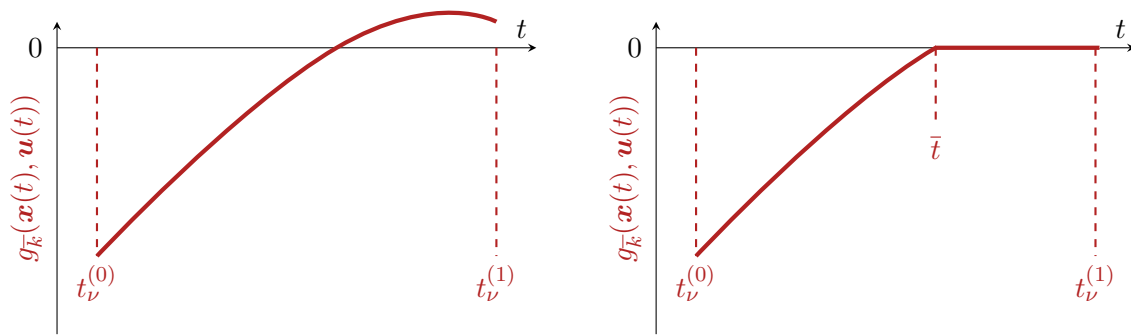


Abbildung 4.2: Aktivierung der Steuerungsbeschränkung  $g_{\bar{k}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  auf dem Integrationsintervall  $[t_{\nu}^{(0)}, t_{\nu}^{(1)}]$

siehe rechter Graph in Abbildung 4.2.

3. Für exakt ein  $\bar{k} \in \{1, \dots, p\}$  gilt  $\mu_{g, \bar{k}}(t_{\nu}^{(0)}) \geq 0$  und  $\mu_{g, \bar{k}}(t_{\nu}^{(1)}) < 0$ , siehe linker Graph in Abbildung 4.3. Außerdem gilt  $g_k(\mathbf{x}(t_{\nu}^{(1)}), \mathbf{u}(t_{\nu}^{(1)})) \leq 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Nach Lemma 2.20 ist sowohl  $\mathbf{u}(t)$  als auch  $\boldsymbol{\mu}_g(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$  stetig. Daher muss es – wie im 2. Punkt zuvor – ein  $\bar{t} \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$  innerhalb des Integrationsschrittes geben, für das die Bedingung

$$\mu_{g, \bar{k}}(\bar{t}) = 0$$

erfüllt ist. Auch dieses  $\bar{t} \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$  kann hoch-effizient mittels des ableitungsfreien Anderson-Björck-Verfahrens bestimmt werden [54]. Danach wird der Status der Steuerungsbeschränkungen  $g_{\bar{k}}$  von aktiv auf inaktiv geändert und die Integration kann mit gültiger Struktur fortgesetzt werden, siehe rechter Graph in Abbildung 4.3.

4. Der letzte Punkt fasst alle übrigen Situationen, die nicht durch die ersten drei Punkte abgedeckt sind, zusammen. Das bedeutet, dass es mindestens zwei Steuerungsbeschränkungen gibt, die ihren Status innerhalb eines Integrationsschrittes ändern. Auch wenn dies im Fall der WEA selten auftritt, muss dieser Fall berücksichtigt werden. Da nicht eindeutig festgelegt werden kann, welche der Steuerungen zuerst seinen Status ändert, wird in diesem Fall die Schrittweite  $\xi$  solange halbiert, bis nur noch weniger als zwei Steuerungsbeschränkungen ihren Status ändern. Auch das kann den Grenzfall nicht gänzlich auflösen, in dem zwei oder mehr Steuerungsbeschränkungen tatsächlich ihren Status zum selben Zeitpunkt  $\bar{t} \in [t_{\nu}, t_{\nu}^{(1)}]$  ändern. Daher wird der Status der Steuerungsbeschränkungen neu initialisiert – wie es auch zu jedem Startpunkt der Integration bei  $t_{\nu}$  gemacht werden muss – sobald die Schrittweite durch das Halbieren eine vorgegebene Toleranz unterschreitet.

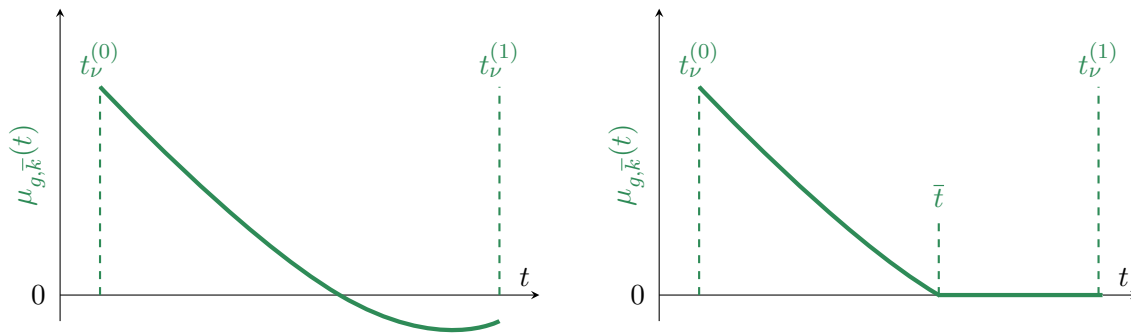


Abbildung 4.3: Deaktivierung der Steuerungsbeschränkung  $g_{\bar{k}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  auf dem Integrationsintervall  $[t_{\nu}^{(0)}, t_{\nu}^{(1)}]$

Mit dieser Vorgehensweise kann nun innerhalb der numerischen Integration der korrekte Status von Steuerungsbeschränkungen mit regulärer Hamiltonfunktion und Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung direkt aufgelöst werden. In anderen Worten, Annahmen an die Struktur von Steuerungsbeschränkungen sind a-priori nicht nötig.

#### 4.4 Zustandsbeschränkungen von Optimalsteuerungsproblemen mit regulärer Hamiltonfunktion

Im Abschnitt 4.2 wurde das MSV diskutiert, welches numerisch RWP gewöhnlicher DGL löst. Dabei wurde bereits erwähnt, dass die korrekten Auf- und Abprunzeitpunkte von Zustandsbeschränkungen a-priori unbekannt sind und mit der Lösung eines OSP  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  mitbestimmt werden müssen. Sie sind Teil der exakten Struktur der Lösung  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$ , welche vor dem Starten eines MSV in einer Schätzung angenommen werden muss. Damit stehen Zustandsbeschränkungen im Gegensatz zu den Steuerungsbeschränkungen eines OSP, deren Status zu jedem Zeitpunkt der numerischen Integration eindeutig bestimmt werden kann, vgl. Abschnitt 4.3. Nach wie vor werden ausschließlich OSP mit regulärer Hamiltonfunktion und Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung betrachtet.

Einer der wichtigsten Vorteile in der Anwendung von nichtlinearer MPC liegt in ihrer Fähigkeit, implizit während der Vorhersage der Dynamik Beschränkungen an Zustandsvariablen zu berücksichtigen. In praktischen Anwendungen, wie der Regelung einer WEA, sind mehrere dieser Beschränkungen gleichzeitig einzuhalten, wobei dazu lediglich das Generatormoment und der Anstellwinkel als Stellgrößen herangezogen werden können. Nicht für jede dieser formal definierten Beschränkungen kann das exakt getan werden. Dies ist auf Unsicherheiten zurückzuführen, welche bei der Auslegung einer MPC für mechanische Systeme nahezu grundsätzlich berücksichtigt werden müssen.

- Systemzustände können entweder direkt gemessen werden oder müssen über messbare Zustandsvariablen beobachtbar sein. Sowohl eine Messung als auch eine Zustandsschätzung ist in praktischen Anwendungen selten exakt möglich.
- Die Dynamik kann Einflussfaktoren – wie der Windgeschwindigkeit im Fall der Regelung einer WEA – unterworfen sein, die nicht exakt berücksichtigt werden können.
- Im Rahmen einer MPC kommen häufig vereinfachte mathematische Modelle der Systemdynamik zum Einsatz. Damit werden die wichtigen dominanten dynamischen Charakteristiken für eine Regelung aufgelöst. Oszillationen um diese Charakteristiken werden von diesen vereinfachten Modellen nicht erfasst und stehen somit einer MPC nicht zu Verfügung.

Somit können zwar Zustandsbeschränkungen formal innerhalb eines OSP eingehalten werden, aufgrund von Unsicherheiten in der Vorhersage der Dynamik kann aber nicht zu jedem Zeitpunkt einer MPC garantiert werden, dass diese Zustände auch vom zu regelnden realen System exakt abgefahren werden. Beispielsweise kann es im Verlauf einer MPC bei exakter Einhaltung aller formal definierter Zustandsbeschränkungen zu korrigierten Anfangswerten  $\mathbf{x}_0(l_i)$  kommen, welche entweder schon eine Zustandsbeschränkung verletzen, d.h. es gilt  $h_l(\mathbf{x}_0(l_i)) > 0$  für mindestens ein  $l \in \{1, \dots, q\}$ , oder eine Lösung unter exakter Berücksichtigung von Zustandsbeschränkungen existiert formal nicht mehr. Läuft die WEA beispielsweise bereits an ihrer maximalen Drehzahl, so kann ein auch nur leicht unterschätztes, aus der Aerodynamik resultierendes Drehmoment, bereits zu einer Verletzung der maximalen Drehzahl im nächsten MPC-Schritt führen.

Für die praktische Anwendung bietet es sich daher an, Zustandsbeschränkungen während der Auslegung einer MPC in zwei Kategorien aufzuteilen.

1. Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung, deren Vorhersage exakt ist, werden auch im Rahmen der indirekten MPC exakt berücksichtigt. Ihre Indizes werden in der Menge  $\mathcal{Q}_1 \subset \{1, \dots, q\}$  zusammengefasst.
2. Zustandsbeschränkungen höherer Ordnung und Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung, deren Dynamik in der Vorhersage Unsicherheiten unterworfen ist, werden physikalisch sinnvoll relaxiert. Ihre Indizes werden in  $\mathcal{Q}_2 \subset \{1, \dots, q\}$  mit  $\mathcal{Q}_2 = \{1, \dots, q\} \setminus \mathcal{Q}_1$  zusammengefasst.

Für beide Kategorien muss eine Struktur bei der Lösung eines OSP mitbestimmt werden. Beschränkungen der Kategorie 1 führen zu den klassischen Auf- und Absprungpunkten im Intervallinneren  $[t_0, t_f]$ . Beschränkungen der Kategorie 2 können nicht exakt eingehalten werden. Daher möchte man zumindest den Grad ihrer Verletzung limitieren, was über eine Mittelwertbildung und dessen Beschränkung geschieht. Daher reduziert sich die Struktur von Beschränkungen der Kategorie 2 auf den Status aktiv oder inaktiv, welcher formal dem Endzeitpunkt



$t_f$  zugeordnet wird und somit zur Definition 2.8 der Struktur konsistent ist. In Abschnitt 4.4.1 wird zunächst genauer diskutiert, wie Beschränkungen der Kategorie 2, insbesondere physikalisch sinnvoll, relaxiert werden können. So muss bei der Beschreibung des eigentlichen Verfahrens kein Unterschied zwischen den Kategorien vorgenommen werden.

Die Struktur einer Lösung muss automatisiert bestimmt und jede Änderung aufgelöst werden. Dies geschieht iterativ auf Basis einer gültigen Struktur aus dem vorangegangenen OSP und erfordert das einmalige Bestimmen einer initialen Lösung, dessen Diskussion in Teilabschnitt 4.4.2 geführt wird. Das Auflösen von Änderungen der Struktur einer Lösung folgt in den Teilabschnitten 4.4.3 und 4.4.4.

Formal kann eine MPC auch als das sukzessive Lösen von OSP zu sich verändernden Anfangswerten angesehen werden, da alle Randbedingungen – beispielsweise  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(\iota)$  – in Abhängigkeit von Anfangszeitpunkt  $t_0$  formuliert werden können. Somit ist sowohl die Lösung  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  als auch die jeweilige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  vom Anfangszeitpunkt  $\iota$  abhängig. Dies wird im Folgenden durch die Notation  $\mathbf{x}^*(t; \iota)$  und  $\mathbf{u}^*(t; \iota)$  verdeutlicht. Für die weitere Diskussion wird zusätzlich folgende Annahme getroffen.

**Annahme 4.7** (Stetigkeit der Lösung in  $\iota$ )

*Es sei  $(\mathbf{x}^*(t; \iota); \mathbf{u}^*(t; \iota))$  die Lösung des OSP 2.1 mit regulärer Hamiltonfunktion und Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung. Dann ist  $(\mathbf{x}^*(t; \iota); \mathbf{u}^*(t; \iota))$  stetig in  $\iota$ , sobald  $\mathbf{x}_0(\iota)$  und  $\mathcal{T}_h(\iota)$  stetig sind.*

Mittels Methoden der Optimalen Steuerung können – ohne weitere Voraussetzungen – nur lokale Optima gesucht werden. Mit der Annahme 4.7 geht man davon aus, dass sich ein solches lokales Optimum stetig mit den Anfangswerten ändert. Ohne weitere Voraussetzungen wie Konvexität benötigen iterative Verfahren einen geeigneten Startwert, um in die tatsächliche Lösung zu konvergieren. Falls  $(\mathbf{x}^*(t; \iota); \mathbf{u}^*(t; \iota))$  stetig in  $\iota$  ist und für einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0(\bar{\iota}) \in \mathcal{X}$  eine Lösung bekannt ist, kann diese Lösung zusammen mit der Annahme 4.7 in eine neue Lösung für  $\mathbf{x}_0(\hat{\iota}) \in \mathcal{X}$  mit  $\bar{\iota} \neq \hat{\iota}$  überführt werden. Im Rahmen des Lösens von nichtlinearen Gleichungssystemen spricht man auch von sogenannten *Fortschrittsverfahren* (engl. *numerical continuation*). Die Konsequenzen der Annahme 4.7 werden ausführlicher in Abschnitt 4.5 diskutiert.

#### 4.4.1 Physikalisch sinnvolle Relaxierung von Zustandsbeschränkungen

Wie bereits erwähnt, ist die Relaxierung eine von zwei Methoden, um Zustandsbeschränkungen des eigentlichen OSP im Rahmen von MPC unter Unsicherheiten zu berücksichtigen. Sie kommt in der vorliegenden Arbeit immer dann zum Einsatz, wenn davon ausgegangen werden muss, dass es aufgrund von Messen oder Schätzen des Systemzustandes zu unzulässigen Anfangsbedingungen kommen kann.

Als Alternative zur exakten Berücksichtigung wird in der Literatur häufig das vollständige Aufweichen von Zustandsbeschränkungen verwendet [63, S. 809]. Dabei wird die entsprechende Beschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  für ein  $l \in \mathcal{Q}_2$  mittels eines konstanten Multiplikators  $\epsilon > 0$  an das zu optimierende Funktional angekoppelt. Während es nach (2.1.1) ursprünglich die Form

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left[ \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \right]$$

besitzt, wird diese mittels *weicher* Zustandsbeschränkungen (engl. *soft constraints*) in

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left[ \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \epsilon a(h_l(\mathbf{x}))] dt \right]$$

umgewandelt. Dabei ist die Funktion  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  in der Regel streng monoton steigend auf  $\mathbb{R}_0^+$ , verschwindet auf  $\mathbb{R}_0^-$  und je nach Anforderungen an die Regularität  $k$ -fach stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}$ . Da dieser zusätzliche Term bei einer Verletzung der Zustandsbeschränkung den Wert des Funktionals erhöht und somit der eigentlichen Minimierung entgegen wirkt, spricht man auch von einem *Bestrafungs-Ansatz* (engl. *penalty-approach*).

Der Parameter  $\epsilon$  stellt dabei die Verletzung der Zustandsbeschränkung in Relation zu der optimierenden Größe dar. Er wandelt die physikalische Größe der Zustandsbeschränkung (nach Anwendung auf die Funktion  $a(z)$ ) in die eigentliche Größe des Zielfunktions um. Im Fall der maximalen Rotordrehzahl müsste  $a([\text{rad/s}])$  in die elektrische Leistung [W] umgewandelt werden. Das erfordert in der Regel eine Abstraktion der physikalischen Bedeutung des konstanten Multiplikators  $\epsilon$ , was es dementsprechend erschwert, eine geeignete Wahl für  $\epsilon$  zu treffen. Es wird künstlich ein konstanter phänomenologischer Zusammenhang zwischen der zu minimierenden Zielgröße und den Beschränkungen des Systems geschaffen.

Wenn eine exakte Berücksichtigung von Beschränkungen an Systemzustände aufgrund von Unsicherheiten nicht möglich ist, ist eine Limitierung der mittleren Verletzung dieser Beschränkung auf dem Vorhersagehorizont  $[t_0, t_f]$  eine aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht zugängliche Alternative. Dies erleichtert eine physikalische Interpretation des Aufweichens von Zustandsbeschränkungen. Wie im Folgenden außerdem gezeigt wird, kann diese Herangehensweise mit einer adaptiven Wahl des Parameters  $\epsilon$  des Bestrafungs-Ansatzes verglichen werden, wodurch Situationen mit geringer Verletzung der zu relaxierenden Beschrän-

kung nicht übermäßig starken Einfluss auf das eigentliche Zielfunktional ausüben. Der so angenommene phänomenologische Zusammenhang ist somit nicht konstant, sondern passt sich entsprechend des Grades der Verletzung an und verhindert somit eine entsprechende Überbewertung.

Es sei das OSP 2.1 gegeben. Für ein  $l \in \mathcal{Q}_2$  soll die entsprechende Ungleichungsbeschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  relaxiert werden. Dazu wird durch  $x_{n+1}$  eine zusätzliche Zustandsvariable eingeführt, dessen Dynamik und Anfangswert wie folgt definiert werden.

$$\dot{x}_{n+1} := a(h_l(\mathbf{x})), \quad x_{n+1}(t_0) = 0 \quad (4.4.1)$$

Dabei wird die Möglichkeit offen gehalten, zusätzlich eine  $k$ -fach stetig differenzierbare Funktion  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  zwischenschalten. Für ein lineares  $a(z) = z$  entspricht der Endwert  $\frac{x_{n+1}(t_f)}{t_f - t_0}$  der mittleren Verletzung der eigentlichen Zustandsbeschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$ . Daher wird zusätzlich zum Anfangswert aus (4.4.1) folgende Endbedingung eingeführt.

$$x_{n+1}(t_f) - (t_f - t_0) a(x_{n+1, \max}) \leq 0 \quad (4.4.2)$$

Als maximale mittlere zulässige Verletzung kann der Parameter  $x_{n+1, \max}$  nach physikalisch sinnvollen und ingenieurwissenschaftlichen Kriterien geeignet gewählt werden. Da die rechte Seite der Dynamik in (4.4.1) unabhängig von  $x_{n+1}$  ist und nur der Endwert im Rahmen einer Ungleichungsbedingung in (4.4.2) auftritt, spricht man auch von einer *Integralbeschränkung*: Die rein positive Verletzung der Zustandsbeschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t))$  für  $t \in [t_0, t_f]$  und  $l \in \mathcal{Q}_2$  wird integriert und ihr Endwert beschränkt.

Dieser Ansatz des physikalisch sinnvollen Relaxierens von Zustandsbeschränkungen kann formal in einen Zusammenhang mit den oben erwähnten Methoden der Bestrafung mit konstantem Multiplikator  $\epsilon$  gebracht werden. Die Zustandsvariable  $x_{n+1}$  wurde dem ursprünglichen System nach Problem 2.1 neu hinzugefügt. Wenn  $\bar{\mathcal{H}}$  die Hamiltonfunktion des ursprünglichen OSP 2.1 bezeichnet, dann gilt für das OSP mit relaxierter Zustandsbeschränkung  $h_l(\mathbf{x}) \leq 0$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \bar{\mathcal{H}}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mathbf{u}) + \lambda_{n+1} a(h_l(\mathbf{x})).$$

Da sie damit weder in der ursprünglichen Dynamik noch in der rechten Seite von (4.4.1) auftritt, gilt für die Dynamik der entsprechenden adjungierten Variable  $\lambda_{n+1}$  nach (2.1.11) für alle  $t \in [t_0, t_f]$

$$\dot{\lambda}_{n+1} = -\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \mathcal{H}_{erw}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_h) = -\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} [\lambda_{n+1} a(h_l(\mathbf{x}))] = 0.$$

Sie ist daher konstant auf  $[t_0, t_f]$ .

Während im klassischen Bestrafungs-Ansatz  $\epsilon$  im Verlauf der MPC konstant gehalten wird, wird  $\lambda_{n+1}$  zu jedem MPC-Schritt  $\iota_\kappa$  derart gewählt, dass die Beschränkung der mittleren Verletzung nach (4.4.2) konstant erfüllt ist. Im klassischen Bestrafungs-Ansatz muss  $\epsilon$  auch den Fall mit maximal zulässiger Beschränkung abdecken, wodurch Situationen, in denen es nur zu einer kurzzeitigen Verletzung der Beschränkung kommt, übermäßig stark *bestraft* werden.

Insgesamt reiht sich die Relaxierung mittels Integralbeschränkungen über die Vorgabe einer zulässigen mittleren Verletzung als Element zwischen einer exakten Berücksichtigung und einer mittels Bestrafungs-Ansatz aufgeweichten Zustandsbeschränkung ein.

Diese Art des Relaxierens von Zustandsbeschränkungen kann formal als Transformation der Beschränkung von

$$h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

zu

$$x_{n+1}(t) - (t_f - t_0) x_{n+1,max} \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (4.4.3)$$

betrachtet werden. Da die rechte Seite der Dynamik der Integralbeschränkung (4.4.1) nicht-negativ und damit  $x_{n+1}(t)$  monoton steigend für  $t \in [t_0, t_f]$  ist, genügt es, die Gültigkeit von (4.4.3) zum Endzeitpunkt  $t = t_f$  zu berücksichtigen, siehe Ungleichung (4.4.2). Dadurch entsteht jedoch ein zusätzliches Element in der Struktur der Lösung  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  nach Definition 2.8, welches es im zeitlichen Verlauf der MPC entsprechend zu aktivieren oder deaktivieren gilt. Dies wird zusammen mit allgemeinen Änderungen der Lösungsstruktur zum Endzeitpunkt in Abschnitt 4.4.4 diskutiert.

#### 4.4.2 Bestimmung einer initialen Lösung

Wie bereits einleitend erwähnt, basiert die Struktur einer Lösung in einem MPC-Schritt in der Regel auf der Struktur des vorangegangenen MPC-Schrittes. Damit muss es mindestens einen Zeitpunkt  $\iota_0$  geben, zu dem keine Strukturannahme aus einem zuvor gelösten OSP zur Verfügung steht. Dann ist das Bestimmen einer initialen Lösung notwendig.  $(\mathbf{x}^*(t; \iota_0); \mathbf{u}^*(t; \iota_0))$  muss dafür eine möglichst einfache, allgemein gültige und effektiv zu bestimmende Form besitzen. Über  $x_0(\iota)$  und  $\mathcal{T}_h(\iota)$  hängt die Struktur von den Anfangswerten und der Länge des Zeithorizontes ab.

Ein sehr hohes Konvergenzverhalten wurde im Rahmen der MPC für die WEA in Kapitel 5 dadurch erreicht, dass  $\mathcal{T}_h(\iota_0)$  verhältnismäßig klein gewählt wurde, beispielsweise  $\mathcal{T}_h(\iota_0) = 10^{-6}$  Sekunden. Dies ist eine gängige Vorgehensweise beim Lösen von OSP mittels indirekter Verfahren [11]. Dahinter verbirgt sich die Annahme, dass ein genügend kleiner Zeithori-

zont gewählt werden kann, so dass es zu keiner Änderung der Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  innerhalb von  $[\iota_0, \iota_0 + \mathcal{T}_h(\iota_0)]$  kommen kann. Diese Annahme gilt jedoch nicht für jeden zulässigen Anfangswert  $\mathbf{x}_0(\iota_0) \in \mathcal{X}$ . Beispielsweise kann es im Fall von relaxierten Zustandsbeschränkungen aus Kategorie 2 zu Anfangswerten kommen, die auf einem derart kurzen Zeithorizont keine Lösung besitzen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn der Anfangswert für die Rotordrehzahl bereits oberhalb des maximal mittleren zulässigen Wertes der Verletzung liegt. Damit steht dem OSP in der Regel nicht genügend Zeit zur Verfügung, um die Verletzung der relaxierten Zustandsbeschränkung im Mittel über den Zeithorizont zu eliminieren. Im Fall von Beschränkungen der Kategorie 1 kann keine eindeutige Annahme an die jeweilige Struktur getroffen werden, falls bereits  $h_l(\mathbf{x}(t_0)) = 0$  für ein  $l \in \mathcal{Q}_1$  zum Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_0$  gilt. Die Beschränkung  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  kann auf diesem kleinem Intervall  $[\iota_0, \mathcal{T}_h(\iota_0)]$  entweder aktiv oder inaktiv sein, auch wenn sie eventuell ihren Status auf  $[\iota_0, \iota_0 + \mathcal{T}_h(\iota_0)]$  nicht ändert.

Zur Stabilisierung der Berechnung einer initialen Lösung wird daher ein Ersatz-Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{X}$  gewählt, der folgende Bedingungen erfüllt.

- Es gilt  $h_l(\bar{\mathbf{x}}_0) < 0$  für alle  $l \in \mathcal{Q}_1$ . Außerdem kann keine Beschränkung der Kategorie 1 auf dem Intervall  $[\iota_0, \iota_0 + \mathcal{T}_h(\iota_0)]$  aktiv werden.
- Für  $l \in \mathcal{Q}_2$  gilt  $a(h_l(\bar{\mathbf{x}}_0)) = 0$ , vgl. Teilabschnitt 4.4.1. Dadurch kann die Endbedingung durch (4.4.2) eingehalten werden.

$\bar{\mathbf{x}}_0$  kann damit deutlich von dem tatsächlichen Anfangswert  $\mathbf{x}_0(\iota_0)$  abweichen. Im Gegenzug ist jedoch mit

$$\mathcal{T}_S = \{\iota_0, \iota_0 + \mathcal{T}_h(\iota_0)\}, \quad \mathcal{I}_S = \emptyset$$

eine gültige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)$  bekannt, für die im Fall der WEA zu allen später betrachteten Lastfällen stabil eine Lösung  $(\mathbf{x}^*(t; \iota_0); \mathbf{u}^*(t; \iota_0))$  berechnet werden kann. Daher wird im Folgenden davon ausgegangen, dass zu dem Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}_0$  eine Lösung des OSP für einen verhältnismäßig klein gewählten Zeithorizont bestimmt werden kann, auch wenn dieser nicht dem aktuellen gemessenen oder geschätzten Zustand  $\mathbf{x}_0(\iota_0)$  entspricht.

Dieser Initiierungsschritt kann formal in das Konzept der indirekten MPC eingegliedert werden. Dazu wird der Menge der Abtastzeitpunkte  $\Omega_\iota$  das Element  $\iota_{-1} := \iota_0$  hinzugefügt.  $\iota_{-1}$  weicht damit als einziges Element von der ansonsten äquidistanten Verteilung der Elemente von  $\Omega_\iota$  ab, vgl. Definition 2.26. Die durch stückweise lineare Interpolation erzeugte Funktion  $\mathbf{x}_0(\iota)$  für die Anfangswerte der OSP wird mit  $\mathbf{x}_0(\iota_{-1}) = \bar{\mathbf{x}}_0$  erweitert, vgl. Definition 2.28. Äquivalent dazu ist der Vorhersagehorizont durch  $\mathcal{T}_h(\iota_{-1}) = 10^{-6}$  s definiert. Auch dieser wird stückweise linear interpoliert, wodurch der Zeithorizont linear von  $\mathcal{T}_h(\iota_{-1})$  auf  $\mathcal{T}_h(\iota_0)$  gefahren wird.

Mittels des in dem restlichen Teil des aktuellen Abschnittes vorgestellten Verfahrens kann damit eine Lösung  $(\mathbf{x}^*(t; \iota_0); \mathbf{u}^*(t; \iota_0))$  zum Anfangswert  $\mathbf{x}_0(\iota_0)$  mit der vollen Länge des vorgegebenen Zeithorizontes  $\mathcal{T}_h(\iota_0)$  bestimmt werden.

#### 4.4.3 Berechnung eines indirekten MPC-Schrittes

Es sei nun eine gültige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa$  aus dem vorangegangenen MPC-Schritt mit Index  $\kappa$  bekannt. Wird daher im Folgenden ein MSV zur Lösung eines OSP gestartet, erfolgt dies immer zusammen mit einer angenommenen Struktur. Diese ist für den vorangegangenen Zeitpunkt  $\iota_\kappa$  gültig. Für ein  $\kappa \in \{-1, 0, \dots, \infty\}$  wird ein indirekter MPC-Schritt  $\kappa \mapsto \kappa + 1$  exemplarisch durchgespielt, d.h. die optimale Steuerung zum Zeitpunkt  $\iota_{\kappa+1}$  wird auf Basis der Lösung zum Zeitpunkt  $\iota_\kappa$  wie folgt bestimmt, siehe dazu parallel Abbildung 4.4 (Seite 76).

1. Mit  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa$  ist eine gültige Struktur für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0(\iota_\kappa)$  und Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa$  bekannt. Dies folgt aus der Diskussion in Abschnitt 4.4.2.
2. Mittels einer Messung oder Schätzung des aktuellen Systemzustandes ist der Anfangswert  $\mathbf{x}_0(\iota_{\kappa+1})$  des OSP bestimmt worden. Für einen Anfangszeitpunkt  $\bar{t} \in ]\iota_\kappa, \iota_{\kappa+1}[$  wird  $\mathbf{x}_0(\bar{t})$  zwischen  $\mathbf{x}_0(\iota_\kappa)$  und  $\mathbf{x}_0(\iota_{\kappa+1})$  linear interpoliert.
3. Ziel ist es, sukzessiv für Anfangszeitpunkte  $\bar{t} \in ]\iota_\kappa, \iota_{\kappa+1}[$  und für  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(\bar{t})$  und  $t_0 = \bar{t}$  das entsprechende OSP auf dem Zeitintervall  $[\bar{t}, \bar{t} + \mathcal{T}_h(\bar{t})]$  zu lösen. Der Zeitpunkt  $\bar{t} \in ]\iota_\kappa, \iota_{\kappa+1}[$  liegt innerhalb des MPC-Zeitschrittes. Der MPC-Schritt ist beendet, falls für  $\bar{t} = \iota_{\kappa+1}$  eine gültige Lösung bestimmt wurde. Die folgenden Schritte 4. bis 6. stellen eine Schleife dar, die mit dem Index  $i = 1$  gestartet wird. Es gilt per Definition  $\iota_\kappa^{(0)} := \iota_\kappa$  und  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(0)} := (\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa$ .
4. Zum Anfangszeitpunkt  $\iota_\kappa^{(i)} \in ]\iota_\kappa^{(0)}, \iota_{\kappa+1}[$  mit  $\iota_\kappa^{(i)} > \iota_\kappa^{(i-1)}$  wird das MSV mit den Werten der Lösung  $\mathbf{x}^*(t; \iota_\kappa^{(i-1)})$  gestartet.

Der Ausgang des MSV aus Schritt 4. wird in die Fälle 5.1 bis 5.4 unterteilt. Es sei zunächst angenommen, dass das MSV konvergiert. Damit wurde eine Lösung bestimmt, die das RWP des entsprechenden OSP auf Basis der Strukturannahme  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i-1)}$  erfüllt. Diese Annahme muss im Nachgang auf ihre vollständige Gültigkeit hin verifiziert werden. Dazu wird überprüft, ob für alle  $l \in \mathcal{Q}_1$  und für alle  $t \in [t_0, t_f]$  die Beschränkungen  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  und zugehörigen notwendigen Bedingungen  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$  eingehalten wurden. Äquivalent werden für  $l \in \mathcal{Q}_2$  die Bedingungen der relaxierten Beschränkungen überprüft. Wie in Abschnitt 4.3 bereits diskutiert wurde, sind die Steuerungsbeschränkungen direkt während der Integration innerhalb des MSV berücksichtigt worden. Ihre Gültigkeit muss daher nicht weiter bestätigt werden. Im Fall der Zustandsbeschränkungen kann es jedoch schon während des MSV zu einem Wechsel in der Reihenfolge der Auf- und Absprungpunkte  $t_\nu \in \mathcal{T}_S$  kommen. Dieser

Positionswechsel kann direkt vom MSV durchgeführt werden, wodurch sich die Struktur auch während des Verfahrens ändern kann. Die Anzahl von Auf- und Absprungpunkten bleibt dabei jedoch unberührt. Die – eventuell umsortierte – noch nicht validierte Struktur nach dem erfolgreichen MSV sei zunächst mit  $(\overline{\mathcal{T}}_S, \overline{\mathcal{I}}_S)$  bezeichnet. Die Elemente von  $\overline{\mathcal{T}}_S$  sind dabei wieder aufsteigend geordnet.

- 5.1 Das MSV konvergiert: Zur Verifizierung von  $(\overline{\mathcal{T}}_S, \overline{\mathcal{I}}_S)$  werden alle Intervalle  $[t_\nu, t_{\nu+1}] \subset [t_0, t_f]$  mit  $t_\nu, t_{\nu+1} \in \overline{\mathcal{T}}_S$  überprüft. Für jedes dieser Intervalle gibt  $\overline{\mathcal{I}}_S$  vor, ob die Zustandsbeschränkung mit dem Index  $l \in \{1, \dots, q\}$  auf diesem aktiv oder inaktiv ist. Dementsprechend muss mit  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  für aktive Beschränkungen die Bedingung  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$  und für inaktive Beschränkungen  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  verifiziert werden.

Der Ausgang der Verifizierung aus 5.1 wird in die Fälle 6.1 bis 6.3 unterteilt.

- 6.1 Sind alle Zustandsbeschränkungen eingehalten und alle notwendigen Bedingungen erfüllt worden, wird  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)} = (\overline{\mathcal{T}}_S, \overline{\mathcal{I}}_S)$  als gültige Struktur für  $\iota_\kappa^{(i+1)} := \bar{t}$  akzeptiert. Gilt dann  $\iota_\kappa^{(i+1)} = \iota_{\kappa+1}$ , ist der gesamte MPC-Schritt  $\iota_\kappa \mapsto \iota_{\kappa+1}$  erfolgreich und kann mit Punkt 7. weiter unten beendet werden. Andernfalls wird mit einem neuem Zeitpunkt  $\hat{t} \in ]\iota_\kappa^{(i+1)}, \iota_{\kappa+1}]$  und  $i \mapsto i + 1$  mit Punkt 4. eine neue Schleife begonnen.

Sind jedoch nicht alle Beschränkungen eingehalten oder alle notwendigen Bedingungen erfüllt, wird eine Änderung der Struktur angezeigt und  $(\overline{\mathcal{T}}_S, \overline{\mathcal{I}}_S)$  kann nicht als gültige Struktur akzeptiert werden.

- 6.2 Taucht exakt eine Verletzung einer der Zustandsbeschränkungen  $h_l(\mathbf{x}(t)) \leq 0$  oder notwendigen Bedingungen  $\mu_{l,h}(t) \geq 0$  auf, kann diese Änderung der Struktur eindeutig bestimmt werden. Wie diese aufgelöst wird, ist Gegenstand der Diskussion in Teilabschnitt 4.4.4. Als Ergebnis der Strukturänderung aus diesen beiden Teilabschnitten erhält man einen neuen Micro-Zeitschritt  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in ]\iota_\kappa^{(i)}, \bar{t}]$  mit einer neuen gültigen Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$ , die sich von  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  unterscheidet. Mit einem  $\hat{t} \in ]\iota_\kappa^{(i+1)}, \iota_{\kappa+1}]$  und  $i \mapsto i + 1$  kann mit Schritt 4. eine neue Schleife begonnen werden.

- 6.3 Wenn es dementsprechend zu einer Verletzung von mehreren Zustandsbeschränkungen oder notwendigen Bedingungen kommt, kann nicht eindeutig bestimmt werden, wie sich  $(\overline{\mathcal{T}}_S, \overline{\mathcal{I}}_S)$  zu einer gültigen Struktur anpassen lässt. Schritt 4. muss daher mit einer kleineren Schrittweite und damit für ein neues  $\hat{t} \in ]\iota_\kappa^{(i)}, \bar{t}[$  wiederholt werden.

7. Als gültige optimale Steuerung kann  $\mathbf{u}^*(t; \cdot, \iota_{\kappa+1})$  für  $t \in [\iota_{\kappa+1}, \iota_{\kappa+1} + \Gamma_h(\iota_{\kappa+1})]$  auf das zu regelnde System angewendet werden. Mit  $\kappa \mapsto \kappa + 1$  kann im darauf folgenden indirekten MPC-Schritt wieder bei Punkt 1. begonnen werden.

Für Punkt 5.1 wurde angenommen, dass das MSV konvergierte. Es sei angenommen, dass ein Abbruchkriterium innerhalb des MSV zu einer erfolglosen Beendigung des Verfahrens geführt hat. Je nach Art des Abbruchkriteriums handelt es sich um eine notwendige Strukturänderung oder eine tatsächliche Divergenz des Verfahrens.

- 5.2 Bricht das Verfahren ab, da es die Reihenfolge zweier Stützwerte  $t_\nu$  und  $t_{\nu+1}$  nicht erfolgreich tauschen kann und sind diese Stützwerte Auf- bzw. Abสปरणpunkte der gleichen Zustandsbeschränkung, so handelt es sich um eine Strukturänderung, welche in Teilabschnitt 4.4.4 detaillierter diskutiert wird. Ähnlich wie in Teilschritt 6.2 erhält man als Ergebnis dieser Strukturänderung einen neuen Micro-Zeitschritt  $l_\kappa^{(i)} \in ]l_\kappa^{(i-1)}, \bar{l}]$  mit einer neuen gültigen Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$ , welche sich von  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i-1)}$  unterscheidet. Mit einem  $\hat{l} \in ]l_\kappa^{(i)}, l_{\kappa+1}]$  und  $i \mapsto i + 1$  kann mit Schritt 4. eine neue Schleife begonnen werden.
- 5.3 Bricht das Verfahren ab, da es versucht einen Stützwert  $t_\nu$  mit dem Endzeitpunkt  $t_f$  zu vertauschen, so handelt es sich um eine Strukturänderung, welche im zweiten Teil von Abschnitt 4.4.4 detaillierter diskutiert wird. Auch hier erhält man als Ergebnis einen neuen Micro-Zeitschritt  $l_\kappa^{(i+1)} \in ]l_\kappa^{(i)}, \bar{l}[$  mit einer neuen gültigen Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$ , welche sich von  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  unterscheidet. Mit einem  $\hat{l} \in ]l_\kappa^{(i)}, l_{\kappa+1}]$  und  $i \mapsto i + 1$  kann mit Schritt 4. eine neue Schleife begonnen werden.
- 5.4 In allen anderen Fällen können die Gründe des Abbruchs vielfältig sein. Die Schleife wird mit Teilschritt 4. und neuem  $\hat{l}_\kappa \in ]l_\kappa^{(i)}, \bar{l}[$  mit kleinerer Schrittweite neu gestartet. Durch eine kleinere Schrittweite  $\Delta \hat{l} := \hat{l}_\kappa - l_\kappa^{(i)} < \Delta \bar{l} := \bar{l}_\kappa - l_\kappa^{(i)}$  und damit kleineren Änderungen in den Randbedingungen wird versucht, eine bessere Konvergenzgüte des nichtlinearen Gleichungssystems innerhalb des MSV zu erhalten. Dafür ist eine, je nach Anwendung, geeignete Strategie zu wählen. Daher wird im Fall der indirekten MPC einer WEA die Schrittweite jeweils halbiert, falls es zu einem der in diesem Teilschritt betrachteten Abbrüche des MSV kommt. Da es sich in der Regel um nicht-konvexe, nichtlineare Systeme mit Ungleichungsbeschränkungen unter Unsicherheiten wie etwa Messungenauigkeiten oder Modellvereinfachungen handelt, kann nicht in jedem MPC-Schritt eine – ausreichend schnell berechnete – Lösung garantiert werden. Eine detailliertere Diskussion der Folgen ist Bestandteil des Abschnittes 4.5, wenn es um eine kritische Bewertung der Anwendung von nichtlinearer MPC zur Regelung mechanischer Systeme geht.

Insgesamt entsteht durch das in den Teilschritten 1. bis 7. beschriebene Verfahren eines MPC-Schrittes eine *Micro-Diskretisierung* zwischen den Punkten  $l_\kappa$  und  $l_{\kappa+1}$  der *Macro-Diskretisierung*.

$$l_\kappa = l_\kappa^{(0)} < l_\kappa^{(1)} < \dots < l_\kappa^{(N_\kappa)} = l_{\kappa+1}$$



Sie hat keine feste Schrittweite, sondern setzt die Anfangszeitpunkte  $\iota_{\kappa}^{(i)}$  dynamisch je nach Strukturänderung oder Lösbarkeit des Verfahrens. Äquivalent dazu wird die Diskretisierung des Regelintervalls

$$\iota_{-1} \leq \iota_0 < \iota_1 < \iota_2 < \dots$$

als *Macro-Diskretisierung* bezeichnet. Ihre Zeitpunkte sind äquidistant verteilt und entstehen durch die Abtastrate des Reglers. Ein MPC-Schritt mit den Teilschritten 1. bis 7. ist in Abbildung 4.4 in einem Flussdiagramm dargestellt.

#### 4.4.4 Automatisiertes Auflösen von Strukturänderungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein MPC-Schritt  $\iota_{\kappa} \rightarrow \iota_{\kappa+1}$  und seine Zerlegung in Micro-Schritte detailliert diskutiert. In Teilschritt 5.1 werden nach einem erfolgreichen MSV alle Zustandsbeschränkungen  $h_l(\bar{\mathbf{x}}(t; \iota)) \leq 0$  für  $l \in \mathcal{Q}_1$  und die mit ihnen assoziierten notwendigen Bedingungen  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$  für  $t \in [t_0, t_f]$  überprüft. Dabei bezeichne  $\bar{\mathbf{x}}(t; \bar{\iota})$  weiterhin die aus dem MSV erhaltene Lösung zum Zeitpunkt  $t_0 = \bar{\iota}$ .

Eine Strukturänderung wird in Teilschritt 6.2 wie folgt erkannt. Aus einem erfolgreichen MSV erhält man die Struktur  $(\bar{\mathcal{T}}_S, \bar{\mathcal{I}}_S)$ . Diese wurde von  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i)}$  als zunächst angenommene Struktur übernommen und kann sich während des MSV maximal in der Reihenfolge der  $t_{\nu} \in \bar{\mathcal{T}}_S$  verändern. Die Anzahl der Elemente aus  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i)}$  bleibt in  $(\bar{\mathcal{T}}_S, \bar{\mathcal{I}}_S)$  unberührt. Beispielsweise kann ein Aufsprungpunkt  $t_{\nu} \in \mathcal{T}_S$  für eine Zustandsbeschränkung zum Index  $l_1 \in \mathcal{Q}_1$  seine Position mit einem Aufsprungpunkt  $t_{\nu+1} \in \mathcal{T}_S$  für eine Beschränkung zum Index  $l_2 \in \mathcal{Q}_1 \setminus \{l_1\}$  tauschen, so dass  $t_{\nu} = \bar{t}_{\nu+1} \in \bar{\mathcal{T}}_S$  und  $t_{\nu+1} = \bar{t}_{\nu} \in \bar{\mathcal{T}}_S$  nach Beendigung des Verfahrens gilt. Es muss nun die neue Struktur  $(\bar{\mathcal{T}}_S, \bar{\mathcal{I}}_S)$  auf ihre Gültigkeit hin bewertet werden. Dazu werden beginnend mit dem Teilintervall  $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_f]$  alle Teilintervalle  $[t_{\nu}, t_{\nu+1}] \subset [t_0, t_f]$  mit  $t_{\nu}, t_{\nu+1} \in \bar{\mathcal{T}}_S$  wie folgt überprüft.

1. Gilt nach  $\bar{\mathcal{I}}_S$  für alle  $t \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$ , dass die Zustandsbeschränkung zum Index  $l \in \mathcal{Q}_1$  inaktiv ist, wird die Gültigkeit von  $h_l(\bar{\mathbf{x}}(t))$  für alle  $t \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$  überprüft.
  - Wird die Gültigkeit bestätigt, d.h. es gilt  $h_l(\bar{\mathbf{x}}(t)) \leq 0$  für alle  $t \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$ , wird das entsprechende Element von  $\bar{\mathcal{I}}_S$  für  $l \in \{1, \dots, q\}$  und für  $t \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$  übernommen.
  - Wird die Gültigkeit nicht bestätigt, d.h. es existiert ein  $t \in [t_{\nu}, t_{\nu+1}]$  derart, dass  $h_l(\bar{\mathbf{x}}(t)) > 0$ , dann wird damit eine Verletzung festgestellt und zur Strukturangepasung vermerkt.

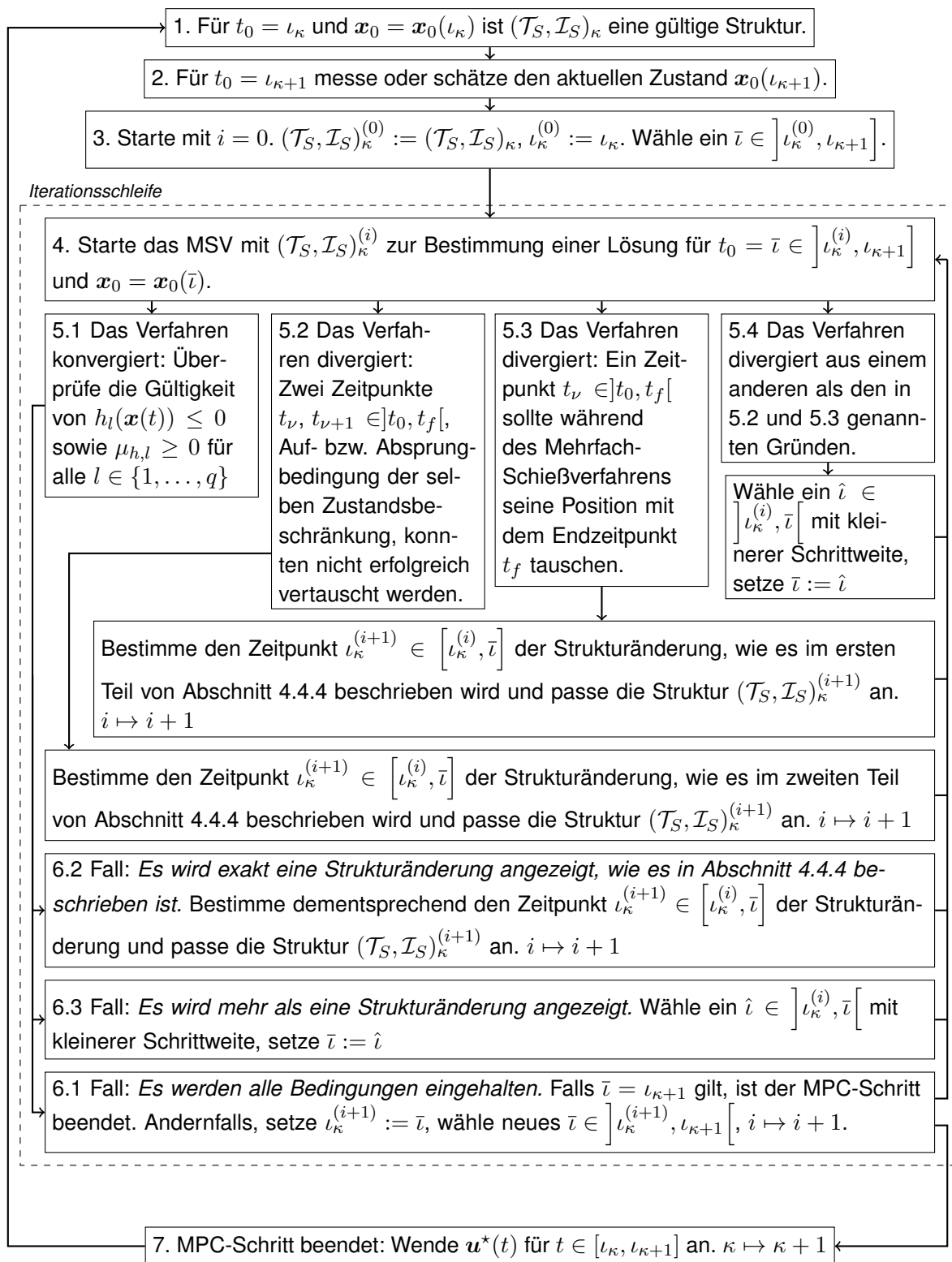


Abbildung 4.4: Flussdiagramm eines indirekten MPC-Schrittes  $l_\kappa \rightarrow l_{\kappa+1}$

2. Gilt nach  $\overline{\mathcal{I}_S}$  für alle  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$ , dass die Zustandsbeschränkung zum Index  $l \in \mathcal{Q}_1$  aktiv ist, wird die Gültigkeit von  $\mu_{h,l}(t)$  für alle  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  überprüft.
  - Wird die Gültigkeit bestätigt, d.h. es gilt  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$  für alle  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$ , wird das entsprechende Element von  $\overline{\mathcal{I}_S}$  für  $l \in \mathcal{Q}_1$  und für  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  übernommen.
  - Wird die Gültigkeit nicht bestätigt, d.h. es existiert ein  $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  derart, dass  $\mu_{h,l}(t) < 0$ , dann wird damit eine Verletzung festgestellt und zur Strukturanpassung vermerkt.
  
3. Neben den Zustandsbeschränkungen der Kategorie 1 müssen auch die relaxierten Zustandsbeschränkungen der Kategorie 2 überprüft werden. Wie bereits in Abschnitt 4.4.1 erwähnt, reduziert sich ihre Überprüfung auf den Endzeitpunkt, da sie für das gesamte Intervall  $[t_0, t_f]$  entweder aktiv oder inaktiv sind. Gilt nach  $\overline{\mathcal{I}_S}$  für  $t = t_f$ , dass die relaxierte Zustandsbeschränkung zum Index  $l \in \mathcal{Q}_2$  inaktiv ist, muss Gleichung (4.4.2) überprüft werden.
  - Wird die Gültigkeit bestätigt, d.h. es gilt Gleichung (4.4.2), wird das entsprechende Element von  $\overline{\mathcal{I}_S}$  übernommen.
  - Wird die Gültigkeit nicht bestätigt, d.h. Gleichung (4.4.2) ist nicht mehr erfüllt, dann wird eine Verletzung festgestellt und das entsprechende Element zur Strukturanpassung vorgemerkt.
  
4. Gilt nach  $\overline{\mathcal{I}_S}$  für  $t = t_f$ , dass die relaxierte Zustandsbeschränkung zum Index  $l \in \mathcal{Q}_2$  aktiv ist, muss  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$  überprüft werden.
  - Wird die Gültigkeit bestätigt, d.h. es gilt  $\mu_{h,l}(t) \geq 0$ , wird das entsprechende Element von  $\overline{\mathcal{I}_S}$  übernommen.
  - Wird die Gültigkeit nicht bestätigt, d.h.  $\mu_{h,l}(t) < 0$ , dann wird eine Verletzung festgestellt und das entsprechende Element zur Strukturanpassung vorgemerkt.

Somit entsteht eine Liste vermerkter Strukturänderungen. Enthält diese Liste nach dem Verifizierungsprozess von  $(\overline{\mathcal{T}_S}, \overline{\mathcal{I}_S})$  keinen Eintrag, kann  $(\overline{\mathcal{T}_S}, \overline{\mathcal{I}_S}) = (\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  akzeptiert werden (vgl. Teilschritt 6.1 in Abbildung 4.4). Befinden sich zwei oder mehr Elemente auf dieser Liste, kann nicht eindeutig festgelegt werden, welche dieser Strukturänderungen als erste aufzulösen ist. Der vorläufige Micro-Schritt  $\iota_\kappa^{(i)} \rightarrow \bar{\iota}$  war daher zu groß und muss mit kleiner Schrittweite wiederholt werden (vgl. Teilschritt 6.3 in Abbildung 4.4). Weist die Liste vermerkter Strukturänderungen dagegen nur ein Element auf, kann eine Strukturänderung bestimmt werden. Diese Anpassung ist eindeutig, wenn davon ausgegangen werden kann, dass die tatsächliche Lösung  $(x^*, u^*)$  stetig in seinen Randbedingungen ist, vgl. Annahme 4.7. Mit anderen Worten führt eine immer kleiner werdende Änderung der Anfangswerte als variierende Randbedingung zu einer immer kleiner werdenden Änderung der Lösung. Als Teil des

Abschnittes 4.5 über eine kritische Bewertung der Anwendung von nichtlinearer MPC wird auf die Notwendigkeit der Stetigkeit aus mathematischer sowie ingenieurwissenschaftlicher Sicht genauer eingegangen. Im Rahmen des vorliegenden Abschnittes wird diese Eigenschaft angenommen.

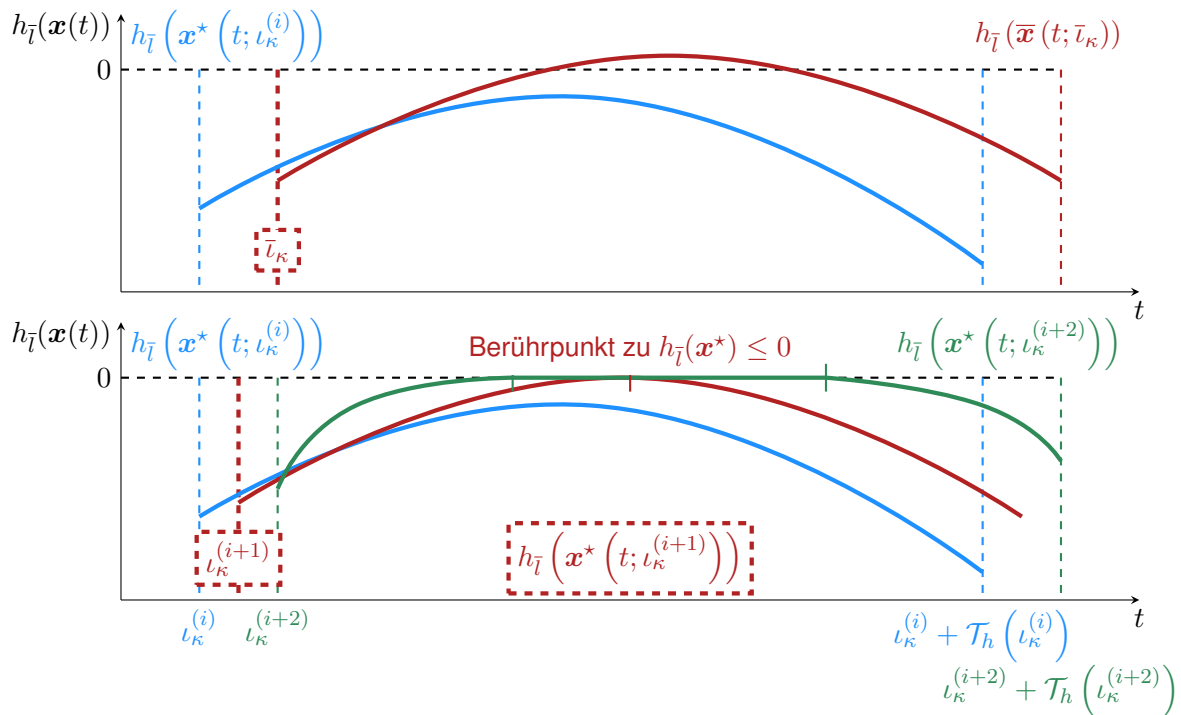
Vorgemerkte Strukturänderungen als Ergebnis des Verifizierungsprozesses fallen jeweils in eine von zwei Kategorien. Im ersten Fall kommt es zu einer Anpassung der Struktur im Intervallinneren des Vorhersagehorizontes  $[t_0, t_f]$ . Im zweiten Fall muss die Struktur zum Endzeitpunkt  $t = t_f$  angepasst werden.

### Auflösen von Strukturänderungen im Intervallinneren

Ziel ist die Beschreibung, wie Strukturänderungen im Intervallinneren korrekt aufgelöst werden. Diese Form der Änderung betrifft nur Beschränkungen der Kategorie 1, da im Intervallinneren entweder Auf- und Absprungpunkte entstehen oder sie sich gegenseitig auslöschen. Beschränkungen der Kategorie 2 besitzen keine Auf- und Absprungpunkte und sind auf dem gesamten Zeithorizont entweder aktiv oder inaktiv. Für ein  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$  werde die folgende Situation betrachtet. Die blaue Lösung  $\mathbf{x}^*(t, \iota_\kappa^{(i)})$  im oberen Graphen der Abbildung 4.5 zum Anfangszeitpunkt  $\iota_\kappa^{(i)}$  verletzt die Zustandsbeschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t, \iota_\kappa^{(i)})) \leq 0$  für kein  $t \in [\iota_\kappa^{(i)}, \iota_\kappa^{(i)} + \mathcal{T}_h(\iota_\kappa^{(i)})]$ . Auf Basis ihrer Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa$  als Annahme für die Lösung zum nächsten Anfangszeitpunkt  $t_0 = \bar{l}$  wird die Berechnung des entsprechenden RWP gestartet. Dessen Lösung wird mit  $\mathbf{x}^*(t; \bar{l})$  bezeichnet und ist im oberen Graphen der Abbildung 4.5 in rot dargestellt. Bei der Überprüfung von  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t; \bar{l})) \leq 0$  für alle  $t \in [\bar{l}, \bar{l} + \mathcal{T}_h(\bar{l})]$  wird eine Verletzung im Intervallinneren festgestellt, d.h. sowohl der Beginn als auch das Ende der Verletzung liegt im Inneren des Vorhersagehorizontes.

Eine derartige Verletzung einer Zustandsbeschränkung der Kategorie 1 ist ein Indikator für eine Strukturänderung. Der für  $t_0 = \bar{l}$  angenommenen Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  muss ein Aufsprungpunkt vor einen Absprungpunkt für die Zustandsbeschränkung zum Index  $\bar{l}$  hinzugefügt werden.

Diese Form der Strukturänderung ist im unteren Graphen der Abbildung 4.5 skizziert. Nach Annahme 4.7 ist  $\mathbf{x}^*(t; \iota)$  stetig in  $\iota$ . Somit muss ein Anfangszeitpunkt  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in [\iota_\kappa^{(i)}, \bar{l}]$  existieren, zu dem im Intervallinneren – in der Umgebung der ursprünglichen Verletzung – ein Berührungspunkt der Zustandsbeschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*) \leq 0$  auftritt. Der Verlauf von  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*)$  zu dieser Lösung  $\mathbf{x}^*(t; \iota_\kappa^{(i+1)})$  ist im unteren Graphen der Abbildung 4.5 in rot dargestellt. Zu diesem Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa^{(i+1)}$  existieren zwei gültige und gleichwertige Strukturen: Da die Zustandsbeschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*) \leq 0$  durch den Berührungspunkt auch ohne zusätzliche Zwangsbedingung im RWP noch eingehalten wird, ist die Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  nach wie vor


 Abbildung 4.5: Indikation für eine Strukturänderung innerhalb des Intervalls  $]t_0, t_f[$ 

gültig. Gleichzeitig kann dieser Struktur ein Auf- und ein Absprungpunkt der Beschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*) \leq 0$  am Berührungspunkt hinzugefügt werden, ohne dass diese Änderung zu einer unzulässigen Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i+1)}$  führt. Damit ist eine Strukturänderung erkannt und aufgelöst worden.  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i+1)}$  ist die ab dem Anfangszeitpunkt  $l_{\kappa}^{(i+1)}$  neue gültige Struktur.

Numerisch kann  $l_{\kappa}^{(i+1)}$  mittels des ableitungsfreien Anderson-Björck Verfahrens effizient aufgelöst werden. Rechenzeiten einer Strukturänderung im Fall der Regelung einer WEA werden in Abschnitt 5.8 auf Basis der gerechneten Lastfälle diskutiert.

Insgesamt kann es zu vier Formen einer Strukturänderung im Intervallinneren kommen.

1. Wie bereits ausführlich diskutiert und in Abbildung 4.5 skizziert, kann über eine Verletzung einer Zustandsbeschränkung der Kategorie 1 im Intervallinneren ein Aufsprungpunkt vor einem Absprungpunkt entstehen.
2. In Abbildung 4.6 ist eine weitere Strukturänderung im Intervallinneren skizziert. Hier wird zum Anfangswert  $t_0 = \bar{l}$  eine Verletzung der notwendigen Bedingung  $\mu_{h,\bar{l}}(t; \bar{l}) \geq 0$  für alle  $t \in [\bar{l}, \bar{l} + \mathcal{T}_h(\bar{l})]$  festgestellt. Auch hier kann wieder auf Basis der Annahme 4.7 ein Anfangszeitpunkt  $l_{\kappa}^{(i+1)} \in [l_{\kappa}^{(i)}, \bar{l}]$  gefunden werden, zu dem die notwendige Bedingung  $\mu_{h,\bar{l}}(t, l_{\kappa}^{(i+1)}) \geq 0$  einen Berührungspunkt besitzt. Im Unterschied zum oben diskutierten Fall entsteht hier ein Absprungpunkt vor einem Aufsprungpunkt für die neue Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i+1)}$ .

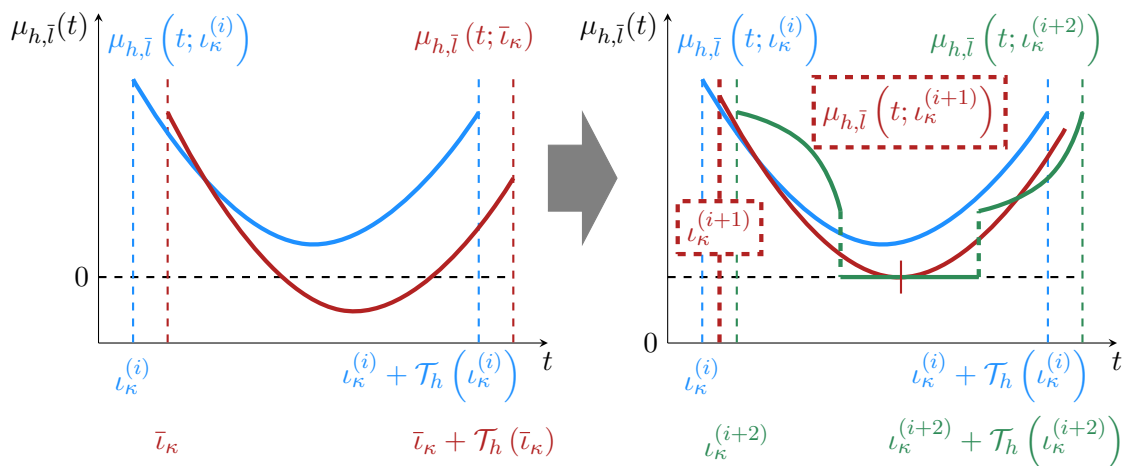


Abbildung 4.6: Strukturänderung im Intervallinneren: Entstehen eines Absprungpunktes vor einem Aufsprungpunkt für eine Beschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$

**Kommentar 4.8**

Im rechten Graphen von Abbildung 4.6 ist auch illustriert, dass die mit den Zustandsbeschränkungen assoziierten Lagrange-Multiplikatoren  $\mu_{h,l}(t)$  an den Auf- und Absprungpunkten nicht stetig auf dem Vorhersagehorizont  $t \in [t_0, t_f]$  sein müssen. Die Höhe des Sprungs kann als Unbekannte der Lösung aufgefasst werden, welche implizit durch das Lösen des RWP mittels des MSV bestimmt wird.

3. In Abbildung 4.7 sind die beiden verbliebenen Typen einer Strukturänderung dargestellt. Sie unterscheiden sich von dem 1. und 2. Typ darin, dass sie nicht durch eine Verletzung einer Bedingung nach dem erfolgreichen Lösen des RWP angezeigt werden, vgl. Teilschritte 5.1 und 6.2. Sie werden durch einen Abbruch des MSV erkannt, der aufgrund eines Wechsels der Reihenfolgen von einem Auf- und einem Absprung der selben Zustandsbeschränkung erfolgt, vgl. Teilschritt 5.2. So ist der 3. Typ in den beiden oberen Graphen illustriert. Der Aufsprungpunkt  $t_1 \in \mathcal{T}_S$  und der Absprungpunkt  $t_2 \in \mathcal{T}_S$  sollen während des MSV ihre Position tauschen. Das MSV wird mit einem entsprechenden Hinweis abgebrochen, weshalb im linken Graphen auch keine Trajektorie für den Anfangszeitpunkt  $t_0 = \bar{l}_{\kappa}$  dargestellt ist. Die beiden Punkte eliminieren sich gegenseitig. Auch hier existiert aufgrund der Annahme 4.7 ein Zeitpunkt  $l_{\kappa}^{(i+1)}$ , für den  $t_1 = t_2$  gilt und dies daher ein Berührungspunkt der Zustandsbeschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*) \leq 0$  darstellt. Die beiden Punkte werden aus  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i)}$  entfernt und man erhält eine neue gültige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i+1)}$ .
4. Während im 3. Typ der Zeitpunkt  $t_1$  einen Aufsprungpunkt und  $t_2$  einen Absprungpunkt der Beschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*) \leq 0$  darstellt, ist dies im 4. Typ umgekehrt. Hier folgt der Aufsprungpunkt  $t_2$  dem Absprungpunkt  $t_1$ . Auch in diesem Fall wird die Strukturänderung durch ein Tauschen dieser beiden Punkte innerhalb des MSV angezeigt, womit das Ver-

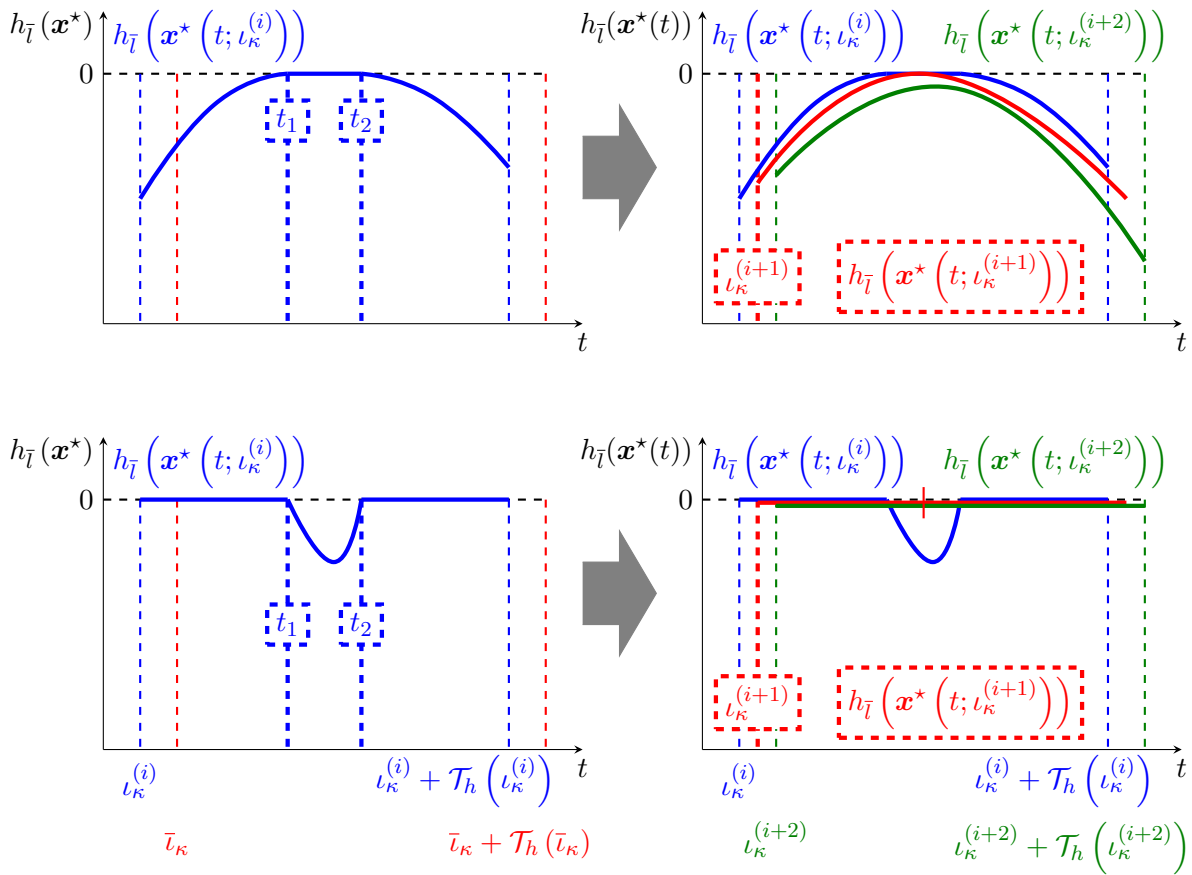


Abbildung 4.7: Strukturänderung im Intervallinneren: Gegenseitiges Auflösen eines Abสปungpunktes und eines Aufสปungpunktes für eine Beschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$

fahren abgebrochen wird. Für die neue gültige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i+1)}$  werden die Punkte  $t_1$  und  $t_2$  aus  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_{\kappa}^{(i)}$  entfernt.

Damit können nun alle Strukturänderungen, die für Zustandsbeschränkungen der Kategorie 1 im Intervallinneren auftreten können, erkannt und entsprechend aufgelöst werden.

### Übergangsbedingungen an den Auf- und Abสปungpunkten

Die Übergangsbedingungen, welche den optimalen Zeitpunkt für einen Aufสปung auf oder einen Abสปung von einer Zustandsbeschränkung festlegen, ergeben sich im Fall von Beschränkungen 1. Ordnung mit regulärer Hamiltonfunktion aus der Zustandsbeschränkung an sich und der Stetigkeit der optimalen Steuerung  $u^*(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$ . Für Zustandsbeschränkungen höherer Ordnung und im Fall der nicht-regulären Hamiltonfunktion können Unstetigkeiten in den adjungierten Variablen  $\lambda(t)$  an diesen Punkten auftreten [12]. An einem

Aufsprungpunkt  $t_1 \in \mathcal{T}_S$  einer Zustandsbeschränkung mit Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$  sind die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}^*(t_1)$  als physikalische Größen durch Vorgabe stetig. Des Weiteren sind die adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  nach Lemma 2.20 stetig und es muss zusätzlich  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t_1)) = 0$  gelten, was letztendlich den Aufsprungpunkt  $t_1$  festlegt. Es sei  $t_2 \in \mathcal{T}_S$  ein Absprungpunkt der Beschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$ . Da ab dem Aufsprungpunkt  $t_1$  die Beschränkung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t))$  bis zu seinem Absprungpunkt  $t_2$  aktiv ist – vgl. linken oberen Graph aus Abbildung 4.7 – und die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  somit die Bedingung  $\dot{h}_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t)) = 0$  für  $t \in [t_1, t_2]$  erfüllen muss, gilt damit automatisch  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t_2)) = 0$ . Daher ist  $t_2$  nicht durch die Bedingung  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t_2)) = 0$  festgelegt. Es muss jedoch auch die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  an den Punkten  $t = t_1$  und  $t = t_2$  stetig sein. Als Beschränkung 1. Ordnung tritt die Steuerung nach Definition 2.6 in der ersten totalen zeitlichen Ableitung von  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}(t))$  auf. Somit ist der Absprungpunkt durch  $\dot{h}_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t_2)) = 0$  festgelegt. Wie bereits erwähnt, gelten diese Übergangsbedingungen nur für Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung, die Teil eines OSP mit regulärer Hamiltonfunktion sind.

#### Auflösen von Strukturänderungen zum Endzeitpunkt

Neben den weiter oben diskutierten Strukturänderungen im Intervallinneren des Zeithorizontes, treten auch Änderungen der Struktur am Intervallende  $t = t_f$  auf. Das Konzept zum Auflösen von Änderungen folgt dabei der gleichen Strategie, wie sie bereits für Anpassungen der Struktur im Intervallinneren diskutiert wurde. Auch hier wird mit der Annahme 4.7 die Stetigkeit der Lösung in seinen Anfangsbedingungen vorausgesetzt.

Wie zuvor, sei mit  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  eine gültige Struktur zum Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa^{(i)}$  bekannt. Zum Anfangswert  $t_0 = \bar{t}$  mit  $\bar{t} \in ]\iota_\kappa^{(i)}, \iota_{\kappa+1}]$  wird ein MSV gestartet. Dann kann es in folgenden Situationen zu Strukturänderungen kommen.

1. Für Beschränkungen der Kategorie 1 mit Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$  können folgende Typen auftreten:
  - a) Die Beschränkung zum Index  $\bar{l}$  sei nach  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  für den Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa^{(i)}$  am Endzeitpunkt  $t = t_f$  inaktiv. Das MSV konvergiere für  $t_0 = \bar{t}$  und im Validierungsschritt 5.1 wird  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t; \bar{t})) > 0$  festgestellt. Damit kann wieder ein  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in [\iota_\kappa^{(i)}, \bar{t}]$  gefunden werden, für das  $h_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t; \iota_\kappa^{(i+1)})) = 0$  gilt. Im speziellen Fall der WEA gilt automatisch durch die Bedingung  $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}(t_f))$  für alle Beschränkungen der Kategorie 1 auch  $\dot{h}_{\bar{l}}(\mathbf{x}^*(t_f)) = 0$ . Daher entsteht durch die diskutierte Verletzung ein Aufsprungpunkt für die Zustandsbeschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_1$ , welcher der Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  hinzugefügt wird und wodurch man mit  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$  die neue gültige Struktur erhält.



- b) Nach  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  sei die Beschränkung in einer Umgebung vor  $t_f$  aktiv. Außerdem existiere ein entsprechender Aufsprungpunkt  $t_1 \in \mathcal{T}_S$  mit  $t_1 < t_f$ . Es sei angenommen, dass das MSV mit dem Hinweis abbricht, es detektiere den Tausch von  $t_1$  mit  $t_f$ . Damit befindet man sich in Teilschritt 5.3 und unter der Annahme 4.7 existiert auch hier ein  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in [\iota_\kappa^{(i)}, \bar{l}]$  für das  $t_1 = t_f$  gilt. Der Aufsprungpunkt  $t_1$  wird aus  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  entfernt und man erhält die neue gültige Struktur  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$ . Damit ist dieser Fall genau die Umkehrung des zuvor diskutierten Falls a).
2. Für Beschränkungen der Kategorie 2 mit dem Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_2$  können folgende zwei Typen von Strukturänderungen auftreten:
- a) Die Beschränkung zum Index  $\bar{l}$  sei nach  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  für den Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa^{(i)}$  am Endzeitpunkt  $t = t_f$  inaktiv. Das MSV konvergiere für  $t_0 = \bar{l}$  und im Validierungsschritt 5.1 wird eine Verletzung der entsprechenden Ungleichungsbedingung nach (4.4.2) festgestellt. Es kann wieder ein  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in [\iota_\kappa^{(i)}, \bar{l}]$  gefunden werden, für das die Ungleichung (4.4.2) mit Gleichheit erfüllt ist. Die Beschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_2$  wird aktiviert und man erhält mit  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$  eine neue gültige Struktur.
- b) Die Beschränkung zum Index  $\bar{l}$  sei nach  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i)}$  für den Anfangszeitpunkt  $t_0 = \iota_\kappa^{(i)}$  am Endzeitpunkt  $t = t_f$  aktiv. Das MSV konvergiere für  $t_0 = \bar{l}$  und im Validierungsschritt 5.1 wird durch  $\lambda_j(t_f) < 0$  detektiert, dass die Beschränkung zu deaktivieren ist. Dabei bezeichne  $\lambda_j$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$  die adjungierte Variable, die durch das Relaxieren der entsprechenden Zustandsbeschränkung entstanden ist, vgl. Abschnitt 4.4.1. Es kann wieder ein  $\iota_\kappa^{(i+1)} \in [\iota_\kappa^{(i)}, \bar{l}]$  gefunden werden, für das  $\lambda_j(t_f) = 0$  erfüllt ist. Die Beschränkung zum Index  $\bar{l} \in \mathcal{Q}_2$  wird deaktiviert und man erhält mit  $(\mathcal{T}_S, \mathcal{I}_S)_\kappa^{(i+1)}$  eine neue gültige Struktur.

### Strukturänderungen zum Anfangszeitpunkt

Zur Vollständigkeit gilt es Strukturänderungen zum Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  zu diskutieren. Wie bereits erörtert, können Beschränkungen der Kategorie 2 mit  $l \in \mathcal{Q}_2$  ihre Struktur nur zum Endzeitpunkt ändern. Für die Gültigkeit des Satzes 2.11 darf zu diesem Zeitpunkt keine Beschränkung der Kategorie 1 mit  $l \in \mathcal{Q}_1$  aktiv sein, d.h. es muss grundsätzlich  $h_l(x_0(\iota)) < 0$  für alle  $l \in \mathcal{Q}_1$  und für alle  $\iota$  gelten. Um dies zu gewährleisten, wird die Zustandsmessung bzw. Schätzung innerhalb gegebener Toleranzen modifiziert. Gilt es beispielsweise den minimalen Anstellwinkel  $\beta = 0^\circ$  im Fall der WEA zum Anfangszeitpunkt  $t = t_0$  zu wählen, wird  $\beta = 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,057^\circ$  verwendet. Somit wird formal die Voraussetzung des Satzes 2.11 erfüllt, es entsteht jedoch nur eine geringfügige Abweichung vom tatsächlichen minimal zulässigen Wert. Dies kann zusätzlich zur Modellunsicherheit und Messungenauigkeit als Störung angesehen werden. Als Alternative kann beispielsweise der Anstellwinkel nach

Messung oder Schätzung des Systemzustandes  $x_0(\iota)$  auf ein Minimum von  $0^\circ$  gesetzt werden und innerhalb der Lösung des OSP wird  $\beta_{\min} = -10^{-3}$  rad als Zustandsbeschränkung an den Anstellwinkel verwendet.

### 4.5 Grenzen der Anwendung indirekter modellprädiktiver Regelung

Es wurde bereits darauf verwiesen, dass das beschriebene Verfahren der indirekten nichtlinearen MPC in einigen Punkten kritisch zu bewerten ist. Allgemein – unabhängig von Einsatz direkter oder indirekter Verfahren – weist nichtlineare MPC das Problem auf, dass die zugrundeliegenden OSP in der Regel nicht-konvex sind und damit keine eindeutige Lösung garantiert werden kann [30, S. 1126]. Um die Dynamik der WEA jedoch ausreichend erfassen zu können, muss ein nichtlineares Systemverhalten berücksichtigt werden, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.3.

Ein weiteres Problem, welches der indirekte Ansatz mit dem direkten Ansatz teilt, ist ihre Konstruktion auf Basis der Fortschrittmethoden. Als *Warmstart* wird dabei der Umstand bezeichnet, dass durch den vorangegangenen MPC-Schritt für das iterative Lösungsverfahren bereits gute Startwerte zur Verfügung stehen. Diese können nur dann als *gut* bezeichnet werden, falls die durch das Verfahren zu bestimmenden Unbekannten stetig von den Anfangswerten  $x_0(\tau)$  abhängen. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass die Verfahren in die neue Lösung konvergieren, sobald die neuen Anfangswerte nah genug an den alten Werten liegen. Ist diese Stetigkeit nicht gegeben, kann die Lösung des neuen Schrittes beliebig weit weg von der Lösung des alten MPC-Schrittes liegen, womit deren Werte nicht mehr eine *gute* Lösung für das neue Verfahren darstellen.

Daher wird in der Regel eine Annahme wie 4.7 getroffen. Für die beschriebene stückweise und automatische Anpassung der Lösungsstruktur ist sie grundlegende Voraussetzung. Im Fall der WEA scheint diese in allen betrachteten Lastfällen nahezu durchgehend erfüllt zu sein. Auf Ausnahmen wird im Abschnitt 5.8 eingegangen, wenn es um die Rechenzeit der indirekten nichtlinearen MPC einer WEA geht.

Im Rahmen des nächsten Kapitels 5 werden die Vorteile einer indirekten MPC von WEA erarbeitet. Diese beinhalten je nach Konfiguration eine Steigerung der Energieausbeute oder eine Reduktion der Triebstrangschädigung bei gleichzeitig hoher Lösungseffizienz. Da diese jedoch nicht zu jedem Zeitpunkt garantiert werden kann, muss im praktischen Einsatz parallel grundsätzlich eine Rückfallregelung gefahren werden, die jederzeit eine stabile und robuste Regelung der WEA übernehmen kann. Dazu können beispielsweise die derzeitigen konventionellen Ansätze herangezogen werden.

## 5 Indirekte modellprädiktive Regelung von Windenergieanlagen

In Kapitel 2 wurden die Grundlagen der Optimalen Steuerung und der MPC vorgestellt. Es folgte eine Beschreibung von drei Konzepten der Betriebsfestigkeitsrechnung, die es erlauben, eine Schädigung von Maschinenelementen in Form von skalaren Werte auszudrücken. Während zwei der drei Herangehensweisen auf zeitlich variablen Nennspannungen im Querschnitt eines stabförmigen Maschinenelementes beruhen, bewertet die *DEL* eine Schädigung direkt auf Basis eines zeitlich variablen Lastsignals. In Kapitel 4 wurde schließlich das Konzept der indirekten nichtlinearen MPC diskutiert. Das darin beschriebene Verfahren soll nun zur effizienten MPC einer WEA eingesetzt werden. Im Anschluss findet eine Untersuchung der resultierenden Triebstrangschädigung statt.

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 ein MKS–Modell der WEA vorgestellt. Es dient der Abbildung ihrer ganzheitlichen Dynamik. Auch wenn MKS eine sehr effiziente Form der Simulation darstellt, ist sie dennoch in der Regel zu komplex, um im Rahmen einer MPC zur Prädiktion der Systemdynamik verwendet werden zu können. Dieses Modell muss während eines MSV zur Lösung eines OSP mehrfach auf dem Zeithorizont  $[\ell, \ell + \mathcal{T}_h(\ell)]$  numerisch in kurzer Zeit integriert werden. Daher wird üblicherweise auf ein Ersatzmodell der WEA mit wenigen Freiheitsgraden zurückgegriffen, e.g. [72, S. 44 ff.]. Es erfasst eher die grundsätzliche Dynamik der WEA, beispielsweise in der Regel jedoch nicht Torsionsschwingungen im Triebstrang oder Biegeschwingungen der Rotorblätter. Ist das Ziel des Einsatzes von MPC die Reduktion von Turmschwingungen, wird die Schwingform der 1. Vor-Zurück-Eigenmode des Gesamtsystems berücksichtigt [23], [24], [25], [28], [30]. Das Ersatzmodell der WEA zur Vorhersage der Dynamik innerhalb der indirekten MPC im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 5.2 hergeleitet. Wie bereits in Abschnitt 4.4.1 diskutiert wurde, kann nicht jede Zustandsbeschränkung aufgrund von Unsicherheiten im Rahmen einer MPC eines mechanischen Systems exakt berücksichtigt werden. In Abschnitt 5.3.2 werden die entsprechenden Beschränkungen – soweit notwendig – relaxiert und der Kategorie 2 zugeordnet. Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Problemstellung zur Regelung einer WEA entspricht gängigen Formulierungen, siehe ebenfalls obige Zitate. Diese enthält Beschränkungen an die Raten des Generatormomentes und des Anstellwinkels. Durch diese Form der Beschränkung werden Generatormoment und Anstellwinkel zu Zustandsvariablen und deren zeitlichen Ableitungen sind formal Steuerungsvariablen [85, S. 24 f.]. Die Lösung der eigentlichen Problem-

stellung – die bzgl. Energieausbeute optimale Regelung einer WEA – weist dann jedoch die Phänomene singuläre Steuerung und sogar Chattering Control zweiter Art auf, wie sie im Abschnitt 2.1.3 diskutiert wurden. Eine Regularisierung, um das Auftreten dieser Phänomene zu vermeiden, wird in Abschnitt 5.3.3 durchgeführt. In Kapitel 5.5 wird dann zunächst eine reine energie-optimale Regelung einer WEA vorgestellt. Es wird sich zeigen, dass MPC mit dieser Konfiguration die Drehzahl nahe dem Wert mit dem höchsten Wirkungsgrad hält. Dieser variiert stark mit der Windgeschwindigkeit, wodurch hohe Ausschlagsamplituden im Generatormoment notwendig werden, welche sich innerhalb des Triebstranges fortsetzen und somit zu einer hohen Schädigung führen. Um ein nachhaltiges und wettbewerbsfähiges Verfahren zur MPC von WEA zu erhalten, muss die Schädigung im Triebstrang als Nebenbedingung berücksichtigt werden. Während eine rein energie-optimale Regelung mit einem Zeithorizont von 10 s durchgeführt werden kann, ist die Schädigung eine Charakteristik auf deutlich größeren Zeitskalen. Auf diesen ist eine ausreichend verlässliche Vorhersage der Windgeschwindigkeit nicht möglich. Geeignete Strategien sind zu wählen, um die Schädigung dennoch als Nebenbedingung innerhalb einer MPC berücksichtigen zu können, was in Abschnitt 5.6 diskutiert wird. Das Kapitel endet mit einem Vergleich der Rechenzeiten einer indirekten MPC zu etablierten Verfahren.

## 5.1 Mehrkörpersimulations-Modell

### 5.1.1 Allgemeines

Wie bereits erwähnt, ist die MKS eine effiziente Form zur ganzheitlichen Betrachtung mechanischer Systeme. Ihre Dynamik wird dabei durch Elemente aus vier Kategorien beschrieben. Mehrere *Körper* (engl. *bodies*) erhalten über *Gelenke* (engl. *joints*) kinematische Freiheitsgrade relativ zu einem Bezugssystem, welches auch auf einem anderen Körper liegen kann. Durch *Kraftelemente* wirken Kräfte und Momente zwischen den einzelnen Körpern, deren Kinematik über zusätzliche *Zwangsbedingungen* (engl. *constraints*) eingeschränkt sein kann. Die Körper werden im starren Fall über eine Masse und einen Trägheitstensor beschrieben. Es sei  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$  der Vektor aller Positionen und Orientierungen der Körper im MKS-Modell. Dann lässt sich deren Dynamik über die *Lagrange-Gleichungen erster Art*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

beschreiben [86, S. 16 f.].  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  wird als *Massenmatrix*,  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbb{R}^{n_q}$  als Vektor der *inneren und äußeren Kräfte* und

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) := \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

als *constraint Jacobian* bezeichnet.  $\boldsymbol{\eta}$  sind dabei Lagrange-Multiplikatoren, die durch das An koppeln der Zwangsbedingungen entstehen. Die Gleichungen aus (5.1.1) können über verschiedene Ansätze bestimmt werden. Dabei kommen beispielsweise die *Newton-Euler* Gleichungen zusammen mit der Prinzip nach *D'Alembert* oder das Prinzip der *virtuellen Arbeit* bzw. der *virtuellen Leistung* zum Einsatz. Für konservative Systeme lassen sich die Gleichungen (5.1.1) aus den notwendigen Bedingungen des Satzes 2.11 ableiten, was in der Literatur häufig unter den Begriff des *Hamilton-Formalismus* fällt. Dieser Zusammenhang zwischen der optimalen Steuerung und der klassischen Mechanik wird an dieser Stelle kurz beleuchtet. Die kinetische Energie der Körper, die hier als starr angenommen werden, ist über  $T : \mathbb{R}^{n_q} \times \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}$$

für  $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{q}}$  gegeben. Zusätzlich sei  $U(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^{n_q} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Potentialfunktion. Das physikalische *Prinzip der kleinsten Wirkung* für konservative Systeme verlangt, dass die Wirkung

$$\int_{t_0}^{t_f} [T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{q}) - \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \cdot \boldsymbol{\eta}] dt$$

stationär – in diesem Fall minimal – ist. Damit löst  $\mathbf{q}$  aus Gleichung (5.1.1) ein Optimierungsproblem in einem Funktionenraum und ist somit ein OSP unter der Differentialgleichungs-Nebenbedingung  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{v}(t)$  für alle  $t \in [t_0, t_f]$  und den Gleichungs-Nebenbedingungen  $\mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{0}$  für alle  $t \in [t_0, t_f]$ . Nach Definition 2.10 ist die Hamiltonfunktion für dieses OSP durch

$$\mathcal{H} = T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{v}$$

definiert. Ähnlich wie bei Ungleichungsbeschränkungen, werden die Gleichungsbedingungen  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  mittels Lagrange-Multiplikatoren an die Hamiltonfunktion angekoppelt und man erhält die entsprechende erweiterte Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{erw} &= T(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} - U(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Somit führen die beiden Differentialgleichungen (2.1.10) und (2.1.11) aus Satz 2.11 als notwendige Bedingung für eine Lösung zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T &= \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T &= - \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T - \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \cdot \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial \mathbf{v}} &= \mathbf{0} & \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{v} &= \boldsymbol{\lambda}. \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die Massenmatrix sei nun invertierbar. Dann gilt  $\mathbf{v} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\boldsymbol{\lambda}$ , wodurch  $\mathbf{v}$  in Gleichung (5.1.2) ersetzt werden kann. Man erhält letztendlich die nach *Hamilton* benannten Gleichungen aus der klassischen Mechanik. Für eine detailliertere Diskussion der MKS wird beispielsweise auf [86] verwiesen.

Neben der MKS gibt es weitere Herangehensweisen zur computergestützten Simulation von statischen und dynamischen Eigenschaften mechanischer Systeme. Einen sehr breiten Einsatz findet dabei die FEM. Ursprünglich entstanden zur Betrachtung von Problemen der Kontinuumsmechanik, wird sie heute zur numerischen Bestimmung einer Lösung für eine große Klasse von PDE eingesetzt. Mit ihr lassen sich beispielsweise Deformationen und Spannungsverläufe aufgrund von Kräften, die von außen auf ein Bauteil einwirken, bestimmen. In ihrer linearisierten und bereits diskretisierten Form für die Kontinuumsmechanik lassen sich kleine elastische – d.h. reversible – Verformungen über [79, S. 204]

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)$$

berechnen.  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3n_q}$  beschreibt dabei die Verschiebung des Bauteils an den  $n_q$  räumlichen Diskretisierungspunkten – den *Knoten*. Die entsprechende Basis wird auch *nodale Basis* genannt.  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  wird als *Massenmatrix*,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  als *Dämpfungsmatrix* und  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet.  $\mathbf{F} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_q}$  stellt eine zeit-variable äußere Last auf die Knoten des Bauteils dar.

Auf Basis der FEM für Probleme der Kontinuumsmechanik lässt sich auch die lineare, elastische, zeit-veränderliche Deformation von Körpern in einer MKS berücksichtigen. Man spricht dann von *flexibler MKS* bzw. *flexiblen Körpern*. Dazu werden in der Regel nicht alle Freiheitsgrade der nodalen Basis in eine MKS übertragen. Mittels einer *linearen Modell-Ordnungs-Reduktion* wird die nodale Basis surjektiv, aber nicht injektiv, auf eine neue Basis projiziert [87, S. 531 ff.]. Auf diese Weise lassen sich mittels weniger Freiheitsgrade die dominanten elastischen Schwingungen von Körpern wie der Rotorblätter, des Turms, aber auch von Maschinenelementen im Triebstrang wie der Hauptwelle und der Planetenträger innerhalb einer MKS berücksichtigen. Durch die Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade kann immer noch von einer hohen Effizienz der MKS zur ganzheitlichen Betrachtung der Systemdynamik gesprochen werden.

### 5.1.2 Mehrkörpersimulations-Modell der Windenergieanlage

Zur ganzheitlichen Simulation und der Bewertung von MPC für WEA wurde auf die MKS zurückgegriffen. Als Modell dient eine 5-MW Referenz-WEA, welche vom Institut NREL für konzeptionelle und wissenschaftliche Studien zur Verfügung gestellt wird [88, S. iv] und zu Teilen auf dem Design einer 5-MW WEA der Firma REpower basiert. Als vollständig quelloffenes Modell eignet es sich, um Ergebnisse verschiedener Publikationen miteinander vergleichen zu können. Daher kommt in der Mehrheit der bisher zitierten Publikationen zu MPC von WEA diese Anlage zum Einsatz [23], [24], [25], [28]. Des Weiteren ist es von NREL über das ebenfalls quelloffene MKS-Paket FAST<sup>1</sup> verfügbar. Da FAST die Dynamik der WEA jedoch mit nur wenigen Freiheitsgraden abbildet und dies nicht ein detailliertes Modell des Triebstranges beinhaltet, wurde die MKS-Software Simpack<sup>2</sup> eingesetzt. Darin steht das Modell der NREL 5-MW Referenzanlage ebenfalls zur Verfügung, welches vom Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion (IMM) der Technischen Universität Dresden um einen entsprechenden Triebstrang erweitert wurde, vgl. Abbildung 5.1.

Die Anlage steht auf festem Grund (\$FND), wobei eine elastische Nachgiebigkeit des Untergrundes über lineare Feder-Dämpfer-Gesetze mit geeigneten Steifigkeiten abgebildet ist. Der Turm (\$TWR) wird als flexibles Balkenmodell nach Euler-Bernoulli [79, S. 93 ff.] angesetzt, wobei auch dieses entsprechend modal ordnungsreduziert wird, so dass letztendlich sieben Schwingungsmoden im Bereich von 0,89 Hz und 11,97 Hz berücksichtigt werden. Gondel (\$NCL) und Maschinenträger (\$MFR) werden starr berücksichtigt, wodurch nur ihre Masse und Trägheit in das System eingehen. Jedes der drei Rotorblätter (\$RBL) erhält, äquivalent zur Modellierung des Turms, je vier modale Freiheitsgrade im Bereich von 0,66 Hz und 3,89 Hz, welche ebenfalls aus einer Ordnungsreduktion von Balkenmodellen gewonnen wurden. Über die starre Nabe ist der Rotor an die Hauptwelle (\$MSH) gekoppelt. Als wichtiger Bestandteil des Triebstranges ist sie ebenfalls flexibel, wobei ihre Schwingungsmoden aus der oben erwähnten modalen Ordnungsreduktion eines FE-Modells der Welle stammen. Ihre ersten zehn Moden liegen im Bereich von 5,46 Hz und 805,21 Hz.

Das Getriebe setzt sich aus zwei Planetenstufen zusammen, wobei die erste aus vier und die zweite aus drei Planeten besteht. Zuletzt folgt eine Stirnradstufe, vgl. Abbildung 5.2. Die Hohlräder der beiden Planetenstufen sind auf dem Getriebegehäuse (*Standgetriebe*) fixiert, welches mit zwei Drehmomentstützen auf dem Maschinenträger befestigt ist. Die Verzahnungen der Planeten zu den Sonnen, der Planeten zu den Hohlrädern und der Stirnradstufe wird auf jeweils einen Zahn im Eingriff idealisiert und mit konstanter Steifigkeit berücksichtigt. Im Unterschied zu einem 1D-Torsionsmodell können damit Verlagerungen der Verzahnungen zueinander sowie Radial- als auch Axialkomponenten der Zahnkräfte berücksichtigt werden. Daher lässt sich die grundsätzliche Kinematik auf diese Weise abbilden und man erhält ein

<sup>1</sup>NWTC Information Portal (FAST). <https://nwtc.nrel.gov/FAST>. Zuletzt aktualisiert 4.01.2018 ; Zugriff am 8.10.2019

<sup>2</sup>SIMULIA Simpack. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/simpack/> ; Zugriff am 19.03.2022

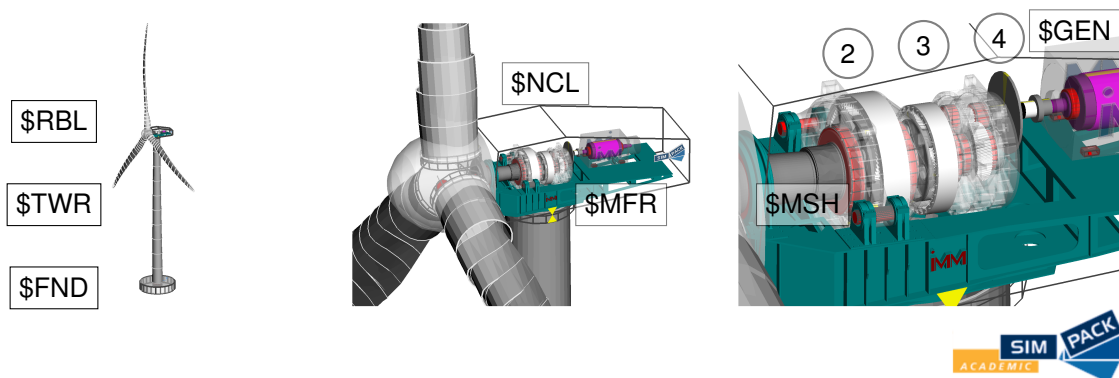


Abbildung 5.1: Modell der NREL 5-MW Windenergieanlage in SIMULIA Simpack

geschlossenes Schwingsystem des Triebstranges. Eine weitere Verfeinerung der Modellierung würde die Erfassung von Schwankungen der Steifigkeit in Abhängigkeit der Anzahl der Zahneingriffe und deren Positionen auf der Eingriffsstrecke und der daraus resultierenden Anregungen (*Zahneingriffsfrequenz*) bedeuten. Als zentrale Eingangsgröße der Regelung dient die Drehzahl des Generators, deren zeitlicher Verlauf entsprechend der konventionellen Regelung mit einem Tiefpassfilter 1. Ordnung zu einer Grenzfrequenz von 0,25 Hz geglättet wird, siehe Abschnitt 5.4. Anregungen aus dem hochfrequenten Zahneingriff sind daher für keine der betrachteten Regelungen einer WEA erfassbar und werden im Folgenden vernachlässigt. Der als Starrkörper modellierte Generator (\$GEN) ist über eine vereinfacht abgebildete Kuppelung mit der Ausgangswelle der Stirnradstufe verbunden. Das Generatorgehäuse ist über vier Stellen auf dem Maschinenträger gelagert.

Für die Berechnung der Aerodynamik an den Rotorblättern wird auf die *Blade-Element-Momentum* Methode zurückgegriffen. Strömt Wind auf eine WEA ein, wird dessen Geschwindigkeit bereits davor durch den Staudruck reduziert. Über Methoden der Impulserhaltung lässt sich ein *axialer Flussfaktor*  $a$  berechnen, um den sich die Windgeschwindigkeit bis auf Höhe der Rotorebene reduziert hat [26, S. 39 ff.]. Man teilt die Rotorblätter nun in einzelne Segmente (engl. *elements*) und nimmt an, dass zwischen diesen eine vernachlässigbare Wechselwirkung herrscht. Den Segmenten werden Querschnittsflächen zugeordnet, zu denen je in einem Präprozessing-Schritt eine Auftriebskraft, eine Luftwiderstandskraft sowie ein Nickmoment als Tabelle hinterlegt wird. Deren Werte sind in Abhängigkeit des Anstellwinkels und der Windgeschwindigkeit zu bestimmen [26, S. 59 ff.]. Diese Methode zur Abbildung der Aerodynamik in einem MKS-Modell einer WEA ist in dem Software Paket AeroDyn von NREL implementiert [89], welches sowohl von NREL FAST als auch von Simpack eingesetzt wird.



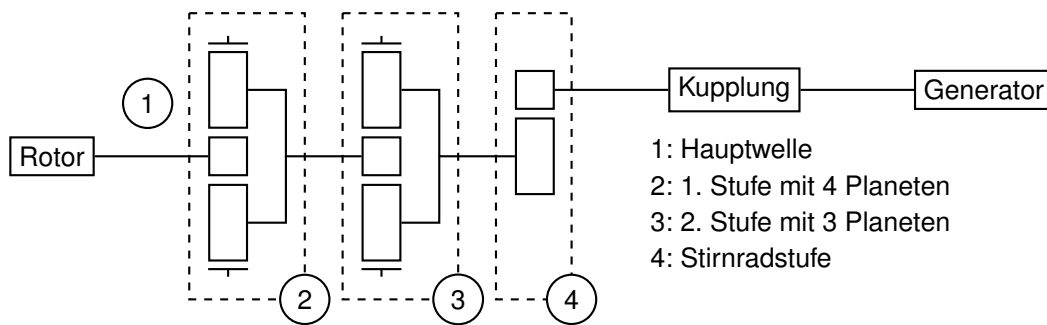


Abbildung 5.2: Getriebe der NREL 5-MW Windenergieanlage in SIMULIA Simpack

## 5.2 Ersatzmodell zur Bestimmung der Rotordrehzahl

Obwohl die MKS bereits eine effiziente Form für die Analyse der Mechanik komplexer Systeme darstellt, fällt es schwer, ein MKS-Modell der WEA im Rahmen der MPC einzusetzen. Das innerhalb der MPC verwendete Modell muss im MSV mehrmals auf einem Zeithorizont von beispielsweise 10 s numerisch integriert werden. Gleichzeitig muss eine Lösung des OSP innerhalb weniger Millisekunden, spätestens innerhalb der Regelschrittweite von beispielsweise 100 ms, bereit stehen. Daher muss das MKS-Modell der WEA in seiner Anzahl an berücksichtigten Freiheitsgraden reduziert werden. Während ein MKS-Modell in der Regel eine Komplexität besitzt, die es erlaubt, bestimmte mechanische Eigenschaften des Systems zu analysieren, muss das Modell der WEA für die MPC vorwiegend die dominanten mechanischen Eigenschaften abbilden können.

Zur Abbildung einer vereinfachten Dynamik einer WEA innerhalb einer MPC wird das *aerodynamische Drehmoment*  $T_{\text{aero}}$  über die Leistung  $P_{\text{aero}}$ , die in einer horizontalen laminaren Strömung enthalten ist, abgeschätzt.

$$P_{\text{aero}} = \frac{1}{2} R^2 \pi \rho V_W^3(t) \quad (5.2.1)$$

Der prozentuale Anteil, der davon durch die WEA extrahiert werden kann, wird als *aerodynamischer Leistungsbeiwert*  $C_P$  bezeichnet. Die dem Wind entnommene Leistung muss derjenigen der WEA entsprechen, woraus sich

$$\begin{aligned} \omega T_{\text{aero}} &= \frac{1}{2} R^2 \pi \rho V_W^3(t) C_P \\ \Rightarrow T_{\text{aero}} &= \frac{1}{2} R^2 \pi \rho V_W^3(t) \frac{C_P}{\omega} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

ergibt. Dabei bezeichne  $\omega$  die Rotordrehzahl,  $R$  den effektiven Radius der Rotorblätter,  $\rho$  die Luftdichte und  $V_W(t)$  eine skalare zeit-variable Windgeschwindigkeit. In der Literatur wird

$C_P$  häufig in Abhängigkeit der Schnelllaufzahl<sup>3</sup>  $\zeta$  und des Anstellwinkels der Rotorblätter  $\beta$  gewählt, z. B. [23, S. 1110], [24, S. 2], [25, S. 935], [26, S. 93]. Die Schnelllaufzahl  $\zeta$  stellt dabei die Geschwindigkeit der Rotorblattspitzen in das Verhältnis zur Windgeschwindigkeit [26, S. 46].

$$\zeta := \frac{R\omega}{V_W(t)} \quad (5.2.3)$$

Der aerodynamische Leistungsbeiwert  $C_P$  ist nicht konstant und variiert nichtlinear in den beiden Größen  $\zeta$  und  $\beta$ .  $C_P(\zeta, \beta)$  ist in der Praxis kennfeldbasiert und wird punktweise aus quasi-statischen Equilibrien des MKS-Modells der WEA gewonnen.

Es seien  $(\zeta_i, \beta_j)_{i=1, \dots, n_\zeta, j=1, \dots, n_\beta}$  die Stützwerte des Kennfeldes für  $C_P(\zeta, \beta)$ . Wie Gleichung (5.2.3) entnommen werden kann, ist  $\zeta$  durch die beiden Größen Rotordrehzahl  $\omega$  und skalare Windgeschwindigkeit  $V_W$  festgelegt, welche beide im Betrieb nicht-konstante Größen darstellen. Zur Bestimmung des Kennfeldes  $(\zeta_i, \beta_j)_{i=1, \dots, n_\zeta, j=1, \dots, n_\beta}$  muss zu jedem  $\zeta_i$  eine entsprechende Drehzahl  $\omega$  und eine Windgeschwindigkeit  $V_W$  berechnet werden. Um eine Eindeutigkeit in dieser Beziehung herzustellen, kann beispielsweise das Kennfeld zu einer zuvor festgelegten Windgeschwindigkeit – z.B.  $V_W \equiv 11 \frac{m}{s}$  – bestimmt werden. Zu jedem Stützwert  $(\zeta_i, \beta_j)$  kann ein *quasi*-statisches Equilibrium des MKS-Modells der WEA bestimmt werden. Für ein vollständig statisches Equilibrium werden die Zustände  $q$  der entsprechenden Gleichung (5.1.1) derart bestimmt, dass alle Beschleunigungen und Geschwindigkeiten verschwinden, d.h.  $\ddot{q} = 0$  und  $\dot{q} = 0$ . Befindet sich ein mechanisches System ohne zeitvariable äußere Einflussfaktoren in diesem Zustand, so verbleibt es daher auch darin und ist damit *stationär*. Das zur Bestimmung der Kennwerte von  $C_P$  benötigte Equilibrium ist *quasi*-stationär, da die Rotordrehzahl  $\omega$  und die damit verbundenen Dreh-Freiheitsgrade des Triebstranges bis zum Generator über  $\omega_i := \frac{\zeta_i V_W}{R}$  entsprechend vorgegeben sind. Dadurch können deren Werte nicht zu 0 verschwinden, da die Anlage ansonsten still stehen würde. Es wird jedoch gefordert, dass die Drehzahl sich in diesem Zustand nicht ändert und somit alle Winkelbeschleunigungen verschwinden.

Für die Bestimmung der Kennwerte von  $C_P$ , und nur dafür, sind weitere Annahmen an das MKS-Modell der WEA erforderlich. Dies stellt jedoch keine Einschränkung für die Anwendung dar, da bei der späteren Untersuchung der Leistungsfähigkeit von MPC für WEA auf vollständig turbulente Windlastfälle zurückgegriffen wird. Diese weisen eine zeitlich und räumlich verteilte Windgeschwindigkeit auf. Deren Verteilung und Orientierung innerhalb der Rotorscheibe wird im Rahmen einer nichtlinearen Ordnungsreduktion auf einen skalaren Wert – eine *äquivalente Windlast* bzw. eine damit assoziierte *rotor-effektive skalare Windgeschwindigkeit*  $V_W$  – projiziert. Die oben erwähnten Annahmen zur Bestimmung der Kennwerte für  $C_P$  sollen sicherstellen, dass der entsprechende Wert für  $C_P(\zeta_i, \beta_j)$  zur gleichen äquivalenten Wind-

<sup>3</sup>In der Literatur wird in der Regel das Symbol  $\lambda$  für die Schnelllaufzahl verwendet, welches im Rahmen der vorliegenden Arbeit zur Bezeichnung der adjungierten Variablen eines OSP vorbehalten sein soll.

last führt, dies jedoch unabhängig von der Rotorposition geschieht. Für ein entsprechendes quasi-stationäres Equilibrium muss sich die Windgeschwindigkeit über die Rotorscheibe konstant verhalten, insbesondere darf sie sich nicht über deren Höhe ändern. Außerdem wird für die Berechnung von  $C_P$  kein Höhenprofil berücksichtigt. Dabei wird gefordert, dass alle Windprofile mit dem gleichen Leistungsinhalt innerhalb der Rotorscheibe zum selben Wert von  $V_W$  führen. Zur Bestimmung des Leistungsbeiwertes  $C_P$  wird nun ein quasi-statischer Zustand herangezogen, d.h. kein Zustand des MKS-Modells darf unabhängig vom konkreten Rotorwinkel beschleunigen oder verzögern. Daher werden die oben genannten Einschränkungen bei der Bestimmung eines Kennfeldes für  $C_P$  getroffen. Ziel dieser Reduktion ist es, eine *rotor-effektive* skalare Windgeschwindigkeit  $V_W$  zu bestimmen, die einem zur turbulenten Anströmung vergleichbaren aerodynamischen Drehmoment entspricht. Dies wird folgendermaßen erreicht:

1. Zu jedem MPC-Zeitpunkt  $t_i$  sei eine zeitlich und räumlich verteilte Vorhersage der Windgeschwindigkeit gegeben, welche mindestens den Vorhersagehorizont  $\mathcal{T}_h(t_i)$  abdeckt. In der Regel ist diese Vorhersage zu Stützpunkten  $t_k \in [t_i, t_i + \mathcal{T}_h(t_i)]$  gegeben. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird hier eine der Modellgrenzen gezogen und davon ausgegangen, dass eine hinreichende Vorhersage der Windgeschwindigkeit für die Dauer des Vorhersagehorizontes möglich ist. Ein Ansatz mittels radargestützter Methoden, wie eine derartige Vorhersage realisiert werden kann, ist LIDAR [23, S. 1118 ff.].
2. Der Rotor der WEA definiert über die Höhe der Rotornabe  $r_h$  und über den Abstand der Rotornabe zu den Blattspitzen  $R$  eine *Rotorscheibe*. Dies ist eine Kreisfläche, welche vom Rotor überstrichen wird. Die Vorhersage  $V_W(t_k, r, \varphi)$  sei zu jedem  $t_k$  über Polarkoordinaten mit der Rotornabe als Mittelpunkt und  $r \in [0, R]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi]$  gegeben. Da die Windgeschwindigkeit mit der dritten Potenz in die Leistung eingeht (vgl. Gleichung (5.2.1)), erhält man eine auf Basis der Leistung berechnete rotor-effektive Windgeschwindigkeit über folgende Mittelung

$$V_W(t_k) = \frac{1}{R^2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^R [rV_W^3(t_k, r, \varphi)] dr d\varphi \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (5.2.4)$$

Zur Vollständigkeit sei erwähnt, dass die Berechnung einer rotor-effektiven Windgeschwindigkeit in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt wird. Es existieren weitere Ansätze, in denen beispielsweise die Windgeschwindigkeit arithmetisch gemittelt wird oder in die noch Verluste an den Rotorblattwurzeln oder -spitzen eingehen, z. B. [23, S. 1111]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde auf die beschriebene Methode der gemittelten Leistung zurückgegriffen, da sie sich konsistent in die Berechnung des zuvor diskutierten aerodynamischen Leistungsbeiwertes einfügt. Außerdem sind die Verluste an den Rotorblattwurzeln und -spitzen bereits innerhalb der Berechnung des aerodynamischen Drehmomentes  $T_{\text{aero}}$  über das MKS-Modell berücksichtigt.

In Abbildung 5.3 ist der aerodynamische Leistungsbeiwert in Abhängigkeit der Schnelllaufzahl  $\zeta$  und des Anstellwinkels  $\beta$  als dreidimensionaler Graph aufgetragen. Dabei wurde die Windgeschwindigkeit mit  $11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  gewählt. Nach dem Betz'schen Gesetz ist der maximale Wirkungsgrad einer WEA unabhängig von der Form des Rotors auf  $\frac{16}{27} \approx 59,3\%$  beschränkt [90]. Das vorliegende Kennfeld besitzt mit der gewählten Windgeschwindigkeit sein Maximum bei einer Schnelllaufzahl von 7,8 und einem Anstellwinkel von  $-2^\circ$ . Gut zu erkennen ist auch die mit ansteigendem Anstellwinkel stark abfallenden Charakteristik des Kennfeldes, weshalb der Anstellwinkel in der Regel dann seinen Minimalwert verlässt, wenn es beispielsweise gilt, die maximale Drehzahl oder die maximale abgegebene Leistung nicht zu überschreiten.

Bei der weiteren Analyse der Eigenschaften des Kennfeldes für den aerodynamischen Leistungsbeiwert stellt man jedoch eine zusätzliche Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit  $V_W$  fest. Dabei fällt der maximale Wirkungsgrad von ca. 49,6% bei  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  Windgeschwindigkeit auf ca. 43,4% bei  $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  Windgeschwindigkeit ab. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 5.4 graphisch dargestellt. Bereits bekannt ist, dass die Anwendung von MPC für WEA zu einer Steigerung der Energieausbeute führt [23, S. 1121 f.]. Wie im Abschnitt 5.6 gezeigt wird, geht dies bei einer Maximierung der elektrischen Energie jedoch mit einer erheblichen Erhöhung der Schädigungscharakteristik des Drehmomentensignals einher. Es stellt sich letztendlich heraus, dass bei turbulenten Lastfällen das Ziel einer höheren Energieausbeute mit dem Ziel einer möglichst schädigungsarmen Regelung des Generatormomentes konkurriert. Falls der aerodynamische Leistungsbeiwert  $C_P$  nur in Abhängigkeit der Schnelllaufzahl  $\zeta$  und des Anstellwinkels  $\beta$  gewählt wird, führt das zu einer in diesem Szenario erheblichen Modellunschärfe. Dies erschwert es, die beiden erwähnten Ziele wie gefordert gegeneinander ausbalancieren zu können.

Die Berechnung von  $C_P$  – beispielsweise durch Interpolation – auf Basis von nur zwei unabhängigen Größen  $\zeta$  und  $\beta$  bietet Vorteile in der numerischen Geschwindigkeit der Auswertung, auf die im Folgenden aufgrund der zuvor genannten Unschärfe verzichtet werden muss. An Stelle der abstrakten Größe Schnelllaufzahl  $\zeta$  wird diese in die Größen Rotordrehzahl  $\omega$  und rotor-effektive Windgeschwindigkeit aufgeteilt. Man erhält schlussendlich  $C_P(\omega, V_W, \beta)$ , welcher sich aus dem drei-dimensionalen Kennfeld  $(\omega_i, V_{Wj}, \beta_k)_{i=0, \dots, n_\omega, j=0, \dots, n_{V_W}, k=0, \dots, n_\beta}$  berechnen lässt.

Um dennoch eine effiziente numerische Interpolation zu erhalten, wird ein Tensorprodukt von Tschebysheff-Polynomen  $T(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  angesetzt.

$$C_P(\omega, V_W, \beta) = \sum_{i=0}^{n_\omega} \sum_{j=0}^{n_{V_W}} \sum_{k=0}^{n_\beta} c_{ijk} T_i(\omega) T_j(V_W) T_k(\beta)$$

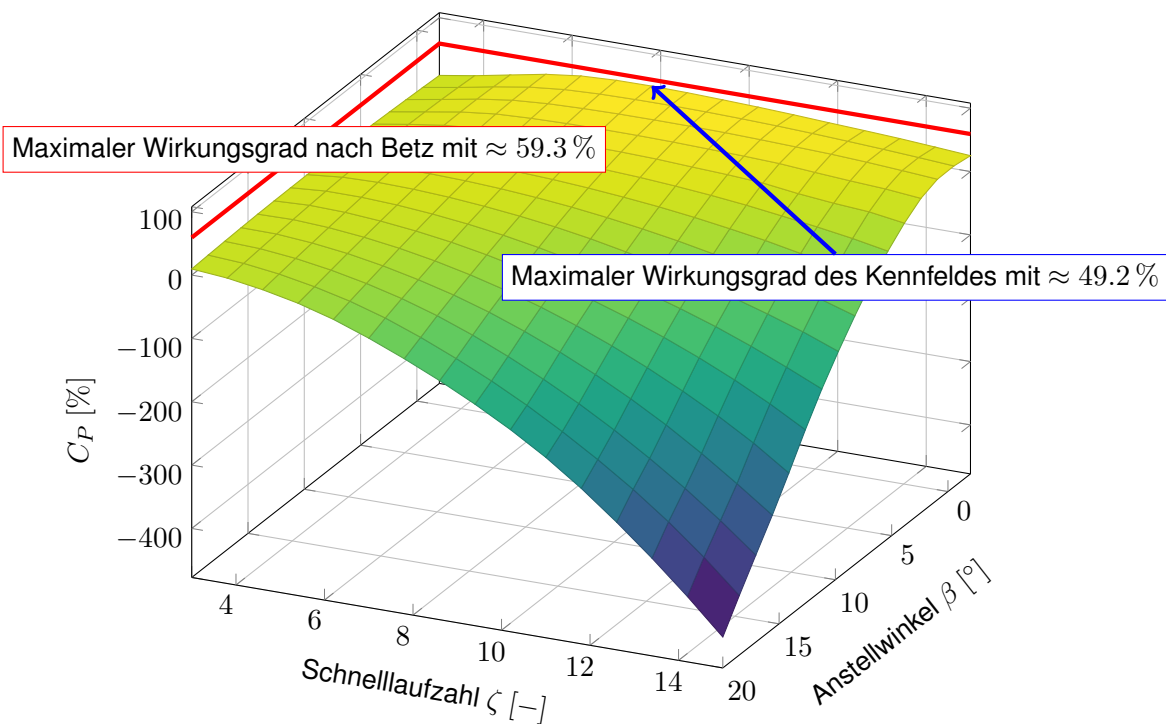


Abbildung 5.3: Aerodynamischer Leistungsbeiwert aufgetragen über Schnelllaufzahl  $\zeta$  und Anstellwinkel  $\beta$  für die Windgeschwindigkeit  $V_W \equiv 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Als orthogonale Polynome bieten diese eine Reihe von wichtigen Vorteilen. Sie minimieren beispielsweise das bei Interpolationen bekannte Phänomen von Oszillationen im Randbereich – das *Runge-Phänomen* [27, S. 44 ff.], vgl. Abbildung 5.5. Des Weiteren lassen sich diese Polynome auch als Tensorprodukt numerisch hoch effizient durch den *Clenshaw-Algorithmus* auswerten [91, S. 75 ff.].

Diese Wahl der Interpolation des Kennfeldes für  $C_P$  genügt den Anforderungen an die Vorhersage-Güte, welche für eine MPC von WEA unter Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges notwendig ist. Die Interpolations-Grenzen des Kennfeldes für den aerodynamischen Leistungsbeiwert  $C_P$  sind derart gewählt, dass jede Lösung eines OSP innerhalb dieser Grenzen liegt. Es kommt damit nicht zu einer Extrapolation des Kennfeldes. Während des MSV zur Lösung eines OSP kann es jedoch zu Zuständen kommen, in denen eine Extrapolation durchgeführt werden muss, auch wenn diese nicht Teil der Lösung sein können. Eine derartige Extrapolation geht in der Regel mit unphysikalischen Werten von  $C_P$  einher, da diese entweder zu groß oder zu klein werden können. Um dies zu vermeiden, wird  $C_P$  auch bei einer Extrapolation über

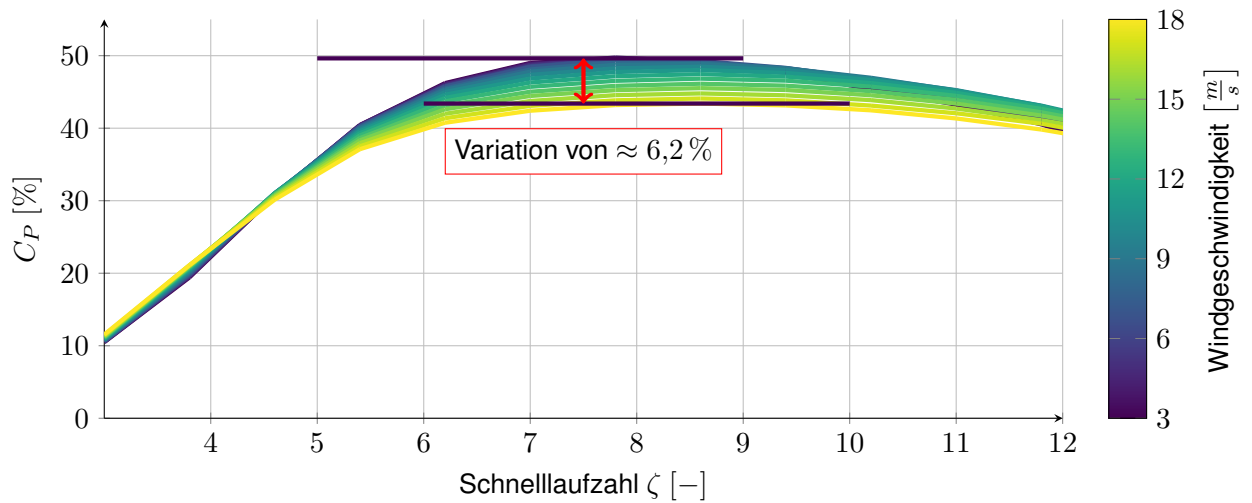


Abbildung 5.4: Aerodynamischer Leistungsbeiwert aufgetragen über Schnelllaufzahl  $\zeta$  mit konstantem Anstellwinkel  $\beta = 0^\circ$  und für verschiedene Windgeschwindigkeiten

$$C_P(\omega, V_W, \beta) = C_{P,min} + \frac{C_{P,max} - C_{P,min}}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \sum_{i=0}^{n_\omega} \sum_{j=0}^{n_{V_W}} \sum_{k=0}^{n_\beta} c_{ijk} T_i(\omega) T_j(V_W) T_k(\beta) \right) \right]$$

limitiert. Damit können die Koeffizienten  $c_{ijk}$  derart gewählt werden, dass nach wie vor eine exakte Interpolation der Kennwerte  $(\omega_i, V_{Wj}, \beta_k)_{i=0,\dots,n_\omega, j=0,\dots,n_{V_W}, k=0,\dots,n_\beta}$  stattfindet. Gleichzeitig ist der Wert von  $C_P$  auch bei einer Extrapolation des Kennfeldes innerhalb des MSV auf das Intervall  $[C_{P,min}, C_{P,max}]$  beschränkt. Aus einer Sensitivitätsanalyse durch Variation der Polynomordnungen wurde  $n_\omega = 10$ ,  $n_{V_W} = 8$  und  $n_\beta = 6$  gewonnen.

Damit kann die Dynamik der Rotordrehzahl wie folgt formuliert werden. Es bezeichne  $J_{ges}$  das Trägheitsmoment des gesamten Triebstranges entsprechend einer *Bildwellenreduktion* bzgl. der langsam drehenden Seite. Außerdem sei  $M_{gen}$  das Generator-Drehmoment und  $g_{ratio}$  das Übersetzungsverhältnis des Getriebes. Dann folgt aus Gleichung (5.2.2)

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2_{ges}} R^2 \pi \rho V_W^3(t) \frac{C_P(\omega, V_W(t), \beta)}{\omega} - g_{ratio} M_{gen}, \quad (5.2.5)$$

womit die für eine MPC von WEA wichtige dominante dynamische Charakteristik der Rotordrehzahl hinreichend bestimmt werden kann.

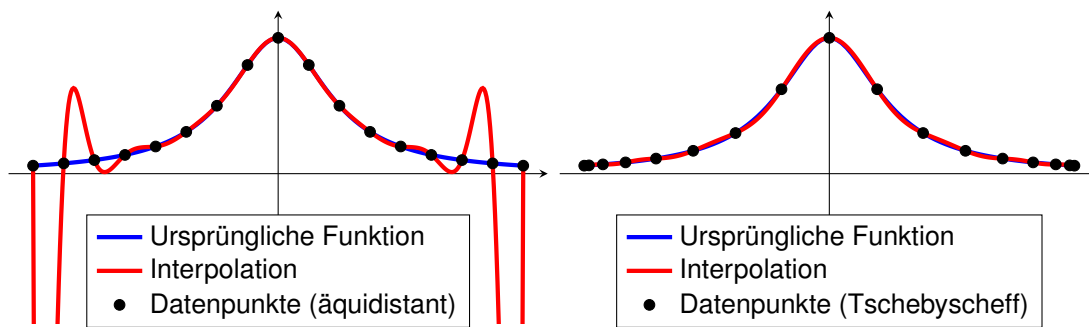


Abbildung 5.5: Interpolation der Funktion  $x(t) = \frac{1}{1+16t^2}$  mit äquidistant verteilten vs. Tschebyscheff-verteilten Datenpunkten

### 5.3 Problemstellung der modellprädiktiven Regelung einer Windenergieanlage

In dem vorangegangenen Abschnitt wurde ein nichtlineares Modell zur Abbildung der Dynamik der Rotordrehzahl abgeleitet. Damit kann nun eine erste Problemstellung der MPC einer WEA als ein OSP der Form von Problem 2.1 formuliert werden. Dieses eignet sich jedoch noch nicht für die praktische Anwendung. Zur vollständigen Problemstellung müssen Zustandsbeschränkungen, die nicht exakt eingehalten werden können, entsprechend der Diskussion in Abschnitt 4.4.1 physikalisch sinnvoll relaxiert werden. Außerdem führt diese erste Problemstellung zu einer nicht-regulären Hamiltonfunktion. Vielmehr weist dadurch dessen Lösung das in Abschnitt 2.1.3 diskutierte Phänomen *Chattering-Control* zweiter Art auf. Dies führt zu einer optimalen Steuerung mit *bang-bang* Struktur, welche außerdem Häufungspunkte von Schaltpunkten enthält. Wie gezeigt wird, steht dem sehr hohen numerischen Aufwand, eine solche Lösung zu bestimmen, ein verhältnismäßig geringer ingenieurwissenschaftlicher Mehrwert gegenüber. Daher muss für eine praktischen Anwendung das Problem regularisiert werden [28, S. 7].

#### 5.3.1 Erste Problemstellung

Übergeordnetes Ziel des Einsatzes einer MPC für WEA ist es, die Stromgestehungskosten zu reduzieren. Dazu dient beispielsweise, ein Maximum an elektrischer Energie  $E_{el}$  aus der durch die Rotorscheibe fließenden Luftströmungen zu gewinnen. Die Menge dieser über den Zeitraum  $[t_0, t_f]$  extrahierten Energie lässt sich über die durch den Generator aufgebrauchte Leistung abschätzen. Dabei wird die Windenergie nicht unbedingt nur in elektrische, sondern auch in kinetische Energie des Rotors umgewandelt. Damit ergibt sich die gesamte, aus der Windströmung extrahierte Energie, aus der Differenz der Rotationsenergie zum End- und

Anfangszeitpunkt sowie der abgegebenen elektrischen Energie.

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} J [\omega(t_f)^2 - \omega(t_0)^2] + \int_{t_0}^{t_f} g_{\text{ratio}} \omega M_{\text{gen}} dt \quad (5.3.1)$$

Da die Drehzahl des Rotors zum Zeitpunkt  $t = t_0$  über die Zustandsmessung oder -schätzung feststeht, hat diese keinen Einfluss auf das Zielfunktional, weshalb sich Gleichung (5.3.1) zu

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} J \omega(t_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} g_{\text{ratio}} \omega M_{\text{gen}} dt \quad (5.3.2)$$

vereinfacht. Neben der Maximierung der extrahierten Energie gilt es, die Systemzustände sowie die Stellgrößen des Systems innerhalb ihrer zulässigen Grenzen zu halten. Dabei ist die Drehzahl des Rotors auf den Wert  $\omega_{\text{max}}$  beschränkt.

$$\omega(t) - \omega_{\text{max}} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

Die maximale extrahierte Leistung ist durch

$$\omega(t) M_{\text{gen}}(t) - P_{\text{max}} \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

limitiert. Zusätzlich ist der Gültigkeitsbereich des Generatormomentes  $M_{\text{gen}}$  und des Anstellwinkels  $\beta$  durch

$$\begin{aligned} M_{\text{gen}} - M_{\text{gen,max}} &\leq 0 & \beta - \beta_{\text{max}} &\leq 0 \\ M_{\text{gen,min}} - M_{\text{gen}} &\leq 0 & \beta_{\text{min}} - \beta &\leq 0 \end{aligned}$$

gegeben. Zuletzt sind die Raten, mit denen  $M_{\text{gen}}$  und  $\beta$  variieren können, durch

$$\left| \dot{M}_{\text{gen}} \right| \leq \dot{M}_{\text{gen,max}} \quad \left| \dot{\beta} \right| \leq \dot{\beta}_{\text{max}} \quad (5.3.3)$$

beschränkt. Neben diesen Ungleichungsbeschränkungen tritt die Dynamik einiger dieser Variablen in Form von Differentialgleichungen als Nebenbedingung der Optimierung auf. Mit Gleichung (5.2.5) wurde ein Modell für die Rotordrehzahl  $\omega$  bestimmt. Wie außerdem Gleichung (5.3.3) entnommen werden kann, ist die zeitliche Ableitung des Generatormomentes  $M_{\text{gen}}$  und des Anstellwinkel  $\beta$  beschränkt. Nach Definition 2.3 tritt keine zeitliche Ableitung einer Steuerung explizit in der Problemstellung auf. Daher sind auch  $M_{\text{gen}}$  und  $\beta$  formal Zustandsvariablen, deren Dynamik über

$$\dot{M}_{\text{gen}} = u_1 \quad \dot{\beta} = u_2$$



definiert ist. Damit leiten sich aus (5.3.3) die beiden folgenden Steuerungsbeschränkungen ab.

$$|u_1| \leq \dot{M}_{\text{gen,max}} \qquad |u_2| \leq \dot{\beta}_{\text{max}}$$

Alle anderen aufgeführten Ungleichungsbeschränkungen fallen in die Kategorie der Zustandsbeschränkungen. Für die vollständige Formulierung einer ersten Problemstellung gilt es zuletzt die Randbedingungen für die Zustandsvariablen festzulegen. Zum Endzeitpunkt  $t = t_f$  sollen diese ihren bzgl. des Zielfunktionales (5.3.2) optimalen Wert annehmen können. Ihr Anfangswert ist zum Zeitpunkt  $t = t_0$  durch eine Zustandsmessung bzw. Zustandsschätzung in jedem MPC-Schritt festgelegt.

$$\omega(t_0) = \omega_0, \qquad M_{\text{gen}}(t_0) = M_{\text{gen},0}, \qquad \beta(t_0) = \beta_0$$

Zur Vereinfachung der Nomenklatur im verbleibenden Teil des Kapitels werden die in Tabelle 5.1 aufgeführten Symbole eingeführt. Damit wird das Vorzeichen des Momentes  $x_2$  im Generatorbetrieb negativ, wodurch aus der Maximierung von (5.3.2) eine Minimierung wird. Entsprechend gilt es andere Variablen umzuwandeln. Mit dem Zielfunktional (5.3.2), den Ungleichungsbeschränkungen an die Zustands- und Steuerungsvariablen, der entsprechenden Systemdynamik sowie den Randbedingungen lässt sich folgende erste Problemstellung formulieren.

**Problem 5.1** (Erste Problemstellung zur MPC von WEA)

$$\min_{|u_1| \leq u_{1,max}, |u_2| \leq u_{2,max}} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_{t_0}^{t_f} x_1 x_2 dt \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, V_W(t), x_3) + x_2, & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \dot{x}_2 &= u_1, & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ \dot{x}_3 &= u_2, & x_3(t_0) &= x_{3,0} \end{aligned}$$

$$x_{1,min} \leq x_1 \leq x_{1,max} \tag{5.3.4}$$

$$x_{2,min} \leq x_2 \leq x_{2,max} \tag{5.3.5}$$

$$x_{3,min} \leq x_3 \leq x_{3,max} \tag{5.3.6}$$

$$\bar{P}_{min} \leq x_1 x_2 \tag{5.3.7}$$

Neues Symbol	Bisheriges Symbol	Beschreibung
$x_1, x_{1,\max}, x_{1,\min}$	$\omega, \omega_{\max}, \omega_{\min}$	Rotordrehzahl
$x_2, x_{2,\max}, x_{2,\min}$	$-\frac{g_{\text{ratio}}M_{\text{gen}}}{J}, -\frac{g_{\text{ratio}}M_{\text{gen},\min}}{J}, -\frac{g_{\text{ratio}}M_{\text{gen},\max}}{J}$	Generatormoment am langsam drehenden Getriebeausgang
$x_3, x_{3,\max}, x_{3,\min}$	$\beta, \beta_{\max}, \beta_{\min}$	Anstellwinkel aller Rotorblätter
$u_1, u_{1,\max}$	<i>Skalierung entsprechend <math>M_{\text{gen}}</math></i>	Generatormomentrate
$u_2, u_{2,\max}$		Anstellwinkelrate
$f(x_1, V_W, x_3)$	$\frac{R^2 \pi \rho}{2J} V_W^3(t) \frac{C_P(\omega, V_W(t), \beta)}{\omega}$	Aerodynamische Beschleunigung
$\bar{P}_{\min}$	$-\frac{P_{\max}}{J}$	Maximale Leistung

Tabelle 5.1: Zustands- und Steuerungsvariablen des Ersatzmodells

### 5.3.2 Relaxierung der Beschränkungen höherer Ordnung

Problem 5.1 enthält eine Reihe von Beschränkungen an die Zustandsvariablen, welche es gilt bei der Berechnung eines Stellgrößensignales entsprechend einzuhalten. Wie bereits in Abschnitt 4.4 diskutiert wurde, lassen sich nicht alle Zustandsbeschränkungen aufgrund von Modell- und Messunsicherheiten exakt innerhalb einer MPC von WEA berücksichtigen. Diese Zustandsbeschränkungen müssen identifiziert und dementsprechend relaxiert werden. Im Folgenden wird, wenn nötig, mit  $f := f(x_1, V_W, x_3)$  das Argument zur Abkürzung weggelassen. Gleichung (5.3.4) ist eine Zustandsbeschränkung 2. Ordnung, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{x}(t)) &= x_1(t) - x_{1,\max} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} h(\mathbf{x}(t)) &= \frac{d}{dt} [x_1(t) - x_{1,\max}] = f + x_2 \quad (5.3.8) \\
 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} h(\mathbf{x}(t)) &= \frac{d}{dt} [f + x_2] = \frac{\partial f}{\partial x_1} [f + x_2] + \frac{\partial f}{\partial V_W} \dot{V}_W + \frac{\partial f}{\partial x_3} u_2 + u_1. \quad (5.3.9)
 \end{aligned}$$

Während nach einmaliger zeitlicher Differentiation in Gleichung (5.3.8) noch keine der beiden Steuerungen  $u_1$  oder  $u_2$  explizit auftritt, hängt Gleichung (5.3.9) explizit sowohl von  $u_1$  als auch  $u_2$  ab. Damit sind zwei zeitliche Ableitungen notwendig, um für die Beschränkung (5.3.4) eine zulässige Steuerung berechnen zu können. Nach Definition 2.6 ist diese Beschränkung damit 2. Ordnung.

Der aerodynamische Leistungsbeiwert  $C_P(\omega, V_W, \beta)$  entspricht dem mittleren Wirkungsgrad an dem jeweiligen Betriebspunkt. Neben der Projektion des dreidimensionalen Windfeldes auf eine skalare Größe führt das zu einer Modellunsicherheit in der Vorhersage der Rotordrehzahl. Erschwerend addieren sich Unsicherheiten in der Messung der Windgeschwindigkeiten. Daher kann die maximale Rotordrehzahl durch eine Regelung nicht exakt eingehalten werden. In der Praxis wird eine Verletzung innerhalb eines festgelegten Rahmens zugelassen, was über eine Relaxierung der Zustandsbeschränkung (5.3.4) in Problem 5.1 realisiert werden

kann. Entsprechend Gleichung (4.4.1) wird ein neuer Zustand  $x_4$  eingeführt, der über

$$\dot{x}_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} (x_1(t) - \hat{x}_{1,max})^3, & \text{falls } x_1(t) \geq \hat{x}_{1,max} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (5.3.10)$$

den Grad der Verletzung auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  misst. Als Randbedingungen werden

$$x_4(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[3]{x_4(t_f)}}{t_f - t_0} - (x_{1,max} - \hat{x}_{1,max}) \leq 0$$

gesetzt.  $x_{1,max}$  bezeichnet dabei nach wie vor den ursprünglichen maximal zulässigen Wert der Rotordrehzahl. Über den Wert  $\hat{x}_{1,max} < x_{1,max}$  kann die mittlere akzeptierte Verletzung eingestellt werden. Der Exponent 3 wurde aus zwei Gründen gewählt. Zum einen fallen damit verhältnismäßig kleine Verletzungen weniger ins Gewicht als größere Verletzungen der ursprünglichen Beschränkung, zum anderen ist mindestens der Exponent 2 notwendig, um der klassischen Regularisierungs-Hypothese aus Problemstellung 2.1 zu genügen. Andernfalls wäre die rechte Seite von Gleichung (5.3.10) für  $x_1(t) = \hat{x}_{1,max}$  nicht ausreichend stetig differenzierbar.

In dem später diskutierten Fall wird  $x_{1,max} = 12,1 \text{ min}^{-1}$  als maximale Rotordrehzahl vorgegeben. Für die Vergleichbarkeit der Ergebnisse einer MPC mit einer klassischen Regelung einer WEA in den Abschnitten 5.5 und 5.6 wird  $\hat{x}_{1,max}$  derart gewählt, dass beide Regler eine ähnliche Verletzung zulassen.

Die Beschränkung  $x_{1,min} - x_1(t) \leq 0$  aus (5.3.4) wird in der vorliegenden Problemstellung nicht relaxiert, da in allen betrachteten Lastfällen von ausreichend hoher Windgeschwindigkeit ausgegangen wird. Dennoch kann diese äquivalent zu  $x_1(t) - x_{1,max} \leq 0$  relaxiert und entsprechend berücksichtigt werden.

Da die Rotordrehzahl  $x_1$  Modellunsicherheiten und Messungenauigkeiten unterworfen ist, gilt dies auch für die abgegebene elektrische Leistung. Diese wird entsprechend Gleichung (5.3.2) abgeschätzt, wodurch sich die Beschränkung (5.3.7) ergibt. Diese Beschränkung ist 1. Ordnung, denn es gilt

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}(t)) &= \bar{P}_{\min} - x_1 x_2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} h(\mathbf{x}(t)) &= \frac{d}{dt} [\bar{P}_{\min} - x_1 x_2] = -(f + x_2)x_2 - x_1 u_1. \end{aligned}$$

Daher ist nach einmaliger zeitlicher Differentiation eine explizite Abhängigkeit der Beschränkung bzgl. der Stellgröße  $u_1$  gegeben. Äquivalent zum Vorgehen zur Relaxierung der Beschränkung (5.3.4) wird ein neuer Zustand  $x_5$  eingeführt, der über

$$\dot{x}_5(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left( \hat{P}_{min} - x_1(t)x_2(t) \right)^3, & \text{falls } x_1(t)x_2(t) \leq \hat{P}_{min} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad (5.3.11)$$

den Grad der Verletzung auf dem Zeithorizont  $[t_0, t_f]$  misst. Als Randbedingungen werden

$$x_5(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[3]{x_5(t_f)}}{t_f - t_0} - \left( \hat{P}_{min} - \bar{P}_{min} \right) \leq 0 \quad (5.3.12)$$

gesetzt. Auch hier wird für den späteren Vergleich der Wert  $\hat{P}_{min} > \bar{P}_{min}$  derart gewählt, dass keiner der Regler über den Grad der zulässigen Verletzung bei der Berechnung der Energieausbeute entsprechend benach- und bevorteilt wird.

Als Ausgabewerte der MPC für WEA soll das Generatormoment  $M_{gen} \propto x_2$  und der Anstellwinkel  $\beta \propto x_3$  dienen. Diese werden entsprechend in das MKS-Modell der WEA eingebunden. Innerhalb der MPC sind diese jedoch Zustandsvariablen, um ihren Auf- und Abbau über  $|u_1| \leq u_{1,max}$  und  $|u_2| \leq u_{2,max}$  entsprechend zu beschränken. Da damit  $x_2$  und  $x_3$  keinen Ungenauigkeiten unterworfen sind, können die Beschränkungen (5.3.5) und (5.3.6) exakt berücksichtigt werden und müssen daher nicht relaxiert werden. Damit ist es notwendig, ihre entsprechende Struktur während des Lösens der OSP entsprechend der Diskussion in Abschnitt 4.4 aufzulösen.

Für eine weitere Vereinfachung der Nomenklatur relaxierter Beschränkungen sei folgende Funktion definiert.

$$\chi_{[a(t)]} := \begin{cases} 1 & \text{falls } a(t) \geq 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Damit ergibt sich folgender Zwischenstand der Problemstellung zur MPC einer WEA.

**Problem 5.2**

$$\min_{|u_1| \leq u_{1,max}, |u_2| \leq u_{2,max}} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_{t_0}^{t_f} x_1 x_2 dt \right]$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, V_W(t), x_3) + x_2, & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \dot{x}_2 &= u_1, & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ \dot{x}_3 &= u_2, & x_3(t_0) &= x_{3,0} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 & x_4(t_0) &= 0, & \frac{\sqrt[3]{x_4(t_f)}}{t_f - t_0} - (x_{1,max} - \hat{x}_{1,max}) &\leq 0 \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} (\hat{P}_{min} - x_1 x_2)^3 & x_5(t_0) &= 0 & \frac{\sqrt[3]{x_5(t_f)}}{t_f - t_0} - (\hat{P}_{min} - \bar{P}_{min}) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x_{2,min} \leq x_2 \leq x_{2,max}$$

$$x_{3,min} \leq x_3 \leq x_{3,max}$$

**5.3.3 Regularisierung des Optimalsteuerungsproblems**

Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 diskutiert wurde, können die Lösungen von OSP mit nicht-regulärer Hamiltonfunktion Phänomene mit *bang-bang*-Steuerung, singulärer Steuerung oder sogar *Chattering Control* zweiter Art enthalten. Die Lösung von Problem 5.2 enthält in der Regel alle drei Phänomene. Dies lässt sich aus einer Analyse der entsprechenden Optimalitätsbedingungen (2.1.12) ableiten. Zunächst soll die Notwendigkeit einer Regularisierung aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht motiviert werden.

**Notwendigkeit eine Regularisierung**

Die dem Problem 5.2 entsprechende Hamiltonfunktion ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= x_1 x_2 + \lambda_{x_1} [f(x_1, V_W, x_3) + x_2] + \lambda_{x_2} u_1 + \lambda_{x_3} u_2 \\ &\quad + \frac{\lambda_{x_4}}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 + \frac{\lambda_{x_5}}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} (\hat{P}_{min} - x_1 x_2)^3 \end{aligned}$$

gegeben. Falls die Steuerung  $u_1$  nicht ihren maximalen Wert  $u_{1,max}$  oder ihren minimalen Wert  $u_{1,min}$  annimmt, dann fordern die Optimalitätsbedingungen (2.1.12), dass der Gradient von  $\mathcal{H}$

bzgl.  $u_1$  verschwindet. Gleiches gilt für die Steuerung  $u_2$ .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} \stackrel{!}{=} 0$$

Führt man diese partielle Differentiation aus, erhält man

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = \lambda_{x_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = \lambda_{x_3} \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus diesen Bedingungen lässt sich keine Steuerung zu den aktuellen Zuständen  $\mathbf{x}^*$  und  $\lambda$  ableiten. Vielmehr gilt, entweder nimmt die entsprechende Steuerung seinen minimalen bzw. maximalen Wert an, oder sie ist singulär. Gilt beispielsweise  $\lambda_{x_2}(\bar{t}) = 0$  für einen isolierten Zeitpunkt  $t = \bar{t}$  und  $\lambda_{x_2}(t) > 0$  für  $t < \bar{t}$  und  $\lambda_{x_2}(t) < 0$  für  $t > \bar{t}$ , ist  $\bar{t}$  ein *Schaltpunkt*, an dem  $u_1$  von seinem minimalen Wert  $u_{1,min}$  zu seinem maximalen Wert  $u_{1,max}$  springt. Dadurch entsteht die bereits erwähnte *bang-bang*-Steuerung, vgl. Kommentar 2.12. Für eine singuläre Steuerung muss  $\lambda_{x_2}(\bar{t}) \equiv 0$  in einer Umgebung von  $\bar{t}$  gelten. Ob dies gilt, lässt sich aus den entsprechenden zeitlichen Ableitungen bestimmen, denn es muss dann auch  $\dot{\lambda}_{x_2} = 0$  bzw.  $\dot{\lambda}_{x_3} = 0$  gelten. Es werde exemplarisch die Situation  $x_1 < \hat{x}_{1,max}$  und  $\hat{P}_{min} < x_1 x_2$  betrachtet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= -x_1 - \lambda_{x_1} \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= -\lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Aus der ersten zeitlichen Ableitung lässt sich somit nach wie vor keine Steuerung explizit bestimmen. Dies ist zu erwarten, da bei singulärer Steuerung bis zum Erreichen der *intrinsic* Ordnung eine explizite Abhängigkeit nur bei geradzahlgiger zeitlicher Ableitung auftreten kann, vgl. Kommentar 2.14.

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = -f - x_2 + x_2 + \lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -f + \lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= \left[ x_2 + \lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ &\quad - \lambda_{x_1} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} (f + x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial V_W} \dot{V}_W + \frac{\partial f^2}{\partial x_3^2} u_2 \right] \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Wie in Gleichung (5.3.15) erkannt werden kann, tritt für  $u_2$  eine singuläre Steuerung der Ordnung 1 auf. Damit diese zum Zeitpunkt  $t = \bar{t}$  aktiv werden kann, muss  $\lambda_{x_3}(\bar{t}) = 0$  und  $\left[ -\lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right] \Big|_{t=\bar{t}} = 0$  gelten.

### Kommentar 5.3

Letztere der beiden Bedingungen ist insbesondere dann erfüllt, wenn  $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$  gilt und damit eine Variation des Anstellwinkels  $x_3$  nicht mehr zu einer Verbesserung des aerodynamischen Leistungsbeiwertes führt. Damit tritt für den Anstellwinkel singuläre Steuerung dann auf, wenn dieser bereits zum maximal möglichen Wirkungsgrad führt und dieser Zustand lediglich gehalten werden kann.

Auch lässt sich aus (5.3.14) ableiten, dass die Ordnung der singulären Steuerung bzgl.  $u_1$  größer 1 ist, da nach zweimaliger zeitlicher Ableitung noch keine explizite Abhängigkeit von einer Steuerung besteht. Ohne die totale zeitliche Differentiation von (5.3.14) weiter auszuführen, sei bemerkt, dass die Ordnung der singulären Steuerung bzgl.  $u_1$  den Wert 2 annimmt. Daher muss sogar mit dem in Abschnitt 2.1.3 und in Beispiel 2.17 diskutierten Phänomen *Chattering Control* gerechnet werden.

Die Anwendung von Lösungen mit diesen beiden Steuerungs-Phänomenen – *singuläre Steuerung* und *Chattering Control zweiter Art* – ist aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht, insbesondere mit Blick auf die zu erwartende Schädigung des Triebstranges, nicht sinnvoll. Dies leitet sich aus folgender Argumentation für die Lösung  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  des OSP 5.2 ab.

1. Aus einer Zustandsmessung oder -schätzung werden die Anfangswerte  $x_{1,0}$ ,  $x_{2,0}$  und  $x_{3,0}$  für die Rotordrehzahl, das Generatormoment und den Anstellwinkel gewonnen.
2. Man erhält die Lösung  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  des OSP 5.2, welche für  $u_1$  das Phänomen singuläre Steuerung auf einem Intervall  $[t_0, \bar{t}] \subset [t_0, t_f]$  aufweise.
3. Daraus ergeben sich bestimmte Bedingungen an alle Anfangswerte. Denn diese singuläre Steuerung kann zum Zeitpunkt  $t = t_0$  nur auftreten, falls man die Gleichungen (5.3.13) und (5.3.14) zu

$$\left. \begin{array}{l} -x_1(t_0) - \lambda_{x_1}(t_0) = 0 \\ \left[ -f + \lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \Big|_{t=t_0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ -f(x_1, V_W, x_3) - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, V_W, x_3) \right] \Big|_{t=t_0} = 0 \quad (5.3.16)$$

kombiniert.

4. Folglich befindet man sich zum Zeitpunkt  $t = t_0$  nur dann auf einem singulären Ast der Lösung – d.h. es tritt singuläre Steuerung auf – falls die Anfangswerte des Systems bereits zusätzlich Gleichung (5.3.16) erfüllen. Da sich die Anfangswerte aus Messungen ergeben, ist der Systemzustand singuläre Steuerung überbestimmt. Nur bei vollständiger Übereinstimmung von der vorhergesagten und der tatsächlichen Systemdynamik,

kann davon ausgegangen werden, dass dies über mehrere MPC-Schritte hinweg gilt. Andernfalls wird *bang-bang* Steuerung oder sogar *Chattering Control zweiter Art* auf das System angewandt, da diese der singulären Steuerung vorausgehen. Da kein reelles System exakt modelliert werden kann, von Messungenauigkeiten und statisches Rauschen ausgegangen werden muss, oszilliert dadurch das Generatormoment und der Anstellwinkel entsprechend zwischen den Werten  $u_{1,\max,\min}$  und  $u_{2,\max,\min}$ . Daher gilt es aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht die Phänomene *singuläre Steuerung* und *Chattering Control* zu vermeiden, ohne dass eine Optimierung des Regelsignals bzgl. der Energieausbeute aufgegeben werden muss.

Über eine Regularisierung der Steuerungen  $u_1$  und  $u_2$  kann ein entsprechend der Anwendung von MPC für WEA sinnvolles Regelsignal erhalten werden. In der Wahl dieser Regularisierung ist man weitestgehend frei, solange diese zu einer regulären Hamiltonfunktion führt. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, neben der Maximierung der Energieausbeute weitere mechanische Zielgrößen zu berücksichtigen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll die Betriebsfestigkeit des Triebstranges entsprechend bei der Bestimmung eines Regelsignals für das Generatormoment und den Anstellwinkel mittels MPC einbezogen werden.

Es wird gefordert, dass die Regularisierung hochfrequente Anteile im Referenzsignal des Generatormomentes verhindert. Dies kann durch Hinzunahme des Terms

$$\frac{c_{u_1}}{2} u_1^2$$

zum Zielfunktional mit einem Regularisierungs-Koeffizienten  $c_{u_1}$  erreicht werden. Damit wird jedoch auch die Geschwindigkeit des Auf- bzw. Abbaus des Momentes beschränkt. Je größer  $c_{u_1}$  gewählt wird, desto teurer wird im Verhältnis zur Energieausbeute eine schnelle Veränderung des Generatormomentes. Dies führt letztendlich dazu, dass die Energieausbeute bei ähnlicher Schädigung auch unter die Energieausbeute einer konventionellen Regelung fällt. Dadurch wäre die Anwendung von MPC für WEA nicht wettbewerbsfähig. Als zielführender stellt es sich heraus, die Variation um einen Mittelwert  $\bar{u}_1$  über den Term

$$\frac{c_{u_1}}{2} [\bar{u}_1 - u_1]^2 \tag{5.3.17}$$

entsprechend zu limitieren. Der Wert  $\bar{u}_1$  ist während des Lösen eines OSP konstant. Er variiert jedoch von MPC-Schritt zu MPC-Schritt und berechnet sich aus dem im vorangegangenen Schritt vorgegebenen Signal für das Generatormoment. Somit wird eine geglättete Vorgabe erreicht ohne den Momentenauf- bzw. -abbau zusätzlich zum Wert  $u_{1,\max}$  hinaus zu beschränken.



Ein derartiges Vorgehen scheint bei der Regularisierung von  $u_2$  nicht notwendig zu sein, weshalb die natürliche Wahl

$$\frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 \quad (5.3.18)$$

verwendet werden kann. Dadurch wird eine generelle Glättung des Regelsignals für den Anstellwinkel erreicht.

Wie bereits erwähnt, werden die Terme (5.3.17) und (5.3.18) dem Zielfunktional hinzugefügt, wodurch man letztendlich

$$\min_{|u_1| \leq u_{1,\max}, |u_2| \leq u_{2,\max}} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} [\bar{u}_1 - u_1]^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 \right] dt \right]$$

erhält. Damit ist das OSP zur Regelung einer WEA regulär. Die entsprechende Hamiltonfunktion lautet.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} [\bar{u}_1 - u_1]^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 + \lambda_{x_1} [f(x_1, V_W, x_3) + x_2] + \lambda_{x_2} u_1 + \lambda_{x_3} u_2 \\ & + \frac{\lambda_{x_4}}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,\max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,\max})^3 + \frac{\lambda_{x_5}}{3} \chi_{[\hat{P}_{\min} - x_1 x_2]} (\hat{P}_{\min} - x_1 x_2)^3 \end{aligned}$$

Aus den Optimalitätsbedingungen lässt sich jederzeit eindeutig eine Steuerung bestimmen, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = -c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_1) + \lambda_{x_2} & \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow & u_1 = \bar{u}_1 - \frac{\lambda_{x_2}}{c_{u_1}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = c_{u_2} u_2 + \lambda_{x_3} & \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow & u_2 = -\frac{\lambda_{x_3}}{c_{u_2}}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für  $c_{u_1} > 0$  und  $c_{u_2} > 0$  und für alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\mathbf{v}^T \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{erw}}{\partial \mathbf{u}^2} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} c_{u_1} & 0 \\ 0 & c_{u_2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} \geq \min\{c_{u_1}, c_{u_2}\} \|\mathbf{v}\|^2 > 0,$$

wodurch die Hamiltonfunktion nach Definition 2.19 gleichmäßig strikt konvex ist.

### 5.3.4 Vollständige Problemstellung und Diskussion des Optimalsteuerungsproblems

Zusammen mit den relaxierten Zustandsbeschränkungen aus Abschnitt 5.3.2 und der Regularisierung aus Abschnitt 5.3.3 lässt sich die vollständige Problemstellung zur MPC einer WEA formulieren.

**Problem 5.4** (Vollständiges OSP zur MPC von WEA)

$$\min_{|u_1| \leq u_{1,max}, |u_2| \leq u_{2,max}} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} (\bar{u}_1 - u_1)^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 \right] dt \right] \quad (5.3.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, V_W(t), x_3) + x_2, & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \dot{x}_2 &= u_1, & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ \dot{x}_3 &= u_2, & x_3(t_0) &= x_{3,0} \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 & x_4(t_0) &= 0, & \frac{\sqrt[3]{x_4(t_f)}}{t_f - t_0} - (x_{1,max} - \hat{x}_{1,max}) &\leq 0 \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} (\hat{P}_{min} - x_1 x_2)^3 & x_5(t_0) &= 0 & \frac{\sqrt[3]{x_5(t_f)}}{t_f - t_0} - (\hat{P}_{min} - \bar{P}_{min}) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$x_{2,min} \leq x_2 \leq x_{2,max} \quad (5.3.20)$$

$$x_{3,min} \leq x_3 \leq x_{3,max} \quad (5.3.21)$$

Das Problem 5.4 wird zunächst formal diskutiert. Daraus lassen sich zum einen erste Eigenschaften der optimalen Steuerung  $u^*(t)$  bestimmen. Zum anderen werden damit die entsprechenden Gleichungen für das Randwertproblem generiert, welches jede Lösung nach Satz 2.11 notwendigerweise erfüllen muss. Die Diskussion erfolgt jeweils zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt  $\hat{t} \in ]t_0, t_f[$ . Für  $\hat{t}$  muss im Rahmen einer Fallunterscheidung analysiert werden, welche Form die Optimalitätsbedingungen (2.1.12) und die adjungierten Gleichungen (2.1.11) annehmen. Zuerst werden nur diejenigen Fälle untersucht, in denen keine der Zustandsbeschränkungen (5.3.20) oder (5.3.21) aktiv sind.

**Berechnung der optimalen Steuerung im Fall inaktiver Zustandsbeschränkungen**

Über die Optimalitätsbedingungen (2.1.12) werden die Steuerungen zu einem Zeitpunkt  $\hat{t} \in ]t_0, t_f[$  in eine direkte Beziehung zu den jeweiligen Werten der Zustandsvariablen  $x(\hat{t})$  und der adjungierten Zustandsvariablen  $\lambda(\hat{t})$  gebracht. Daher reicht es aus,  $\hat{t}$  isoliert zu betrachten. Dazu ist im Allgemeinen eine Falldiskussion notwendig, die jede mögliche Kombination von aktiven und inaktiven Ungleichungsbedingungen separat betrachtet. In diesem ersten Schritt wird davon ausgegangen, dass keine der Zustandsbeschränkungen (5.3.20) und (5.3.21) aktiv ist. Falls auch keine der Steuerungsbeschränkungen  $|u_1| \leq u_{1,max}$  bzw.  $|u_2| \leq u_{2,max}$  aktiv ist, entspricht die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  zu Problem 5.4 ihrer erweiterten

Version  $\mathcal{H}_{erw}$  und lautet wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} (\bar{u}_1 - u_1)^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 + \lambda_{x_1} (f + x_2) + \lambda_{x_2} u_1 + \lambda_{x_3} u_2 \\ + \frac{\lambda_{x_4}}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 + \frac{\lambda_{x_5}}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{min} - x_1 x_2 \right)^3 \end{aligned}$$

Aus den Optimalitätsbedingungen (2.1.12) folgt dann

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_1) + \lambda_{x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = \bar{u}_1 - \frac{\lambda_{x_2}}{c_{u_1}} \quad (5.3.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{u_2} u_2 + \lambda_{x_3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = -\frac{\lambda_{x_3}}{c_{u_2}}. \quad (5.3.23)$$

Die weiter oben erwähnte Falldiskussion vereinfacht sich an dieser Stelle, da zum einen die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*(t)$  aufgrund der Regularität der Hamiltonfunktion stetig ist, vgl. Diskussion in Abschnitt 4.3. Zum anderen hängen die beiden Steuerungen in den Gleichungen (5.3.22) und (5.3.23) nicht explizit von einander ab. Folgt daher aus (5.3.22) eine Steuerung  $u_1$  mit  $u_1 > u_{1,max}$ , ist diese Steuerungsbeschränkung aktiv. Dies wirkt sich jedoch nicht explizit auf die Bestimmung der Steuerung  $u_2$  in (5.3.23) aus. Ist eine Steuerungsbeschränkung aktiv, muss der entsprechende Lagrange'sche Multiplikator – z.B.  $\mu_{u_1,max}$  – bestimmt werden. Dazu wird die erweiterte Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}_{erw}$  benötigt, die sich von  $\mathcal{H}$  in einem zusätzlichen Summand unterscheidet. Falls keine der Zustandsbeschränkungen (5.3.20) und (5.3.21) aktiv sind – wie in diesem ersten Schritt angenommen – dann nimmt diese unter Berücksichtigung aller Steuerungsbeschränkungen folgende Form an.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{erw} = x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} (\bar{u}_1 - u_1)^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 + \lambda_{x_1} (f + x_2) + \lambda_{x_2} u_1 + \lambda_{x_3} u_2 \\ + \frac{\lambda_{x_4}}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 + \frac{\lambda_{x_5}}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{min} - x_1 x_2 \right)^3 \\ + \mu_{u_1,max} (u_1 - u_{1,max}) + \mu_{u_1,min} (u_{1,min} - u_1) \\ + \mu_{u_2,max} (u_2 - u_{2,max}) + \mu_{u_2,min} (u_{2,min} - u_2) \end{aligned}$$

Für  $u_1 = u_{1,max}$  berechnet sich der zugehörige Lagrange'sche Multiplikator  $\mu_{u_1,max}$  ebenfalls aus den Optimalitätsbedingungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_1) + \lambda_{x_2} + \mu_{u_1,max} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \mu_{u_1,max} = -\lambda_{x_2} + c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_1) \\ \Leftrightarrow \quad \mu_{u_1,max} = -\lambda_{x_2} + c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_{1,max}) \end{aligned}$$

Äquivalent gilt für die restlichen drei Fälle

$$u_1 = u_{1,min} \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{u_1,min} = \lambda_{x_2} - c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_{1,min})$$

$$\begin{aligned}
 u_2 = u_{2,\max} & \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_2} = 0 & \Rightarrow & \quad \mu_{u_2,\max} = -\lambda_{x_3} - c_{u_2} u_{2,\max} \\
 u_2 = u_{2,\min} & \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_2} = 0 & \Rightarrow & \quad \mu_{u_2,\min} = \lambda_{x_3} + c_{u_2} u_{2,\min}.
 \end{aligned}$$

Um diesen ersten Schritt abschließen zu können, gilt es noch die Dynamik der adjungierten Variablen zu bestimmen, welche über die adjungierten Gleichungen (2.1.11) gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_{x_1} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial x_1} \\
 &= -x_2 - \lambda_{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_{x_4} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,\max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,\max})^2 + \lambda_{x_5} \chi_{[\hat{P}_{\min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{\min} - x_1 x_2 \right)^2 x_2 \\
 \dot{\lambda}_{x_2} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial x_2} = -x_1 - \lambda_{x_1} + \lambda_{x_5} \chi_{[\hat{P}_{\min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{\min} - x_1 x_2 \right)^2 x_1 \\
 \dot{\lambda}_{x_3} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial x_3} = -\lambda_{x_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \\
 \dot{\lambda}_{x_4} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial x_4} = 0 \\
 \dot{\lambda}_{x_5} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial x_5} = 0.
 \end{aligned}$$

Zur vollständigen Formulierung des RWP fehlen zuletzt die entsprechenden Anfangs- und Endbedingungen. Diese ergeben sich bei einer MPC für die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}(t)$  aus den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und für die adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  aus der Transversalitätsbedingung (2.1.11). Äquivalent zu Problem 2.1 bezeichne  $\Phi(\mathbf{x}(t_f))$  den Teil des Zielfunktional, welcher zum Zeitpunkt  $t = t_f$  addiert wird. In dem vorliegenden Problem 5.4 ist dies die kinetische Energie des Rotors.

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f)) = -\frac{x_1^2(t_f)}{2}$$

Für die mit der Rotordrehzahl  $x_1$  assoziierte adjungierte Variable  $\lambda_{x_1}$  folgt somit.

$$\lambda_{x_1}(t_f) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f))}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} \right] = -x_1(t_f)$$

Die mit  $x_2$  und  $x_3$  assoziierten adjungierten Variablen  $\lambda_{x_2}$  und  $\lambda_{x_3}$  verschwinden zum Zeitpunkt  $t = t_f$ , denn

$$\begin{aligned}
 \lambda_{x_2}(t_f) &= \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f))}{\partial x_2} = 0 \\
 \lambda_{x_3}(t_f) &= \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f))}{\partial x_3} = 0.
 \end{aligned}$$

Für die aus der Relaxierung von Zustandsbeschränkungen entstandenen adjungierten Variablen  $\lambda_{x_4}$  und  $\lambda_{x_5}$  hängen die Endbedingungen davon ab, ob die jeweilige Beschränkung zum Endzeitpunkt aktiv ist. Sind diese jeweils inaktiv, gilt

$$\lambda_{x_4}(t_f) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f))}{\partial x_4} = 0$$

$$\lambda_{x_5}(t_f) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}(t_f))}{\partial x_5} = 0.$$

Entsprechend der Diskussion in Abschnitt 4.4.1 sind die beiden adjungierten Variablen  $\lambda_{x_4}$  und  $\lambda_{x_5}$  konstant auf dem gesamten Intervall  $[t_0, t_f]$ , weshalb sie im inaktiven Fall auch überall verschwinden. Sind die entsprechenden Beschränkungen aktiv, ergeben sich während des numerischen Lösens des OSP die Werte  $\lambda_{x_4}(t_f)$  und  $\lambda_{x_5}(t_f)$  implizit aus den Bedingungen zum Endzeitpunkt  $t = t_f$

$$\frac{\sqrt[3]{x_4(t_f)}}{t_f - t_0} - (x_{1,max} - \hat{x}_{1,max}) = 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{x_5(t_f)}}{t_f - t_0} - (\hat{P}_{min} - \bar{P}_{min}) = 0.$$

Entsprechend der Diskussion in Kapitel 4.4.1 wird die Struktur der Lösung nachverfolgt und angepasst. Daraus ergibt sich, welche Randbedingungen beim Lösen des OSP mittels MSV jeweils zu berücksichtigen sind.

### Berechnung der notwendigen Bedingungen im Fall aktiver Zustandsbeschränkungen

Im vorhergehenden ersten Schritt wurden diejenigen Bestandteile des RWP bestimmt, die im Fall inaktiver Zustandsbeschränkungen gelten. Ist diese Form von Beschränkungen Bestandteil eines OSP, entstehen im Allgemeinen Teilintervalle auf  $[t_0, t_f]$ , die sich darin unterscheiden, ob auf ihnen diese Beschränkungen aktiv sind. In der Literatur werden diese einzelnen Intervalle auch Bögen (engl. *arcs*) genannt. Auf *unbeschränkten* Bögen ist keine Zustandsbeschränkung aktiv. Diese Bögen wurden in dem ersten Schritt zuvor diskutiert. In einem zweiten Schritt gilt es, die Bedingungen des RWP auf *beschränkten* Bögen – d.h. mindestens eine Zustandsbeschränkung ist auf dem durch den Bogen definierten Intervall aktiv – zu berechnen. Nach dem Relaxieren einiger Zustandsbeschränkungen treten in dem Problem 5.4 nach wie vor die Beschränkungen (5.3.20) und (5.3.21) auf. Wie bereits in Abschnitt 5.3.2 diskutiert wurde, besitzen diese die Ordnung 1. Im Allgemeinen ist auch hier eine Falldiskussion notwendig, worin jede mögliche Kombination von aktiven Beschränkungen separat diskutiert wird. Die Beschränkungen (5.3.20) und (5.3.21) sind jedoch entkoppelt, d.h. eine gültige Steuerung lässt sich für beide Beschränkungen unabhängig voneinander berechnen, was die Fallunterscheidung vereinfacht. Denn, ist eine der beiden Beschränkung aus Unglei-

chung (5.3.20) aktiv, muss

$$x_2 - x_{2,\max} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d}{dt}(x_2 - x_{2,\max}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \quad (5.3.24)$$

beziehungsweise

$$x_{2,\min} - x_2 = 0 \quad \wedge \quad \frac{d}{dt}(x_{2,\min} - x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0$$

gelten. Äquivalent muss für die beiden Beschränkungen (5.3.21)

$$x_3 - x_{3,\max} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d}{dt}(x_3 - x_{3,\max}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = 0$$

beziehungsweise

$$x_{3,\min} - x_3 = 0 \quad \wedge \quad \frac{d}{dt}(x_{3,\min} - x_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = 0$$

gelten. Damit sind die Steuerungen  $u_1$  und  $u_2$  für den Fall, dass eine oder mehrere der Beschränkungen (5.3.20) und (5.3.21) aktiv sind, getrennt bestimmbar. Eine detailliertere Fallunterscheidung ist nicht notwendig. Außerdem sind auch die Steuerungsbeschränkungen von den Zustandsbeschränkungen entkoppelt. Denn, falls eine der Beschränkungen von (5.3.20) aktiv ist, gilt  $u_1 = 0$  und die entsprechende Steuerungsbeschränkung  $|u_1| \leq u_{1,\max}$  kann nicht zeitgleich aktiv sein. Selbiges gilt, falls eine der Beschränkungen (5.3.21) aktiv ist. Daher nimmt die erweiterte Hamiltonfunktion im Fall aktiver Zustandsbeschränkungen die folgende Form an.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{erw} = & x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} [\bar{u}_1 - u_1]^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 + \lambda_{x_1} (f + x_2) + \lambda_{x_2} u_1 + \lambda_{x_3} u_2 \\ & + \frac{\lambda_{x_4}}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,\max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,\max})^3 + \frac{\lambda_{x_5}}{3} \chi_{[\hat{P}_{\min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{\min} - x_1 x_2 \right)^3 \\ & + \mu_{x_2,\max} (x_2 - x_{2,\max}) + \mu_{x_2,\min} (x_{2,\min} - x_2) \\ & + \mu_{x_3,\max} (x_3 - x_{3,\max}) + \mu_{x_3,\min} (x_{3,\min} - x_3) \quad (5.3.25) \end{aligned}$$

Neben den Steuerungen müssen die mit den Beschränkungen assoziierten Lagrange'schen Multiplikatoren  $\mu_{x_2,\max/\min}$  und  $\mu_{x_3,\max/\min}$  bestimmt werden. Sie werden benötigt, um eine Lösung auf die Gültigkeit der notwendigen Bedingungen aus Satz 2.11 zu überprüfen. Außerdem dienen sie dazu, Strukturänderungen bestimmen und auflösen zu können, vgl. Abschnitt 4.4. Da mindestens eine der Steuerungen bereits über die Zustandsbeschränkung festgelegt ist, können nicht alle Optimalitätsbedingungen (2.1.12) durch die Wahl einer entsprechenden Steuerung erfüllt werden. Dazu dienen die mit den Beschränkungen assoziierten Lagrange'schen Multiplikatoren. Exemplarisch wird  $\mu_{x_2,\max}(t)$  für  $x_2(t) - x_{2,\max} = 0$  berechnet. Über die Gleichungen (5.3.24) ist  $x_2 = x_{2,\max}$  und  $u_1 = 0$  bereits festgelegt. Aus den Optimalitäts-

bedingungen (2.1.12) und der erweiterten Hamiltonfunktion (5.3.25) folgt

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c_{u_1} (\bar{u}_1 - u_1) + \lambda_{x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -c_{u_1} \bar{u}_1 + \lambda_{x_2} = 0. \quad (5.3.26)$$

Als adjungierte Variable, die über die adjungierten Gleichungen (2.1.11) einer adjungierten Dynamik unterworfen ist, kann  $\lambda_{x_2}$  nicht frei gewählt werden. Vielmehr ergibt sich der entsprechende Wert aus zwei Randbedingungen.

- Am Aufsprungpunkt der Zustandsbeschränkung  $t_1$  wird als *Schaltbedingung*  $x_2(t_1) = x_{2,max}$  gefordert. Da  $\dot{x}_2 = u_1 = 0$  auf dem beschränkten Bogen gilt, bleibt diese Bedingung auf dem gesamten beschränkten Bogen  $[t_1, t_2]$  gültig.
- Am Absprungpunkt der Zustandsbeschränkung  $t_2$  wird die notwendige Bedingung (5.3.26) als *Schaltbedingung*  $\lambda_{x_2}(t_2) = c_{u_1} \bar{u}_1$  gefordert.

Damit auch diese notwendige Bedingung  $\lambda_{x_2}(t) = c_{u_1} \bar{u}_1$  aus (5.3.26) für alle  $t \in [t_1, t_2]$  gilt, wird  $\mu_{x_2,max}$  derart bestimmt, dass auf dem gesamten beschränkten Bogen  $[t_1, t_2]$

$$\frac{d}{dt} [-c_{u_1} \bar{u}_1 + \lambda_{x_2}(t)] = 0$$

erfüllt ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [-c_{u_1} \bar{u}_1 + \lambda_{x_2}] &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{\lambda}_{x_2} &= -x_1 - \lambda_{x_1} + \lambda_{x_5} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} \left( \hat{P}_{min} - x_1 x_2 \right)^2 x_1 - \mu_{x_2,max} = 0. \end{aligned}$$

Dementsprechend berechnet sich  $\mu_{x_2,max}(t)$  für  $t \in [t_1, t_2]$  aus

$$\mu_{x_2,max}(t) = -x_1(t) - \lambda_{x_1}(t) + \lambda_{x_5}(t) \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1(t)x_2(t)]} \left( \hat{P}_{min} - x_1(t)x_2(t) \right)^2 x_1(t).$$

Ist dagegen die Beschränkung  $x_{2,min} - x_2 \leq 0$  aktiv, so folgt

$$\mu_{x_2,min}(t) = x_1(t) + \lambda_{x_1}(t) - \lambda_{x_5}(t) \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1(t)x_2(t)]} \left( \hat{P}_{min} - x_1(t)x_2(t) \right)^2 x_1(t).$$

Die Schaltbedingungen berechnen sich äquivalent. Am Aufsprungpunkt  $t_1$  gilt  $x_2(t_1) = x_{2,min}$  und am Absprungpunkt  $t_2$  die Bedingung  $\lambda_{x_2}(t_2) = c_1 \bar{u}_1$ . In der gleichen Weise werden die entsprechenden Lagrange'schen Multiplikatoren für  $x_3 - x_{3,max} \leq 0$  und  $x_{3,min} - x_3 \leq 0$  berechnet. Ist eine der beiden Beschränkungen aktiv, so muss  $u_2 = 0$  gelten und es folgt aus den Optimalitätsbedingungen

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{erw}}{\partial u_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{u_2} u_2 + \lambda_{x_3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{x_3} = 0.$$

Damit diese als notwendige Bedingung für ein Optimum auf dem gesamten beschränkten Bogen  $[t_1, t_2]$  erfüllt ist, wird  $\lambda_{x_3} = 0$  zum einen am Absprungpunkt  $t_2$  als Schaltbedingung gefordert. Zum anderen muss die zeitliche Ableitung  $\dot{\lambda}_{x_3} = 0$  auf dem beschränkten Bogen verschwinden. Da entsprechend Gleichung (5.3.25)

$$\dot{\lambda}_{x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{H}_{erw} = -\lambda_{x_3}(t) \frac{\partial}{\partial x_3} f - \mu_{x_3,max} + \mu_{x_3,min}$$

und  $\mu_{x_3,max} = 0$  für  $x_3 = x_{3,min}$  bzw.  $\mu_{x_3,min} = 0$  für  $x_3 = x_{3,max}$  gilt, geschieht das, falls die Lagrange'schen Multiplikatoren jeweils die folgende Form annehmen.

$$\begin{aligned} \mu_{x_3,max}(t) &= -\lambda_{x_3}(t) \frac{\partial}{\partial x_3} f && \text{für} && x_3 = x_{3,max} \\ \mu_{x_3,min}(t) &= \lambda_{x_3}(t) \frac{\partial}{\partial x_3} f && \text{für} && x_3 = x_{3,min} \end{aligned}$$

Damit sind alle Bedingungen bestimmt, die für das automatische Bestimmen der Lösungsstruktur entsprechend der Diskussion in Abschnitt 4.4 benötigt werden.

### Bestimmung der Übergangsbedingungen der Zustandsbeschränkungen

Bei der Bestimmung der Lagrange'schen Multiplikatoren für die entsprechenden Zustandsbeschränkungen wurden bereits skalarwertige Schaltbedingungen an den jeweiligen Auf- und Absprungpunkten eingeführt. Diese sind Teil von insgesamt  $2n + 1$  Übergangsbedingungen an jedem dieser Zeitpunkte.  $2n$  dieser Bedingungen ergeben sich aus den Vorgaben, wie sich die physikalischen Zustände  $x$  an diesen Punkten verhalten. In aller Regel wird Stetigkeit gefordert, woraus die  $n$  Bedingungen (5.3.27) an die Zustandsvariablen  $x$  weiter unten folgen. Daraus ergeben sich weitere  $n$  Bedingungen entsprechend Gleichung (5.3.28), die den jeweiligen Übergang der adjungierten Variablen  $\lambda$  festlegen [12]. Für Problemstellungen mit nicht-regulärer Hamiltonfunktion oder im Fall von Beschränkungen höherer Ordnung sind die Übergänge der adjungierten Variablen im Allgemeinen nicht stetig. Es bezeichne  $\hat{t}^- := \lim_{t \nearrow \hat{t}} t$  den linksseitigen und  $\hat{t}^+ := \lim_{t \searrow \hat{t}} t$  den rechtsseitigen Grenzwert an  $\hat{t}$ . Damit ergeben sich an einem Auf- bzw. Absprungpunkt  $\hat{t}$  die folgenden  $2n$  Bedingungen.

$$x(\hat{t}^+) - x(\hat{t}^-) = 0 \quad (5.3.27)$$

$$\lambda(\hat{t}^+) - \lambda(\hat{t}^-) = 0 \quad (5.3.28)$$

Der optimale Schaltzeitpunkt  $\hat{t}$  ist an einem Aufsprungpunkt – je nach Beschränkung – durch eine der vier Bedingungen

$$x_{2,max} = x_2(\hat{t}^+) \quad x_{2,min} = x_2(\hat{t}^+)$$



$$x_{3,\max} = x_3 \left( \hat{t}^+ \right) \qquad x_{3,\min} = x_3 \left( \hat{t}^+ \right)$$

festgelegt. Entsprechend der Diskussion weiter oben ergeben sich die Schaltbedingungen am Abสปरणpunkt aus den jeweiligen Optimalitätsbedingungen, wodurch eine der beiden folgenden Bedingungen den optimalen Abสปरणzeitpunkt  $\hat{t}$  festlegt.

$$\lambda_{x_2} \left( \hat{t}^- \right) = c_1 \bar{u}_1 \qquad \text{oder} \qquad \lambda_{x_3} \left( \hat{t}^- \right) = 0$$

## 5.4 Definition der Analyseszenarien

Auf Basis der Gleichungen, die in Abschnitt 5.3.4 aus der Diskussion der notwendigen Bedingungen für eine optimale Steuerung gemäß Satz 2.11 gewonnen wurden, kann eine indirekte MPC einer WEA umgesetzt werden. Dazu wird das Konzept des automatischen Auflörens der Lösungsstruktur aus Kapitel 4 herangezogen und entsprechend in die Implementierung eines MSV integriert, welches in Abschnitt 4.2 beschrieben wurde. Dies ist für die vorliegende Arbeit in der Sprache FORTRAN erfolgt. Innerhalb eines jeden MPC-Schrittes ist damit gemäß der Diskussion in Abschnitt 2.2 das Problem 5.4 zu lösen. Bevor die eigentliche Diskussion jedoch durchgeführt werden kann, gilt es zunächst das Analyseszenario festzulegen.

Die Leistungsfähigkeit von MPC für WEA wird im Folgenden mittels numerischer Simulation bewertet und diskutiert. Als Modell dient dazu die in Abschnitt 5.1.2 vorgestellte 5-MW Referenzanlage, wofür ebenfalls von NREL eine Regelung bereitgestellt wird [88, S. 17 ff.]. Diese konventionelle Regelung berechnet auf Basis einer gefilterten Rotordrehzahl  $\omega_{\text{filt}}$  Stellgrößensignale für das Generatormoment  $M_{\text{gen}} \propto x_2$  und den Anstellwinkel  $\beta \propto x_3$ .  $\beta$  ist dabei für alle drei Rotorblätter identisch, weshalb auch von einer *kollektiven* Regelung des Anstellwinkels gesprochen wird. In der Praxis ist auch eine *individuelle* Regelung von  $\beta$  für jedes Rotorblatt einzeln zu finden [92], was im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet wird. Die gefilterte Drehzahl  $\omega_{\text{filt}}$  wird aus einem Tiefpassfilter 1. Ordnung gewonnen, der in seiner zeit-diskreten Form wie folgt beschrieben ist [88, S. 17].

$$\omega_{\text{filt}}(\hat{t}_i) = (1 - \alpha)\omega(\hat{t}_i) + \alpha\omega_{\text{filt}}(\hat{t}_{i-1})$$

In Anlehnung an die Zeitpunkte  $\iota_i$  der äquidistanten Macro-Diskretisierung für die MPC werden die Abtastzeitpunkte der klassischen Regelung mit  $\hat{t}_i$  bezeichnet. Während jedoch für die MPC von WEA Schrittweiten von  $\iota_{i+1} - \iota_i = 100$  ms bis  $\iota_{i+1} - \iota_i = 200$  ms gewählt werden [23][24][25][28], ist dieser Schritt mit  $\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i = 1,25$  ms bei der konventionellen Regelung wesentlich kleiner [88, S. 17]. Der Koeffizient  $\alpha$  wird derart gewählt, dass die Eingangsamplitude bei 0,25 Hz um 3 dB reduziert wird. Diese Frequenz entspricht einem Viertel der Eigenfrequenz der 1. Eigenschwingung in Hochkant-Richtung der Rotorblätter. Dieser Tiefpassfilter wird äquivalent auch zur Glättung der Rotordrehzahl als Eingang für die MPC verwendet.

$\omega(\hat{l}_i)$  bzw.  $\omega(l_i)$  wird jeweils aus einer Zustandsmessung der Drehzahl an der Hauptwelle gewonnen.

Die konventionelle Regelung einer WEA kann in die Bereiche 1, 2 und 3 unterteilt werden. In welchem dieser Bereiche eine WEA jeweils operiert, hängt von der Windgeschwindigkeit und der damit verbundenen Rotordrehzahl  $\omega$  ab. In Bereich 1 liegt die Windgeschwindigkeit unterhalb der *Cut-in* Geschwindigkeit, oberhalb der über das Generatormoment eine Energiegewinnung stattfindet. Diese *Cut-in* Geschwindigkeit liegt für die betrachtete 5-MW Referenzanlage bei  $6,9 \text{ min}^{-1}$ . Die Region 2 ist durch eine variable Rotordrehzahl  $\omega_{\text{filt}}$  unterhalb des Maximums von  $\omega_{\text{max}} = 12,1 \text{ min}^{-1}$  und ein damit einhergehendes variables Generatormoment  $M_{\text{gen}}$  charakterisiert.  $M_{\text{gen}}$  variiert als quadratisches Regelgesetz mit der Rotordrehzahl gemäß

$$M_{\text{gen}}(\omega_{\text{filt}}) = p \omega_{\text{filt}}^2 \quad (5.4.1)$$

und steigt somit mit der Rotordrehzahl an, bis die Nennleistung von 5 MW erreicht ist. Der proportionale Verstärkungsfaktor  $p = 0,0255764 \frac{\text{Nm}}{\text{min}^{-2}}$  wurde mittels einer Parametervariation und einer darauf basierenden Optimierung gewonnen [88, S. 19]. Der Anstellwinkel  $\beta$  wird im Bereich 2 konstant bei seinem Minimum von  $\beta_{\text{min}} = 0^\circ$  gehalten. Die WEA befindet sich im Bereich 3 der Regelung, falls die Nennleistung von 5 MW erreicht ist und somit keine zusätzliche Energie aus der Strömung gewonnen werden kann. Das Generatormoment  $M_{\text{gen}}$  kann entsprechend über die gefilterte Rotordrehzahl  $\omega_{\text{filt}}$  aus der Nennleistung berechnet werden. Dies erlaubt es, ein dynamisches System 2. Ordnung für die Drehzahlschwankungen des Rotors aufzusetzen. Darauf basierend kann eine PI Regelung (*proportional-integral control*) des Anstellwinkels hergeleitet werden, deren Verstärkungsfaktoren nicht konstant, sondern abhängig von dem Anstellwinkel  $\beta$  gewählt werden [88, S. 20 ff.].

Zwischen den Bereichen 1 und 2 sowie 2 und 3 werden zusätzlich Übergangsbereiche  $1^{1/2}$  und  $2^{1/2}$  definiert, durch die eine lineare Überführung der Stellgrößen zwischen den Bereichen sichergestellt wird. Abbildung 5.6 veranschaulicht die Regelvorschrift für das Generatormoment  $M_{\text{gen}}$ . Für eine detailliertere Diskussion der konventionellen Regelung einer WEA wird auf [88, S. 17 ff.] verwiesen.

Den Ergebnissen der konventionellen Regelung werden in den verbleibenden Abschnitten die Resultate der indirekten MPC gegenübergestellt. Dazu wird das Analyseszenario durch die Definition von entsprechenden Lastfällen vervollständigt. Jeder dieser Lastfälle entspricht dabei einem räumlich-verteilten zeitlich-variiierenden dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeld des auf die Anlage einströmenden Windes. Jeder Lastfall wird mittels des Softwarepaketes *TurbSim* des Instituts NREL gewonnen und zunächst für die Dauer von 660 s bestimmt [93].

Wie im weiteren Verlauf ersichtlich wird, unterscheidet sich die Rotordrehzahl  $\omega$  mitunter erheblich zwischen einer konventionellen Regelung und einer MPC für WEA. Zum Zwecke der

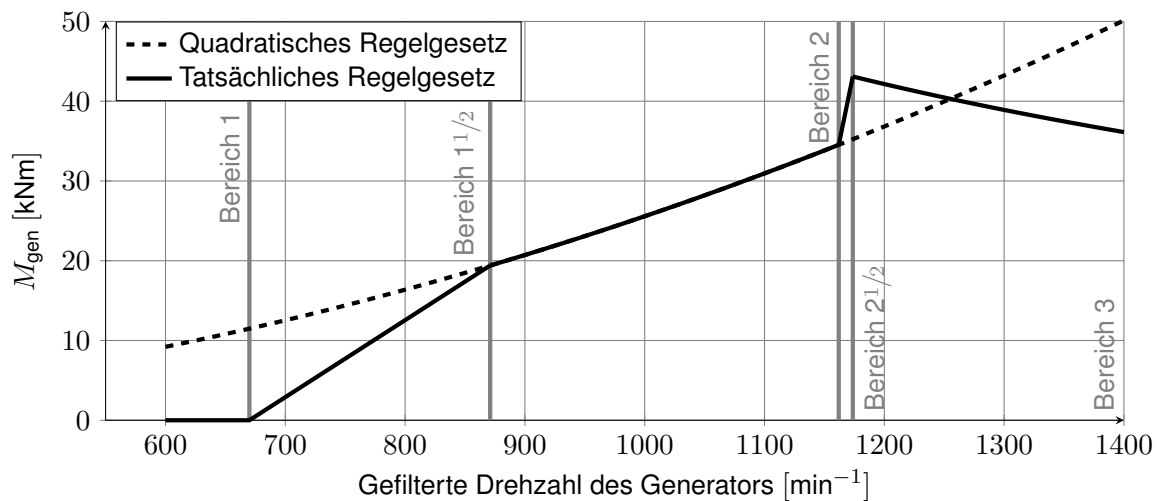


Abbildung 5.6: Generatormoment der konventionellen Regelung eine WEA

Vergleichbarkeit wird daher der Einfluss der Anfangsdrehzahl  $\omega(\iota_0)$  des Rotors zum Zeitpunkt  $\iota_0 = 0$  s in der Analyse ausgeschlossen, indem die ersten 60 s eines jeden Lastfalls verworfen werden und nur der Zeitraum  $[60 \text{ s}, 660 \text{ s}]$  herangezogen wird. Mittels der Parameter, welche in Tabelle 5.2 aufgeführt sind, wird jeder Lastfall entsprechend den Vorgaben der Norm IEC-61400-1 Edition 3 definiert [94]. Diese Lastfälle unterscheiden sich damit nur in der Vorgabe der mittleren vorherrschenden Windgeschwindigkeit  $\bar{V}_W$  und des entsprechenden Anfangswertes des Zufallszahlengenerators  $I_{\text{Zufall}}$  (engl. *random seed*).

### Lastfalldefinition 5.5

Betrachtet wird das Zeitfenster  $[0 \text{ s}, 660 \text{ s}]$ , wobei die ersten 60 s als Einschwingphase nicht in die Analyse einbezogen werden. Zusätzlich sei eine mittlere Windgeschwindigkeit  $\bar{V}_W$  auf Höhe der Rotornabe sowie eine Zufallszahl  $I_{\text{Zufall}} \in [-2147483648, 2147483647]$  gegeben. Ein Lastfall besteht aus den folgenden Komponenten.

- Zusammen mit den Parametern aus Tabelle 5.2 wird aus  $\bar{V}_W$  und  $I_{\text{Zufall}}$  mittels der Software *TurbSim* eine räumlich-verteilte zeitlich-variierende Windströmung  $\mathbf{V}_{W,3D}(\mathbf{y}, t) : \mathbb{R}^2 \times [0, 660] \rightarrow \mathbb{R}^3$  bestimmt, wobei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  einen räumlichen Punkt innerhalb der Rotorscheibe der WEA bezeichnet.
- Aus  $\mathbf{V}_{W,3D}(\mathbf{y}, t)$  wird mittels Gleichung (5.2.4) eine skalarwertige rotor-effektive Windgeschwindigkeit  $V_W(t)$  bestimmt, welche als Modell der Windvorhersage im Rahmen der Berechnung eines MPC-Schrittes herangezogen wird. An dieser Stelle wird eine Grenze der Modellierung im Rahmen der vorliegenden Arbeit gezogen. Es wird davon ausgegangen, dass in der Praxis eine solche skalarwertige rotor-effektive Windgeschwindigkeit mit ausreichender Qualität – beispielsweise mittels LIDAR – bestimmt werden kann.

- Für den Fall einer konventionellen Regelung wird die oben beschriebene und durch NREL bereitgestellte Regelung verwendet.
- Für den Fall der MPC wird das in Kapitel 4 vorgestellte Verfahren verwendet. Dabei wird gemäß zahlreicher Publikationen eine Regelschrittweite von 10 Hz – d.h.  $\Gamma_h = \iota_{i+1} - \iota_i = 100 \text{ ms}$  – und ein Zeithorizont von  $\mathcal{T}_h = t_f - t_0 = 10 \text{ s}$  verwendet [23][24][25][28].

Zum Abschluss dieses Abschnittes wird die Vorgehensweise für einen möglichst objektiven Vergleich der Energieausbeute beschrieben.

### **Kommentar 5.6**

Zum einen ist die Energieausbeute der jeweiligen Regelstrategie innerhalb der vorliegenden Arbeit eine signifikante Kenngröße zur Bewertung der Leistungsfähigkeit von MPC für WEA. Zum anderen kann die maximale Leistung von 5 MW sowohl bei der konventionellen Regelung als auch bei einer MPC nicht exakt eingehalten werden. Daher wurde die Beschränkung an die maximal abzugebende Leistung (5.3.7) mit der Relaxierung (5.3.11) aufgeweicht. Durch die Vorgabe eines Mittelwertes wird eine Verletzung der Beschränkung zugelassen, wodurch zeitweilig die elektrische Leistung oberhalb der Nennleistung liegt. Wie bereits bei der Beschreibung der Relaxierung erwähnt, wird die mittlere zulässige Verletzung derart gewählt, dass MPC weder bevor- noch benachteiligt ist. Bei einer Vielzahl an Lastfällen kann dies jedoch nur im Mittel geschehen, was bei einem Vergleich der abgegebenen Leistung zu berücksichtigen ist.

Eines der wichtigsten Argumente für den Einsatz von MPC im Allgemeinen ist dessen Fähigkeit, Beschränkungen bei der Berechnung eines Stellgrößensignals explizit zu berücksichtigen. Bei der MPC von WEA führt dies dazu, dass die aus der Windströmung gewonnene Energie nicht immer direkt über das Generatormoment in elektrische Energie umgewandelt wird. Wie im folgenden Abschnitt 5.5 diskutiert wird, nutzt MPC vielmehr als impliziter Bestandteil der Optimierung die verhältnismäßig hohe Trägheit des Rotors, um die extrahierte Energie auch in Form von kinetischer Energie zwischenzuspeichern. Zusätzlich weicht die durch die Regelung resultierende Rotordrehzahl  $\omega$  mitunter erheblich zwischen der konventionellen und der MPC ab. Da beiden Reglern eine Einschwingphase von 60 s zugestanden wird, unterscheidet sich somit die Rotordrehzahl zum Zeitpunkt des Beginns der Analyse  $\iota = 60 \text{ s}$ . Daher wird bei jedem Vergleich der Energieausbeute die kinetische Energie der Rotationsbewegung, die zum Anfangszeitpunkt der Analyse bei  $\iota = 60 \text{ s}$  vorliegt, von der Energie zum Endzeitpunkt  $\iota = 660 \text{ s}$  abgezogen, wodurch nur die tatsächlich aus dem Wind gewonnene Energie berücksichtigt wird.

RandSeed1: $I_{\text{Zufall}}$	RandSeed2: RANLUX	AnalysisTime: 660 s
TimeStep: 250 ms	TurbModel: IECKAI	IECStandard: 1-Ed3
IECTurbc: A	IEC_WindType: NTM	URef: $\bar{V}_W$

Tabelle 5.2: Parametrierung zur Lastfalldefinition mittels TurbSim

## 5.5 Reine energie-optimale modellprädiktive Regelung

Während der Herleitung und Diskussion der Problemstellung 5.4 wurde die Schädigung des Triebstranges nicht explizit in Form einer Nebenbedingung berücksichtigt. Auch in die Zielfunktion (5.3.19) fließen zusätzlich zur extrahierten Energie nur die beiden Terme zur Regularisierung der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  ein. Daher wird im Folgenden die MPC einer WEA als *rein energie-optimal* bezeichnet, falls Problem 5.4 zur Formulierung des jeweiligen OSP herangezogen wird. Für diese Form – mit eventuell abweichenden Regularisierungstermen – ist aus zahlreichen Publikationen bereits bekannt, dass MPC die Energieausbeute je nach Lastfall in der Größenordnung von 1 % bis 1,5 % im Vergleich zu einer konventionellen Regelung steigert [23][54].

Zur weiteren Diskussion wird zunächst exemplarisch ein gemäß Definition 5.5 gewonnener Lastfall mit einer mittleren Windgeschwindigkeit auf Höhe der Rotornabe von  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $I_{\text{Zufall}} = 2$  betrachtet. In Abbildung 5.7 ist die axiale Komponente der vektorwertigen Windgeschwindigkeit  $\mathbf{V}_{W,3D}(\mathbf{y}, t)$  neben der mit ihr assoziierten skalarwertigen rotor-effektiven Geschwindigkeit  $V_W(t)$  aufgetragen. Letztere wird aus Gleichung (5.2.4) gewonnen und entspricht einer über die Rotorfläche konstanten Windgeschwindigkeit mit äquivalenter Leistung, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.2. Da  $\mathbf{V}_{W,3D}(\mathbf{y}, t)$  über die Rotorfläche stark variieren kann, wird dadurch bereits in weiten Bereichen eine Glättung der rotor-effektiven Geschwindigkeit  $V_W(t)$  erreicht.

In Abbildung 5.8 sind die Ergebnisse der rein energie-optimalen MPC in blau denen der konventionellen Regelung in schwarz gegenübergestellt. Zusätzlich ist in jedem Graphen die rotor-effektive Windgeschwindigkeit  $V_W(t)$  in grün aufgetragen. Der oberste Plot veranschaulicht die Rotordrehzahlen, welche jeweils am Generator gemessen und mittels des Übersetzungsverhältnisses  $g_{\text{ratio}}$  des Getriebes zurück gerechnet wurden. Gut zu erkennen ist, dass die durch eine MPC resultierende Drehzahl deutlich von der einer konventionellen Regelung abweicht. Die maximale Rotordrehzahl von  $\omega_{\text{max}} = 12,1 \text{ min}^{-1}$  wird durchweg schon bei niedrigeren Windgeschwindigkeiten angesteuert, als das im Fall der konventionellen Regelung geschieht. Wird dieser Drehzahlbereich verlassen, zeichnet sich eine reine energie-optimale MPC durch hohe Verzögerungen und Beschleunigungen des Rotors aus, wie den grau hinterlegten Zeitbereichen zum Index I entnommen werden kann. Dabei fällt in diesen beiden Bereichen die Drehzahl auf ein der konventionellen Regelung vergleichbares Niveau

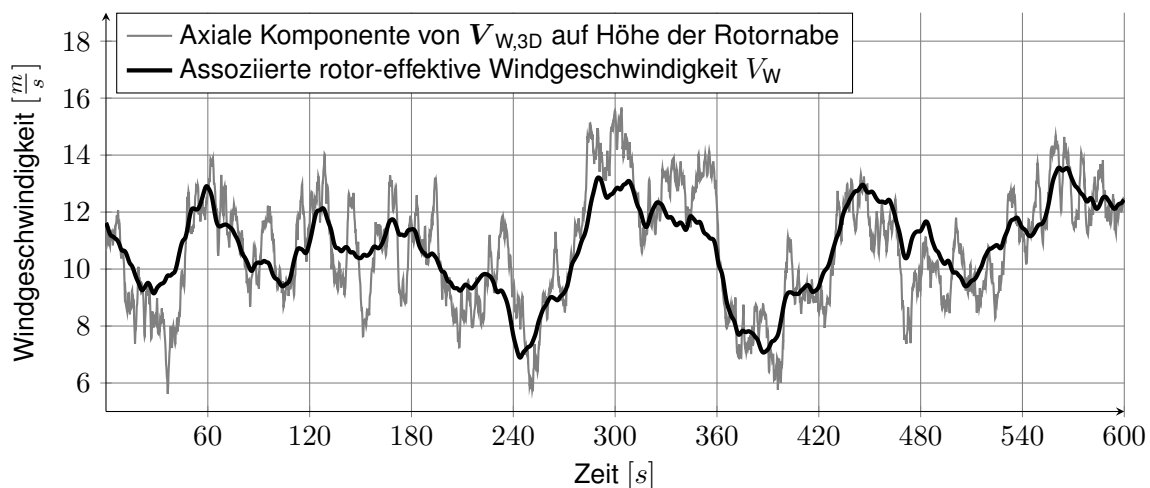


Abbildung 5.7: Profil der Windgeschwindigkeit zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $I_{\text{Zufall}} = 2$

ab. Gleichzeitig ist im zweiten Plot zu beobachten, dass dies mit einem signifikanten Rückgang des Generatormomentes einhergeht. Da die konventionelle Regelung das Generatormoment über das Regelgesetz (5.4.1) in einen direkten Zusammenhang mit der Drehzahl setzt, weist das Generatormoment sein lokales Minimum zum gleichen Zeitpunkt auf wie die Rotordrehzahl. Die MPC lässt dagegen das Generatormoment weiter abfallen, während die Rotordrehzahl bereits wieder zu nimmt. MPC setzt somit das Generatormoment *aktiv* dazu ein, die Rotordrehzahl möglichst lange hoch zu halten und nach erneutem Auffrischen des Windes wieder schnell auf ein entsprechendes Niveau anzuheben. Dies geht zwar kurzzeitig mit einem geringeren Ertrag an elektrischer Energieausbeute einher, wird aber über die erhöhte Beschleunigung des Rotors in Bereichen höherer Effizienz des aerodynamischen Leistungsbeiwertes  $C_P$  kompensiert. Der aktive Einsatz des Generatormomentes zum Ent- und Beschleunigen des Rotors legt jedoch bereits die Vermutung nahe, dass es zu Hysterese mit hohen Ausschlagsamplituden und geringen Schwingungszahlen kommt. Darauf wird im späteren Verlauf der Diskussion detailliert eingegangen. Diese Amplituden spielen im Rahmen einer Untersuchung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges eine signifikante Rolle, vgl. Kapitel 3.

Eine ähnliche Charakteristik ist in den Zeitbereichen II zu erkennen, in denen es zu einem kurzzeitigen Einbruch der Windgeschwindigkeit auf hohem Niveau kommt. Das Generatormoment fällt bei einer MPC unter das Niveau einer konventionellen Regelung. Im Unterschied zu den Zeitbereichen I fällt die Drehzahl jedoch nicht vergleichbar ab. MPC setzt auch hier das Generatormoment aktiv dazu ein, die Drehzahl möglichst hoch zu halten. Wie dem dritten Graphen entnommen werden kann, geht dies jedoch kaum zu Lasten einer möglichst hohen Energieausbeute. Vielmehr kann die extrahierte Leistung bereits früher wieder angehoben werden, da ein Beschleunigen des Rotors nur in geringerem Maße notwendig ist. Dies wird in den rechten Randbereichen zum Index II des dritten Graphen ersichtlich. MPC nutzt die

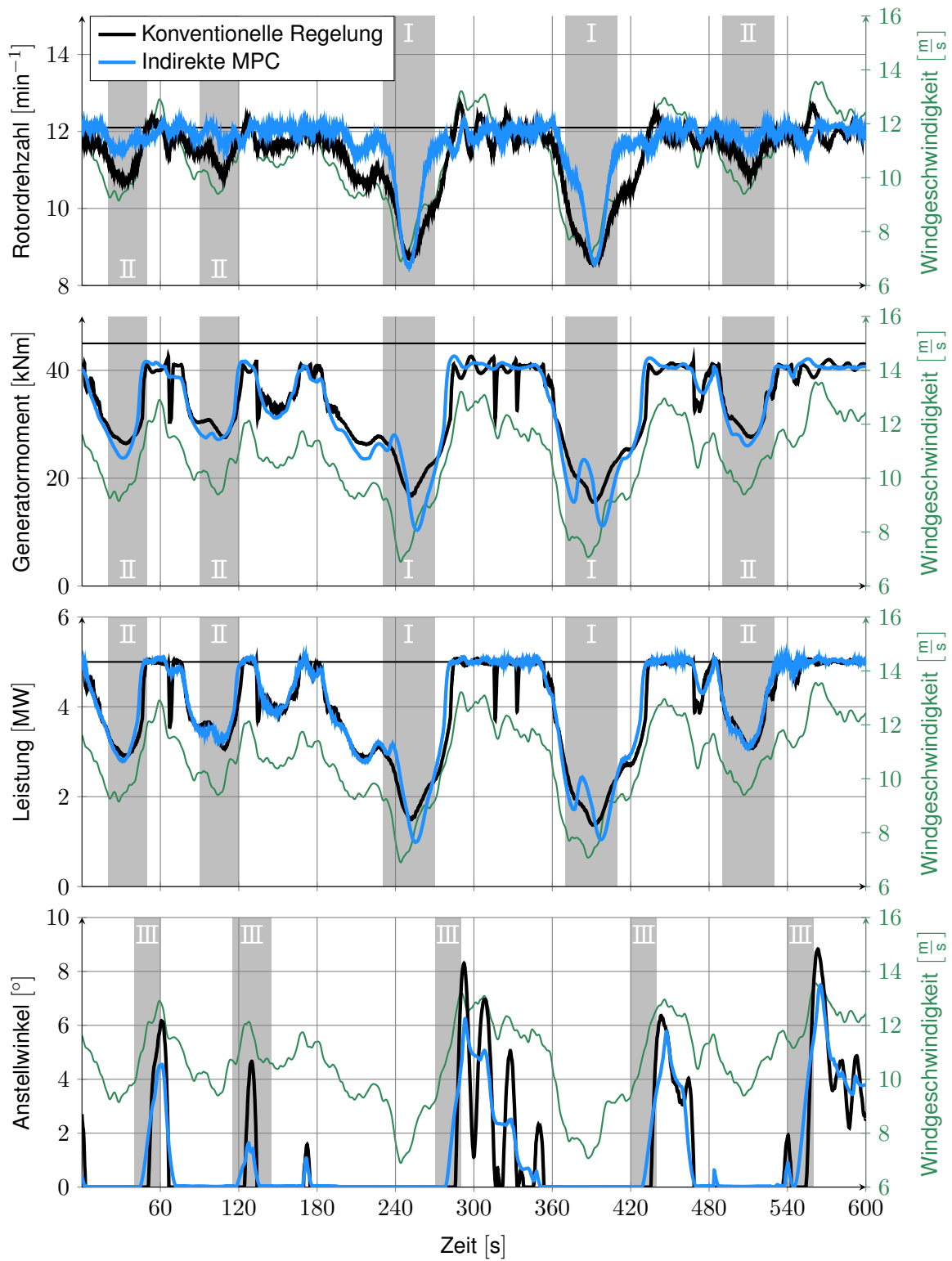


Abbildung 5.8: Simulationsergebnisse zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$  und  $I_{Zufall} = 2$

Information der Form des aerodynamischen Leistungsbeiwertes  $C_P$ , welcher verhältnismäßig flach im Bereich mittlerer bis höherer Windgeschwindigkeiten ist, vgl. Abbildung 5.4 (Seite 96). Diese Fluktuationen im Sinne einer Erhöhung der Energieausbeute auszusteuern, erklärt die höhere Effizienz von MPC von WEA.

Im Fall einer konventionellen Regelung besteht über das Regelgesetz (5.4.1) ein direkter, quadratisch proportionaler Zusammenhang zwischen Drehzahl und Generatormoment, welcher sich entsprechend auf deren Beschleunigungen übertragen lässt, vgl. Abbildung 5.6 (Seite 117). Dadurch wird das Generatormoment *passiv* der Drehzahl nachgeführt. Im Fall einer MPC ist dieser Zusammenhang aufgebrochen, so dass Generatormoment und Drehzahl nicht mehr in einem direkten Verhältnis zueinander stehen. Vielmehr sind sie indirekt über die (vereinfachte) mathematische Abbildung der WEA-Dynamik gekoppelt, wodurch das Generatormoment in den Bereichen nach einem kurzzeitigen Abflauen des Windes verhältnismäßig schnell erhöht werden kann. Diese, nicht mittelbare Abhängigkeit ermöglicht es der MPC, die Beschleunigung des Rotors aktiv durch das Generatormoment abzubremzen und somit weitere, zusätzliche Energie zu erzeugen. Seine Stärke spielt MPC insbesondere beim Auftreten von Windprofilen aus, welche das Erreichen der maximalen Rotordrehzahl bewirken. Dies geschieht beispielsweise im Anschluss an die mit I und II markierten Bereiche. Da die konventionelle Regelung nicht über die Information verfügt, dass der Wind die Anlage weiter beschleunigen wird, kommt es zum *Überschießen* der maximalen Drehzahl, worauf dann entsprechend mit Generatormoment und Anstellwinkel reagiert werden muss. Diese Information steht der MPC aufgrund ihres *modellprädiktiven* Charakters zur Verfügung, wodurch die Beschleunigung der Rotordrehzahl bis zum Erreichen der maximalen Drehzahl – oder der maximalen elektrischen Leistung – über das Generatormoment bereits reduziert wird. Es kommt zu einem *Gleiten* in die entsprechende Beschränkung. Letztendlich wird die in der Rotationsbewegung gespeicherte kinetische Energie vor der Beschränkung über das Generatormoment in elektrische Energie umgewandelt und muss daher nicht über die Steuerung des Anstellwinkels dissipiert werden. Denn, ist die Nennleistung erreicht, muss die Drehzahl über den Anstellwinkel der Rotorblätter begrenzt werden, was zu einer geringeren Leistungsaufnahme führt.

### **Kommentar 5.7**

*Zentrale Erkenntnis der vorangegangenen Diskussion ist, dass MPC die Energieausbeute unter anderem dann steigert, wenn es durch Abflauen des Windes zu einem Verlassen der Nennleistung bzw. durch Auffrischen des Windes zu einem Erreichen der Nennleistung kommt. Dazu wird das Generatormoment, im Gegensatz zur konventionellen Regelung, aktiv erhöht bzw. reduziert. Auf diese Weise kann MPC die kinetische Drehenergie des Rotors dazu einsetzen, Energie mechanisch kurzzeitig zwischenspeichern bzw. als elektrische Energie abzugeben. Daher ist der Regelbereich  $2^{1/2}$  einer der zentralen Diskussionspunkte der vorangegangenen und nachfolgenden Diskussion, vgl. Abbildung 5.6 (Seite 117).*



Insgesamt zeigt das Stellgrößensignal für das Moment am Generator im Fall einer MPC einen glatteren Verlauf, was allgemein auf die modellbasierte Regelung und die damit verbundene Windvorhersage zurückzuführen ist. Während die konventionelle Regelung nicht zwischen einem kurzzeitigen Ausschlag oder Einbruch und einem stetigen Auffrischen und Abflauen der Windgeschwindigkeit unterscheiden kann, steht diese Information der MPC zur Verfügung und kann implizit über die Dynamik des Modells in die Optimierung einfließen. Mittels einer äquivalenten Argumentation lässt sich die insgesamt ruhigere Vorgabe des Anstellwinkels im untersten Graphen erklären. Hier kann MPC zusätzlich noch seine Stärke einer *Multi-Input Multi-Output Regelung* ausspielen: Die Stellgrößen werden grundsätzlich nicht separat, sondern gemeinsam bestimmt, womit die in Abbildung 5.6 (Seite 117) dargestellten Regelbereiche einer konventionellen Regelung vollständig entfallen. Wechselwirkungen von Generatormoment und Anstellwinkel sind über das reduzierte dynamische Modell der WEA erfassbar und werden somit automatisch berücksichtigt. Dies wird insbesondere in den Zeitbereichen III ersichtlich, wenn MPC schon deutlich vor Erreichen der maximalen Drehzahl von  $\omega_{\max} = 12,1 \text{ min}^{-1}$  beginnt, den Anstellwinkel anzuheben. Es kann dem dritten Graphen entnommen werden, dass dies nicht mit einer Reduktion der extrahierten Leistung einhergeht.

Letztendlich kann durch die Anwendung von MPC für die in Abbildung 5.7 (Seite 120) dargestellte Windgeschwindigkeit eine Steigerung der Energieausbeute von 1,5% erzielt werden. Bei diesem Vergleich ist jedoch grundsätzlich kritisch zu berücksichtigen, dass beide Regler die Beschränkung auf die Nennleistung nicht exakt einhalten können und es daher zu einer Verletzung der maximalen Leistung von 5 MW kommt, vgl. Bemerkung 5.6. Im Fall der diskutierten MPC kann über den Parameter  $\bar{P}_{\min}$  aus (5.3.12) vorgegeben werden, wie stark die Beschränkung im Mittel verletzt werden darf. Prinzipiell bedeutet dies damit eine Unschärfe des Vergleichs einer konventionellen Regelung mit MPC. Um diesen Umstand aufzulösen und einen weitestgehend objektiven Vergleich zu ermöglichen, werden die Parameter einer physikalisch sinnvoll relaxierten Zustandsbeschränkung derart bestimmt, dass beiden Reglern über mehrere Lastfälle hinweg eine äquivalente Verletzung zugestanden wird. Für das exemplarisch betrachtete Windprofil kommt es jedoch im Fall der MPC zu einer geringfügig größeren Verletzung, was MPC entsprechend bevorteilt. Beschränkt man die Auswertung der Leistung für beide Regler jedoch auf  $P_{\max} = 5 \text{ MW}$  und der damit verbundenen, erzeugten elektrischen Energie, erhält man weiterhin ein Plus von 1,4% in der Energieausbeute.

Eine rein energie-optimale MPC kann jedoch in vielen Fällen mit einer deutlichen Reduktion der Lebensdauer des Triebstranges einhergehen, wie im Folgenden diskutiert wird. Zu deren Bewertung wird die Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  entsprechend Definition 3.10 herangezogen. Die dafür notwendige Beanspruchungs-Zeit-Funktion  $\tau(t)$  entspricht einer Torsions-Nennspannung (vgl. Definition 3.3) und resultiert aus dem Verlauf des Schnittmomentes  $\mathcal{M}_x(t)$  als Belastungs-Zeit-Funktion, welche zwischen Hauptwelle und Planetenträger der ersten Stufe gemessen wird. Die entsprechenden Kennwerte können der Tabelle 5.3 entnommen werden und sind typisch für einen auf Torsion beanspruchten Werkstoff Stahl [77, S. 55].

Festigkeitskennwert	Wert
Werkstoff	Stahl
Zugfestigkeit	1000 MPa
Wöhler Exponent	8
Wechselfestigkeit	300 MPa
Schwingspielzahl am Knickpunkt der Wöhlerlinie	$10^6$
Hauptwellenradius	500 mm

Tabelle 5.3: Werkstoffkennwerte für Beanspruchung auf Torsion zur Berechnung der Schädigungssumme, des Auslastungsgrades und der schädigungsäquivalenten Belastung

In Abbildung 5.9 sind vier Graphen dargestellt, welche die Schädigung durch eine konventionelle Regelung – linke Spalte – derjenigen einer reinen energie-optimalen MPC gegenüberstellen. Die beiden oberen Balkendiagramme leiten sich jeweils aus einer Rainflow-Matrix ab und visualisieren die Schwingspielzahlen des jeweiligen Beanspruchungskollektivs. Für eine Gegenüberstellung ist die Klassenanzahl und -breite in beiden Fällen identisch gewählt. Zu erkennen ist, dass das Gros der Schwingspiele zu verhältnismäßig geringen Amplituden auftritt, wobei jeweils zwei Klassen mit hoher Mittelspannung herausstechen. Zusätzlich zeigt eine rein energie-optimale MPC ein breiteres Spektrum an Mittelspannungen. Dies lässt sich auf die oben diskutierte *aktive* Steuerung des Generatormomentes zurückführen, vgl. Kommentar 5.7.

Ein Reduktion der Schwingspielzahlen der beiden in den oberen Graphen von Abbildung 5.9 dunkelgrau dargestellten Klassen führt jedoch nicht zu einer signifikanten Reduktion der Schädigung. Um dies zu visualisieren, sind in den beiden unteren Graphen die jeweiligen Werte der Schädigungsfunktion  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_i)$  gemäß Definition 3.11 aufgetragen. Für den Vergleich zur jeweiligen Rainflow-Matrix in den beiden oberen Graphen wurde zu jeder Klasse mit Amplitude  $\tau_a$  und Mittelspannung  $\tau_m$  entsprechend der Beobachtung 3.6 eine äquivalente, mittelspannungsfreie Ausschlagsamplitude  $\tau_{wk}$  bestimmt, welche sowohl zur Berechnung der Schädigungen  $\mathcal{D}_i$  einer Klasse als auch zur Bestimmung der Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  des Kollektivs herangezogen wurde. Damit entsprechen die Werte der z-Achse der Schädigungsfunktion  $\mathcal{S}(\mathcal{D}_i)$  in den beiden unteren Graphen der Abbildung 5.9 bereits dem, mittelspannungsfreien, Lastkollektiv. Sie sind jedoch nicht ihrer jeweiligen Ausschlagsamplituden-Klasse aufsummiert, sondern nach wie vor ihren ursprünglichen Klassen zugeordnet.

Aus Abbildung 5.9 lassen sich zwei für die weitere Diskussion wichtige Aussagen ableiten.

1. Die Anwendung von MPC führt zu einer deutlichen Erhöhung der Schädigungssumme  $\mathcal{D}$ , da sich die Klasse der maximalen Ausschlagsamplitude von 7,8 MPa auf 9,1 MPa erhöht. Mit einem Wöhler Exponenten von  $k = 8$  fällt die Anzahl der ertragbaren Schwingspiele  $N_\tau(\tau_{wk})$  mit steigender Ausschlagsamplitude  $\tau_{wk}$  stark ab, vgl.

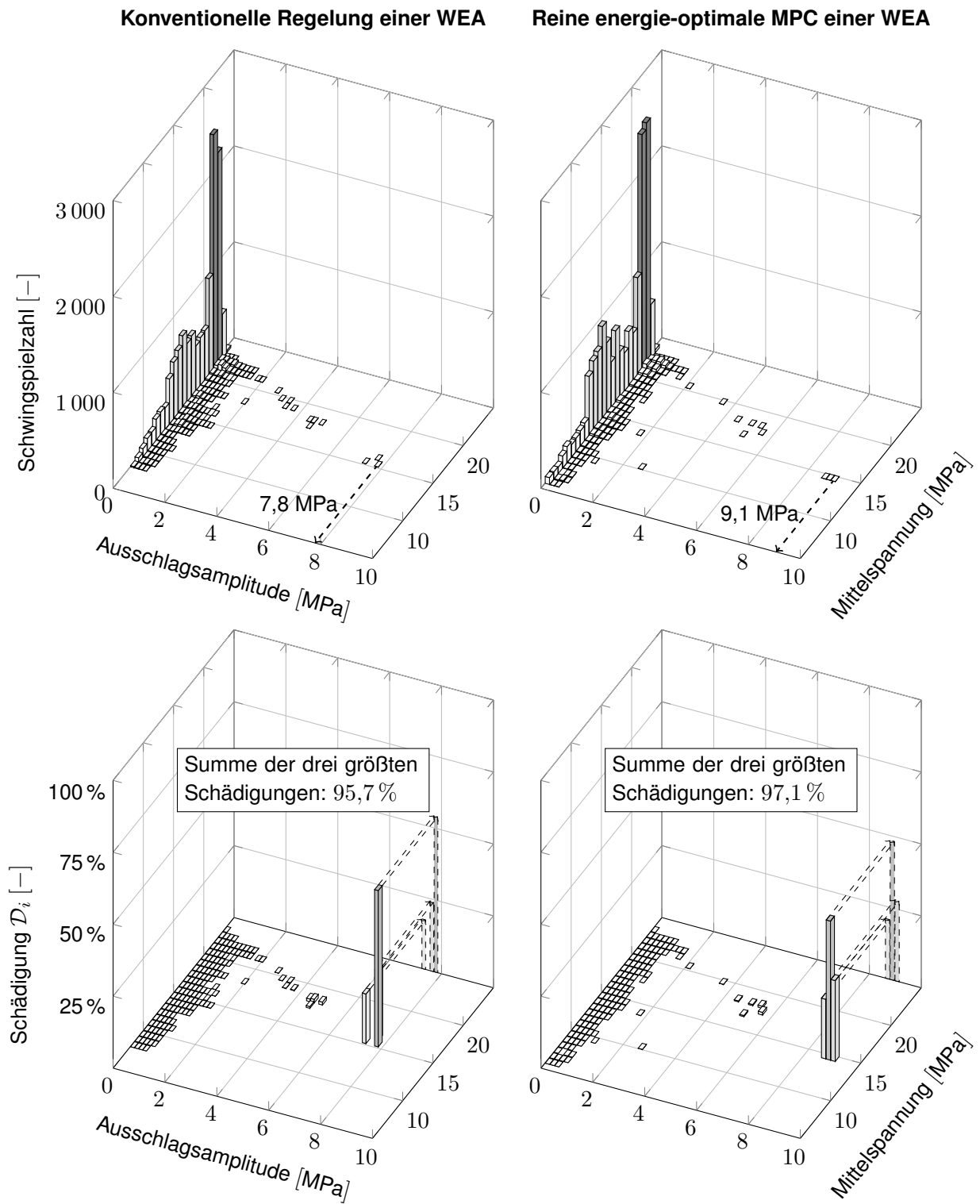


Abbildung 5.9: Beanspruchungskollektiv und Schädigung der einzelnen Stufen des Lastfalls mit  $\bar{V}_w = 11 \frac{m}{s}$  und  $I_{Zufall} = 2$

Gleichung (3.2.1). Für den exemplarisch betrachteten Lastfall erhöht sich die Schädigungssumme unter Anwendung einer rein energie-optimalen MPC auf 287,2 % des ursprünglichen Wertes. Dies entspricht einer um 65 % verringerten Anzahl ertragbarer Schwingspiele des der Schädigung äquivalenten Einstufen-Kollektives unter dem oben genannten Wöhler-Exponenten und stellt damit eine für den wirtschaftlichen Betrieb einer WEA inakzeptable Reduktion der Lebensdauer dar.

2. Die signifikante Erhöhung der Schädigung ist auf deutlich größere Ausschlagsamplituden zu einer geringen Anzahl von Schwingspielen zurückzuführen. In Fall beider Regler addieren sich die Anteile der drei Klassen zu den höchsten Ausschlagsamplituden, unabhängig von der Mittelspannung, auf über 95 % der gesamten Schädigungssumme  $\mathcal{D}$ . Daher muss die MPC um eine Nebenbedingung erweitert werden, die es erlaubt, diese maximale Ausschlagsamplitude zu reduzieren, um letztendlich die Schädigungssumme zu begrenzen.

## 5.6 Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges

Ziel ist es, Bedingungen abzuleiten, die es einer MPC von WEA erlauben, nach wie vor eine Optimierung der Energieausbeute – unter zusätzlicher Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges – durchzuführen. Wie bereits detailliert diskutiert wurde, besitzt eine prädiktive Regelung die Fähigkeit, kritische Situationen vorherzusagen und entsprechend auszusteuern. Man stelle sich einen Rennradfahrer vor, der sich einer Kuppe nähert. Sein Ziel ist es, in möglichst kurzer Zeit eine Strecke, auf der diese Kuppe liegt, abzufahren. Ist seine Kondition – im übertragenen Sinn seine Beanspruchbarkeit – keiner Beschränkung unterworfen, kann er durchgehend mit der ihm zur Verfügung stehenden maximalen Kraft in die Pedale treten.



In der Regel muss ein Sportler jedoch seine Kondition möglichst geschickt einteilen. Eine klassische Rückkopplungssteuerung berücksichtigt nicht die Dynamik und bestimmt die Kraft, welche der Sportler für den Anstieg aufbringen muss, in Abhängigkeit gemessener Systemzustände, z. B. Geschwindigkeit oder aktuelle Steigung. Da der Rennradfahrer zum einen die Kuppe visuell erfasst und die Strecke ihm eventuell zusätzlich bereits bekannt ist, er zum anderen die Systemdynamik aufgrund seines Trainings sehr genau abschätzen kann, handelt er ähnlich einer prädiktiven Regelung. Durch den Anstieg baut er potentielle Energie auf, die er

bei der Abfahrt nutzen kann, um seine Kondition zu schonen. Während des Anstieges kann er gleichzeitig seine kinetische Energie einsetzen, um seine Kraft bereits vor der Kuppe zu reduzieren. Wie im Folgenden diskutiert wird, reduziert MPC die Schädigung des Triebstranges in ähnlicher Weise. Dabei werden für die Lebensdauer kritische Situationen erkannt und mittels der in der Drehbewegung des Rotors, welcher durch die Rotorblätter eine verhältnismäßig hohe Trägheit aufweist, gespeicherten kinetischen Energie angesteuert. Dabei geht diese Strategie nicht als Heuristik in die Regelung ein, sondern ist das Ergebnis einer MPC.

In Abschnitt 5.5 wurden die maximalen Ausschlagsamplituden des Beanspruchungs-Zeit-Signales  $\tau(t)$  als kritische Größen identifiziert. Ziel ist es, der MPC zu ermöglichen, diese zu messen und im Anschluss zu reduzieren. Wie zuvor werde exemplarisch der Lastfall zu  $\bar{V}_w = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $I_{\text{Zufall}} = 2$  betrachtet, dessen axiale Komponenten des Windgeschwindigkeitsfeldes in Abbildung 5.7 (Seite 120) dargestellt sind. In Abbildung 5.10 ist das Schnittmoment an der Hauptwelle und dem Planetenträger der ersten Getriebestufe in schwarz dem durch MPC applizierten Generatormoment in blau gegenübergestellt. Des Weiteren ist die auf das Schnittmoment zurückgerechnete Spannungsamplitude der Klasse mit der höchsten Ausschlagsamplitude aufgetragen, vgl. Abbildung 5.9.

Zu erkennen ist, dass die Klassen mit den höchsten Schädigungen  $\mathcal{D}_i$  auf Zeiträumen entstehen, die den Vorhersagehorizont der MPC von  $\mathcal{T}_h = 10$  s um ein Vielfaches übersteigen. Eine Verlängerung von  $\mathcal{T}_h$  über 10 s hinaus ist kritisch zu bewerten. Die Vorhersage der Windgeschwindigkeit und der damit assoziierten Dynamik ist mit zunehmenden Unsicherheiten verbunden. Zusätzlich steigt der numerische Aufwand zur Bestimmung einer Lösung der OSP in jedem Macro-Schritt der MPC. Insgesamt muss daher in der Regel davon ausgegangen werden, dass die für die Betriebsfestigkeit kritischen Zyklen als Ergebnis des Rainflow-Zählverfahrens auf Zeitskalen entstehen, die eine hinreichend genaue Vorhersage der Dynamik der WEA nicht mehr zulassen.

Daher baut eine Abschätzung der maximalen Ausschlagsamplitude ausschließlich auf dem bereits vergangenen Verlauf des Generatormomentes  $x_2(\ell)$  auf. Diese findet folgendermaßen statt.

- Das Referenzsignal des Generatormomentes als Ergebnis einer MPC wird über die Regelschritte  $\ell_i$  hinweg vermerkt.
- Es sei  $\Theta > 0$  die Länge des Zeitraums, der zur Abschätzung der maximalen Ausschlagsamplitude herangezogen wird. Auf  $[\ell_i - \Theta, \ell_i]$  wird daher zu jedem  $\ell_i$  der Macro-Diskretisierung das maximale Generatormoment  $x_{2,max,\Theta}$  und das minimale Generatormoment  $x_{2,min,\Theta}$  bestimmt. Bei der Wahl von  $\Theta$  gilt es Folgendes zu beachten.
  - Ein kleiner Wert von beispielsweise  $\Theta = 10$  s lässt keine ausreichende Abschätzung der Ausschlagsamplitude zu. Wie Abbildung 5.10 entnommen werden kann,

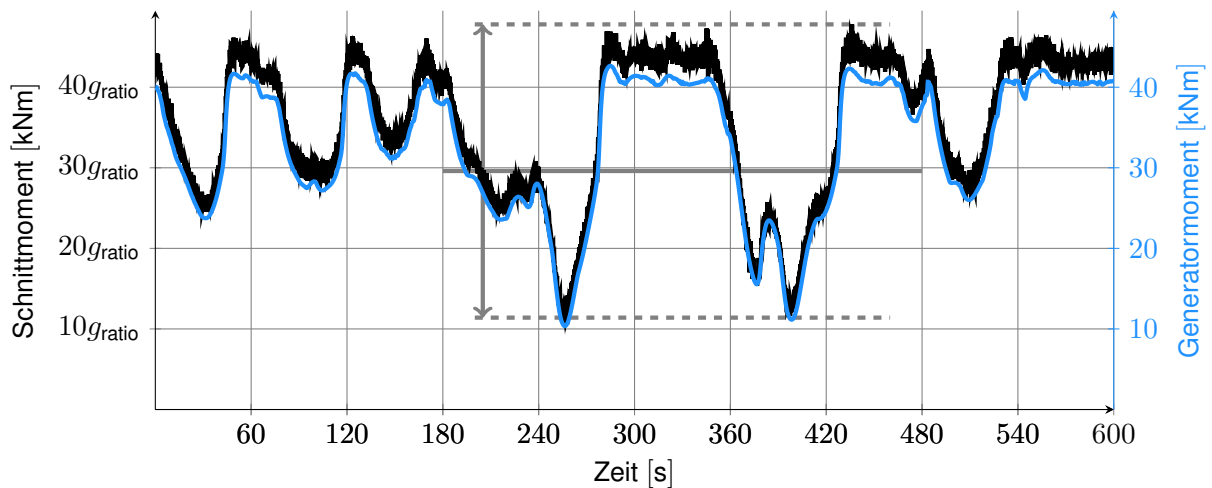


Abbildung 5.10: Generatormoment und Schnittmoment an der Hauptwelle und dem Planetenträger der ersten Getriebestufe zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $I_{\text{Zufall}} = 2$

entsteht der entsprechende Halbzyklus der Rainflow-Matrix auf einem Zeitraum von ca. 180 s.

- Ein zu großer Wert von  $\Theta$  führt zu einer über Gebühr berücksichtigten Ausschlagsamplitude. Im äußersten Grenzfall würde das Generatormoment nahezu konstant gehalten werden. Die Schädigung des Triebstranges kann zwar signifikant reduziert werden. Damit einher geht jedoch auch eine deutliche und inakzeptable Reduktion der Energieausbeute. Dies lässt sich auf die Charakteristik des aerodynamischen Leistungsbeiwertes  $C_P(x_1, \bar{V}_W(t), x_3)$  zurückzuführen, vgl. Abbildung 5.4 (Seite 96). In der Regel werden WEA heute mit einer variablen Drehzahl  $x_1$  versehen, damit diese jeweils im Bereich ihres größtmöglichen Wirkungsgrades arbeiten. Dieser variiert jedoch erheblich mit der Windgeschwindigkeit. Gleichzeitig ist das aerodynamische Drehmoment direkt kubisch proportional zu  $\bar{V}_W$ , vgl. Gleichung (5.2.2). Flaut der Wind ab, muss das Generatormoment entsprechend zurückgenommen werden, um ein zu starkes Absinken der Rotorgeschwindigkeit zu verhindern. Entsprechend muss bei einem Auffrischen des Windes das Generatormoment erhöht werden. Unterbindet ein zu großer Wert für  $\Theta$  Variationen des Drehmomentes über Gebühr, ist die WEA zu hohen Drehzahlschwankungen unterworfen, was ihre Energieausbeute erheblich reduziert.
- Mit  $\Theta = 100$  s wird ein Kompromiss dieser sich konkurrierenden Ziele gefunden. Auf diesem Fenster kann zwar auch die in Abbildung 5.10 dargestellte maximale Ausschlagsamplitude nicht vollständig abgeschätzt werden. Jedoch entstehen ähnlich große Amplituden auch auf kürzen Zeiträumen. Diese können, wie wei-

ter unten genauer diskutiert wird, durch eine MPC dementsprechend angesteuert und damit in ihrer Höhe reduziert werden, ohne die Energieausbeute unter das Niveau der konventionellen Regelung zu drücken.

- Dem der MPC der WEA zugrundeliegenden OSP 5.4 wird ähnlich der Terme zur Regularisierung (vgl. Abschnitt 5.3.3) eine weitere Nebenbedingung hinzugefügt.
  - Wird das Generatormoment  $x_{2,max,\Theta}$  auf dem Vorhersagehorizont  $[l_i, l_i + \mathcal{T}_h(l_i)]$  überschritten, soll dies die berechnete Energieausbeute *bestrafen*.
  - Wird das Generatormoment  $x_{2,min,\Theta}$  auf dem Vorhersagehorizont  $[l_i, l_i + \mathcal{T}_h(l_i)]$  unterschritten, soll dies die berechnete Energieausbeute ebenfalls *bestrafen*.

Somit wird, im Gegensatz zum Relaxieren der Zustandsbeschränkungen aus Abschnitt 4.4.1, auf den klassischen Bestrafungs-Ansatz der Optimierung zurückgegriffen.

- Tritt eine damit verbundene Bestrafung der Energieausbeute auf dem Vorhersagehorizont  $[l_i, l_i + \mathcal{T}_h(l_i)]$  erst dann in Kraft, falls das Generatormoment  $x_2(t)$  über  $x_{2,max,\Theta}$  bzw. unter  $x_{2,min,\Theta}$  liegt, wird letztendlich dennoch die maximale Ausschlagsamplitude erhöht. Dies würde einen entsprechend großen Bestrafungskoeffizienten  $c_\Psi$  erfordern, um einen zu großen Anstieg der maximalen Ausschlagsamplitude zu verhindern. Zielführender ist es, den Einfluss der Beschränkung zur Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit schon vor Erreichen der ursprünglichen maximalen Ausschlagsamplitude einsetzen zu lassen. Daher werden  $x_{2,max,\Theta}$  und  $x_{2,min,\Theta}$  im Folgenden um 10 % der vollen Generatormoment-Spanne von  $x_{2,max} - x_{2,min}$  verringert bzw. erhöht.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{2,max,\Theta} &:= x_{2,max,\Theta} - 0,1 (x_{2,max} - x_{2,min}) \\ \hat{x}_{2,min,\Theta} &:= x_{2,min,\Theta} + 0,1 (x_{2,max} - x_{2,min})\end{aligned}$$

- Zuletzt gilt es, Schwankungen der Generatormoment-Amplituden im mittleren Spektrum nach wie vor ungehindert zuzulassen. Diese tragen im Verhältnis gering zur Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  bei, vgl. Abbildung 5.9 (Seite 125) unten. Gleichzeitig spielen diese eine bedeutende Rolle in der Effizienz des Energiegewinns. Eine Reduktion dieser Amplituden würde direkt zu einer Reduktion der Energieausbeute führen, so dass bei vergleichbarer Schädigung diese unter das Niveau der konventionellen Regelung fällt. Letztendlich führt folgende Nebenbedingung zu der gewünschten Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit, wobei nach wie vor die Steigerung der Energieausbeute vorrangiges Ziel der MPC von WEA ist.

$$\Psi(x_2) := \begin{cases} \frac{1}{3} (x_2 - \hat{x}_{2,max,\Theta})^3 & \text{falls } x_2 > x_{2,max,\Theta} \\ \frac{1}{3} (\hat{x}_{2,min,\Theta} - x_2)^3 & \text{falls } x_2 < x_{2,min,\Theta} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Zuletzt wird der Term  $c_\Psi \Psi(x_2)$  dem Zielfunktional (5.3.19) hinzugefügt. Per Konstruktion gilt grundsätzlich  $\Psi(x_2)(t) \geq 0$ . Wird der Koeffizient  $c_\Psi$  positiv gewählt, kommt es damit zu einer Bestrafung der Energieausbeute bei größer werdender maximaler Ausschlagsamplitude.

Das vollständige OSP, welches einer MPC von WEA unter Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit des Triebstranges zugrunde liegt, lautet nun wie folgt.

### Problem 5.8

$$\min_{|u_1| \leq u_{1,max}, |u_2| \leq u_{2,max}} \left[ -\frac{x_1^2(t_f)}{2} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ x_1 x_2 + \frac{c_{u_1}}{2} (\bar{u}_1 - u_1)^2 + \frac{c_{u_2}}{2} u_2^2 + c_\Psi \Psi(x_2) \right] dt \right]$$

$$\dot{x}_1 = f(x_1, V_W(t), x_3) + x_2, \quad x_1(t_0) = x_{1,0}$$

$$\dot{x}_2 = u_1, \quad x_2(t_0) = x_{2,0}$$

$$\dot{x}_3 = u_2, \quad x_3(t_0) = x_{3,0}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{3} \chi_{[x_1 - \hat{x}_{1,max}]} (x_1 - \hat{x}_{1,max})^3 \quad x_4(t_0) = 0, \quad \frac{\sqrt[3]{x_4(t_f)}}{t_f - t_0} - (x_{1,max} - \hat{x}_{1,max}) \leq 0$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{3} \chi_{[\hat{P}_{min} - x_1 x_2]} (\hat{P}_{min} - x_1 x_2)^3 \quad x_5(t_0) = 0 \quad \frac{\sqrt[3]{x_5(t_f)}}{t_f - t_0} - (\hat{P}_{min} - \bar{P}_{min}) \leq 0$$

$$x_{2,min} \leq x_2 \leq x_{2,max}$$

$$x_{3,min} \leq x_3 \leq x_{3,max}$$

$$\Psi(x_2) := \begin{cases} \frac{1}{3} (x_2 - \hat{x}_{2,max,\Theta})^3 & \text{falls } x_2 > x_{2,max,\Theta} \\ \frac{1}{3} (\hat{x}_{2,min,\Theta} - x_2)^3 & \text{falls } x_2 < x_{2,min,\Theta} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (5.6.1)$$

Als bisher durch die Aufgabenstellung unbestimmte Parameter treten dabei die Koeffizienten  $c_{u_1}$ ,  $c_{u_2}$  und  $c_\Psi$  auf. Für eine reine energie-optimale MPC, wie sie in Abschnitt 5.5 diskutiert wurde, gilt  $c_\Psi = 0$ . Die Koeffizienten zur Regularisierung  $c_{u_1}$  und  $c_{u_2}$  werden dann derart gewählt, dass ihr Einfluss auf die Energieausbeute möglichst gering, eine stabile numerische Lösung jedoch nach wie vor möglich ist, vgl. Abschnitt 5.3.3. Mit  $c_{u_1} = 200$  und  $c_{u_2} = 400$  sind diese dementsprechend für die 5-MW Referenzanlage bestimmt worden.



Für eine MPC von WEA unter Berücksichtigung der Betriebsfestigkeit kann die Wahl der Koeffizienten  $c_{u_1}$  und  $c_{u_2}$  als Konfiguration des Regelsystems herangezogen werden.  $c_{u_1}$  erlaubt eine Glättung der Generatormomentrate  $u_1(t)$  und  $c_{u_2}$  eine Glättung der Anstellwinkelrate  $u_2(t)$  auf dem Vorhersagehorizont  $t \in [l_i, l_i + \mathcal{T}_h(l_i)]$ . Dabei zeigt  $u_2(t)$  in dem Frequenzbereich, welcher durch eine MPC maßgeblich beeinflusst wird und bei verhältnismäßig niedrigen Frequenzen liegt, erwartungsgemäß einen untergeordneten Einfluss auf die Betriebsfestigkeit. Daher kann mit  $c_{u_2} \equiv 400$  der Wert aus der reinen energie-optimalen MPC übernommen werden, welcher unter oben genannten Kriterien bestimmt wurde.

Um diesen Abschnitt abzuschließen, wird die Wirkung des Terms (5.6.1) auf den bereits mehrfach exemplarisch betrachteten Lastfall diskutiert. Dazu wird auf die Ergebnisse des nächsten Abschnittes 5.7 vorgegriffen, in dem die Wahl der Koeffizienten in Abhängigkeit von ökonomischen Anforderungen und der sich in der Regel variierenden Betriebs-Lastfällen beschrieben wird. Daher seien  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$  derart gewählt, dass MPC auf Basis des Problems 5.8 zu einer mit der konventionellen Regelung vergleichbaren Schädigung führt. Im Unterschied zur reinen energie-optimalen Konfiguration wird dann von einer *schädigungs-neutralen* Konfiguration der MPC gesprochen.

In Abbildung 5.11 ist der Verlauf des Generatormomentes  $x_2(t)$  unter Berücksichtigung der Schädigung (schwarz) zusammen mit dem Verlauf der Grenzen  $x_{2,max,\Theta}(t)$  (hellblau) und  $x_{2,min,\Theta}(t)$  (violett) aufgetragen. Die Bereiche, in denen eine Bestrafung eines weiter ansteigenden bzw. abfallenden Drehmomentes wirkt, sind jeweils farbig hinterlegt. In weißen Abschnitten kommt es zu keiner – zur Begrenzung der Schädigung bedingten – Einschränkung des Drehmoments bzw. seiner zeitlichen Änderung, womit dieses optimal bezüglich der Energiegewinnung variieren kann. Zu beachten ist hierbei, dass die Grenzen  $x_{2,max,\Theta}(t)$  und  $x_{2,min,\Theta}(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  jeweils auf dem gesamten Vorhersagehorizont  $[t, t + \mathcal{T}_h(t)]$  gelten. Mit einer Erhöhung der Schädigungssumme von lediglich 2,9% im Vergleich zur konventionellen Regelung bewirkt der Term (5.6.1) eine deutliche Reduktion der Schädigung des Triebstranges gegenüber einer reinen energie-optimalen MPC. Bei entsprechender Wahl des Koeffizienten  $c_{\Psi}$  liegt diese auf einem zur konventionellen Regelung vergleichbaren Niveau. Gleichzeitig kann eine MPC die Energieausbeute, trotz Berücksichtigung der Schädigung, weiterhin um zumindest 1,3% steigern. Wie im vorangegangenen Abschnitt 5.5 beschrieben wurde, liegt dieser Wert bei einer reinen energie-optimalen MPC bei 1,5%, wobei sich dabei die Schädigungssumme auf 287,2% des ursprünglichen Wertes erhöht.

Dieses Ergebnis ist auf ein verändertes Generatormomentensignal in den farbig markierten Bereichen der Abbildung 5.11 zurückzuführen. Parallel zum Generatormoment  $x_2(t)$  einer schädigungs-neutralen MPC ist das Moment der reinen energie-optimalen MPC schwarz gestrichelt aufgetragen. Zu erkennen ist, dass sich die Abweichungen zwischen den beiden Generatormoment-Signalen vorwiegend auf den violetten Bereich unterhalb von  $x_{2,min,\Theta}(t)$  beschränken. Das Moment der schädigungs-neutralen MPC fällt nicht derart stark ab wie

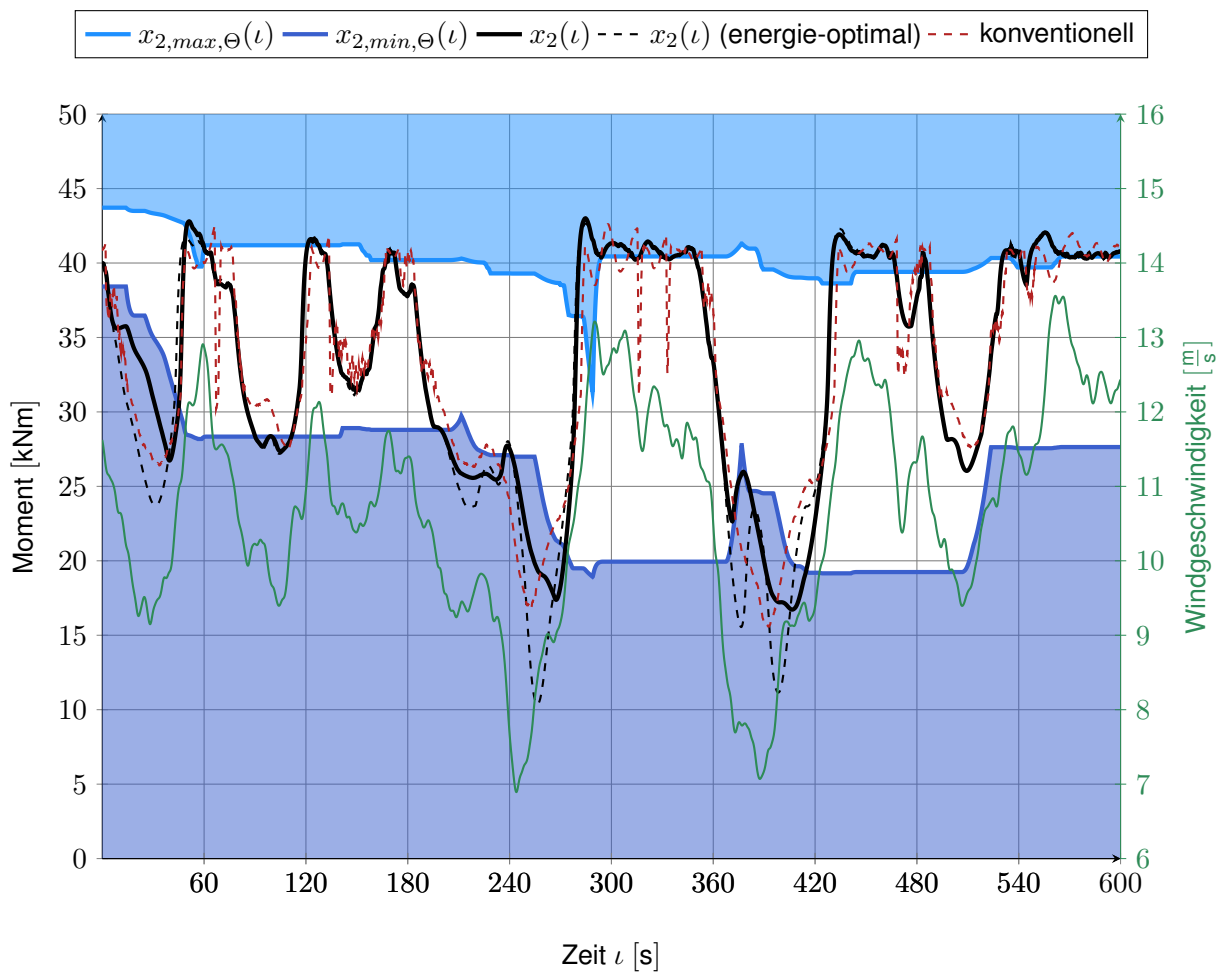


Abbildung 5.11: Generatormoment und Verlauf der Grenzen  $x_{2,max,\Theta}$  und  $x_{2,min,\Theta}$  zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$  und  $I_{Zufall} = 2$

das einer reinen energie-optimalen MPC. Das Generatormoment bricht in der Regel mit abflauender Windgeschwindigkeit ein, da dies zu einer kubischen Reduktion des aerodynamischen Momentes führt, vgl. Gleichung (5.2.1). Wird das Generatormoment, wie im Fall der schädigungs-neutralen MPC, länger auf einem höheren Niveau gehalten, führt dies zu einer deutlich stärkeren Abnahme der Rotordrehzahl  $x_1(t)$ . Somit werden durch den Term (5.2.1) kurzzeitige Einbrüche der Windgeschwindigkeit mittels Extraktion der im drehenden Rotor gespeicherten kinetischen Energie angesteuert. Dies wiederum erlaubt es, die maximalen Ausschlagsamplituden des Momentes als Hauptquelle einer Triebstrang-Schädigung im regulären Betrieb zu reduzieren. Letztendlich werden höhere Ausschlagsamplituden im Verlauf der kinetischen Energie zugelassen, um im Gegenzug die Ausschlagsamplituden der aufgrund der Belastung durch Torsion auftretenden Dehnungsenergie zu verringern.

In rot gestrichelt ist zusätzlich das Moment der konventionellen Regelung aufgetragen. Im Vergleich zu der schädigungs-neutralen MPC ist zu erkennen, dass die maximalen Amplituden auf etwa dem gleichen Niveau liegen, womit sich auch die vergleichbare Schädigungssumme erklären lässt. Damit ist eine Randbedingung an die Formulierung der MPC gefunden, die es erlaubt, die Schädigung innerhalb entsprechender Grenzen zu halten. Offen ist jedoch die entsprechende Strategie zur Wahl der Parameter  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$ , die wiederum eine Konfiguration der MPC erlauben.

## 5.7 Konfiguration der modellprädiktiven Regelung für ein breites Spektrum an Betriebslasten

### 5.7.1 Definition der beiden betrachteten Betriebskonfigurationen

Wie bereits erwähnt, eröffnet die Wahl der Parameter  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$  die Möglichkeit, die MPC für WEA entsprechend verschiedener ökonomischer Anforderungen zu konfigurieren. Die erste von zwei solchen Konfigurationen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellt werden sollen, entspricht der ursprünglichen Intension des Einsatzes von MPC für WEA – die Steigerung des Energiegewinns.

- Unter Maximierung der elektrischen Energieausbeute wird die Schädigung des Triebstranges auf ein solches Niveau beschränkt, welches mit der konventionellen Regelung vergleichbar ist. Im Folgenden wird dann von einer *schädigungs-neutralen MPC* gesprochen.

Der Einsatz von MPC kann in diesem Fall nur ökonomisch wettbewerbsfähig sein, falls damit eine deutliche Erhöhung der Energieausbeute einhergeht. Im Fall des im vorangegangenen Abschnitt 5.6 exemplarisch betrachteten Lastfalls wird nach wie vor eine Steigerung von 1,3 % (statt 1,5 % bei einer reinen energie-maximalen MPC) erreicht. Gleichzeitig reduziert eine schädigungs-neutrale MPC damit jedoch nicht die Lebensdauer um 65 %, sondern begrenzt sie auf das Niveau der konventionellen Regelung. Die dafür notwendige Wahl der Parameter  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$  wird im weiteren Verlauf dieses Abschnittes diskutiert.

Neben der Steigerung der Energieausbeute kann der wirtschaftliche Betrieb einer WEA auch durch eine Verlängerung der Wartungsintervalle oder der Lebensdauer der Triebstrang-Komponenten verbessert werden. Führt man die obige Diskussion invers, kann eine Steigerung der Energieausbeute von 1,3 % auf 1,5 % erreicht werden, falls ein Rückgang der Lebensdauer der Triebstrang-Komponenten von 65 % akzeptiert wird. Diese Betrachtungsweise führt umgekehrt zu der Fragestellung, ob mit einer Reduktion der Energieausbeute, z. B. um den durch den Einsatz von MPC gewonnenen Spielraum von 1,3 %, eine Verlängerung der Le-

bensdauer im Vergleich zur konventionellen Regelung realisierbar ist. Anstatt einer Erhöhung der Energieausbeute wird somit eine Reduktion der Schädigungssumme gefordert.

- Die Schädigung des Triebstranges wird innerhalb einer MPC auf einem solchen Niveau beschränkt, dass die Energieausbeute derjenigen einer konventionellen Regelung entspricht. Im Folgenden wird dann von einer *schädigungs-sensitiven MPC* gesprochen.

Wie weiter unten ersichtlich wird, führt dies zu einer deutlichen Reduktion der Schädigungssumme und damit zu einer Verlängerung der Lebensdauer. Gleichzeitig liegt die Energieausbeute auf dem Niveau der konventionellen Regelung. Somit werden im Rahmen dieses Abschnittes drei mögliche Konfigurationen einer MPC für WEA untersucht:

1. Rein energie-optimale MPC: Maximiere die Energieausbeute
2. Schädigungs-neutrale MPC: Maximiere die Energieausbeute und beschränke die Schädigung auf das Niveau der konventionellen Regelung
3. Schädigungs-sensitive MPC: Beschränke die Schädigung derart, dass die Maximierung der Energieausbeute dem Niveau einer konventionellen Regelung entspricht.

### 5.7.2 Wahl der Lastfälle zur Bestimmung der Konfigurationsparameter

Es gilt, für die Konfigurationen 2 und 3 mit Beschränkung der Schädigung einen entsprechenden Parametersatz für  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$  zu berechnen. In Abbildung 5.12 ist jeweils die *Response Surface*<sup>4</sup> einer Variation dieser beiden Parameter zu drei Lastfällen mit unterschiedlicher mittlerer Windgeschwindigkeit  $\bar{V}_W$  aufgetragen. Sie sind Teil des Prozesses zur Parameterbestimmung, welche weiter unten beschrieben wird. Während die drei Graphen der linken Spalte den jeweiligen prozentualen Energiegewinn  $\Delta E(c_{u_1}, c_{\Psi})$  aufzeigen, illustriert die rechte Spalte die relative Zunahme der Schädigungssumme  $\Delta \mathcal{D}(c_{u_1}, c_{\Psi})$  im Vergleich zur konventionellen Regelung. Während die Werte für  $c_{\Psi}$  bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von  $\bar{V}_W = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  aus dem Bereich  $[0, 200]$  gewählt wurden, ist dieses Intervall mit  $[0, 1500]$  für höhere mittlere Windgeschwindigkeiten deutlich größer. Dies deutet bereits darauf hin, dass die Koeffizienten  $c_{u_1}$  und  $c_{\Psi}$  nicht konstant, sondern mindestens in Abhängigkeit der mittleren Windgeschwindigkeit  $\bar{V}_W$  gewählt werden müssen. Um beispielsweise für  $\bar{V}_W = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  eine Reduktion der maximalen Ausschlagsamplitude zu erreichen, zeigt sich eine Wahl von  $c_{\Psi} \in [50, 150]$  als geeignet. Wertet man die prozentuale Erhöhung der Schädigungssumme  $\Delta \mathcal{D}(c_{u_1}, c_{\Psi})$  für diese Werte von  $c_{\Psi}$  jedoch für die Lastfälle zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $\bar{V}_W = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  aus, zeigt sich nach wie vor eine deutliche Steigerung der Schädigungssumme. Die entsprechenden Werte sind für höhere mittlere Windgeschwindigkeiten im Bereich von  $c_{\Psi} \in [500, 1500]$

---

<sup>4</sup>Mit *Response Surface* wird hier die Interpolation der Ergebnisse einer Parametervariation bezeichnet.

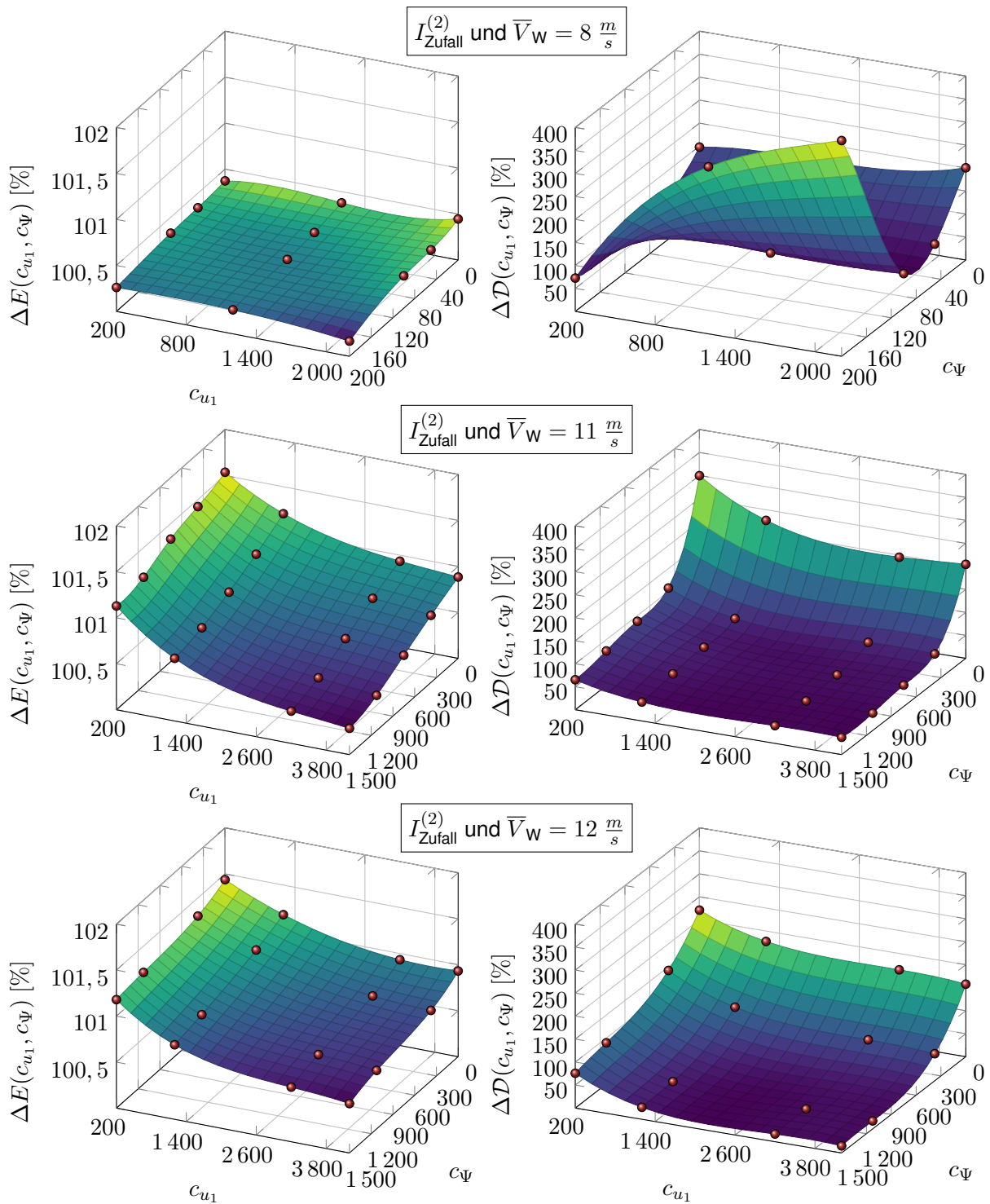


Abbildung 5.12: Flächen von  $\Delta E(c_{u1}, c_\Psi)$  und  $\Delta D(c_{u1}, c_\Psi)$  aus drei verschiedenen Parametervariationen in  $c_{u1}$  und  $c_\Psi$

zu wählen. Insgesamt zeigt sich, dass die Wahl der Parameter  $c_{u_1}$  und  $c_\Psi$  in Abhängigkeit der vorherrschenden mittleren Windgeschwindigkeit  $\bar{V}_W$  erfolgen muss. Andernfalls führt ein konstanter Wert im ungünstigsten Fall sowohl zu einer deutlichen Reduktion der Energieausbeute als auch zur Erhöhung der Schädigungssumme.

Ähnlich zur konventionellen Regelung müssen bei der Wahl von  $c_{u_1}$  und  $c_\Psi$  drei Bereiche unterschieden werden, vgl. Abbildung 5.6 (Seite 117). Lastfälle mit  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  fallen in den Bereich  $2^{1/2}$ . Dieser ist als Grenzfall charakterisiert, in dem die Nennleistung von 5 MW im Wechsel erreicht und verlassen wird. Im Bereich 2, in welchen  $\bar{V}_W = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  fällt, wird auch im Fall einer MPC die Nennleistung von 5 MW in der Regel nicht erreicht. Hier gilt es nicht so sehr kurzzeitige Einbrüche der Windgeschwindigkeit, wie im Bereich  $2^{1/2}$ , auszusteuern (vgl. Abschnitt 5.6), sondern dies allgemein für Fluktuationen in der Windgeschwindigkeit zu tun. Im Bereich 3 wird die Nennleistung von 5 MW durchgehend abgegeben. Einbrüche des Generatormomentes aufgrund von Fluktuationen der Windgeschwindigkeit sind nicht zu erwarten. Mittels des Anstellwinkels wird das aerodynamische Moment entsprechend variiert, so dass die Rotordrehzahl ihren maximalen Wert entsprechend der Beschränkungen nicht übersteigt.

Als Ansatzfunktionen für  $c_{u_1}(\bar{V}_W)$  und  $c_\Psi(\bar{V}_W)$  wird ein Tangens Hyperbolicus mit quadratischem Argument in  $\bar{V}_W$  gewählt.

$$c = \frac{A}{2} \left[ \tanh \left( a_1 \bar{V}_W^2 + a_2 \bar{V}_W + a_3 \right) + 1 \right] + B \quad (5.7.1)$$

Zum einen kann entsprechend extrapoliert werden, da der Tangens Hyperbolicus für große Werte nicht divergiert. Zum anderen ist das quadratische Argument an den drei Regelbereichen einer WEA orientiert. Für die beiden oben beschriebenen Anforderungen werden die entsprechenden Parametersätze  $c_{u_1}(\bar{V}_W)$  und  $c_\Psi(\bar{V}_W)$  in Abhängigkeit von  $\bar{V}_W$  durch Parametervariationen 30 verschiedener Lastfälle gewonnen:

- Zu je sechs verschiedenen Profilen  $I_{Z_{\text{ufall}}}$  einer Windgeschwindigkeit werden für alle  $\bar{V}_W \in \left\{ 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right\}$  verschiedene Werte von  $c_{u_1}$  und  $c_\Psi$  durchlaufen. Jedes Profil entspricht einem Lastfall gemäß Definition 5.5. Deren zusätzliche Parameter  $I_{Z_{\text{ufall}}}$  und  $\bar{V}_W$  können Tabelle 5.4 entnommen werden.
- Diese Werte sind auf einem Gitter  $\left\{ c_{u_1}^{(0)}, c_{u_1}^{(1)}, \dots, c_{u_1}^{(n_u)} \right\} \times \left\{ c_\Psi^{(0)}, c_\Psi^{(1)}, \dots, c_\Psi^{(n_x)} \right\}$  mit  $n_u \in \mathbb{N}$  Punkten für  $c_{u_1}$  und  $n_x \in \mathbb{N}$  Punkten für  $c_\Psi$  definiert.
- Zu jedem der 30 Lastfälle entstehen damit durch Interpolation die Funktionen  $\Delta E(c_{u_1}, c_\Psi)$  und  $\Delta \mathcal{D}(c_{u_1}, c_\Psi)$  als Response Surface, welche jeweils die relative Erhöhung der Energiebeute bzw. der Schädigungssumme wiedergeben. Werte kleiner 100 % geben somit eine jeweilige Reduktion an.

$\bar{V}_W$	$I_{\text{Zufall}}^{(1)}$	$I_{\text{Zufall}}^{(2)}$	$I_{\text{Zufall}}^{(3)}$	$I_{\text{Zufall}}^{(4)}$	$I_{\text{Zufall}}^{(5)}$	$I_{\text{Zufall}}^{(6)}$
$8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	1235424324	-390386055	1806367755	619215622	1221308235	1172079226
$9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	-442181818	-268133960	578502097	1762635290	-1033329975	-109076756
$10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	-313699413	-1922560107	1455013702	-584759330	-1025370583	-737209840
$11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	1	2	3	4	5	6
$12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	125991522	-691577145	301173972	-772516651	-337024596	1823075662

Tabelle 5.4: Lastfälle gemäß Definition 5.5 zur Parametervariation

Die Konstante  $A$  der Ansatzfunktion (5.7.1) ist durch die Spannbreite der Parametervariation, z. B.  $A_{u_1} = c_{u_1}^{(n_u)} - c_{u_1}^{(0)}$ , und  $B$  durch ihren minimalen Wert, z. B.  $B_{u_1} = c_{u_1}^{(0)}$  festgelegt. In Abbildung 5.12 ist in der zweiten Reihe die Variation für den bisher diskutierten Lastfall  $I_{\text{Zufall}}^{(2)} = 2$  und  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  dargestellt. Der linke Graph zeigt die Steigerung der Energieausbeute  $\Delta E(c_{u_1}, c_\Psi)$  in Form einer bikubischen Spline-Interpolation. Ihre berechneten Stützwerte sind in rot aufgetragen. Der rechte Graph illustriert in gleicher Weise die Variation der relativen Schädigungssumme  $\Delta \mathcal{D}(c_{u_1}, c_\Psi)$  in den Koeffizienten  $c_{u_1}$  und  $c_\Psi$ . Ein Wert von 100 % entspricht dabei jeweils dem Wert der konventionellen Regelung. Wie zu erwarten, liegt die größtmögliche Energieausbeute bei  $c_{u_1} = 200$  und  $c_\Psi = 0$ , welche die Parameterwahl der reinen energie-optimalen MPC ist. Für diese Parameter tritt auch die höchste Schädigung des Triebstranges auf, vgl. Diskussion in Abschnitt 5.5. Auch spiegeln sich hier die Folgerungen der Diskussion aus Abschnitt 5.6 wider: Die reine Variation des zur Regularisierung der Hamiltonfunktion eingeführten Parameters  $c_{u_1}$ , d.h.  $c_\Psi \equiv 0$  bewirkt zwar eine Reduktion der Schädigung, diese fällt jedoch nicht unter 100 % und führt daher nicht zu einer mit der konventionellen Regelung vergleichbaren Schädigung. In der ersten und dritten Reihe ist die entsprechende Response Surface für  $I_{\text{Zufall}}^{(2)}$  und  $\bar{V}_W = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $\bar{V}_W = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  aufgetragen.

Die mit dem Term (5.6.1) eingeführte Berücksichtigung der maximalen Ausschlagsamplituden führt schlussendlich dazu, dass  $\Delta \mathcal{D}(c_{u_1}, c_\Psi) \leq 100\%$  zusammen mit  $\Delta E(c_{u_1}, c_\Psi) \geq 100\%$  erreicht werden kann. Derartige Parametervariationen, wie sie in Abbildung 5.12 dargestellt sind, wurden für jeden der 30 und in Tabelle 5.4 aufgeführten Lastfälle durchgeführt. Dies resultiert in je 30 bikubischen Spline-Interpolationen der Energieausbeute  $\Delta E_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}$  und der relativen Schädigungssumme  $\Delta \mathcal{D}_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}$ .

### 5.7.3 Parametervariation

Auf Basis dieser Variationen können die Koeffizienten der Ansatzfunktionen für  $c_{u_1}$  und  $c_\Psi$  entsprechend (5.7.1) berechnet werden. Dazu wird eine Optimierung unter Nebenbedingungen durchgeführt. Für die erste der beiden zu Beginn des Abschnittes aufgeführten Konfigurationen ist eine Maximierung der Energieausbeute gefordert, wobei die resultierende Schädigungssumme nicht diejenige der konventionellen Regelung übersteigen soll. Es gilt daher

folgendes nichtlineares Programm zu lösen, um die Koeffizienten  $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}$  einer schädigungs-neutralen MPC für ein breites Spektrum an mittleren Windgeschwindigkeiten  $\bar{V}_W$  zu erhalten.

$$\begin{aligned} & \max_{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}} \sum_{i=1}^6 \sum_{\bar{V}_W} \Delta E_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}(c_{u_1}, c_{\Psi}) \\ c_{u_1} &= \frac{A_{u_1}^{(1)}}{2} \left[ \text{arc tanh} \left( a_1^{(1)} \bar{V}_W^2 + a_2^{(1)} \bar{V}_W + a_3^{(1)} \right) + 1 \right] + B_{u_1}^{(1)} \\ c_{\Psi} &= \frac{A_{c_6}^{(1)}}{2} \left[ \text{arc tanh} \left( b_1^{(1)} \bar{V}_W^2 + b_2^{(1)} \bar{V}_W + b_3^{(1)} \right) + 1 \right] + B_{c_6}^{(1)} \\ \Delta \mathcal{D}_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}(c_{u_1}, c_{\Psi}) &\leq 100\%, \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

In der dritten, hier vorgestellten Konfiguration, soll die relative Schädigungssumme minimiert werden. Dennoch soll die Energieausbeute nicht unter das Niveau der konventionellen Regelung fallen. Somit gilt es das dementsprechende Problem zu lösen, um die Koeffizienten  $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_3^{(2)}$  einer schädigungs-sensitiven MPC für ein breites Spektrum an mittleren Windgeschwindigkeiten  $\bar{V}_W$  zu erhalten.

$$\begin{aligned} & \min_{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_3^{(2)}} \sum_{i=1}^6 \sum_{\bar{V}_W} \Delta \mathcal{D}_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}(c_{u_1}, c_{\Psi}) \\ c_{u_1} &= \frac{A_{u_1}^{(2)}}{2} \left[ \text{arc tanh} \left( a_1^{(2)} \bar{V}_W^2 + a_2^{(2)} \bar{V}_W + a_3^{(2)} \right) + 1 \right] + B_{u_1}^{(2)} \\ c_{\Psi} &= \frac{A_{\Psi}^{(2)}}{2} \left[ \text{arc tanh} \left( b_1^{(2)} \bar{V}_W^2 + b_2^{(2)} \bar{V}_W + b_3^{(2)} \right) + 1 \right] + B_{\Psi}^{(2)} \\ \Delta E_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}(c_{u_1}, c_{\Psi}) &\geq 100\%, \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

$$\Delta E_{\bar{V}_W, I_{\text{Zufall}}^{(i)}}(c_{u_1}, c_{\Psi}) \geq 100\%, \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 6 \quad (5.7.4)$$

Diese beiden Probleme können mittels bekannter Methoden der Optimierung gelöst werden. Dabei wurde auf das Verfahren *sequential least squares programming* zurückgegriffen. Für eine genauere Beschreibung wird auf die Literatur verwiesen [95, S. 327 ff.]. Derartige Methoden neigen dazu, in lokale Optima zu laufen. Um ein möglichst gutes globales Optimum zu finden, existieren in der Literatur eine Reihe verschiedener Ansätze. Eine der einfachsten, aber aufwendigsten Methoden startet das Optimierungsverfahren zu vielen verschiedenen, systematisch verteilten Anfangswerten. Als Lösung wird dasjenige Ergebnis gewählt, welches unter allen Lösungen maximal bzw. minimal ist. Da für die beiden oben erwähnten Probleme der rechnerische Aufwand, selbst auf einem sehr feinen Gitter des für die Parameterwahl zulässigen Gebietes  $\begin{bmatrix} c_{u_1}^{(0)}, c_{u_1}^{(n_u)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{\Psi}^{(0)}, c_{\Psi}^{(n_x)} \end{bmatrix}$  vertretbar ist, wurde diese einfache Herangehensweise gewählt. Man erhält damit die Koeffizienten der Ansatzfunktionen aus (5.7.2) und



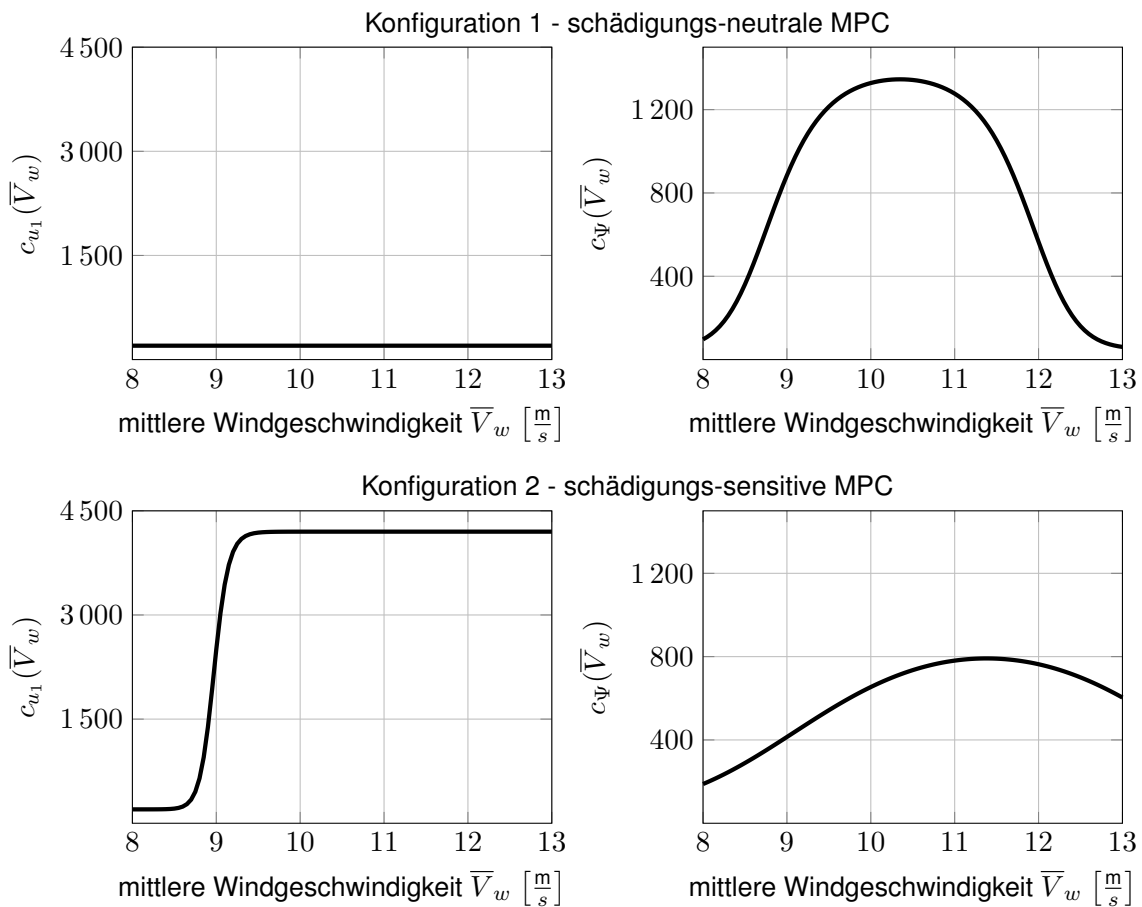


Abbildung 5.13: Ergebnisse der Parametervariation und anschließender Optimierung

(5.7.3), welche in den Tabellen 5.5 und 5.6 aufgelistet und in Abbildung 5.13 dargestellt sind.

In Konfiguration 2 (schädigungs-neutrale MPC) – maximaler Energiegewinn unter Beschränkung der Schädigung – ist der Koeffizient mit  $c_{u_1} = 200$  konstant zu wählen, was dem kleinsten dafür zulässigen Wert entspricht. Da der Regularisierungsfaktor  $c_{u_1}$  Variationen der Generatormomentrate  $u_1$  dämpft, bestätigt auch dies Aussagen, welche bereits in Abschnitt 5.5 abgeleitet wurden und wonach Oszillationen des Generatormomentes  $x_2$  für eine Steigerung des Energiegewinns notwendig sind. Für  $c_{\Psi}$  zeigt sich bei etwa  $\bar{V}_w = 10,5 \frac{m}{s}$  ein Maximum, was sich mit obiger Diskussion zu der Abbildung 5.12 (Seite 135) deckt.

Für Konfiguration 3 (schädigungs-sensitive MPC) – Reduktion der Schädigung, bis ein mit der konventionellen Regelung vergleichbarer Energiegewinn erreicht ist – ist der Koeffizient  $c_{u_1}$  nicht konstant, sondern für kleine mittlere Windgeschwindigkeiten  $\bar{V}_w$  bei seinem Minimum und für große  $\bar{V}_w$  bei seinem Maximum zu wählen. Dazwischen gibt es bei  $\bar{V}_w = 9 \frac{m}{s}$  einen Übergang. Hohe Werte für  $c_{u_1}$  reduzieren Variationen der Generatormomentrate und somit auch solche des Generatormomentes, vgl. Abschnitt 5.3.3. Wie bereits erörtert, führt dies bereits zu einer Reduktion der Schädigungssumme  $\mathcal{D}$ , welche jedoch nicht ausreicht, um  $\mathcal{D}$  auf

$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$a_3^{(1)}$	$A_{u_1}^{(1)}$	$B_{u_1}^{(1)}$
$c_{u_1} = 200$				
$b_1^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$b_3^{(1)}$	$A_{\Psi}^{(1)}$	$B_{\Psi}^{(1)}$
-52,5200	10,3542	-0,5002	1450	50

Tabelle 5.5: Ergebnisse der Parametervariation zu (5.7.2) (schädigungs-neutrale MPC)

$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_3^{(2)}$	$A_{u_1}^{(2)}$	$B_{u_1}^{(2)}$
-121,6952	21,2959	-0,8619	4000	200
$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$b_3^{(1)}$	$A_{\Psi}^{(2)}$	$B_{\Psi}^{(2)}$
-12,9894	2,2869	-0,1005	1450	50

Tabelle 5.6: Ergebnisse der Parametervariation zu (5.7.3) (schädigungs-sensitive MPC)

das Niveau der konventionellen Regelung zu beschränken. Somit muss entsprechend eine Beschränkung der maximalen Ausschlagsamplitude über  $c_{\Psi}$  zusätzlich zum Einsatz kommen. Deren Verlauf in Abhängigkeit von  $\bar{V}_W$  ist ähnlich zu Konfiguration 1. Bei kleinen Werten von  $\bar{V}_W$  liegt  $c_{\Psi}$  in etwa bei 170, was zusammen mit  $c_{u_1} \left(8 \frac{m}{s}\right) = 200$  zur obigen Diskussion konsistent ist, vgl. Abbildung 5.12 (Seite 135) – rechter oberer Graph. Im Bereich von  $\bar{V}_W = 11,5 \frac{m}{s}$  ist dabei das Maximum erreicht. Dessen Niveau liegt unterhalb des Maximums von  $c_{\Psi}$  aus Konfiguration 2. Für größer werdende mittlere Windgeschwindigkeiten fällt  $c_{\Psi}$  dann wieder ab, da für weiter steigende  $\bar{V}_W$  Einbrüche der Windgeschwindigkeit nicht mehr zu einer Rücknahme des Generatormomentes führen.

#### 5.7.4 Validierung der Betriebskonfigurationen

In einem letzten Schritt müssen die Konfigurationen (5.7.2) und (5.7.3) validiert werden, wobei darauf zu achten ist, dass die dafür notwendige Objektivität gewahrt bleibt. Dies kann auf unterschiedliche Arten erfolgen. Wie zuvor können eine Reihe von verschiedenen Lastfällen berechnet werden, wobei dazu nicht die in Tabelle 5.4 (Seite 137) aufgeführten Profile der Windgeschwindigkeit gewählt werden sollten. Zu diesen Lastfällen wurden die beiden Parameterkonfigurationen (5.7.2) und (5.7.3) bestimmt und optimiert, weshalb hier das gewünschte Ergebnis entsprechend den Anforderungen für die Konfigurationen 2 und 3 zu erwarten ist. Daher wären für diese Form der Validierung neue Lastfälle zu bestimmen. Als Alternative dazu bietet es sich auch an, einen Lastfall auf einem deutlich größeren Zeitbereich als den bisher betrachteten 600 s bzw. 10 min zu verwenden. Gleichzeitig sollte dieser Lastfall ein möglichst großes Spektrum an mittleren Windgeschwindigkeiten abdecken.

Gemäß Definition 5.5 wird ein Lastfall mit  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$  und  $I_{Zufall} = 1$  zur Validierung der

beiden Konfigurationen herangezogen. Im Unterschied zu den bisher betrachteten Windprofilen ist dieser auf einem deutlich längeren Zeitfenster von 7200 s bzw. 2 h definiert und deckt mittlere Windgeschwindigkeiten von  $\bar{V}_W = 8,6 \frac{m}{s}$  bis  $\bar{V}_W = 13,3 \frac{m}{s}$  ab. Wie zuvor beträgt der eigentliche Zeitraum 7260 s, wobei die ersten 60 s jedoch aus der Analyse ausgeschlossen werden, um beiden Regelsystemen eine Einschwingphase zu ermöglichen und um eine entsprechende Bevorteilung eines der beiden Verfahren aufgrund der Startwerte zu vermeiden. In Abbildung 5.14 ist der zeitliche Verlauf der Windgeschwindigkeit visualisiert, wobei auch hier aus der dreidimensionalen, vektorwertigen Windgeschwindigkeit  $\vec{V}_{W,3D}$  eine skalarwertige, rotor-effektive Windgeschwindigkeit  $V_W$  berechnet wird, vgl. Abschnitt 5.2.

In Abbildung 5.15 sind die Ergebnisse der drei MPC-Konfigurationen denen der konventionellen Regelung zu dem Windprofil aus Abbildung 5.14 gegenübergestellt. Aufgrund der Länge des Zeitfensters von 7200 s und der damit verbundenen Dichte an Signalen kann Abbildung 5.15 jedoch nur bedingt für eine detailliertere Diskussion herangezogen werden. Im weiteren Verlauf werden daher exemplarisch die beiden Ausschnitte zu den Indizes I und II genauer diskutiert. Zuvor lassen sich jedoch wertvolle Aussagen aus dem Gesamtergebnis ableiten. In Abbildung 5.16 ist eine entsprechende Graphik aufgetragen.

Im ersten der fünf Graphen lässt sich die Zu- oder Abnahme der Energieausbeute mit der konventionellen Regelung vergleichen, wobei letztere per Definition zu einem Energiegewinn von 100 % führt. Dementsprechend steigert eine rein energie-optimale MPC die Abgabe elektrischer Energie um 1,43 %. Überschreitet die damit verbundene, deutlich erhöhte Beanspruchung des Triebstranges jedoch die Beanspruchbarkeit der auf Basis der konventionellen Regelung ausgelegten Bauteile, muss das entsprechende Belastungs-Zeit-Signal Beschränkungen unterworfen werden, was in den vorangegangenen Abschnitten zur schädigungsneutralen Konfiguration geführt hat. Diese kann den Energiegewinn immerhin um 1,19 % steigern. Die dritte, schädigungs-sensitive Konfiguration ist aus der Überlegung entstanden, den Spielraum, welcher durch den Einsatz von MPC entsteht, für eine Reduktion der Triebstrangschädigung anstatt für eine Leistungssteigerung einzusetzen. Zwar wurde der Parametersatz (5.7.3) ursprünglich derart bestimmt, dass die Energieausbeute durch MPC derjenigen der konventionellen Regelung entspricht, jedoch steigert diese Konfiguration für das betrachtete Windprofil aus Abbildung 5.14 den Energiegewinn weiterhin um 0,76 %. Dies ist kein Widerspruch und lässt sich folgendermaßen erklären.

Für die Bestimmung der Koeffizienten  $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_3^{(2)}$  wurden 30 Lastfälle entsprechend der Tabelle 5.4 (Seite 137) herangezogen. Dabei mussten diese Koeffizienten die Randbedingung (5.7.4) erfüllen, welche von einer derart konfigurierten MPC verlangt, das Energieniveau der konventionellen Regelung jedes einzelnen Lastfalles nicht zu unterschreiten. Daher beschränkt der ungünstigste Lastfall die Parameterwahl, was eine konservative Abschätzung darstellt. Dies bedeutet letztendlich, eine Reduktion der Energieausbeute wird auch im ungünstigsten Fall nicht akzeptiert. Daher ist es dementsprechend zu erwarten, dass

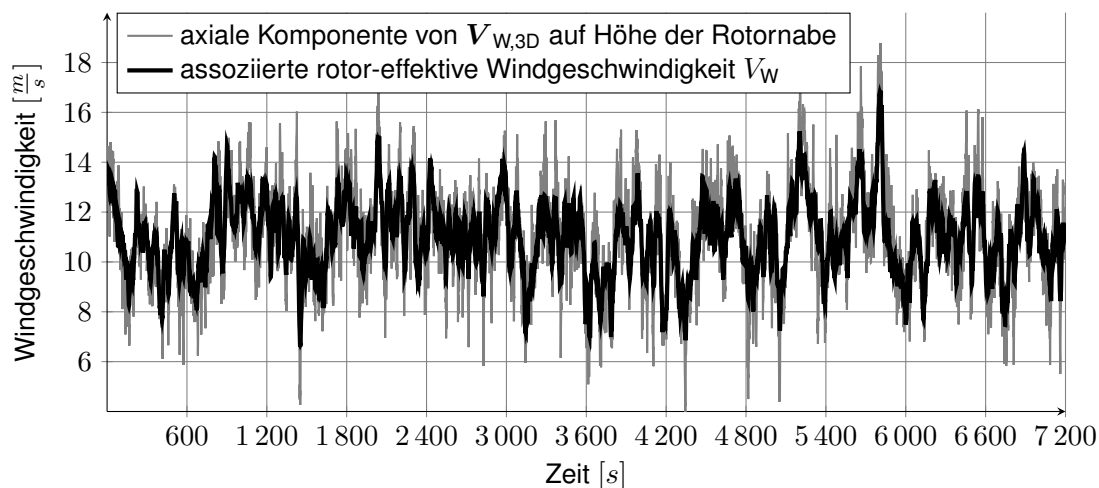


Abbildung 5.14: Profil der Windgeschwindigkeit auf dem Zeitfenster  $[0 \text{ s}, 7200 \text{ s}]$  zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $I_{\text{Zufall}} = 1$

die schädigungs-sensitive MPC mit dem Parametersatz (5.7.3) für einen allgemeinen Lastfall weiterhin zu einer Steigerung der Energieausbeute führt. Umgekehrt bietet sich damit die Möglichkeit, gegebenenfalls eine weitere Reduktion der Beanspruchung zu erreichen, falls Bedingung (5.7.4) entsprechend angepasst werden kann. Dies geht jedoch über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus und soll nicht weiter betrachtet werden.

Im zweiten bis vierten Graphen der Abbildung 5.16 sind die drei im Rahmen der vorliegenden Arbeit herangezogenen Bewertungskriterien einer Triebstrangschädigung dargestellt. Die Ergebnisse decken sich mit den Diskussionen der vorangegangenen Kapitel und stellen somit eine Validierung der Konfigurationen (5.7.2) und (5.7.3) dar. Wie zuvor hebt eine rein energie-optimale MPC die Schädigungssumme  $\mathcal{D}_{MPC:1}$  auf 276,36 % des Wertes  $\mathcal{D}_{konv.}$  der konventionellen Regelung, welche 100 % per Definition entspricht. Wie ebenfalls bereits diskutiert, kann davon ausgegangen werden, dass die Triebstrang-Komponenten entsprechend der Beanspruchung durch die konventionelle Regelung und der erforderlichen Betriebsdauer der WEA ausgelegt sind. Eine Anwendung einer rein energie-optimalen MPC lässt somit den vorzeitigen Ausfall von hoch beanspruchten Komponenten erwarten. Dies muss entsprechend dem Gewinn an zusätzlicher elektrischer Energie gegenübergestellt und wirtschaftlich abgewogen werden. In Zeiten volatiler Einspeisevergütungen kann eine derartige Diskussion – Steigerung der Energieausbeute bei gleichzeitig reduzierter zu erwartender Betriebsdauer – sinnvoll geführt werden, führt jedoch ebenfalls an dieser Stelle über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

Einen Eindruck über die entsprechende Verkürzung der Lebensdauer lässt sich aus der schädigungsäquivalenten Last  $DEL$  nach (3.6.4) gewinnen. Dabei wird das Lastkollektiv in ein Einstufenkollektiv überführt, welches aus der mittelwertfreien, *schädigungsäquivalenten Last* und der Schwingspielzahl  $n_{eq}$  gebildet wird. Diese Schwingspielzahl ist dabei über die  $DEL$ -

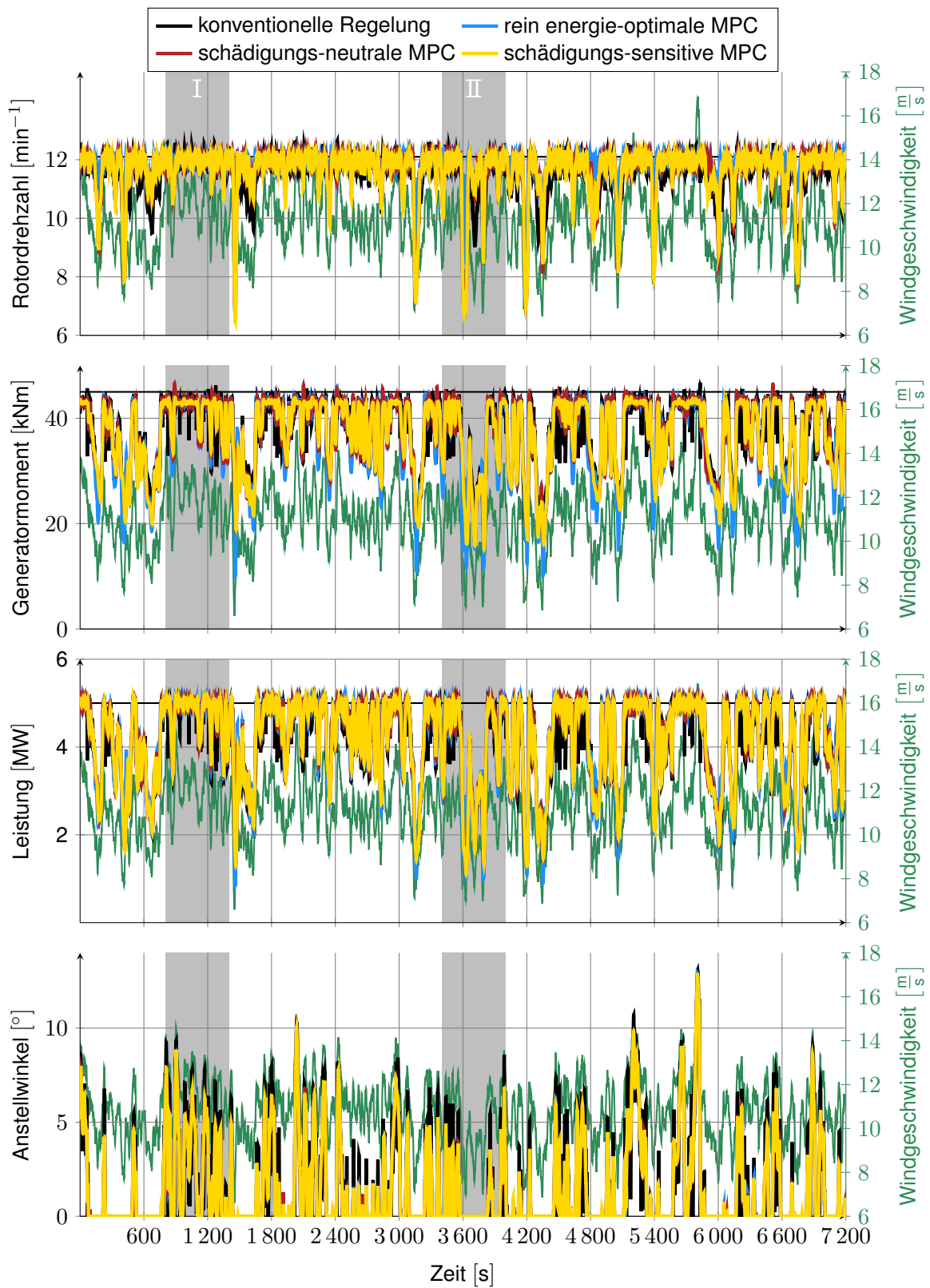


Abbildung 5.15: Simulationsergebnisse auf dem Zeitfenster [0 s, 7200 s] und  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$

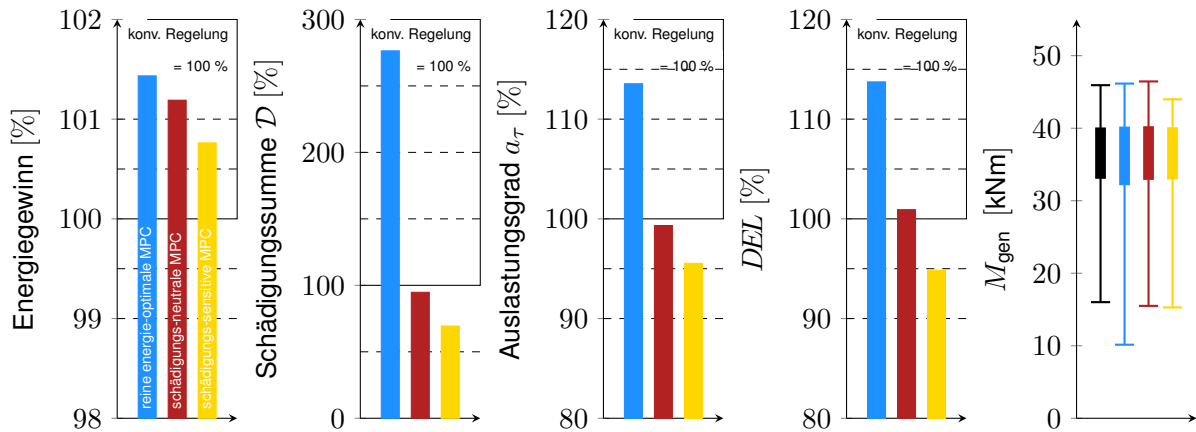


Abbildung 5.16: Profil der Windgeschwindigkeit auf dem Zeitfenster  $[0, 7200]$  zu  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$  und  $I_{Zufall} = 1$

Frequenz  $f_{eq} = 1$  Hz normiert, vgl. Gleichung (3.6.3), und berechnet sich damit über  $f_{eq}$  und die Länge der betrachteten Belastungs-Zeit-Funktion. Es sei  $DEL_{Konv.}$  die schädigungs-äquivalente Last der konventionellen Regelung. Diese führt gemäß (3.6.1) und (3.6.4) zur schädigungsäquivalenten Last

$$\mathcal{D}_{DEL, Konv.} = \frac{n_{eq}}{N_{\mathcal{M}}(DEL_{Konv.})} = n_{eq} \left( \frac{\frac{1}{2} DEL_{Konv.}}{\mathcal{M}_{ult}} \right)^k.$$

Für die folgende Diskussion wird als Vereinfachung und grobe Näherung angenommen, dass ein Versagen der Triebstrang-Komponenten beim Erreichen von  $\mathcal{D}_{DEL, Konv.}$  eintritt. Erhöht eine rein energie-optimale MPC die Beanspruchung, muss sich somit im Gegenzug die Anzahl der ertragbaren Schwingspiele  $n_{MPC:1}$  reduzieren.

$$\mathcal{D}_{DEL, MPC:1} = n_{MPC:1} \left( \frac{\frac{1}{2} DEL_{MPC:1}}{\mathcal{M}_{ult}} \right)^k \stackrel{!}{=} \mathcal{D}_{DEL, Konv.}$$

Die maximal zu ertragene Last  $\mathcal{M}_{ult}$  ist eine Konstruktionsanforderung und unabhängig von der Regelung.

$$\begin{aligned} \Rightarrow n_{MPC:1} DEL_{MPC:1}^k &= n_{eq} DEL_{Konv.}^k \\ \Rightarrow n_{MPC:1} &= n_{eq} \left( \frac{DEL_{Konv.}}{DEL_{MPC:1}} \right)^k \end{aligned}$$

Für das betrachtete Windprofil erhöht sich die  $DEL$  unter einer reinen energie-optimalen MPC um 13,74%. Mit einem Exponenten von  $k = 8$  für Torsion, vgl. Tabelle 5.3 (Seite 124), folgt

$$\Rightarrow n_{MPC:1} = n_{eq} \left( \frac{100\%}{113,74\%} \right)^k = 0,36 n_{eq}.$$

Unter Betrachtung eines schädigungsäquivalenten Einstufenkollektivs muss somit mindestens mit einer Halbierung der erwarteten Betriebsdauer gerechnet werden. Dies wiederum unterstreicht die Notwendigkeit, die Schädigung über eine schädigungs-neutrale Konfiguration regelungs-technisch zu beschränken, deren Ergebnisse nachfolgend diskutiert werden sollen.

Wie den zweiten bis vierten Graphen der Abbildung 5.16 entnommen werden kann, bewegen sich alle Kriterien zur Bewertung der Triebstrangschädigung dieser Konfiguration zum Index  $MPC:2$  auf dem Niveau der konventionellen Regelung, wobei nach wie vor eine Steigerung der Energieausbeute um 1,19 % erreicht wird. Auch dies deckt sich mit den Ergebnissen der vorangegangenen Diskussionen und bestätigt somit die Wahl der Koeffizienten (5.7.2).

In einer dritten MPC-Konfiguration zum Index  $MPC:3$  ging es darum, den Spielraum, welcher durch die Möglichkeit einer Erhöhung des Energieertrages entsteht, für eine Reduktion der Triebstrang-Beanspruchung einzusetzen. Es entstand die schädigungs-sensitive MPC. Die Schädigungssumme  $\mathcal{D}$  reduziert sich in diesem Fall auf 69,40 % des Wertes der konventionellen Regelung, die entsprechende schädigungsäquivalente Last  $DEL_{MPC:3}$  geht auf 94,8 % von  $DEL_{Konv.}$  zurück. Entsprechend obiger Diskussion führt dies zu einer Erhöhung der äquivalent ertragbaren Schwingspielzahlen.

$$\Rightarrow n_{MPC:3} = n_{eq} \left( \frac{100 \%}{94,8 \%} \right)^k = 1.5 n_{eq}$$

Aufgrund der Unsicherheiten im Vorhersagen des Ausfalls durch Ermüdung kann zwar nicht unbedingt mit einer Verlängerung der Laufzeit um 50 % gerechnet werden, jedoch ist nach wie vor eine deutliche Steigerung zu erwarten. Für eine genauere Aussage muss in eine detaillierte Betriebsfestigkeitsrechnung – unter Berücksichtigung aller Belastungsarten und Versagensmechanismen – eingestiegen werden, was außerhalb des Rahmens der hier vorliegenden Arbeit liegt.

Im letzten der fünf Graphen in Abbildung 5.16 sind die maximalen Ausschlagsamplituden des Generatormomentes dargestellt, wobei diejenige der konventionellen Regelung in schwarz hinzugefügt ist. Der jeweils mittig abgebildete Balken ist am Mittelwert des Generatormomentes positioniert, die Balkenhöhe gibt die entsprechende Streuung an. Auch die hier dargestellten Ergebnisse decken sich mit denjenigen der vorangegangenen Diskussion. Eine reine energie-optimale MPC erhöht die Ausschlagsamplituden deutlich. Dagegen bewegt sich diejenige der schädigungs-neutralen MPC auf dem Niveau der konventionellen Regelung. Lediglich die schädigungs-sensitive MPC unterbietet die Höhe dieser Ausschlagsamplituden. Dabei ist zu erkennen, dass sich der Maximalwert des Generatormomentes deutlich reduziert. Die Ursache dafür wird im Folgenden erläutert.

Um die Unterschiede in den Ausgangssignalen der einzelnen Konfigurationen genauer zu dis-

kutieren, werden die beiden Bereiche zu den Indizes I und II aus Abbildung 5.15 betrachtet. In Abbildung 5.17 sind die Ergebnisse des Windprofils aus Abbildung 5.14 auf dem Zeitfenster [800 s, 1400 s] dargestellt. An den grau hinterlegten Bereichen zum Index III lässt sich erkennen, warum sich der Maximalwert des Generatormomentes im Fall der schädigungs-sensitiven MPC reduziert. Während des Auffrischen des Windes kommt es parallel zur Erhöhung der Rotordrehzahl und zum Anstieg des Generatormomentes. Aufgrund seines prädiktiven Charakters erkennt MPC das zukünftige Erreichen der Maximaldrehzahl und beginnt über das Generatormoment die Beschleunigung des Rotors bereits davor zu reduzieren. Es kommt zu einem Gleiten in die Nenndrehzahl, ohne dass diese erheblich überschossen wird. Gleichzeitig bietet sich für die schädigungs-sensitive MPC eine Möglichkeit, die dadurch verursachte, schädigungs-relevante Ausschlagsamplitude durch ein sanfteres Gleiten in die Nenndrehzahl zu reduzieren. Daher reduziert sich der Maximalwert des Generatormomentes.

In den Bereichen zum Index IV aus Abbildung 5.17 lässt sich erkennen, dass es im Fall der MPC im Allgemeinen zu deutlich glatteren Stellgrößensignalen kommt, was auch den Anstellwinkel im untersten der vier Graphen betrifft. Dabei geht dies jedoch nicht auf Kosten einer höheren Volatilität, wenn es um die Berücksichtigung der maximalen Drehzahl geht.

In Abbildung 5.18 sind die Ergebnisse des Windprofils aus Abbildung 5.14 auf dem Zeitfenster [3400 s, 4000 s] dargestellt. Insbesondere ist ein Bereich zum Index V markiert, innerhalb dessen eine Windgeschwindigkeit vorliegt, in der die Anlage kaum seine maximale Drehzahl erreicht. Aus den oberen beiden Graphen geht hervor, dass MPC die Anlage bei weitestgehend höheren Drehzahlen und niedrigeren Drehmomenten fährt, was nicht zwangsläufig mit einer unterschiedlichem Niveau an erbeuteter Leistung einhergeht, vgl. dritten Graphen. Konsistent zu vorangegangenen Diskussionen ist zu erkennen, dass die rein energie-optimale MPC zu Hysteresen mit deutlich größerer Ausschlagsamplitude neigt, was sich über das aktive Verwenden des Generatormomentes zur Drehzahlregelung erklären lässt. Es ist jedoch nicht zu erwarten, dass es zu einer signifikanten Steigerung der Energieausbeute auf diesem Zeitfenster kommt.

Während die Bereiche zum Index V grob dem Regelbereich 2 aus Abbildung 5.6 einer konventionellen Regelung entsprechen, sind die Bereiche zum Index IV dem Regelbereich 3 zuzuordnen. In beiden Bereichen ist nicht mit einer Steigerung der Energieausbeute zu rechnen. Lediglich in V kann bei einer schädigungs-neutralen bzw. schädigungs-sensitiven MPC



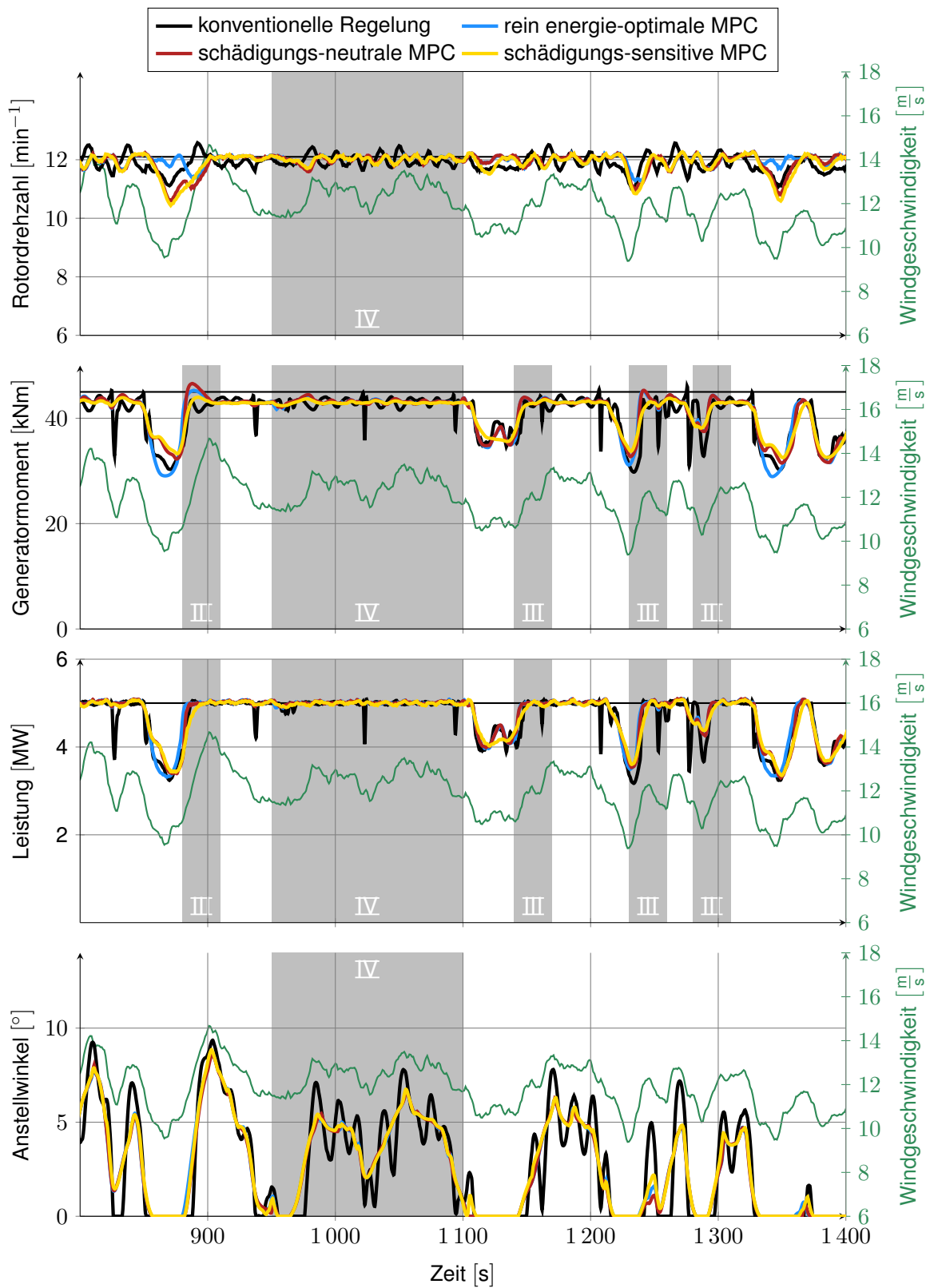


Abbildung 5.17: Simulationsergebnisse auf dem Zeitfenster [800 s, 1400 s] und  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$

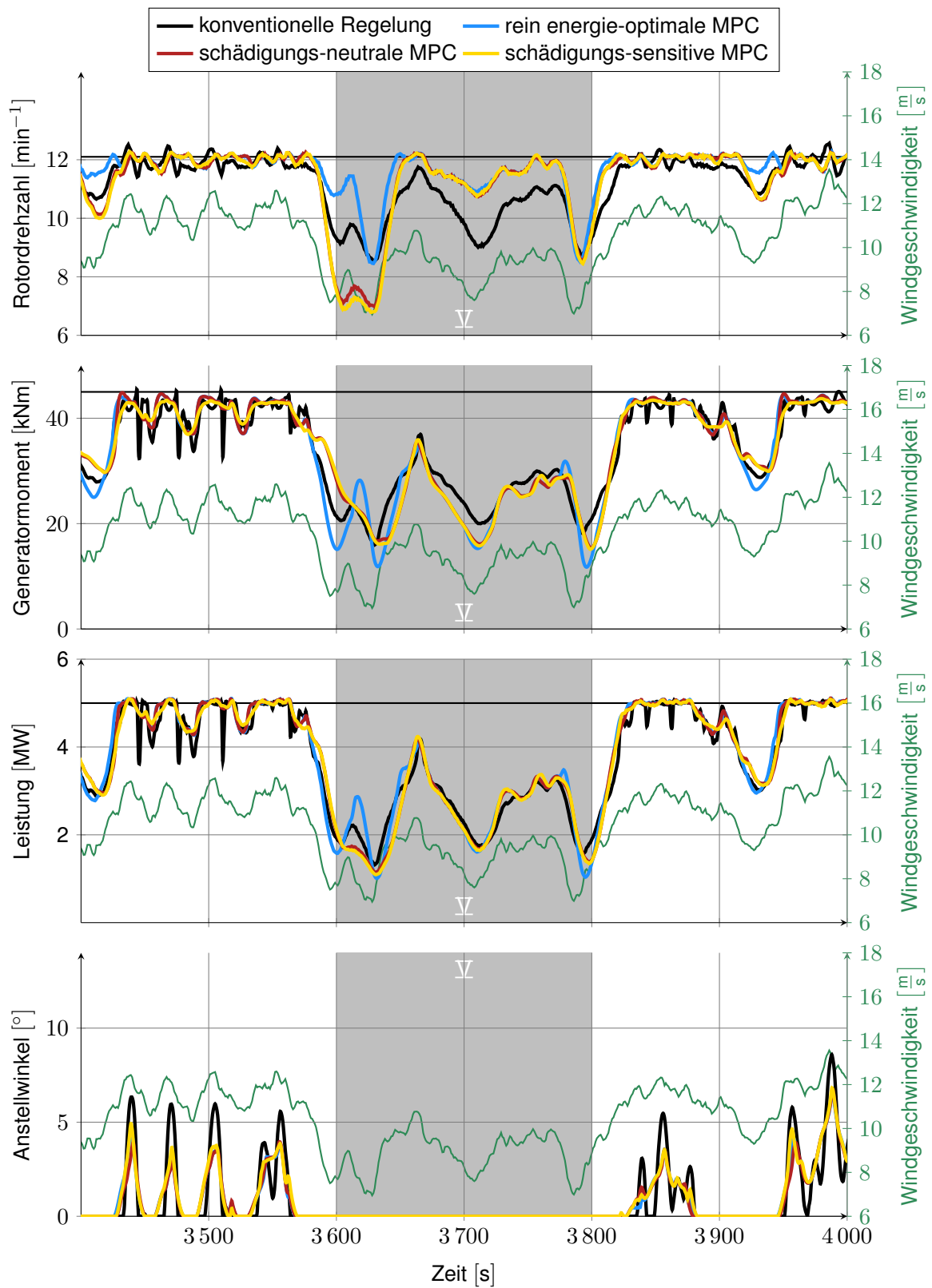


Abbildung 5.18: Simulationsergebnisse auf dem Zeitfenster [3400 s, 4000 s] und  $\bar{V}_W = 11 \frac{m}{s}$

eine Reduktion der Beanspruchung erwartet werden. Letztendlich sind es Situationen, die denjenigen zum Index III entsprechen, in der MPC über ihren prädiktiven Charakter sowohl die Energieausbeute als auch die Schädigung beeinflussen kann.

## 5.8 Rechenzeitvergleich mit einem Ansatz der direkten Verfahren

Ein vollständig objektiver Vergleich der beiden verschiedenen Verfahren (direkte und indirekte Methoden) zur MPC von WEA ist entsprechend aufwendig und erfordert gewisse Randbedingungen. Zum einen muss das verwendete MKS-Modell der WEA in beiden Verfahren identisch sein. Zum anderen sollte – für einen Rechenzeitvergleich – auch das reduzierte Modell, welches innerhalb der OSP zur Vorhersage der Dynamik verwendet wird, übereinstimmen. Des Weiteren sollte jeweils eines der beiden Verfahren von zwei verschiedenen Personen bzw. Forschungsgruppen angewandt werden, um eine Bevorteilung des favorisierten Verfahrens zu vermeiden. Daher ist folgende Diskussion als ein Versuch eines möglichst objektiven Vergleichs zu sehen, welcher auf Basis der zur Verfügung stehenden, publizierten Informationen durchgeführt wird. Sie erlaubt es zwar die Vorteile des Einsatzes indirekter Verfahren zur MPC von WEA deutlich herauszuarbeiten, kann jedoch keineswegs eine Aussage darüber treffen, ob dies allgemein für Problemstellungen der MPC gilt.

Unabhängig von der Wahl indirekter und direkter Verfahren ist die Rechenzeit eine kritische Größe für die Anwendung von MPC in der Praxis. Dabei steht der Aufwand zum Lösen der OSP in jedem MPC-Schritt im Fokus. Die direkten Verfahren verwenden dazu heute das Verfahren des *direkten Mehrfachschießens* [25, S. 937]. Dazu wird das Intervall  $[\iota, \iota + \mathcal{T}_h(\iota)]$  in  $N \in \mathbb{N}$  äquidistante Teilintervalle zerlegt, vgl. Abschnitt 4.1. Für deren Größe orientiert man sich am Regeltakt, welcher hier bei 10 Hz und einem Zeithorizont von  $\mathcal{T}_h(\iota) = 10$  s zu  $N = 100$  Stützwerten für die Lösung  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  des OSP führt [25, S. 939]. Da die Anfangswerte  $\mathbf{x}(t_i)$  sowie die stückweise konstanten Steuerungen  $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$  für  $i = 1, \dots, N$  Unbekannte sind, gilt es im direkten MSV  $n \cdot N + m \cdot N$  Größen zu bestimmen. Im MSV aus Abschnitt 4.2 zur Lösung von OSP auf Basis indirekter Verfahren, welches entgegen der gängigen Literatur hier zur Abgrenzung als *indirektes MSV* bezeichnet wird, wird das Zeitintervall  $[\iota, \iota + \mathcal{T}_h(\iota)]$  ebenfalls mittels  $M$  Stützwerten diskretisiert, wodurch die Verwandtschaft der beiden Methoden entsteht. Jedoch wird in der in Kapitel 5 diskutierten MPC für WEA  $M = 4$  verwendet, was bei  $\mathcal{T}_h(\iota) = 10$  s zu einem Stützwert alle 2,5 s führt. Im Unterschied zu den direkten MSV verwendet das indirekte MSV jedoch zwei verschiedene Typen von Gitterpunkten, vgl. Abschnitt 4.2.3. Während der erste Typ wie im Fall der direkten Verfahren zur numerischen Stabilisierung und Verbesserung der Lösungskonvergenz dient, ist der zweite Typ von Gitterpunkten im Fall der indirekten Verfahren auf die Auf- und Absprungpunkte der Zustandsbeschränkungen zurückzuführen, vgl. Abschnitt 4.4. Ihr Zeitpunkt auf  $[\iota, \iota + \mathcal{T}_h(\iota)]$  ist nicht a-priori bekannt, sondern durch die jeweiligen Schaltbedingungen festgelegt und Teil der Lö-

sung des OSP, vgl. Abschnitt 5.3.4. In der Regel treten wenige dieser Gitterpunkte auf. Für die weitere Diskussion soll trotzdem die sehr konservative Schätzung von  $M = 10$  für die gesamte Anzahl an Stützwerten im indirekten MSV herangezogen werden. Im Fall der indirekten Verfahren entstehen zu  $n \in \mathbb{N}$  Zustandsvariablen ebenfalls  $n \in \mathbb{N}$  adjungierte Variablen, die mit  $\lambda$  bezeichnet werden, vgl. Gleichung (2.1.11). Durch die Hinzunahme dieser Variablen fallen die Steuerungen  $u^*$  über die Optimalitätsbedingung (2.1.12) weg. Dadurch ergibt sich die Gesamtzahl an Unbekannten, die in einem indirekten MSV bestimmt werden müssen, zu  $2 \cdot n \cdot M$ . Problem 5.8 enthält  $n = 5$  Zustandsvariablen und  $m = 2$  Steuerung, wodurch in der beschriebenen Abschätzung im direkten MSV  $5 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 700$  Unbekannte und im indirekten MSV  $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$  in jedem MPC-Schritt zu bestimmen sind.

Diese Abschätzung ist jedoch nur grob zu berücksichtigen, da im Fall der direkten Verfahren Anpassungen des Verfahrens gemacht werden. So kann anstatt stückweise konstanter Steuerungen auch eine lineare Interpolation dieser angewandt werden [8, S. 32]. Dadurch entsteht jedoch eine direkte Wechselwirkung zukünftiger Stützwerte auf vorangegangene Zeitpunkte. In Kombination dazu oder separat kann die Anzahl der Stützwerte  $N$  – auch *Stufen* genannte – reduziert werden [23, S. 1126]. Das reduziert entweder die Länge des Vorhersagehorizontes  $\mathcal{T}_h(\ell)$  oder den Regeltakt. Die Länge  $\mathcal{T}_h(\ell) = 10$  s hat sich in den bisher zitierten Publikationen zur MPC von WEA als ausreichend erwiesen und sollte daher nicht weiter reduziert werden. In [24, S. 6] wird der Regeltakt auf 5 Hz reduziert und somit  $\Gamma_h = 200$  ms gewählt, was die Länge des in der Regel auf  $[\ell, \ell + \Gamma_h]$  konstanten Steuersignals verlängert.

Hier spielen die indirekten Verfahren einen weiteren Vorteil aus. Da durch die adjungierten Variablen  $\lambda(t)$  die Bestimmung der optimalen Steuerungen  $u^*(t)$  auf ein zeit-konstantes Minimierungsproblem entsprechend Gleichung (2.1.12) reduziert wird, was zudem aufgrund der Regularität der Hamiltonfunktion eindeutig und im Fall der MPC von WEA sogar analytisch gelöst werden kann, bleibt das Ausgangssignal der indirekten MPC unabhängig von der Wahl der Diskretisierung  $M \in \mathbb{N}$  – vielmehr ist dieses Signal sogar stetig.

Die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten ist jedoch in Kombination der benötigten Iterationsschritte bis zur Konvergenz in eine Lösung des OSP zu sehen. Beide Verfahren müssen je in einem Iterationsschritt das dynamische System aus Problem 5.8 numerisch integrieren und daraus anschließend eine neue Schätzung der zu bestimmenden Unbekannten generieren. Hierfür kann ein Vergleich objektiv schwer durchgeführt werden. In [24, S. 7] werden 2 bis 30 Iterationen benötigt, wobei ein Mittelwert nicht angegeben ist. Dabei kam jedoch kein MKS-Modell zum Einsatz, vielmehr wurde das aus der MPC erzeugte Signal direkt auf das reduzierte Modell angewandt. Dadurch bleiben Modellunschärfen unberücksichtigt und die Vorhersage der Systemdynamik ist exakt. Dies begünstigt das Optimierungsverfahren aufgrund guter Startwerte. Im Unterschied zu dem in Abschnitt 5.2 diskutierten Ersatzmodell wird jedoch auch die erste Eigenmode der Turmschwingung einbezogen, was das reduzierte

Modell somit um zwei Zustandsvariablen komplexer macht. Im Fall der indirekten MPC für WEA – ohne Hinzunahme der ersten Turmeigenschwingung in die Systemdynamik, aber mit Berücksichtigung von Modellunschärfen durch eine MKS der WEA – liegt die Anzahl an Iterationen im Mittel bei 2,46. Im oberen Graphen von Abbildung 5.19 ist deren benötigte Anzahl für jeden MPC-Schritt über die Zeit aufgetragen.

Bei einer Schrittweite von  $\Gamma_h = 200$  ms, ohne MKS-Modell – damit ohne Modellunschärfen – aber unter Berücksichtigung der ersten Eigenschwingung des Turms werden in [24] mindestens 25 ms auf einem Prozessor mit 2,66 GHz Taktfrequenz benötigt, um ein OSP in einem MPC-Schritt zu bestimmen. Für den bereits mehrfach betrachteten Referenzlastfall  $I_{\text{Zufall}} = 2$  und  $\bar{V}_w = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sind die Rechenzeiten im unteren Graphen von Abbildung 5.19 dargestellt. Im Mittel liegen sie bei 7,5 ms und im Maximum bei 47,4 ms, wobei ein Intel Xeon E5-2643 Prozessor mit 6 Kernen auf einem Sockel und einer maximalen Taktfrequenz von 3,7 GHz eingesetzt wurde.

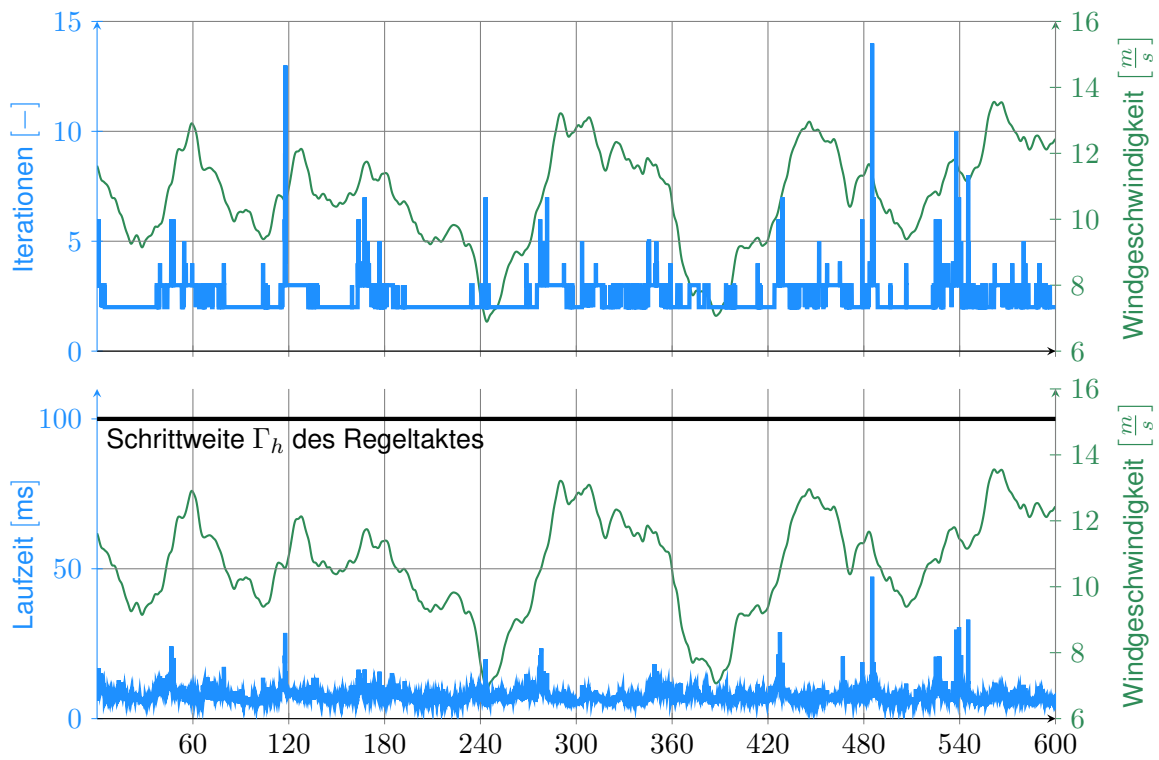


Abbildung 5.19: Anzahl von benötigten Iterationen zum Lösen der OSP in jedem MPC-Schritt und zugehörige Laufzeit

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, in einem ersten Teil eine MPC von WEA auf Basis indirekter Methoden zu erarbeiten und in einem zweiten Teil deren Eigenschaften bzgl. der Schädigung des Triebstranges zu untersuchen. Obwohl indirekte Methoden für ihre hohe Lösungseffizienz von OSP bereits weitreichend bekannt sind, finden sie im Rahmen einer MPC kaum Einsatz. Dies liegt vor allem an der Notwendigkeit, beim Starten der numerischen Berechnung mittels MSV bereits eine gültige Lösungsstruktur zu kennen. Für allgemeine OSP kann die Struktur beliebig kompliziert werden und mit Häufungspunkten von Schaltpunkten sogar unendlich viele Elemente besitzen, vgl. Abbildung 2.5 auf Seite 27. Für Problemstellungen mit regulärer Hamiltonfunktion und Zustandsbeschränkungen 1. Ordnung ist die optimale Steuerung  $u^*(t)$  jedoch stetig. Beide Voraussetzungen lassen sich ingenieurwissenschaftlich aufgrund von Messunsicherheiten und Modellunschärfen rechtfertigen. Ohne Regularisierung würde es dadurch hauptsächlich zu einer Bang-Bang Steuerung kommen, welche ein andauerndes Schalten zwischen Minimal- und Maximalwerten der Steuerungen bedeutet. Auf Basis der Regularität der Hamiltonfunktion lässt sich ein Verfahren aufbauen, welches die Lösungsstruktur hocheffizient iterativ bestimmt, was eine MPC für WEA auf Basis indirekter Methoden ermöglicht. Damit erhält man stetige optimale Steuerungen  $u^*(t)$ , welche in kurzen Laufzeiten auf modernen Prozessoren berechnet werden können, vgl. Abbildung 5.19 auf Seite 152.

Neben der Entwicklung des eigentlichen Verfahrens spielt für dessen Wettbewerbsfähigkeit sein Einfluss auf die Stromgestehungskosten eine wichtige Rolle. So stellt sich heraus, dass eine reine energie-optimale MPC ohne Berücksichtigung der Schädigung des Triebstranges diesen über Gebühr belastet und somit die Lebensdauer deutlich reduziert. Als Teil der Optimierung innerhalb der MPC wird die Drehzahl aktiv nahe des optimalen Wirkungsgrades gehalten. Während die konventionelle Regelung die Anlage entsprechend auslaufen lässt, verwendet MPC das Generatormoment aktiv, um die Drehzahl entsprechend der Windfluktuationen zu steuern. Dies führt zu vergrößerten maximalen Ausschlagsamplituden, welche bei einem für Torsion typischen Wöhlerexponenten von 8 selbst bei geringen Schwingspielzahlen entsprechend hohen Einfluss auf die Schädigung haben. Zusätzliche Bedingungen an das OSP, welches der MPC für WEA zugrunde liegt, erlauben es, diese Amplituden mittels der kinetischen Energie der Rotation des Rotors auszusteuern und zu reduzieren. Die Steigerung der Energieausbeute einer schädigungs-neutralen MPC eröffnet einen Spielraum, der im Rahmen einer schädigungs-sensitiven MPC sogar die Reduktion dieser Amplituden erlaubt. Dies führt damit zu einer Verlängerung der Lebensdauer und somit zu einer weiteren

Reduktion der Stromgestehungskosten.

In den letzten Jahren haben die durch WEA verursachten Lärmemissionen an Bedeutung gewonnen. So können in weiteren Schritten diese als zusätzliche Randbedingungen für eine Regelung hinzugenommen werden, wobei es zunächst gilt, eine geeignete Bewertung dieser Emissionen auf Basis der Zustandsgrößen aufzustellen. Auch müssen Schädigungen im Triebstrang berücksichtigt werden, die durch Anregungen von Eigenschwingungen entstehen. Hier bietet es sich jedoch an, wie bereits erwähnt, der MPC nachgeschaltete Methoden wie lineare Zustandsregelung einzusetzen, um daraus resultierende Schädigungen zu reduzieren. Für eine weitere Optimierung der Laufzeit zur Berechnung einer Lösung der OSP bietet sich eine Untersuchung des Einsatzes von Grafikkern-Prozessoren (GPU) an. Der Clenshaw-Algorithmus, welcher zur Auswertung des aerodynamischen Leistungsbeiwertes  $C_P$  eingesetzt wird, erlaubt eine Vektorisierung, für welche solche GPU in der Regel eingesetzt werden. Zuletzt sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, das MSV auf einer CPU zu parallelisieren. Das MSV unterteilt den Vorhersagehorizont  $[\ell, \ell + \mathcal{T}_h(\ell)]$  in mehrere Segmente, die parallel und unabhängig voneinander integriert werden können.



# Literatur

- [1] X. Lu, M. B. McElroy, and J. Kiviluoma, "Global potential for wind-generated electricity," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 106, pp. 10933–8, Jul 2009.
- [2] Statistisches Bundesamt des Bundesrepublik Deutschland, "Stromerzeugung im 1. Quartal 2019: 13,7% mehr Strom aus erneuerbaren Energie eingespeist." Pressemitteilung Nr. 235 vom 21. Juni 2019.
- [3] Fraunhofer-Institut für Solare Energiesysteme ISE, "Studie zu Stromgestehungskosten: Photovoltaik und Onshore-Wind sind günstigste Technologien in Deutschland." Presseinformation Nr. 5 vom 20. März 2018.
- [4] F. Krull, "Einsatz von großen Schwingungstilgern zur Reduzierung von Turmschwingungen bei Windenergieanlagen," in *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium*, (Dresden, Deutschland), 2017.
- [5] "Durchschnittliche EEG-Vergütung von Onshore-Windenergieanlagen in den Jahren 2000 bis 2021." <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/173266/umfrage/durchschnittliche-eeg-verguetung-von-wind-onshore-bis-2015/#statisticContainer>. Zuletzt nachgeschlagen am: 24.10.2021.
- [6] C. Kost, S. Shammungam, V. Jülch, N. Huyen-Tran, and T. Schlegl, "Stromgestehungskosten Erneuerbare Energien," Fraunhofer-Institut für Solare Energiesysteme ISE, März 2018.
- [7] L. Grüne and J. Pannek, *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, 2011.
- [8] C. Büskens and M. Gerds, "Numerical Solution of Optimal Control Problems with DAE Systems of Higher Index," *Opzimalsteuerungsprobleme in der Luft- und Raumfahrt*, pp. 27–38, 1999.
- [9] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mischenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley and Sons (Interscience Publishers), 1962.
- [10] R. Callies, *Entwurfsoptimierung und Optimale Steuerung*. Habilitationsschrift, Zentrum für Mathematik, Technische Universität München, Deutschland, 2003.
- [11] T. Weigl and R. Callies, "Structure-Preserving Differentiation of Functional Networks in Design Optimization and Optimal Control," in *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Engineering and Optimization*, (Lisbon, Portugal), 2010.
- [12] R. F. Hartl, S. P. Sethi, and R. G. Vickson, "A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints," *SIAM REVIEW*, vol. 37, no. 2,

- pp. 181–218, 1995.
- [13] J. F. Bonnans and A. Hermant, “Second-Order Analysis for Optimal Control Problems with Pure State Constraints and Mixed Control-State Constraints,” *Annales de l’Institut Henri Poincaré Non Linear Analysis*, vol. 26, pp. 561–598, 2009.
  - [14] D. Augustin and H. Maurer, “Sensitivity Analysis and Real-Time Control of a Container Crane under State Constraints,” in *Online Optimization of Large Scale Systems*, 2001.
  - [15] S. Gros, B. Chachuat, and D. Bonvin, “Neighbouring-Extremal Control for Singular Dynamic Optimisation Problems. Part I: Single-Input Systems,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 6, 2009.
  - [16] S. Gros, B. Chachuat, and D. Bonvin, “Neighbouring-Extremal Control for Singular Dynamic Optimisation Problems. Part II: Multiple-Input Systems,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 7, 2009.
  - [17] D. Bell and D. Jacobson, *Singular Optimal Control Problems*. Academic Press, 1975.
  - [18] B. Kugelmann and W. Weber, “Conflict Avoidance During Landing Approach Using Parallel Feedback Control,” in *Online Optimization of Large Scale Systems*, 2001.
  - [19] H. Maurer and D. Augustin, “Sensitivity Analysis and Real-Time Control of Parametric Optimal Control Problems Using Boundary Value Methods,” in *Online Optimization of Large Scale Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
  - [20] H. J. Pesch, “Numerical Computation of Neighboring Optimum Feedback Control Schemes in Real-Time,” *Applied Mathematics & Optimization*, vol. 5, no. 1, pp. 231–252, 1979.
  - [21] H. J. Pesch, “Real-Time Computation of Feedback Controls for Constrained Optimal Control Problems. Part 1: Neighbouring Extrimals,” *Optimal Control Applications & Methods*, vol. 10, 1989.
  - [22] L. Würth, R. Hannemann, and W. Marquardt, “Neighboring-Extremal Updates for Nonlinear Model-Predictive Control and Dynamic Real-Time Optimization,” *Journal of Process Control*, vol. 19, no. 8, pp. 1277–1288, 2009.
  - [23] D. Schlipf, D. Schlipf, and M. Kühn, “Nonlinear Model Predictive Control of Wind Turbines using LIDAR,” *Wind Energy*, vol. 16, 2013.
  - [24] S. Gros, M. Vukov, and M. Diehl, “A Real-time MHE and NMPC Scheme for Wind Turbine Control,” in *52<sup>nd</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, 52<sup>nd</sup> IEEE Conf. on Decision and Control, 2013.
  - [25] S. Gros, R. Quirynen, and M. Diehl, “An Improved Real-time Economic NMPC Scheme for Wind Turbine Control Using Spline-Interpolated Aerodynamic Coefficients,” *53<sup>rd</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, 2014.
  - [26] T. Burton, N. Jenkins, D. Sharpe, and E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Wiley & Sons, Inc., 2001.
  - [27] L. N. Trefethen, *Spectral Methods in MATLAB*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2000.

- 
- [28] S. Gros, "An Economic NMPC Formulation for Wind Turbine Control," 52<sup>nd</sup> IEEE Conf. on Decision and Control, 2013.
- [29] L. C. Henriksen, *Model Predictive Control of a Wind Turbine*. M.sc. thesis, Technical University of Denmark, 2007.
- [30] D. Schlipf, F. Sandner, S. Raach, D. Matha, and P. Cheng, "Nonlinear Model Predictive Control of Floating Wind Turbines," *Proceedings of the Twenty-third International Offshore and Polar Engineering*, vol. 23, 2013.
- [31] E. Haibach, *Betriebsfestigkeit, Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3 ed., 2006.
- [32] J. Gallego-Calderon and A. Natarajan, "Assessment of wind turbine drive-train fatigue loads under torsional excitation," *Elsevier, Engineering Structures*, pp. 189–202, 2015.
- [33] U. Jassmann, J. Berroth, D. Matzke, R. Schelenz, M. Reiter, G. Jacobs, and D. Abel, "Model Predictive Control of a Wind Turbine Modelled in SIMPACK," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 524, p. 012047, 2014.
- [34] C. Schulz, *Ganzheitliche Systemanalyse von Schaufelradantrieben*. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Universität Dresden, Deutschland, 2014.
- [35] C. Schwarz, "Optimale Steuerung eines Akrobatikflugzeuges," Diplomarbeit, Zentrum für Mathematik, Technische Universität München, Deutschland, 2011.
- [36] H. J. Sussmann and J. C. Willems, "300 Years of Optimal Control: From The Brachystochrone to the Maximum Principle," *IEEE Control Systems*, vol. 17, no. 3, pp. 32–44, 1997.
- [37] J. Bernoulli, "Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus: Solutioque Problematis a se propositi, de invenienda Linea Brachystochrona," *Acta eruditorum Lipsiensia*, pp. 206–211, 1697.
- [38] I. Bronstein, K. Semenajew, G. Musiol, and H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 7 ed., 2008.
- [39] B. Christiansen, *Theorie und Anwendung optimaler Multiprozesse mit Zustandsbeschränkungen*. Dissertation, Fachbereich Mathematik und Informatik der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät, Westfälische Wilhelms-Universität, Deutschland, 2010.
- [40] W. Powers, "Numerical Solution of Optimal Control Problems with DAE Systems of Higher Index," *On the Order of Singular Optimal Control Problems*, vol. 31, pp. 479–489, 1980.
- [41] A. Bryson and Y. Ho, *Applied Optimal Control*. Ginn and Company, 1969.
- [42] D. Jacobson, M. Lele, and J. Speyer, "New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 35, pp. 255–284, 1971.
- [43] J. P. McDanell and W. F. Powers, "Necessary Conditions Joining Optimal Singular and Nonsingular Subarcs," *SIAM Journal on Control*, vol. 9, no. 2, pp. 161–173, 1971.

- [44] J. Speyer, "Necessary and Sufficient Conditions for Singular Control Problems; A Transformation Approach," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 33, pp. 163–187, 1971.
- [45] R. Gabasov and F. Kirillova, "Higher Order Necessary Conditions for Optimality," *SIAM Journal of Control*, vol. 10, pp. 127–167, 1972.
- [46] A. Krener, "The High Order Maximum Principle and Its Application to Singular Extremals," *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 15, pp. 256–292, 1977.
- [47] R. Lewis, "Definitions of order and junction conditions in Singular Optimal Control Problems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 18, no. 1, pp. 21–32, 1980.
- [48] B. Goh, "Necessary Conditions For Singular Extremals Involving Multiple Control Variables," *SIAM Journal on Control*, vol. 4, no. 4, pp. 716–731, 1966.
- [49] B. Goh, "Optimal Rocket Trajectories: Singular Control," in *Proceedings of the 27<sup>th</sup> Chinese Control Conference*, pp. 479–484, 2008.
- [50] H. Maurer, "An Example of a Continuous Junction for a Singular Control Problem of Even Order," *SIAM Journal on Control*, vol. 13, no. 4, pp. 716–731, 1975.
- [51] D. Bell, "An Example of a Continuous Junction for a Singular Control Problem of Even Order," *International Journal of Control*, vol. 29, no. 6, pp. 981–990, 1979.
- [52] M. I. Zelikin and V. F. Borisov, *Theory of Chattering Control*. Birkhäuser, 1994.
- [53] C. Marchal, "Chattering Arcs and Chattering Controls," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 11, no. 5, pp. 441–468, 1973.
- [54] C. Schwarz, R. Callies, and A. Szabo, "Real-Time Optimization by Indirect NMPC Methods," in *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Engineering and Optimization*, (Lisabon, Portugal), 2014.
- [55] W. Kohn, A. Nerode, J. Remmel, and X. Ge, "Multiple Agent Hybrid Control : Carrier Manifolds and Chattering Approximations to Optimal Control," in *Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, no. December, 1994.
- [56] Z. Artstein, "The Chattering Limit of Singularly Perturbed Optimal Control Problems," in *Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, 2000.
- [57] Y. Song, X. Liao, Z. Sun, and Y. Li, "New Approach to Eliminating Variable Structure Control Chattering with Application to Flight Vehicles," pp. 59–63, 2004.
- [58] M. Caponigro, R. Ghezzi, B. Piccoli, and E. Tr, "Regularization of chattering phenomena via bounded variation controls," pp. 1–16, 2013.
- [59] A. Fuller, "Further Study of an Optimum Non-linear Control System," *Journal of Electronics and Control*, vol. 17, no. 3, pp. 283–300, 1964.
- [60] P. F. Orlowski, *Praktische Regelungstechnik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [61] K. Königsberger, *Analysis 2*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [62] J. Lunze, *Regelungstechnik 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [63] D. Mayne, J. Rawlings, C. Rao, and Scokaert, "Constrained model predictive control : Stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, pp. 789–814, 2000.
- [64] A. Propoi, "Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic

- systems,” *Automation and Remote Control*, vol. 24, no. 7, pp. 837–844, 1963.
- [65] E. Lee and L. Markus, *Foundations of optimal control theory*. Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [66] J. Richalet, A. Rault, J. Testud, and J. Papon, “Algorithmic control of industrial processes,” in *Proceedings of the Fourth IFAC symposium on identification and system parameter estimation*, pp. 1119–1167, 1976.
- [67] T. Qin, J.S. and Badgwell, “An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology,” *Control Engineering Practice*, vol. 11, pp. 733–764, 2003.
- [68] B. Stephens and C. Atkeson, “Push recovery by stepping for humanoid robots with force controlled joints,” in *10<sup>th</sup> IERR-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids)*, pp. 52–59, 2010.
- [69] G. Stewart and F. Borrelli, “A Model Predictive Control Framework for Industrial Turbo-diesel Engine Control,” in *47<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5704–5711, 2008.
- [70] C. Chen and L. Shaw, “On receding horizon feedback control,” in *Automatica*, vol. 18, pp. 349–352, 1982.
- [71] L. Evans, *Partial Differential Equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2008.
- [72] A. Körber, *Extreme and Fatigue Load Reducing Control for Wind Turbines: A Model Predictive Control Approach using Robust State Constraints*. Dissertation, Fakultät III - Prozesswissenschaften der Technischen Universität Berlin, 2014.
- [73] E. Gaßner, “Festigkeitsversuche mit wiederholter Beanspruchung im Flugzeugbau,” *Deutsche Luftwacht, Ausgabe Luftwissen 6*, pp. 61–64, 1939.
- [74] H. Gudehus, H. und Zenner, *Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung*. Verlag Stahleisen GmbH, 4 ed., 2007.
- [75] B. Schlecht, *Maschinenelemente 1*. Pearson Deutschland GmbH, 2015.
- [76] B. Schlecht, *Maschinenelemente 2*. Pearson Deutschland GmbH, 2010.
- [77] Forschungskuratorium Maschinenbau e.V., “FKM Guideline, Analytical Strength Assessment of Components,” 2012.
- [78] M. Wächter, C. Müller, and A. Esderts, *Angewandter Festigkeitsnachweis nach FKM-Richtlinie*. Springer Vieweg, 2017.
- [79] B. Klein, *FEM*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2007.
- [80] G. Freebury and W. Musial, “Determining Equivalent Damage Loading for Full-Scale Wind Turbine Blade Fatigue Tests,” in *19<sup>th</sup> American Society of Mechanical Engineers (ASME) Wind Energy Symposium*, (Reno, Nevada, USA), 2010.
- [81] G. Hayman, “MLife Theory Manual for Version 1.00,” tech. rep., National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2012. Zuletzt nachgeschlagen am: 1.09.2019.
- [82] M. Diehl, H. Bock, H. Diedam, and P. Wieber, “Fast Direct Multiple Shooting Algorithms for Optimal Robot Control,” in *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*, 2005.
- [83] H. Bock and K. Plitt, “A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems,” in *Proceedings 9<sup>th</sup> IFAC World Congress Budapest*, pp. 242–247, 1984.

- [84] M. Hanke-Bourgeois, *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Vieweg & Teubner, 3<sup>rd</sup> ed., 2009.
- [85] G. Schanzer and R. Callies, "Multiple constrained rivaling actuators in the optimal control of miniaturized manipulators," *Multibody System Dynamics*, no. 19, pp. 21–43, 2007.
- [86] B. Simeon, *Computational Flexible Multibody Dynamics*. Springer, 2010.
- [87] R. Craig and A. Kurdila, *Fundamentals of Structural Dynamics*. Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [88] J. Jonkman, S. Butterfield, W. Musial, and G. Scott, "Definition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development," tech. rep., National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2009.
- [89] P. Moriarty and A. Hansen, "AeroDyn Theory Manual," tech. rep., National Renewable Energy Laboratory (NREL), 2005. NREL/TP-500-36881.
- [90] A. Betz, "Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnützung des Windes durch Windmotoren," *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, vol. 26, 1920.
- [91] A. Gil and J. Segura, *Numerical Methods for Special Functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [92] E. Bossanyi, "Further load reductions with individual pitch control," *Wind Energy*, vol. 8, no. 4, pp. 481–485, 1979.
- [93] N. Kelley and B. Jonkman, *NWTC Information Portal (TurbSim)*, Last modified 14-June-2016; Accessed 26-July-2019.
- [94] International Electrotechnical Commission (IEC), "Wind energy generation systems - Part 1: Design requirements," 2010. IEC 61400-1 Ed.3.
- [95] F. Jarre and J. Stoer, *Optimierung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.