



## APROXIMACIÓN DE FALLAS, UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NO CONFORMES

Hugo Córdova Morán<sup>1</sup> , Raúl Manzanilla<sup>2</sup> , Rodolfo Gallo<sup>3</sup> 

<sup>1</sup>Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.

Email: [hcordova2444@utm.edu.ec](mailto:hcordova2444@utm.edu.ec)

<sup>2</sup>Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: [rmanzanilla@yachaytech.edu.ec](mailto:rmanzanilla@yachaytech.edu.ec)

<sup>3</sup>Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: [rgallo@yachaytech.edu.ec](mailto:rgallo@yachaytech.edu.ec)

\*Autor para correspondencia: [hcordova2444@utm.edu.ec](mailto:hcordova2444@utm.edu.ec)

Recibido: 24-12-2021/ Aceptado: 13-12-2022/ Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas 

### RESUMEN

En este estudio se trató el problema de determinar la ubicación de fallas en 1D, utilizando el método de elementos finitos no conformes para dar solución al problemas de aproximación de discontinuidades. Este es un problema que se presenta en las áreas de geología, imágenes de satélites, reconocimiento de patrones, modelos estructurales de yacimiento de petróleo, entre otros. Para la realización del presente trabajo de investigación, se definieron los espacios de aproximación de funciones basadas en elementos finitos no conformes utilizando polinomios de grado uno y dos, en una dimensión. Luego, conocido un conjunto finitos de puntos asociados a una función que puede presentar la discontinuidad, se realizó un proceso de ajuste de tipo mínimos cuadrados, con la finalidad de detectar los puntos posibles de discontinuidades. Finalmente, haciendo un análisis del error sobre los datos considerados como información sobre la función y haciendo uso del fenómeno de Gibbs, se localizaron los puntos candidatos para ser aproximaciones de los puntos de discontinuidad de la función en estudio. Aquí, se presenta el proceso numérico para la obtención de los puntos de discontinuidad y se muestra la eficiencia del mismo mediante ejemplos numéricos.

**Palabras clave:** Aproximaciones de funciones, elementos finitos no conformes, funciones discontinuas.

### FAILURE APPROXIMATION USING THE NON-CONFORMING FINITE ELEMENT METHOD

### ABSTRACT

This study addressed the problem of determining the location of faults in 1D, using the non-conformal finite element method to solve the problem of approximation of discontinuities. This is a problem that is presented in the areas of geology, satellite images, pattern recognition, structural models of oil reservoir, among others. For the realization of the





present research work, the approximation spaces of functions based on nonconforming finite elements were defined using polynomials of degree one and two, in one dimension. Then, knowing a finite set of points associated to a function that can present discontinuity, a least squares type adjustment process was performed, with the purpose of detecting the possible points of discontinuities. Finally, by performing an error analysis on the data considered as information about the function and making use of the Gibbs phenomenon, the candidate points were located to be approximations of the discontinuity points of the function under study. Here, the numerical process for obtaining the discontinuity points is presented and its efficiency is shown by means of numerical examples.

**Keywords:** Approximations of functions, nonconforming finite elements, discontinuous functions.

## APROXIMAÇÃO DE FALHAS, USANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NÃO-CONFORMES

### RESUMO

Este estudo abordou o problema da determinação da localização das falhas em 1D, utilizando o método dos elementos finitos não-conformes para resolver o problema da aproximação das descontinuidades. Este é um problema que surge nas áreas de geologia, imagens de satélite, reconhecimento de padrões, modelos estruturais de reservatórios de petróleo, entre outros. Para este trabalho de investigação, os espaços de aproximação de funções não conformes baseadas em elementos finitos foram definidos utilizando polinômios de grau um e dois, numa única dimensão. Depois, conhecendo um conjunto finito de pontos associados a uma função que pode apresentar a descontinuidade, foi levado a cabo um processo de encaixe do tipo menos quadrados a fim de detectar os possíveis pontos de descontinuidade. Finalmente, ao realizar uma análise de erro sobre os dados considerados como informação sobre a função e fazendo uso do fenômeno Gibbs, os pontos candidatos foram localizados para serem aproximações dos pontos de descontinuidade da função em estudo. Aqui, é apresentado o processo numérico para obter os pontos de descontinuidade e a sua eficiência é demonstrada através de exemplos numéricos..

**Palavras chave:** Aproximações de funções, elementos finitos não-conformes, funções descontínuas.

Citación sugerida: Córdova, H., Manzanilla, R., Gallo, R. (2022). Aproximación de fallas, utilizando el método de elementos finitos no conformes. Revista Bases de la Ciencia, 7, (Especial), Diciembre, 166 -183. DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4247>



## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación esta inmerso dentro del problema de la aproximación de curvas con discontinuidades el cual se puede presentar en diferentes áreas de conocimiento tales como; geología estructural, modelo de yacimientos de petróleo, procesamiento de imágenes, diseño de estructuras mecánicas con componentes no homogéneos, entre otros (Apprato y cols., 1987; Apprato y Gout, 2000; Arcangéli., 1989; Arcangéli y cols., 1997; Gout y cols., 2008; Gout y Ramière, 2003; Gutzmer y Iske, 1997; Manzanilla, 1986).

El registro y la interpretación precisa de los cambios verticales dentro de un perfil de suelo son importantes para los pedólogos, geomorfólogos, estratígrafos, hidrólogos y arqueólogos (Richardson y cols., 2016).

El problema es simple cuando se conoce el punto de discontinuidad pero sigue siendo un problema abierto cuando este punto de salto es conocido.

El método de mínimos cuadrados es una técnica muy utilizada para el ajuste de curvas en 1D y dimensiones mayores. Esta técnica de análisis numérico consiste en:

- Dados un conjunto de pares ordenados (variable independiente, variable dependiente:  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, \dots, N$ ) y un espacio vectorial de dimensión finita conformado por funciones.
- Encontrar la función en dicho espacio, que mejor se ajuste a los datos.

En el presente trabajo se utiliza una familia de funciones de tipo elemento finitos no conformes, es decir: funciones continuas salvo en un número finito de puntos del dominio de trabajo (Gout y cols., 2008).

Por lo tanto, se considera lo siguiente:

- Un conjunto de  $N$ -puntos de datos (dispersos o regularmente distribuidos)

$$\mathbb{D} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, N, \} \quad \text{con} \quad x_i \in [a, b] \quad (1)$$

- Una función desconocida  $f$  discontinua que satisface

$$f(x_i) = y_i \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

- Un espacio de funciones definidas sobre  $[a, b]$ ,  $\mathcal{V}$ , que es un espacio de tipo elementos finitos no conforme, es decir que son funciones que presentan un número finito de puntos de discontinuidad.
- A cada elemento  $v \in \mathcal{V}$  se le asocia el vector  $V_N = (v(x_i))_{1 \leq i \leq N}$  que será denotado en lo sucesivo por  $V$  por simplicidad de notación.
- La norma euclidiana de  $\mathbb{R}^N$  será designada por  $\|\cdot\|$ .
- El vector  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq N}$  asociado a la segunda componente de los puntos señalados en (1)



A partir de la información señalada anteriormente, se puede formular el problema de mínimos cuadrados (Allasia y cols., 2009).

$$(PMC) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathcal{V}, \text{ tal que:} \\ \|U - Y\| = \min_{v \in \mathcal{V}} \|V - Y\| \end{cases} \quad (3)$$

La idea del proceso de aproximación de los puntos  $x_d$  donde se localiza las discontinuidades es utilizar el fenómeno de Gibbs (Gibbs, 1898; Jerri, 1998), el cual indica que cuando se aproxima funciones discontinuas por funciones continuas se producen subimpulsos y sobreimpulsos en los puntos de discontinuidad.

Para hacer uso de la característica del fenómeno de Gibbs, el espacio de elementos finitos no conforme  $\mathcal{V}$  que esta formado por funciones que presentan discontinuidades en un número finitos de puntos, será utilizado como si fuese un espacio de funciones continuas. Esto motivado a que el fenómeno de Gibbs se presentará entre puntos de discontinuidad de las funciones del espacio  $\mathcal{V}$  utilizado.

En consecuencia, utilizando el conjunto  $\mathbb{D}$  y el espacio  $\mathcal{V}$  se desea determinar los puntos en los cuales la función  $f$  presenta discontinuidades. Este es un problema concreto que ha sido tratado en dos dimensiones ver (Gutzmer y Iske, 1997), pero en la mayoría de problemas de ajuste de superficies siempre se da por sentado que se conoce las curvas donde la función es discontinua. (Arcangéli., 1989; Arcangéli y cols., 1997; Gout y cols., 2008; Manzanilla, 1986). Por ello es necesario reconocer y describir la discontinuidad que se presenta en dicha curva.

Caracterizar los puntos de discontinuidad es primordial para representar los fenómenos físicos mediante modelos matemáticos consistentes con el hecho que dicho fenómeno presenta cambios abruptos en las propiedades del medio, como se presenta comúnmente en los modelos no homogéneos de materiales (Kouibia y Pasadas, 2004).

El trabajo tiene como fin presentar una nueva estrategia para la localización de los puntos de discontinuidad de una función definida de un intervalo real y a valores reales utilizando funciones de tipo elementos finitos no conformes y las oscilación presentes en los puntos de discontinuidad en el fenómeno de Gibbs al representar, localmente, funciones discontinuas por funciones continuas (Palma y cols., 2021) y presentar resultados numéricos asociados al uso de la estrategia desarrollada para determinar los puntos de discontinuidad.

## 2. LOCALIZACIÓN DEL PUNTO DE DISCONTINUIDAD

El proceso para la localización del punto de discontinuidad se puede describir mediante de las siguiente etapas:

**Etapas 1:** Construir un espacio de aproximación de funciones con un número finito de discontinuidades.

En el presente trabajo se consideran espacios de funciones de tipo elementos finitos no conforme, utilizando polinomios de grado menor o igual a  $m$  que se definirán mas adelante.

**Etapa 2:** Utilizar la información suministrada en (1) para obtener una función de aproximación mediante un ajuste de tipo mínimos cuadrados(2).

En esta etapa, se implementa el método de ajuste de mínimos cuadrados estándar con el objetivo de aproximar la representación de los datos dados en (1).

**Etapa 3:** Detectar los puntos de discontinuidad en la data suministrada en (1) haciendo uso de los sobreimpulsos y subimpulsos presentes en el sitio de la discontinuidad de la función desconocida  $f$ .

Después de realizar el ajuste con mínimos cuadrados se continua con el análisis de los puntos donde aparecen las oscilaciones que son indicativos de presencia de discontinuidades.

**Etapa 4:** Localización de dicho punto de discontinuidad.

En esta etapa, se procede a realizar un análisis del error sobre los puntos de datos  $\mathbb{D}$  el cual será presentado posteriormente (1).

## 2.1 Espacio de funciones no conformes

El espacio de aproximación se construye a partir de una partición  $\mathcal{P}_n$  del intervalo de trabajo  $[a, b]$  formada por  $(n + 1)$  -puntos,

$$\mathcal{E}_n = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}, \text{ donde } \xi_0 = a \text{ y } \xi_n = b. \tag{4}$$

Utilizando  $\mathcal{E}_n$ , se define el espacio de funciones  $\mathcal{V}_n^m$  formado por las funciones cuya restricción a cada intervalo  $I_i = [\xi_{i-1}, \xi_i]$  para  $i = 1, \dots, n$  es un polinomio de grado menor e igual a  $m$ , es decir

$$\mathcal{V}_n^m = \{v : v|_{I_i} \in \mathbb{P}_m(I_i), 1 \leq i \leq n\} \tag{5}$$

Donde  $\mathbb{P}_m(I_i)$  es el conjunto de polinomios de grado menor o igual a  $m$  sobre  $I_i$ .

Es un hecho bien conocido que la dimensión del espacio vectorial  $\mathcal{V}_n^m$  es de dimensión  $(m + 1) \cdot n$

Por ejemplo, para un polinomio de grado  $m=2$  se tiene como base:

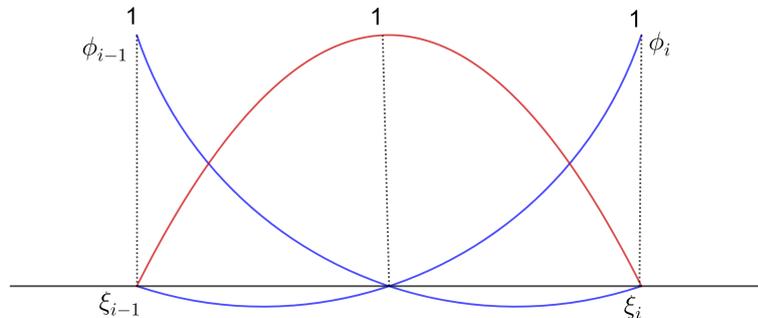


Figura 1. Base del polinomio de grado 2.



## 2.2 El método de mínimos cuadrados

A continuación se presenta la formulación del problema de mínimos cuadrados correspondiente al ajuste de la data dada en (1).

Primeramente, se definen utilizando (1)

$$Y = (y_i)_{1 \leq i \leq N} \quad (6)$$

y para todo  $w \in \mathcal{V}_n^m$ , su vector de  $\mathbb{R}^N$  asociado

$$W = (w(x_i))_{1 \leq i \leq N} \quad (7)$$

Se sabe que el problema de mínimos cuadrados es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathcal{V}_n^m, \text{ tal que:} \\ \|U - Y\|_N = \inf_{w \in \mathcal{V}_n^m} \|W - Y\|_N \end{array} \right. \quad (8)$$

El problema anterior posee una solución única.

Sea base  $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n(m+1)}\} \subset \mathcal{V}_n^m$ , entonces todo elemento de  $w \in \mathcal{V}_n^m$  se puede representar como

$$w = \sum_{j=1}^{n(m+1)} w_j \phi_j \quad (9)$$

Entonces, se define para todo elemento  $w \in \mathcal{V}_n^m$  el vector en  $\mathbb{R}^{n(m+1)}$  y la matriz de orden  $n(m+1) \times n(m+1)$  siguientes

$$C_w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n(m+1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_{n(m+1)}(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_{n(m+1)}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \cdots & \phi_{n(m+1)}(x_N) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por lo tanto, el problema (8) es equivalente al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathcal{V}_n^m, \text{ tal que:} \\ \|AC_u - Y\|_N = \inf_{w \in \mathcal{V}_n^m} \|AC_w - Y\|_N \end{array} \right. \quad (11)$$

Finalmente,  $u \in \mathcal{V}_n^m$  es determinado por sus coeficientes  $C_u$  en la base  $B$  de  $\mathcal{V}_n^m$  al resolver el sistema lineal

$$A^T AC_u = A^T Y \quad (12)$$

el cual posee una solución única.

Por otra parte, se puede plantear problemas de mínimos cuadrados locales, es decir

- Para cada intervalo  $I_k = [\xi_{k-1}, \xi_k]$  para  $k = 1, \dots, n$ , se considera el conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_k &= \{(x, y) \in \mathbb{D} : x \in I_k\} = \{(x_i^k, y_i^k) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, N_k\} \\ \text{Coord}_x(\mathbb{D}_k) &= \{x_i^k : i = 1, \dots, N_k\} \end{aligned} \quad (13)$$

con CARDINAL de  $\mathbb{D}_k$  y  $\text{Coord}_x(\mathbb{D}_k)$  iguales a  $N_k$ .

- Y se puede formular el problema de mínimos cuadrados en cada intervalo  $I_k$  sobre el espacio de polinomios  $\mathbb{P}_m(I_k)$  asociado a los datos  $\mathbb{D}_k$  haciendo lo realizado anteriormente para la formulación del problema (8), es decir: para  $1 \leq k \leq n$

- ✓ utilizando (13), Se definen  $Y_k = (y_i^k)_{1 \leq i \leq N_k}$  y para todo  $w_k \in \mathbb{P}_m(I_k)$  su vector de  $\mathbb{R}^{N_k}$  asociado  $W_k = (w(x_i))_{1 \leq i \leq N_k}$ .
- ✓ El problema de mínimos cuadrados local en  $I_k$  es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } p_k \in \mathbb{P}_m(I_k), \text{ tal que:} \\ \|P_k - Y_k\|_{N_k} = \inf_{w \in \mathbb{P}_m(I_k)} \|W_k - Y_k\|_{N_k} \end{array} \right. \quad (14)$$

- ✓ Tomando una base del  $\mathbb{P}_m(I_k)$   $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m+1}\} \subset \mathbb{P}_m(I_k)$ , todo elemento  $w \in \mathbb{P}_m(I_k)$  se representa como  $w = \sum_{j=1}^{m+1} w_j \phi_j$ .
- ✓ Definiendo para todo elemento  $w \in \mathbb{P}_m(I_k)$  el vector en  $\mathbb{R}^{m+1}$  y la matriz de orden  $(m+1) \times (m+1)$  siguientes

$$C_w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{m+1} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_{m+1}(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_{m+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_{N_k}) & \phi_2(x_{N_k}) & \cdots & \phi_{m+1}(x_{N_k}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Por lo tanto, el problema (14) es equivalente al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } p \in \mathbb{P}_m(I_k), \text{ tal que:} \\ \|AC_p - Y_k\|_{m+1} = \inf_{w \in \mathbb{P}_m(I_k)} \|A_k C_w - Y_k\|_{m+1} \end{array} \right. \quad (16)$$

- ✓ Así,  $p \in \mathbb{P}_m(I_k)$  es determinado por su vector de coeficientes  $C_p$  en la base  $B$  de  $\mathbb{P}_m(I_k)$  quien es solución del sistema lineal

$$A_k^T A_k C_p = A_k^T Y_k \quad (17)$$

el cual posee una solución única.

Uno de los resultados principales que se obtienen es el hecho que ambos problemas el global y la colección de locales conllevan a la misma solución en casos bastante generales y bajo ciertas restricciones. Esto está plasmado en el teorema siguiente.



**Teorema 1.** Si para todo  $k = 1, \dots, n$ ,  $Coord_x(\mathbb{D}_k) \cap \mathcal{E}_n = \emptyset$ , entonces la solución  $u$  del problema de mínimos cuadrados global (8) y la función  $\hat{u}$  definida por  $\hat{u}|_{I_k} = p_k$ , para  $k = 1, \dots, n$ , son iguales, donde las funciones  $p_k$  son las soluciones de los problemas de mínimos cuadrados local (14).

**Demostración.** Sea  $p_k \in \mathbb{P}_m(I_k)$  la solución del problema local (14) para  $1 \leq k \leq n$  y sea  $u$  la solución del problema global (8). Se define la función  $\hat{u} \in \mathcal{V}_n^m$  como

$$\hat{u}|_{I_k} = p_k \quad (18)$$

entonces es inmediato que se satisface

$$\|U - Y\|_N \leq \|\hat{U} - Y\|_N \quad (19)$$

Por otra parte, definiendo como  $\hat{p}_k = u|_{I_k} \in \mathbb{P}_k$  entonces

$$\begin{aligned} \|P_k - Y_k\|_{N_k} \leq \|\hat{P}_k - Y_k\|_{N_k} &\iff \|P_k - Y_k\|_{N_k}^2 \leq \|\hat{P}_k - Y_k\|_{N_k}^2 \\ \implies \sum_{k=1}^n \|P_k - Y_k\|_{N_k}^2 &\leq \sum_{k=1}^n \|\hat{P}_k - Y_k\|_{N_k}^2 \stackrel{\text{Ya que } Coord_x(\mathbb{D}_k) \cap \mathcal{E}_n = \emptyset}{\iff} \|\hat{U} - Y\|_N^2 \leq \|U - Y\|_N^2 \end{aligned}$$

y por la unicidad de la solución del problema (8), se tiene  $\hat{u} = u$  y por lo tanto de la solución de los problemas locales (14) se puede construir la solución del problema global (8)  $\square$

**Observación.** En el caso donde  $Coord_x(\mathbb{D}_k) \cap \mathcal{E}_n \neq \emptyset$  se pueden obtener dos problemas globales y locales similares a (8) y (14), respectivamente, solamente cambiando la métrica utilizada en el problema global, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} [1] \text{ Se define } N_r \text{ como el número de veces que } \mathbb{D}_k \cap \mathbb{D}_{k-1} \text{ es no vacío, para } k = 1, \dots, n. \\ [2] \text{ Se define el conjunto de índices } \mathcal{I}_N \text{ que contiene los índices } i_\ell \text{ de los puntos en } \mathbb{D} \text{ tales que} \\ \quad x_{i_\ell} \in Coord_x(\mathbb{D}_k) \cap (\mathcal{E}_n \setminus \{\xi_0, \xi_n\}) \\ [3] \text{ Tomar } \|\circ\|_{B, \hat{N}} = \sqrt{(\circ, B \circ)_{\hat{N}}} \text{ (raíz cuadrada del producto escalar) donde } \hat{N} = N + N_r \\ \text{con} \\ B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq \hat{N}} b_{i,j} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \wedge x_i \in (Coord_x(\mathbb{D}) \setminus \mathcal{E}_n) \cup \{\xi_0, \xi_n\} \\ 2 & si \quad i = j \wedge x_i \in \mathcal{E}_n \setminus \{\xi_0, \xi_n\} \end{cases} \end{array} \right.$$

donde  $(x_i, y_i) \in \mathbb{D}$ , ver (1).

## 2.3 Localización de las discontinuidades

Según, lo expuesto en (González, 2003), cuando una función dada se aproxima mediante una Serie de Fourier finita, habrá un error considerable en la vecindad de la discontinuidad, no importa cuantos términos se quieran emplear. Este efecto se conoce como el fenómeno de Gibbs. Para ilustrar este fenómeno (ver Figura 2.), el resultado de aproximar una onda cuadrada por una serie finita de Fourier.



Figura 2. Aproximación en serie de Fourier con 50 términos.

A medida que aumenta el número de elementos de la serie finita de Fourier que aproxima a la función, la sobreoscilación se va comprimiendo más hacia la discontinuidad aunque su valor permanezca prácticamente constante. Para ello se procede a estudiar las variaciones del error puntal obtenido a través del problema de ajuste (11)-(12), es decir que solamente se considera el error de ajuste en los puntos de  $D$ , ver (1).

$$E(x_i) = y_i - u(x_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, K \quad (20)$$

Se puede observar que este error no incluye el clásico valor absoluto de la diferencia. Esto se define así con la finalidad de resaltar las variaciones del error sobre el conjunto de datos, ya que en el fenómeno de Gibbs el error (20) cambia de signo en el entorno inmediato donde se localiza el punto de discontinuidad de la función asociada a la data analizada (Jerri, 1998; Rivera-Roman y Martinez-Gonzalez, 2018). Esto puede ser observado al realizar la resolución de problema de mínimos cuadrados (11)-(12), por ejemplo en la Figura 3, se aprecian el subimpulso y sobreimpulso relacionados con el punto de discontinuidad cuando se realiza la aproximación con series de Fourier.

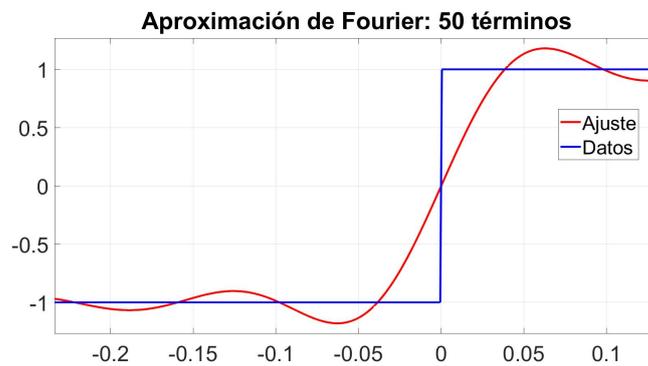


Figura 3. Subreimpulso y subimpulso.

## 2.4 Localización del punto de discontinuidad

Para determinar la ubicación del punto de discontinuidad se utiliza el hecho, (ver (Jerri, 1998)) que cerca del punto donde la discontinuidad ocurre se manifiesta un sobreimpulso y subimpulso, el cual es

dennominado el fenómeno de Gibbs Lo cual se refleja en una **Z-forma** que es una forma de “Z” o “Z invertida”, sobre los puntos de interés en el estudio. Esta **Z-forma** permite resaltar la ubicación de los impulsos que son contrarios y consecutivos. Y utilizando el error (20) la Z-forma es magnificada (ver Figura 4.)

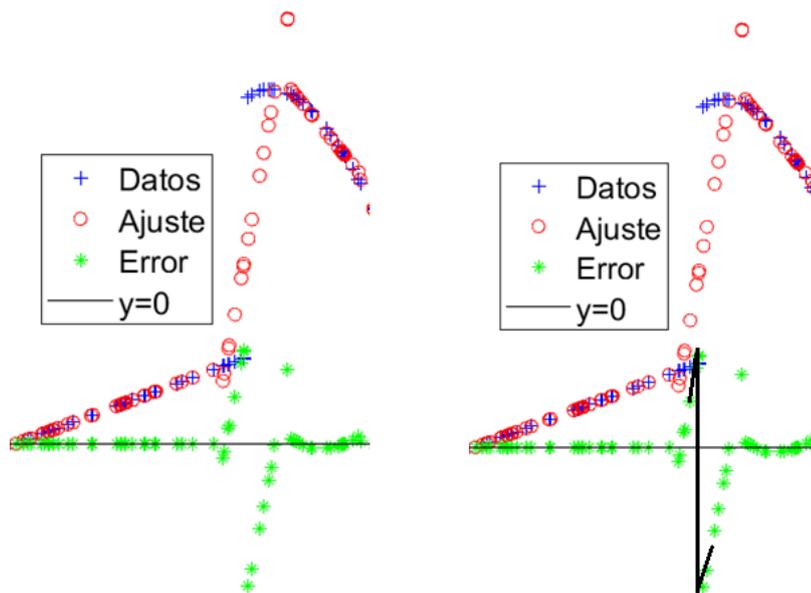


Figura 4. Subreimpulso, subimpulso, error y Z-forma.

Los hechos señalados anteriormente, son utilizados como punto de arranque para el desarrollo de un procedimiento para la detección de las variaciones importantes del error, el cual se procede a describir:

1. Se realiza un **Barrido de cuatro puntos** sobre los datos en estudio, reteniendo los puntos que satisfacen cambio de signo en las expresiones

$$E(x_i) - E(x_{i+1}) \quad \text{y} \quad E(x_{i+2}) - E(x_{i+3}), \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, K - 3 \quad (21)$$

y respalda la variación en el error, es decir

$$\begin{cases} \text{Si} & (E(x_i) - E(x_{i+1})) * (E(x_{i+2}) - E(x_{i+3})) < 0, \\ \text{entonces} & Var_i = |E(x_{i+2}) - E(x_{i+1})| \end{cases} \quad (22)$$

2. A continuación se procede a toma el índice  $i_0$  donde la variación  $Var_{i_0}$  es máxima como el índice indicador de la ubicación del punto donde ocurre la discontinuidad. Si el vector de índices  $Var_i$  es vacío entonces se concluye que no hay punto de discontinuidad.

3. Para finalizar, la aproximación del punto  $X_d$  donde ocurre la discontinuidad puede ser definido por

$$X_d = \frac{x_{i_0+1} + x_{i_0+2}}{2} \quad (23)$$

Otra forma de definir al punto  $X_d$  sería haciendo una ponderación en función de los errores obtenidos en los puntos  $x_{i_0+1}$  y  $x_{i_0+2}$ .

**Observaciones:**

- Esta propuesta detecta un punto de discontinuidad y seguido a esto, se debe hacer una división del intervalo de análisis en dos intervalos que contengan como punto extremo el punto  $X_d$  para proceder con el proceso de detección en cada uno de los nuevos intervalos generados y se continua de manera recursiva con la división de intervalos. Este proceso puede detenerse cuando el ajuste realizado en un nuevo intervalo generado por división no presenta fuertes variaciones en el error, por ejemplo variaciones menores a 20% del error en valor absoluto obtenido del análisis del error realizado previamente.
- Una de las principales características de este procedimiento para la localización del punto de discontinuidad es que es 100% paralelizable. Lo cual facilita el proceso de localización de los puntos de discontinuidad. Todo esto está justificado por el Teorema 1, presentado en la sección 1.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentarán algunos resultados numéricos que presentan las bondades del método propuesto para la localización de los puntos de discontinuidad de una función utilizando datos de tipo Lagrange (ver (1)).

#### 3.1 Ejemplos numéricos

Se demuestra ahora mediante dos casos representativos la efectividad del procedimiento señalado en la sección 2, para la localización del punto donde ocurre la discontinuidad.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } -5 \leq x \leq -1 \\ 2x^3 + x^2 - 3x & \text{si } -1 < x \leq 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{si } -4 \leq x \leq 1 \\ 2\sin(x) + 1 & \text{si } 1 < x \leq 7 \end{cases}$$

Se construyó un archivo de datos aleatorios y uniformes, para la función  $f_1$ , en el intervalo de trabajo  $[-5, 1]$  con una cantidad de puntos  $N = 300$  (ver Figura 5.), para luego realizar el ajuste de los datos con diferentes valores de  $n$ , recuerde que para ese valor de  $n$ , el espacio vectorial  $\mathbf{V}$  de funciones es de dimensión  $m \cdot n + 1$ .

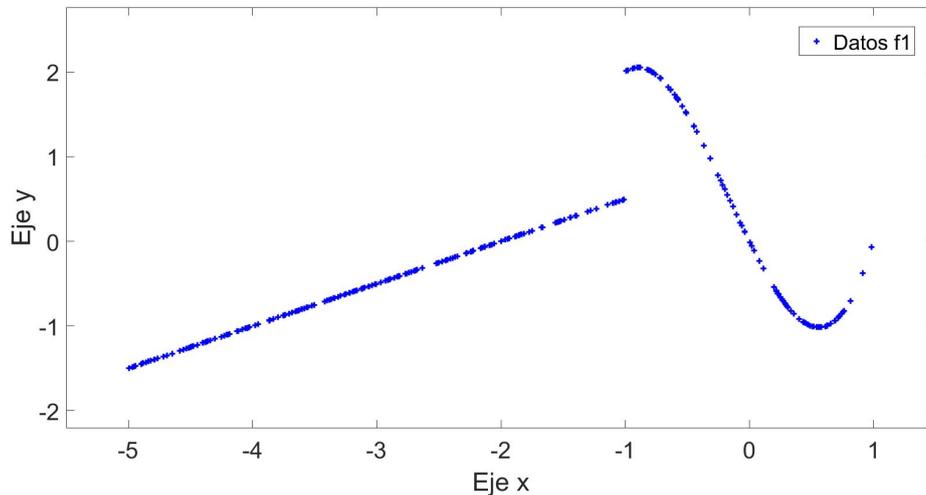


Figura 5. Datos generados usando la función  $f_1$ .

Con la función  $f_2$ , se genera también un archivo de datos aleatorios y uniformes, usando el intervalo  $[-4, 7]$  con una cantidad de puntos  $N = 300$  (ver Figura 6.), para luego realizar el ajuste de los datos con diferentes valores de  $n$ .

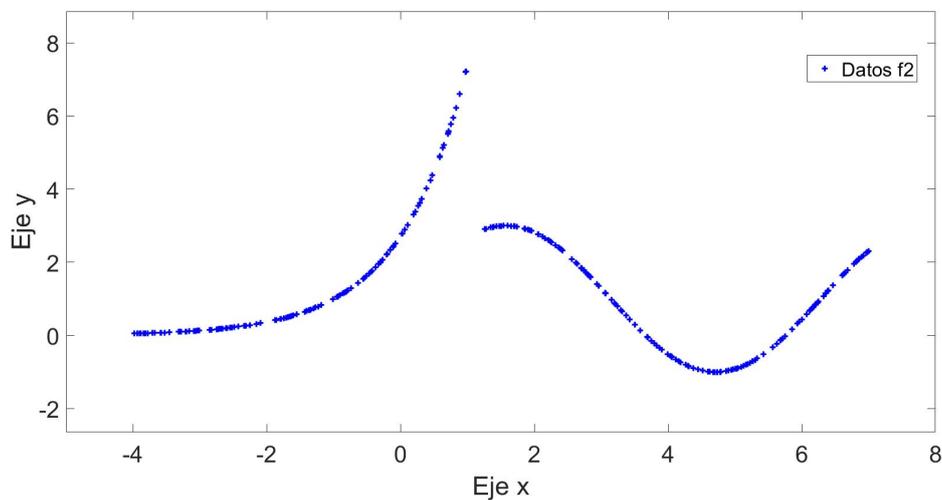


Figura 6. Datos generados usando la función  $f_2$ .

## 3.2 Localización del punto de discontinuidad

### 3.2.1 Caso de análisis de los datos provenientes de $f_1$

#### Ajuste de los Datos

A continuación se presentan los gráficos obtenidos al aplicar el proceso de ajuste asociados a los datos sintéticos obtenidos mediante el uso de la función  $f_1$  correspondientes a los casos de valores de  $m = 1, 2$  y  $n = 10, 20, 25, 34$ .

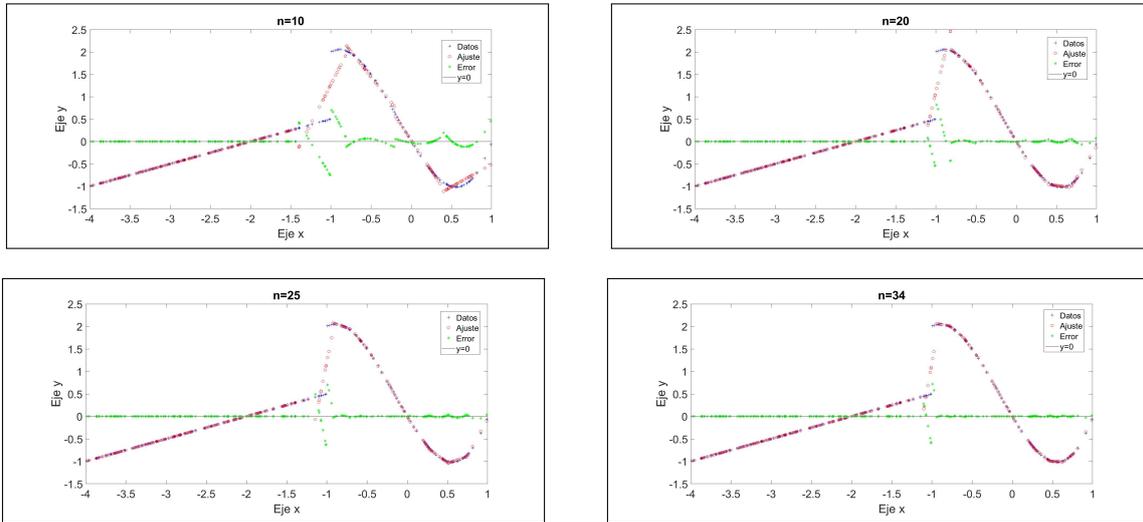


Figura 7. Resultado del ajuste con datos generados usando la función  $f_1$ ,  $m = 1$ , y  $n = 10, 20, 25, 34$ .

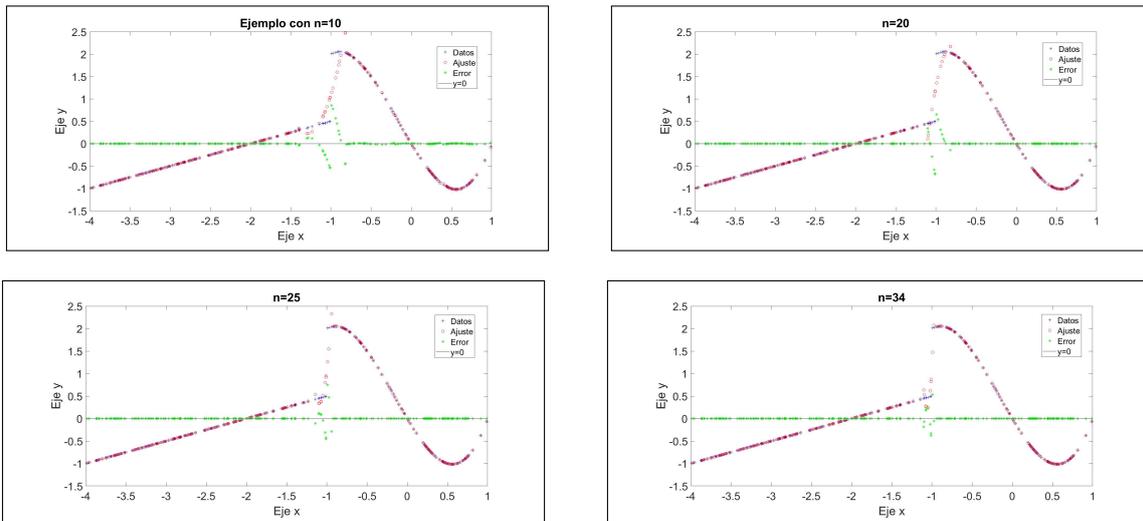


Figura 8. Resultado del ajuste con datos generados usando la función  $f_1$ ,  $m = 2$ , y  $n = 10, 20, 25, 34$ .

En las figuras anteriores, Figura 7. y 8, se observa la variación del error en la proximidad del punto de discontinuidad. Además, se observa que dicha variación va disminuyendo a medida que la dimensión del espacio  $\mathcal{V}_n^m$  va creciendo, lo cual es esperado, ya que al incrementar la dimensión del espacio  $\mathcal{V}_n^m$ , es decir: se hace tender a  $N$  la solución del ajuste por mínimos cuadrados tiende a la solución de la interpolación



La tabla 1. a continuación muestra los valores de las dimensiones de  $\mathcal{V}_n^m$  según los valores  $n$  y  $m$

Tabla 1. Dimensión del espacio de tipo elementos finitos según los valores de  $n$  y  $m$

23.8cmDimensión de $\mathcal{V}_n^m$		n : número de particiones			
		10	20	25	34
m : grado del polinomio	1	20	40	50	68
	2	30	60	75	102

La tabla 1. muestra como aumenta la dimensión del espacio  $\mathcal{V}_n^m$  al incrementar  $n$  y  $m$ . Como fue resaltado anteriormente, el procedimiento para la localización del punto de discontinuidad debe ser utilizado con una dimensión de  $\mathcal{V}_n^m$  menor al número de datos en  $D$ , es decir  $N$ , ya que en caso contrario la evaluación del error  $E(x_i)$  será nula para todo  $i = 1, \dots, N$ , ya que el problema de ajuste se convierte en un problema de interpolación.

### 3.2.2 Caso de análisis de los datos provenientes de $f_2$

#### Ajuste de los Datos

A continuación se presentan los gráficos obtenidos al aplicar el proceso de ajuste asociados a los datos sintéticos obtenidos mediante el uso de la función  $f_2$ , los cuales corresponden a los casos de valores de  $m = 1, 2$  y  $n = 10, 20, 25, 34$ . Como en el caso de  $f_1$ , los espacios de tipo elemento finito no conforme utilizados en los ejemplos numéricos corresponden a los señalados anteriormente para  $f_1$  en el caso  $m = 1, 2$  (ver tabla 1.)

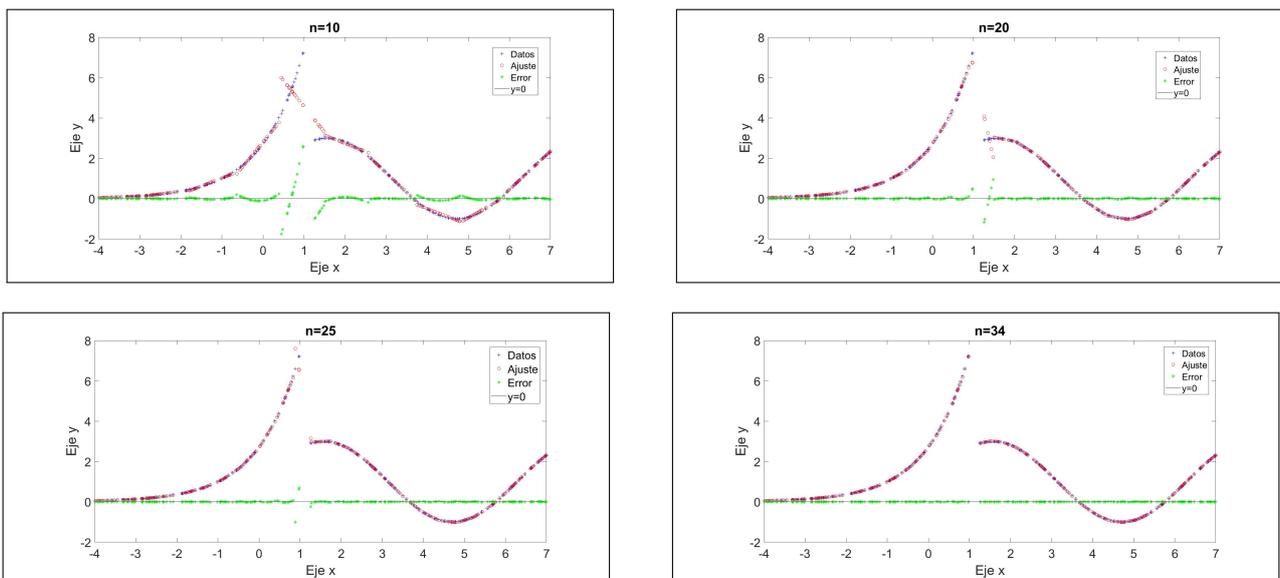


Figura 9. Resultado del ajuste con datos generados usando la función  $f_2$ ,  $m = 1$ , y  $n = 10, 20, 25, 34$ .

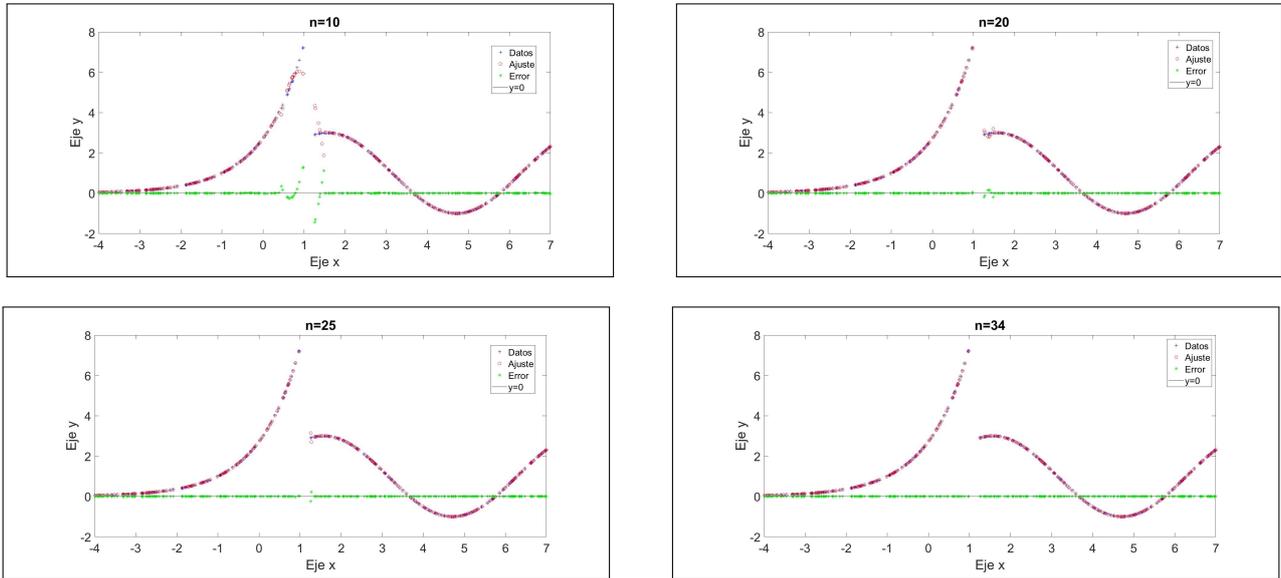


Figura 10. Resultado del ajuste con datos generados usando la función  $f_2$ ,  $m = 2$ , y  $n = 10, 20, 25, 34$ .

Como en el caso de los datos provenientes de la función  $f_1$ , en la Figura 9. y la Figura 10, se puede apreciar el mismo comportamiento del método de localización de la discontinuidad de la función, es decir: la aparición de la **Z-forma** y la disminución del error a medida que  $n$  y  $m$  aumentan el cual es un efecto motivado a la tendencia que el problema de ajuste tiende al problema de interpolación cuando la dimensión del espacio  $\mathcal{V}_n^m$  se incrementa.

#### 4. UBICACIÓN DEL PUNTO DE DISCONTINUIDAD.

Utilizando la estrategia mencionada en la sección 2.4., se desarrollo un programa para obtener la ubicación de los puntos de discontinuidad asociados a los datos asociados a la función para ambos casos de  $m = 1$  y  $m = 2$ .

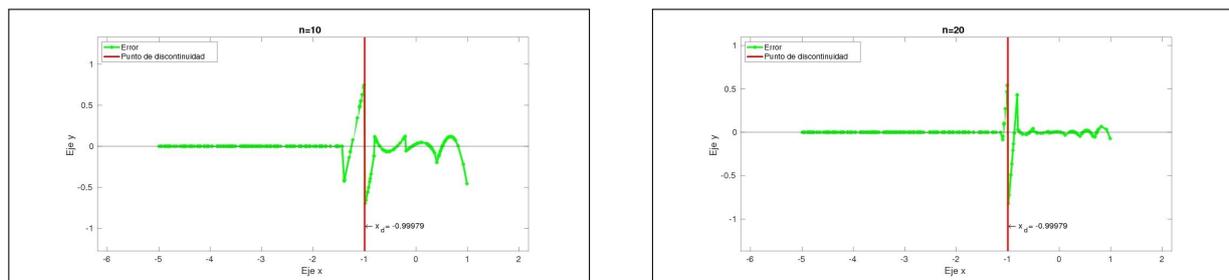


Figura 11. Ubicación del punto de discontinuidad usando los datos de la función  $f_1$ ,  $m = 1$

De la misma forma se obtuvieron los puntos de discontinuidad  $x_d$  al utilizar los datos asociados a la función  $f_2$ ,  $m = 1$  y  $m = 2$ .

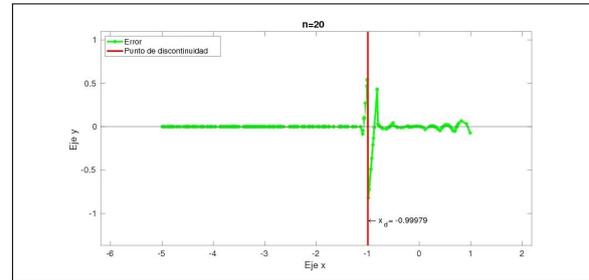
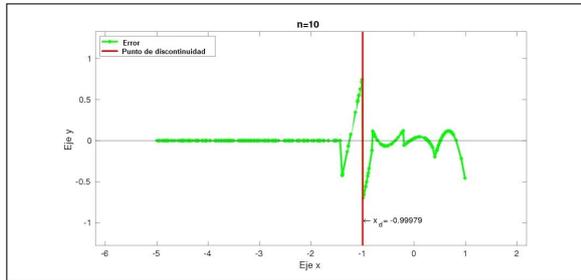


Figura 12. Ubicación del punto de discontinuidad usando los datos de la función  $f_1$ ,  $m = 2$

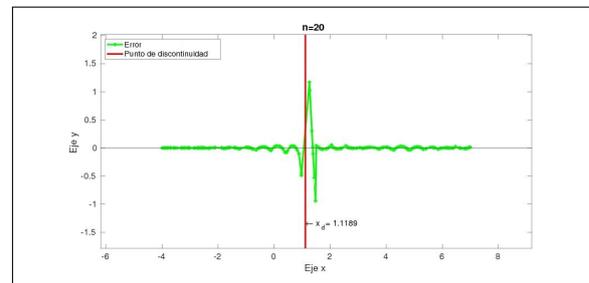
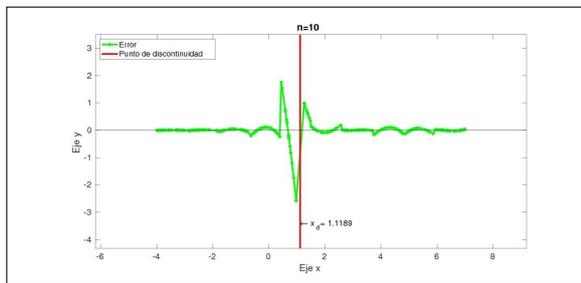


Figura 13. Ubicación del punto de discontinuidad usando los datos de la función  $f_2$ ,  $m = 1$

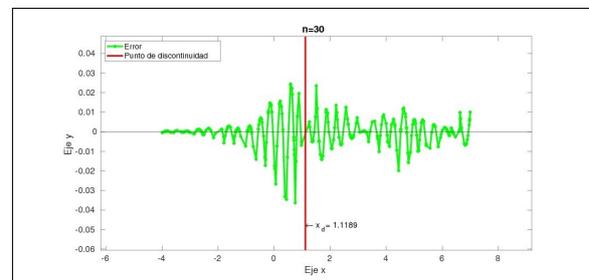
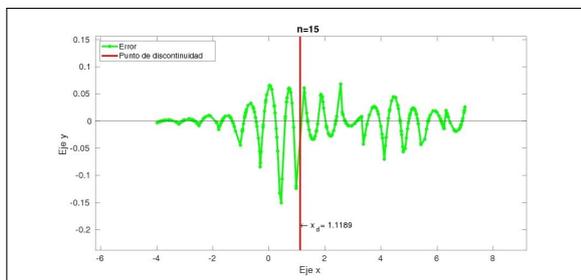


Figura 14. Ubicación del punto de discontinuidad usando los datos de la función  $f_2$ ,  $m = 2$

En los ejemplos presentados, se puede observar que el método para la localización del punto de discontinuidad es eficiente y es muy favorable cuando la dimensión del espacio es mucho mas pequeña relativamente a la cantidad de puntos de datos que se esta procesando lo cual es una característica muy útil ya que disminuye el tiempo de computo para la localización del punto de discontinuidad.

## 5. CONCLUSIONES

- Se desarrolló una metodología numérica que permite aproximar la ubicación de los puntos de discontinuidad de una función real a valores reales.
- El método desarrollado para aproximar la ubicación de los puntos de discontinuidad presenta ventajas cuando la dimensión del espacio utilizado para el ajuste es mucho mas pequeña que la cantidad de data tratada por lo cual minimiza el tiempo de ejecución del método.

- La metodología es fácilmente extensible para localizar todos los puntos de discontinuidad en un intervalo de trabajo haciendo uso del paralelismo intrínseco del modelo desarrollado. (Teorema 1).

## 6. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.

## 7. REFERENCIAS

- Allasia, G., Besenghi, R., y Cavoretto, R. (2009, 01). Accurate approximation of unknown fault lines from scattered data. *MEMORIE DELLA ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. CLASSE DI SCIENZE FISICHE MATEMATICHE E NATURALI*, 33, 3-26.
- Apprato, D., Arcangéli, R., y Manzanilla, R. (1987). Sur la construction de surfaces de classe  $c^k$  á partir d'un grand nombre de données de lagrange. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 21,(4), 529–555.
- Apprato, D., y Gout, C. (2000). A result about scale transformation families in approximation: application to surface fitting from rapidly varying data. *Numerical Algorithms*, 23, 263–279.
- Arcangéli, R. (1989). Some application of discrete  $d^m$ -spline mathematical methods in computer aided geometric design. in: Lyche, t. and schumaker, l.(eds.). *Academic Press, INC.*, 35–44.
- Arcangéli, R., Manzanilla, R., y Torrens, J. (1997). Approximation spline de surfaces de type explicite comportant des failles. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 31(5), 643–676. Descargado de [http://www.numdam.org/item/?id=M2AN\\_1997\\_\\_31\\_5\\_643\\_0](http://www.numdam.org/item/?id=M2AN_1997__31_5_643_0)
- Gibbs, J. W. (1898). Fourier's series. *Letter in Nature*, 59, 606. doi: 10.1038/059200b0
- González, C. J. C. (2003). *Fundamentos del análisis de fourier*. GAMESAL.
- Gout, C., Guyader, C. L., Romani, L., y Saint-Guirons, A. (2008, marzo). Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process,  $D^m$ splines and the finite element method. *Numerical Algorithms*, 48(1-3), 67–92. doi: 10.1007/s11075-008-9177-8
- Gout, C., y Ramière, I. (2003). Surface approximation from rapidly varying bathymetric data. *IEEE IGARSS*, 4(IV), 2679–2681.
- Gutzmer, T., y Iske, A. (1997). Detection of discontinuities in scattered data approximation. *Numerical Algorithms*, 16,(2), 150–170. doi: 10.1023/A:1019139130423
- Jerri, A. J. (1998, 01). The gibbs phenomenon in fourier analysis, splines and wavelet approximations. *Mathematics and Its Applications. Springer-Science+Business Media, B.V.*
- Kouibia, A., y Pasadas, M. (2004). Approximation of discontinuous curves and surfaces by discrete splines with tangent conditions. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) [electronic only]*, 2004, 157–166. Descargado de :<http://ejde.math.txstate.edu>o<http://ejde.math.unt.edu>ftpejde.math.txstate.edu(login:ftp)



- Manzanilla, R. (1986). Sur l'approximation de surfaces définies par une équation explicite. *Thèse, Université de Pau*.
- Palma, P., Gallo, R., y Manzanilla, R. (2021). Detection of discontinuity points in one variable functions using spaces of trigonometric functions. *CompAMa*, 9(2).
- Richardson, D., N.Castree, F.Goodchild, M., Kobayashi, A., W.Liu, y A.Marston, R. (2016). Lithologic Discontinuities in Soils. *International Encyclopedia of Geography: People, the Earth, Environment and Technology*, 1–8.
- Rivera-Roman, E., y Martinez-Gonzalez, R. (2018). Características del fenómeno de gibbs. *Impulso tecnológico*, 15(37°), 14–16.

### CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Hugo Córdova	Metodología, búsqueda de bibliografía, diseño del artículo y resultados numéricos.
Raúl Manzanilla	Redacción, algoritmos y diseño experimental.
Rodolfo Gallo	Concepción y criterio para la ubicación de los puntos de discontinuidad.