UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Publicación Cuatrimestral. Vol. 7, No. Especial, Diciembre, 2022, Ecuador (p. 227 -238). Edición Contínua
https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/index
revista.bdlaciencia@utm.edu.ec
Universidad Técnica de Manabí
DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4791.

SOBRE LOS POLINOMIOS DE HERMITE Y SU CONVERGENCIA EN SERIE

Wagner Alfredo Moreira Mera [1*], **Adrián Ramón Infante Línares** [2].

[1]Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador. Email: wagnera.moreira@educacion.gob.ec
[2] Department of Mathematics, Universidad Simón Bolívar, A.P. 89000 Caracas, Venezuela Email: ainfante@usb.ve

*Autor para correspondencia: wagnera.moreira@educacion.gob.ec

Recibido: 28-06-2022 / Aceptado:13-12-2022 / Publicación:27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas .

Ciencias Matemáticas

RESUMEN

En este trabajo hacemos un estudio de los resultados sobre las propiedades de los polinomios de Hermite. Estos polinomios forman una familia de polinomios ortogonales respecto a la medida gaussiana y es un sistema cerrado. Presentamos las propiedades básicas hasta introducir la convergencia de series Fourier-Hermite. También presentamos una definición para polinomios de Hermite con cierto parámetro, como una extención de estos polinomios en la forma clásica, motivando a estudiar a los polinomios de Hermite complejo y sus propiedades.

Palabras clave: Polinomios de Hermite, Hermite complejo, convergencia en serie.

ON THE HERMITE POLYNOMIALS AND THEIR SERIES CONVERGENCE

ABSTRACT

In this paper we make a study of the results on the properties of the Hermite polynomials. These polynomials form a family of orthogonal polynomials with respect to the Gaussian measure and it is a closed system. We present the basic properties until we introduce the convergence of Fourier-Hermite series. We also present a definition for Hermite polynomials with a certain parameter, as an extension of these polynomials in the classical form, motivating to study complex Hermite polynomials and their properties.

Keywords: Hermite Polynomials, Complex Hermite Polynomial, convergence in series.

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Fundada en 1952

BASES DE LA CIENCIA
REVISTA CIENTÍFICA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

SOBRE OS POLINÔMICOS DE HERMITE E SUA CONVERGÊNCIA DE SÉRIE

RESUMO

Este trabalho fazemos um estudo dos resultados sobre as propriedades dos polinômios de Hermite. Esses polinômios formam uma família de polinômios ortogonais em relação à medida gaussiana e é um sistema fechado. Apresentamos as propriedades básicas até introduzirmos a convergência da série de Fourier-Hermite. Apresentamos também uma definição para polinômios de Hermite com um determinado parâmetro, como uma extensão desses polinômios na forma clássica, motivando o estudo de polinômios complexos de Hermite e suas propriedades.

Palavras chave: Polinômios de Hermite, Complexo de Hermite polinômial, convergência em série.

Citación sugerida: Moreira, W. Infante, A. (2022). SOBRE LOS POLINOMIOS DE HERMITE Y SU CONVERGENCIA EN SERIE. Revista Bases de la Ciencia, 7(Especial), 227-238. DOI: https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4791.

CC BY NC ND

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo está dedicado a los polinomios ortogonales de Hermite. La ortogonalidad se entiende en el marco de espacios de Hilbert de funciones reales integrables al cuadrado respecto a la medida gaussiana $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$ sobre $\mathbb{R}$. Un primer enfoque, muy sencillo, lo obtenemos partiendo del hecho que la medida gaussiana sobre $\mathbb{R}$ es tal que las funciones x^n son integrables, entonces el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt nos proporcionará una familia de polinomios ortogonales, que nos permite definir los polinomios ortogonales de Hermite.

Comenzaremos este trabajo con el material preliminar para tratar la ortogonalidad de los polinomios de Hermite. Estudiamos los resultados básicos sobre los polinomios de Hermite. Observemos que muchas propiedades de los polinomios de Hermite son solo una consecuencia desde un punto de vista funcional abstracto. Por ejemplo, el hecho de que satisfagan una fórmula de recurrencia lineal de tres términos (como la sucesión de Fibonacci) se puede obtener simplemente de la relación de ortogonalidad. Además, lo contrario obtenido por Favard es cierto: en condiciones muy generales, una sucesión de polinomios que satisfacen tal tipo de fórmula de recurrencia son ortogonales con respecto a alguna medida de Borel.

Se pueden obtener propiedades más generales en un marco muy general. Para los polinomios de Hermite, la medida que los hace ortogonales viene dada por una función de peso positiva continua e^{-x^2} en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Este hecho tiene consecuencias sobre la distribución de los ceros de los polinomios de Hermite (Kuijlaars y Milson, 2015) y puede ser usado para propósitos especiales en interpolación.

Otra consecuencia es que los polinomios de Hermite satisfacen una ecuación diferencial tipo Sturm-Liouville. En general, a las soluciones de un problema homogéneo de Sturm-Liouville se les puede dar la estructura de espacios de Hilbert con una base ortogonal natural formada por funciones propias (no necesariamente polinomios). Eso es algo que se hace con herramientas de Análisis Funcional, sólo vamos a presentar la ecuación diferencial en casos particulares. Otra técnica que se puede aplicar a la familia de polinomios ortogonales de Hermite es obtener su función generadora, es decir, una función de dos variables $G(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)t^n$ de una forma muy sencilla. Se puede establecer la equivalencia entre la ortogonalidad, la recurrencia y las relaciones diferenciales para una familia de polinomios. La función generadora puede ayudarnos a vincular las varias formas alternativas de introducir una familia de polinomios ortogonales. También existe una expresión, la llamada fórmula de Rodrigues, que nos permite obtener los polinomios de Hermite por derivación. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Los polinomios de Hermite forman un sistema ortogonal cerrado de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, ver (Szego, 1939) y por lo tanto, el siguiente paso es definir los desarrollos en series de Fourier Hermite y estudiar su convergencia en norma.

Finalmente, presentamos la familia de polinomios de Hermite complejo y algunas propiedades. Estas extenciones aparecen de manera natural si cambiamos el diferencial clásico por los operadores diferenciales de Cauchy y tiene sentido, en este caso, obtener las fórmulas que cumplen todas las familias de polinomios ortogonales, tales como la fórmula de Rodrigues o la función generatriz.

1.1. Definición de los polinomios de Hermite

Se considera la base de los polinomios $1, x, x^2, \ldots$ donde se tuvo la ortogonalización gracias al método de Gramm Schmidt respecto a la medida gaussiana $d\mu x = e^{-x^2}dx$ sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$, para funciones en el espacio

$$L^2(\mathbb{R},\, e^{-x^2}dx) = f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)e^{-x^2}dx < \infty$$

con el producto interno definido para $f,\ g \in L^2(\mathbb{R},\, e^{-x^2}dx)$ por

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}dx.$$

se obtuvo la siguiente familia de polinomios ortogonales

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= 1\\
h_1(x) &= x - \frac{1}{h_1}\int_{-\infty}^{+\infty} 1t\, e^{-t^2}dt = x\\
h_2(x) &= x^2 - \frac{1}{{h_1}^2}\int_{-\infty}^{\infty} 1x^2e^{-2}dx - \frac{x}{h_2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2xe^{-x^2}dx = x^2 - \frac{1}{2}\\
h_n(x) &= x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k(x)}{\langle h_k,\, h_k\rangle}\langle t^n,\, h_k(t)\rangle
\end{aligned}$$

Donde se define los polinomios de Hermite como la familia de polinomios ortogonales

$$H_n(x) = 2^n h_n(x).$$

Sus seis primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1\\
H_1(x) &= 2x\\
H_2(x) &= 4x^2 - 2\\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x\\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12\\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x\\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120
\end{aligned}$$

La fórmula de Rodrigues, permite definir a los polinomios ortogonales con una fórmula explícita y sencilla

Se define a los polinomios de Hermite, con la fórmula de Rodrigues, por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \qquad n = 0,\, 1,\, 2, \ldots \tag{1.1}$$

1.2. Ortogonalidad de los polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son un sistema ortogonal en $L^2(\mathbb{R},\, e^{-x^2}dx)$, con un cálculo directo, se probó que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)d(x) = \sqrt{\pi}2^n!\delta_{nm} \qquad n,\, m = 0,\, 1, \ldots$$

1.3. Función Generatriz de los polinomios de Hermite

Los polinomios ortogonales son caracterizados por la función generatriz, esta propiedad puede ser usada para definir a una familia de polinomios ortogonales. En el caso de los polinomios de Hermite, utilizando la fórmula de Rodrigues, se pudo obtener la función generatriz a partir de la función

$$G(x,\, t) = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = e^{2tx-x^2} \tag{1.2}$$

Para obtener la expresión de la función generatriz para polinomios de Hermite, se encontró el desarrollo en serie de Taylor de cada lado de la igualdad (1.2), igualando término a término se pudo definir la fórmula deseada gracias a la fómula de Rodrigues, es decir

$$G(x,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \quad \text{y} \quad e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{\partial^n G}{\partial (t-x)^n}\Big|_{x=0}}{n!} x^n$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= \left.\frac{\partial^n G}{\partial x^n}\right|_{x=0} = (-1)^n \left.\frac{\partial^n G}{\partial (t-x)^n}\right|_{x=0} \\ &= e^{t^2} (-1)^n \left.\frac{\partial^n e^{-(t-x)^2}}{\partial (t-x)^n}\right|_{x=0} = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = H_n(t) \end{aligned}$$

Así que la función generatriz de los polinomios de Hermite es

$$G(t, x) = e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n \tag{1.3}$$

1.4. Fórmula de recurrencia de los polinomios de Hermite

Las fórmulas de recurrencias son una herramienta útil al momento de trabajar con polinomios ortogonales. A partir de la función generatriz (1.3), se derivó con respecto a t, se obtuvo una fórmula para la derivada de los polinomios de Hermite:

$$2x e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(t)}{n!} x^n$$

Al término de la derecha se remplazó por la serie de potencias y al de la izquierda se lo reordenó de modo que sea potencias de $n+1$ y poder igualar término a término, se tuvo que

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} = H_0'(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}'(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

y por lo tanto

$$H_0'(t) = 0 \quad \text{y} \quad 2H_n(t) = \frac{H_{n+1}'(t)}{(n+1)} \tag{1.4}$$

Luego a la función generatriz (1.3), se la derivó con respecto de x, obteniendo la fórmula de recurrencia a tres términos.

$$(2t - 2x) e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} n x^{n-1}$$

Edición Especial - ISSN 2588-0764

Se escribió el lado izquierdo reemplazando por (1.3), donde se pudo definir a las series para que sean potencias de x^n y poder igualar término a término, obteniendo

$$2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n - 2n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n-1}(t)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}(t)}{n!}nx^n$$

Comparando los coeficientes, se obtuvo que

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0, \qquad \text{para } n = 0,\, 1,\, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Se combinó (1.4) y (1.5), donde se obtuvo

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t)$$

1.5. Ecuación de Hermite

Las fórmulas de recurrencias proporcionan las ecuaciones de Hermite de orden n, es decir, los polinomios de Hermite son soluciones de las ecuaciones de Hermite:

$$\begin{aligned} &y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad y = H_n(x) \\ &z'' = (2n + 1 - x^2)z = 0, \qquad z = e^{-x^2/2}H_n(x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Equivalentemente, se puede decir que H_n es una auto función del operador oscilador armónico

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx},$$

asociada al auto valor $-n$

2. SERIES DE POTENCIAS FOURIER-HERMITE

Los polinomios de Hermite normalizados respecto a la medida $d\mu(x)dx = e^{-x^2}dx$, los denotamos por

$$h_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}}H_n(x).$$

Es claro que los polinomios de Hermite normalizados satisfacen propiedades similares a los polinomios de Hermite.
Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R},\, e^{-x^2})$, se define su coeficiente de Hermite-Fourier por

$$\widehat{f}_H(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_k(y)e^{-y^2}\,dy = \langle f,\, h_k\rangle$$

Su desarrollo en polinomios de Hermite es

$$Sf(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{f}_H(k)h_k(x)$$

y la suma parcial $n-$ésima se define por

$$S_nf(x) = \sum_{k=0}^{n}\widehat{f}_H(k)h_k(x)$$

Con un proceso estándar, usando la fórmula de Christofell-Darboux, se obtuvo una representación integral para las sumas parciales

$$S_n f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x,\, y) f(y) e^{-y^2} dy$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet-Szegö, dado por la fórmula

$$D_n(x,\, y) = sum_{k=0}^{n} h_k(x) h_k(y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{h_{n+1}(x) h_n(y) - h_n(x) h_n(y)}{x - y}$$

Los polinomios de Hermite son densos en $L^p(e^{-x^2}dx)$ para $1 \le p < \infty$. Pollard (1948) demostró que

Teorema 2.1. *Si $f \in L^1(e^{-x^2}dx)$, entonces $S_n f$ converge en $L^p(e^{-x^2}dx)$, es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n f(x) - f(x)^p \, e^{-x^2} dx \to 0,$$

si y sólo si $p = 2$.

Cuando $p = 2$ es el caso conocido por la Teoría de Espacios de Hilbert.
Por el principio de acotación uniforme se pudo ver que la condición de convergencia en $L^p(\mu)$, $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$ de las sumas parciales es equivalente a la acotación en $L^p(e^{-x^2}dx)$:

$$S_n f_{p,\mu} \le C_p f_{p,\mu}.$$

Luego Askey y Wainger (1965) pudo sacar su conclusión que si

$$(S_n f) e^{-x^2/2}{}_p \le C_p f \, e^{-x^2/2}{}_p,$$

se cumple sólo si $4/3 < p < 4$.
Este resultado propuso el estudio de desarrollos en funciones de Hermite, definido como

$$\mathcal{H}_n(x) = h_n(x) e^{-x^2/2}$$

Muckenhoupt (1970).

3. POLINOMIOS DE HERMITE COMPLEJO

Una extensión de los polinomio de Hermite real $H_m(x)$ son los polinomios de Hermite complejo $H_{p,q}(z, \overline{z})$.(Ali, Bagarello y Honnouvo, 2010) para $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x,\, y \in \mathbb{R}$, definidos por

$$H_{p,q}(z,\, \overline{z}) = (-1)^{p+q} e^{z^2} \partial_{\overline{z}}^{p} \partial_{z}^{q} \left(e^{-z^2}\right),$$

donde ∂_z y $\partial_{\overline{z}}$ se definió por

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad i^2 = -1.$$

Para $p < 0$ o $q < 0$ definimos $H_{p,q}(z, \overline{z}) = 0$.

EDICIÓN ESPECIAL - ISSN 2588-0764

Los polinomios de Hermite complejo se pueden expresar en términos de los polinomios de Hermite real $H_n(x)$ como

$$H_{p,q}(z,\overline{z}) = p!q!\left(\frac{i}{2}\right)^{p+q}\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}(-1)^{p+j}i^{j+k}\frac{H_{j+k}(x)}{j!k!}\frac{H_{p+q-j-k}(y)}{(p-j)!(q-k)!}$$

Ellos constituyen una base ortogonal del espacio de Hilbert $L^2\left(\mathbb{C},\ e^{-z^2}dxdy\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_{p,q}(z,\overline{z})\overline{H_{m,n}(z,\overline{z})}e^{-z^2}\,dxdy = \pi\delta_{pm}\delta_{qn}p!q!$$

4. FUNCIÓN GENERATRIZ PARA HERMITE COMPLEJO

Sean las siguientes funciones generatrices:

a)

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}H_{m,n}(z,\ \overline{z}) = (\overline{z}-u)^n e^{uz}$$

a')

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}H_{m,n}(z,\ \overline{z}) = (z-v)^p e^{v\overline{z}}$$

b)

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}H_{m,n}(z,\ \overline{z}) = e^{uz+v\overline{z}-uv} \tag{4.1}$$

Se tienen que estas identidades son válidas para todo u, v, z complejos. Ghanmi (2013)

Se definió las funciones de Hermite complejas por

$$\mathcal{H}_{p,q}(z,\overline{z}) = e^{z^2/2}H_{p,q}(z,\overline{z})$$

4.1. Fórmula de recurrencia complejo

Para esta propiedad se tuvo en cuenta que ∂_z y con su conmutación $(-\partial_z+\partial\overline{z})^p$, podemos tener

$$\partial_z H_{p,q}\left(z,\overline{z}\right) = \partial_z\left(-\partial_z+\overline{z}\right)^q\left(z\right)^p$$

aplicando conmutatividad quedó

$$\left(-\partial_z+\overline{z}\right)^q\partial_z\left(z\right)^p = pH_{p-1,q}\left(z,\overline{z}\right)$$

analogamente se tuvo

$$\partial_z H_{p,q}\left(z,\overline{z}\right) = \partial_z\left(-\partial_z+\overline{z}\right)^p\left(z\right)^{-q}$$

y

$$\left(-\partial_z+\overline{z}\right)^p\partial_z\left(z\right)^{-q} = pH_{p,q-1}\left(z,\overline{z}\right)$$

Se reescribió como:

$$\left(-\partial_z + \bar{z}\right)\partial_{\bar{z}} Hq, p = qH_{q,p},$$

Estos $H_{p,q}$ son autofunciones de ecuaciones diferencial de segundo orden, del operador de tipo Laplaciano, donde las relaciones estan definidas en Ghanmi (2013).
Donde se realizó algunas cuentas y la ecuación quedó.

$$H_{p+1,q}\left(z,\bar{z}\right) = \left(z^{-q}\right)\left(-\partial_{\bar{z}} + z\right)^{1+p} = \left(-\partial_{\bar{z}} + z\right) H_{p,q}\left(z - \bar{z}\right) = -\partial_{\bar{z}} H_{p,q} + zH_{p,q}.$$

4.2. Polinomios de Hermite generalizados

Liu (2020) estudia los polinomios de Hermite definidos a partir de la fórmula de Rodrigues en la forma clásica.
En la siguiente demostración, se empezó partiendo de los polinomios de Hermite en la forma real, donde se definió la generalización de los polinomios de Hermite, y así llegar al desarrollo en serie Fourier-Hermite en los complejos.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \tag{4.2}$$

cuyas propiedades fueron ampliamente estudiadas y sus propiedades analizadas en Szego (1939). En este trabajo se estudió las propiedades de una familia de polinomios de Hermite ortonormales con respecto a la distribución normal con densidad

$$(2\pi\alpha)^{-1} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}, \qquad \alpha \neq 0$$

Se pudo definir al polinomio de Hermite generalizado por

$$H_n^\alpha(x) = \alpha^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) \tag{4.3}$$

Como la función generatriz para los polinomios de Hermite clásicos es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \exp\left(2xt - t^2\right)$$

Esto permitió obtener la función generatriz de los polinomios H_n^α,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^\alpha(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)}{n!}\left(\sqrt{\alpha}t\right)^n = \exp\left(2xt - \alpha t^2\right) \tag{4.4}$$

De la función generatriz (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!} H_n^\alpha\left(y + \frac{p}{2}\right) H_m^\alpha\left(y - \frac{p}{2}\right) &= e^{2\left(\left(y+\frac{p}{2}\right)u + \left(y-\frac{p}{2}\right)\right) - \alpha\left(u^2+v^2\right)} \\ &= e^{2y(u+v)+p(u-v)-\alpha\left(u^2+v^2\right)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para simplificar las cuentas se pudo definir la función de Hermite generalizada por

$$h_n^\alpha(x) = e^{-x^2/2\alpha} H_n^\alpha(x) \tag{4.6}$$

Donde h_n^α está definido como los polinomios de Hermite generalizados.

Se consideró la función

$$\nu(f,\, g)(p,q) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyq} f\left(y+\frac{p}{2}\right) \overline{g\left(y-\frac{p}{2}\right)}\, dy$$

En particular

$$\begin{aligned} \nu\left(h_m^\alpha,\; h_n^\alpha\right)(p,q) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyq} e^{-\frac{(y+\frac{p}{2})^2}{2\alpha} - \frac{(y-\frac{p}{2})^2}{2\alpha}} H_m^\alpha\left(y+\frac{p}{2}\right) H_n^\alpha\left(y-\frac{p}{2}\right) dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{p}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyq-\frac{y^2}{2\alpha}} H_m^\alpha\left(y+\frac{p}{2}\right) H_n^\alpha\left(y-\frac{p}{2}\right) dy \end{aligned} \tag{4.7}$$

Luego la combinación de (4.5) y (4.7), dio como resultado

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}\nu\left(h_n^\alpha, h_m^\alpha\right)(p.q) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}+iyq} e^{-\alpha\left(u^2+v^2\right)+2y(u+v)+p(u-v)} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} e^{-\alpha\left(u^2+v^2\right)+p(u-v)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}+iyq+2y(u+v)} dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} e^{-\alpha\left(u^2+v^2\right)+p(u-v)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\alpha}+(2(u+v)+iq)y}\, dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} e^{-\alpha\left(u^2+v^2\right)+p(u-v)} (\alpha\pi)^{1/2} e^{\alpha\frac{(2(u+v)+iq)^2}{4}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2+\alpha^2 q^2}{4\alpha}} e^{p(u-v)+\alpha q(u+v)i+2\alpha uv} \end{aligned}$$

En resumen, se tuvo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}\nu\left(h_n^\alpha, h_m^\alpha\right)(p.q) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2+\alpha^2 q^2}{4\alpha}} e^{p(u-v)+\alpha q(u+v)i+2\alpha uv} \tag{4.8}$$

Se definió (4.8) en forma compleja

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}\nu\left(h_n^\alpha, h_m^\alpha\right)(z.\overline{z}) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} + u(p+i\alpha q) - v(p-i\alpha q)i + 2\alpha uv \tag{4.9}$$

Se usó la notación $z = p + i\alpha q$, y se obtuvó

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{v^m}{m!}\nu\left(h_n^\alpha, h_m^\alpha\right)(z.\overline{z}) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} e^{2\alpha uv+uz-v\overline{z}}$$

Aquí se pudieron deducir los resultados clásicos, como en los siguientes corolarios:
Si para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(y) H_n(y) e^{-y^2-ity}\, dy = (-1)^n \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{m+n}{2}} H_{m,n}\left(-\frac{it}{\sqrt{2}},\, \frac{it}{\sqrt{2}}\right)$$

El Corolario 4.2 se obtuvo cuando $p = 0$ y $\alpha = 1$.
Si para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m\left(y+\frac{t}{2}\right) H_n\left(y+\frac{t}{2}\right) e^{-y^2-ity}\, dy = (-1)^n \sqrt{\pi}\, 2^{\frac{m+n}{2}} H_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

El corolario 4.2 se tiene cuando $q = 0$ y $\alpha = 1$.
Los polinomios de Hermite complejo $H_{m,n}$ forman una base ortogonal del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{C},\, dz)$

El desarrollo en serie de Fourier-Hermite para una función $f(z, \overline{z})$ fue definida sobre $\mathbb{C}$, donde tuvo la forma

$$f(z,\, \overline{z}) \sim \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} H_{n,m}(z,\, \overline{z})$$

donde

$$c_{n,m} = \frac{1}{\pi \delta_{mn} m! n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \overline{z}) \overline{H_{m,n}(z, \overline{z})} e^{-z^2}\, dxdy$$

para funciones medibles $f(z,\, \overline{z})$ con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \overline{z}) e^{-z^2}\, dxdy < \infty,$$

cuando se cumple que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z,\, \overline{z}) - \sum_{n,m=0}^{N} c_{n,m} H_{n,m}(z,\, \overline{z}) e^{-z^2}\, dxdy = 0.$$

5. CONCLUSIONES

En relación a los objetivos planteados en la presente investigación se tuvo que:

- En esta familia de los polinomios ortogonales clásicos de Hermite, con las características principales en la fórmula de recurrencia a tres términos que permitió deducir a los polinomios de Hermite como solucion de la ecuación diferencial de Hermite.

- Los polinomios de Hermite normalizados tienen propiedades similares a los polinomios de Hermite clásicos, que dada una función en un espacio define su coeficiente de Hermite-Fourier con su desarrollo en suma parciales y gracias a la fórmula de Christofell-Darboux se puede obtener una representación integral por principios de acotación.

- Las extensiones al plano complejo al cambiar el diferencial en la fórmula de Rodrigues por los operadores de Cauchy, se obtuvo así propiedades como la fórmula de Rodrigues o la función generatriz en dicho espacio.

6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

7. REFERENCIAS

Ali, S. T., Bagarello, F., y Honnouvo, G. (2010). Modular structures on trace class operators and applications to Landau levels. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *43*(10), 105202. https://doi.org/10.1088/1742-6596/237/1/012001

Askey, R., y Wainger, S. (1965). Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series. *American Journal of Mathematics*, *87*(3), 695-708. https://doi.org/10.2307/2373069

Ghanmi, A. (2013). Operational formulae for the complex Hermite polynomials $Hp, q(z, z$). *Integral transforms and special functions*, *24*(11), 884-895. https://doi.org/0.1080/10652469.2013.772172

Kuijlaars, A. B., y Milson, R. (2015). Zeros of exceptional Hermite polynomials. *Journal of Approximation Theory*, *200*, 28-39. https://doi.org/10.1016/j.jat.2015.07.002

Liu, Z.-G. (2020). On the complex Hermite polynomials. *Filomat*, *34*(2), 409-420.

Muckenhoupt, B. (1970). Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, *147*(2), 419-431. https://doi.org/10.2307/1995204

Pollard, H. (1948). The Mean Convergence of Orthogonal Series. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, *63*(2), 355-367. https://doi.org/10.2307/1990435

Szego, G. (1939). *Orthogonal polynomials* (Vol. 23). American Mathematical Soc.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Wagner Moreira	Metodologia, búsqueda de bibliografía, diseño del articulo y resultados numéricos.
Adrián Infante	Redacción, revisión y analisis de los polinomios de Hermite en los complejos .