



DETECCIÓN DE DISCONTINUIDADES EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE UTILIZANDO ESPACIOS DE TIPO ELEMENTOS FINITOS

Víctor Lino¹ , Rodolfo Gallo² , Raúl Manzanilla³

¹Instituto de Posgrado Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.

Email: vlino8210@utm.edu.ec

²Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: rgallo@yachaytech.edu.ec

³Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales, Universidad Yachay Tech, 100119 Urcuquí, Ecuador. Email: rmanzanilla@yachaytech.edu.ec

*Autor para correspondencia: vlino8210@utm.edu.ec

Recibido: 11-11-2021/ Aceptado: 13-12-2022/ Publicación: 27-12-2022

Editor Académico: Carmen Judith Vanegas

RESUMEN

Determinar los puntos de discontinuidad de tipo salto finito en un conjunto de datos $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, K\}$, que pertenecen a la gráfica de una función desconocida f , es un problema concreto que aparece en la aproximación de curvas con discontinuidades y es encontrado en diferentes áreas de la ciencia, como la geología. La necesidad de ubicar los puntos de discontinuidad de la función es fundamental para el desarrollo de los modelos matemáticos que representan fenómenos en los cuales ocurren cambios abruptos algunas propiedades físicas que lo definen. En este trabajo se aborda el problema de determinar los puntos donde una data posee discontinuidades de tipo salto finito. Se asume que los puntos de datos están asociados a la gráfica de una función explícita, la cual es aproximada haciendo uso de un espacio de aproximación de funciones continuas de tipo elemento finito. El objetivo principal de este trabajo es presentar un procedimiento numérico que permite aproximar la ubicación de los puntos de discontinuidad de los datos, el cual está basado en el análisis de la función error puntual y la Z-Forma. Se presentan resultados numéricos utilizando datas sintéticas tomadas aleatoriamente en un intervalo $[a, b]$ con diferentes puntos de discontinuidad. Los resultados muestran las bondades del proceso al detectar los puntos de discontinuidad, con un costo computacional bajo.

Palabras clave: Teoría de Aproximación, Detección de Discontinuidad, Elementos Finitos, Fenómeno de Gibbs.

DETECTION OF DISCONTINUITIES IN FUNCTIONS OF ONE VARIABLE USING FINITE ELEMENT SPACES

ABSTRACT

Determine the finite jump type discontinuity points in a data set $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, K\}$, belonging to the graph of an unknown function f , is a concrete problem that appears in the approximation of curves with discontinuities and is



encountered in different areas of science, such as geology. The need to locate the points of discontinuity of the function is fundamental for the development of mathematical models that represent phenomena in which abrupt changes occur some physical properties that define it. This paper addresses the problem of determining the points where a data has finite jump type discontinuities. It is assumed that the data points are associated to the graph of an explicit function, which is approximated using an approximation space of continuous functions of finite element type. The main objective of this work is to present a numerical procedure that allows to approximate the location of the data discontinuity points, which is based on the analysis of the point error function and the z-form. Numerical results are presented using synthetic data taken randomly in an interval $[a, b]$ with different discontinuity points. The results show the benefits of the process in detecting the discontinuity points, with a low computational cost.

Keywords: Approximation, Detection of discontinuities, Numerical Methods, Phenomenon of Gibbs.

DETECÇÃO DE DESCONTINUIDADES EM FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL UTILIZANDO ESPAÇOS DE ELEMENTOS FINITOS

RESUMO

Determinar os pontos de descontinuidade do tipo salto finito num conjunto de dados $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, K\}$, pertencente ao gráfico de uma função desconhecida f , é um problema concreto que aparece na aproximação de curvas com descontinuidades e que se encontra em diferentes áreas da ciência, tais como a geologia. A necessidade de localizar os pontos de descontinuidade da função é fundamental para o desenvolvimento de modelos matemáticos que representam fenómenos em que ocorrem mudanças abruptas algumas propriedades físicas que a definem. Este documento aborda o problema de determinar os pontos em que um dado tem descontinuidades do tipo salto finito. Assume-se que os pontos de dados estão associados ao gráfico de uma função explícita, que é aproximada utilizando um espaço de aproximação de funções contínuas de tipo elemento finito. O principal objectivo deste trabalho é apresentar um procedimento numérico para aproximar a localização dos pontos de descontinuidade dos dados, que se baseia na análise da função de erro do ponto e da Z-forma. Os resultados numéricos são apresentados utilizando dados sintéticos tomados aleatoriamente num intervalo de $[a, b]$ com diferentes pontos de descontinuidade. Os resultados mostram os benefícios do processo na detecção dos pontos de descontinuidade, com um baixo custo computacional.

Palavras chave: Aproximação, Detecção de descontinuidades, Métodos Numéricos, Fenômeno de Gibbs.

Citaci3n sugerida: Lino, V., Gallo, R., Manzanilla, R. (2022). Detecci3n de descontinuidades en funciones de una variable utilizando espacios de tipo elementos finitos. Revista Bases de la Ciencia, 7, (Especial), Diciembre, 135 -152. DOI: <https://doi.org/10.33936/revbasdelaciencia.v7iESPECIAL.4148>





1. INTRODUCCIÓN

La presente investigación se relaciona con la detección de puntos de discontinuidad en un conjunto de puntos dados en el plano. Uno de los procedimientos más utilizados para el ajuste de curvas es el uso del método de mínimos cuadrados. Esta es una técnica de análisis numérico enmarcada dentro de la optimización matemática, en la que, dados un conjunto de pares ordenados (variable independiente, variable dependiente) y un conjunto de funciones linealmente independientes, se intenta encontrar la función continua, generada por esa base, que mejor aproxime los datos (un mejor ajuste).

En esta investigación se utiliza una base de funciones de tipo elemento finitos conformes (\mathcal{C}^0) y basándose en la función error puntual y la **Z-forma** se ubican los puntos de discontinuidad de la función. A continuación se describe el problema planteado.

Dado un conjunto de datos (dispersos o regularmente distribuidos)

$$D = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, k, \} \quad \text{con } x_i \in [a, b] \quad (1)$$

de k -puntos en el plano, sin pérdida de generalidad se asume que $x_1 = a$ y $x_k = b$. Se supone que los puntos están asociados a la gráfica de una función explícita f que presenta discontinuidades de tipo salto finito, es decir:

$$f(x_i) = y_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k \quad (2)$$

Utilizando el conjunto D se desea determinar los puntos en los cuales la función f presenta discontinuidades de tipo salto finito.

Este es un problema concreto que aparece en el problema de aproximación de curvas con discontinuidades y es encontrado en diferentes áreas científicas, como por ejemplo en geología, imágenes satelitales, reconocimiento de patrones, estructuras de yacimientos de petróleo (Apprato y cols., 1987; Apprato y Gout, 2000; Arcangéli., 1989; Arcangéli y cols., 1997; Gout y cols., 2008; Gout y Ramière., 2003; Gutzmer y Iske, 1997; Manzanilla, 1986). Para ello es necesario reconocer y describir la discontinuidad que se presenta en dicha curva.

Esta necesidad de identificar los puntos de discontinuidad es fundamental para el desarrollo de los modelos matemáticos que representan fenómenos en los cuales intervienen cambios abruptos de propiedades físicas como lo sería el cambio de un material a otro con diferentes propiedades.

El objetivo principal de este trabajo es proponer un nuevo método numérico para determinar los puntos en el intervalo $[a, b]$ donde ocurren las discontinuidades en los datos, (o lo que es lo mismo, los puntos de discontinuidad de la función f), utilizando las funciones de aproximación de tipo elementos finitos conformes (funciones continuas).

El enfoque que se utiliza para localizar los puntos donde la función es discontinua esta basado en la Z-forma que se origina en la función error puntual definida en (6). La Z-forma es producto del fenómeno de GIBBs relativo a las oscilaciones encontradas en la función de ajuste en los puntos de discontinuidad. (Gibbs, 1898; Jerri, 1998; Palma y cols., 2021; Rodríguez del Río y Zuazua Iriondo, 2003).

2. METODOLOGÍA DESARROLLADA PARA LA LOCALIZACIÓN DEL PUNTO DE DISCONTINUIDAD

La metodología para la localización del punto de discontinuidad esta basada en

1. Construir un espacio de aproximación de funciones continuas.
En este artículo se consideran espacios de funciones de tipo elementos finitos conforme, los cuales serán detallados mas adelante.
2. Realizar un proceso de ajuste de tipo mínimos cuadrados considerando la información dada en (1).
Aquí se utiliza el método de ajuste clásico de mínimos cuadrados con el objetivo de aproximar los datos dados.
3. Utilizando las oscilaciones que aparecen en los puntos de discontinuidad detectar el posible punto donde la función desconocida f es discontinua.
4. Ubicación de dicho punto de discontinuidad.
Para ello se propone un análisis de la función error definida en (6) sobre los puntos de datos D (1).

2.1 Espacio de aproximación

Para la construcción del espacio de aproximación se considera una partición \mathcal{P}_n del intervalo $[a, b]$ formada por $(n + 1)$ -puntos, $\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Se define el espacio de funciones \mathbf{V} formado por las funciones cuya restricción a cada intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ es un polinomio de grado menor e igual a \mathbf{m} y son continuas en todo el intervalo $[a, b]$, es decir

$$\mathbf{V} = \{f \in \mathcal{C}^0 : f|_{I_i} \in \mathbb{P}_m, \quad i = 0, \dots, n - 1\} \quad (3)$$

Como es bien conocido este espacio vectorial \mathbf{V} de funciones es de dimensión $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + 1$.

2.2 Proceso de ajuste de tipo mínimos cuadrados

Ahora se procede a formular el problema de mínimos cuadrados asociado a el ajuste de datos dados en, ver (1).

Se define utilizando (1)

$$Y = (y_i)_{1 \leq i \leq K}$$

y para todo $w \in \mathbf{V}$, su vector \mathbb{R}^K asociado a

$$W = (w(x_i))_{1 \leq i \leq K}$$

Se sabe que el problema de mínimos cuadrados es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ \|U - Y\|_m = \inf_{w \in \mathbf{V}} \|W - Y\|_m \end{array} \right. \quad (4)$$

El cual posee una solución única.



Sea una base $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n \cdot m + 1} \subset \mathbf{V}\}$, entonces todo elemento de $w \in \mathbf{V}$ se puede representar como

$$\sum_{j=1}^{n \cdot m + 1} w_j \phi_j$$

Así, se define para todo elemento $w \in \mathbf{V}$ el vector en $\mathbb{R}^{n \cdot m + 1}$ y la matriz de orden $n \cdot m + 1 \times n \cdot m + 1$

$$C_w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n \cdot m + 1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_{n \cdot m + 1}(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_{n \cdot m + 1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_K) & \phi_2(x_K) & \cdots & \phi_{n \cdot m + 1}(x_K) \end{pmatrix}$$

el problema (4) es equivalente al problema

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in \mathbf{V}, \text{ tal que:} \\ \|AC_u - Y\|_m = \inf_{w \in \mathbf{V}} \|AC_w - Y\|_m \end{cases} \quad (5)$$

En consecuencia, $u \in \mathbf{V}$ es determinado mediante sus coeficientes C_u en la base B de \mathbf{V} al resolver el sistema lineal

$$A^T AC_u = A^T Y$$

el cual tiene una solución única.

2.3 Detección de los Puntos de discontinuidad

Para la detección de puntos candidatos a ser puntos de discontinuidad, nos basamos en un hecho importante del fenómeno de GIBBs que indica que al aproximar con combinaciones de funciones trigonométricas (en términos más generales con funciones continuas) una función discontinua, en el sentido de un salto finito (ver Figura 1.), en un punto $\alpha \in (a, b)$ se presentan oscilaciones en la gráfica en el punto de discontinuidad (Jerri, 1998; Palma y cols., 2021; Rivera-Roman y Martinez-Gonzalez, 2018). Entonces se procede a estudiar las variaciones del error puntal (6) obtenido a través del problema de ajuste (5), es decir que solamente se considera el error de ajuste en los puntos de D , ver (1).

Definición 1. *El error puntal se define como*

$$E(x_i) = y_i - u(x_i), \quad \text{para } i = 1, \dots, K \quad (6)$$

Con esta definición se busca resaltar las variaciones del error puntal, ya que por el fenómeno de Gibbs el error cambia de signo en el entorno inmediato donde se ubica la discontinuidad (Jerri, 1998; Rivera-Roman y Martinez-Gonzalez, 2018). Este hecho puede ser observado directamente al realizar la resolución de problema de mínimos cuadrados, por ejemplo (ver Figura 2.), donde se aprecian el subimpulso y sobreimpulso relacionados con el punto de discontinuidad cuando se realiza la aproximación con series de Fourier.

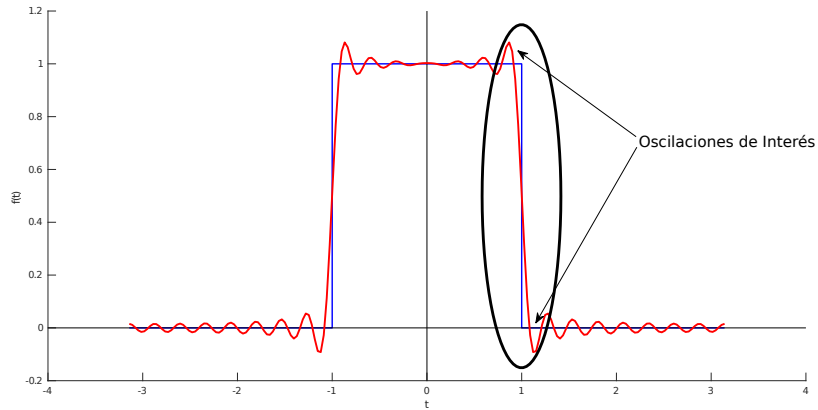


Figura 1. Aproximación en serie de Fourier con 23 términos.

En la mayoría de los estudios el error es tomado en valor absoluto, con lo cual lo que se desea es acotar el error cometido con la aproximación (Palma y cols., 2021). En nuestro caso no se coloca valor absoluto porque nuestro objetivo es destacar mediante el uso del error definido en (6) los puntos donde la variación del mismo es amplia con respecto a la media de los errores.

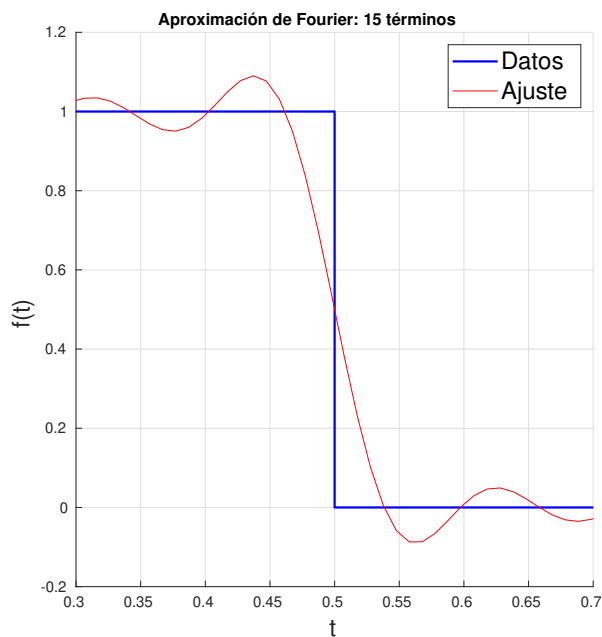


Figura 2. Sobreimpulso y subimpulso.

2.4 Criterio para la ubicación de los puntos de discontinuidad

Para la determinación de puntos de discontinuidad se utiliza el hecho, como se lo menciona en (Jerri, 1998) que cerca de estos puntos se manifiesta un sobreimpulso y un subimpulso en la función de ajuste. El criterio para la detección de los puntos de discontinuidad está basado en este hecho y el comportamiento de la función error puntual definida en (6), haciendo parecer una característica particular que llamaremos el **fenómeno de la Z-forma**, que trataremos a continuación. Desde un punto de vista discreto, esto se traduce en una forma de “Z” o “Z invertida” de la función error puntual entre los puntos donde los impulsos en la función de ajuste son contrarios y consecutivos, ver la Figura 3. La Z-forma está magnificada por una variación fuerte del error (6).

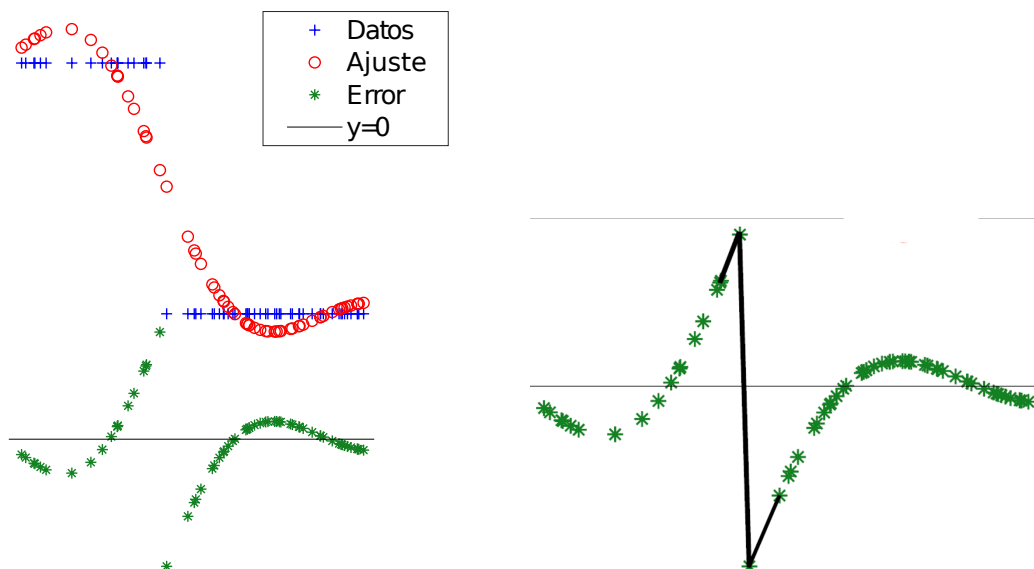


Figura 3. Izquierda: Gráfica de datos con una discontinuidad, gráfica de la función ajuste con el sobreimpulso y subimpulso alrededor del punto de discontinuidad, y gráfica de la función error. Derecha: Z-forma de la función error en un entorno del punto de discontinuidad.

A continuación se propone un procedimiento para la estimación de los puntos donde ocurre el fenómeno de la Z-forma, el cuál consiste en un análisis de cuatro puntos:

- I. Barrido de cuatro puntos sobre los datos analizados. Clasificando los puntos que presentan la característica siguiente:

Para $i = 1, \dots, k - 3$, se estudia el cambio de signo de las expresiones

$$E(x_i) - E(x_{i+1}) \quad \text{y} \quad E(x_{i+2}) - E(x_{i+3}), \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, K - 3$$

y se conserva la variación en el error, es decir

$$\begin{cases} \text{Si} & (E(x_i) - E(x_{i+1}))(E(x_{i+2}) - E(x_{i+3})) > 0 \quad \text{y} \quad E(x_{i+1}) * E(x_{i+2}) < 0 \\ \text{entonces} & Var_i = |E(x_{i+2}) - E(x_{i+1})| \quad \text{y} \quad X_{di} = \frac{x_{i_0+1} + x_{i_0+2}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Var_i define el módulo de la variación del error, y X_{di} es la estimación del punto de la Z-forma asociado con esa variación. Los puntos en el vector X_{di} son candidatos a ser puntos de discontinuidad, pero no necesariamente todos lo son.

- II. Para depurar el vector X_{di} se analizan las variaciones en el vector Var_i . Se calcula la variación máxima y se descartan aquellas que sean menores que un porcentaje (determinado por el usuario) de la variación máxima. Los nuevos puntos en X_d serán aquellos asociados con las variaciones admitidas.

Para la estimación del o los puntos de discontinuidad se debe implementar el siguiente algoritmo.

2.4.1 Algoritmo para la determinación de los puntos de discontinuidad

El método propuesto en este trabajo para la detección de los puntos de discontinuidad de tipo salto finito, se puede implementar con el siguiente algoritmo:

Algoritmo 1 Detección de puntos de discontinuidad

1. Ordenar los datos dados en (1), elegir un valor de n que determina el número de subintervalos de la partición y por consiguiente la dimensión del espacio \mathbf{V} .
 2. Resolver el problema de ajuste (5) y calcular la función error puntual (6).
 3. Calcular los puntos donde ocurre la Z-forma aplicando el procedimiento descrito en I-II.
 4. Incrementar el valor de n y repetir los pasos 1-4. Nota se debe tener en cuenta que a lo sumo n puede tomar el valor $n = (k - 1)/m$, de lo contrario, si $n = (k - 1)/m$, el problema de ajuste se convierte en un problema de interpolación y por consiguiente la función error puntual es nula. Por lo tanto, este algoritmo se ejecuta a lo sumo $(k - 1)/m$ veces.
 5. Analizar los conjuntos de puntos generados para diferentes valores de n obtenidos en el paso 3 para estimar los puntos de discontinuidad, por ejemplo, utilizar la intersección de los conjuntos.
-

Observaciones:

- a. Evidentemente, esta propuesta detecta al menos un punto de discontinuidad, aquel asociado a la variación máxima del error. Para detectar otros puntos de discontinuidad (en caso de existir), se proponen dos posibles estrategias:
- (i) Ejecutar los pasos 1-4 del algoritmo 1, para algunos valores de $1 < n < (k - 1)/m$ (no necesariamente todos), esto origina una sucesiones de vectores X_{di} , lo cual a su vez puede generar varias sucesiones de puntos (por ejemplo, ver la Tabla 1). Analizando estas sucesiones se estiman los puntos de discontinuidad, por ejemplo la intersección de las sucesiones encontradas en cada iteración.
 - (ii) Después de realizar los paso 1-3 del algoritmo anterior, y obtener el punto X_d correspondiente a la variación máxima, hay que hacer una división del problema dividiendo el intervalo de análisis en dos con terminales en x_d y repetir el proceso de detección en cada subintervalo. Este proceso de división en intervalos culmina cuando el ajuste realizado no presenta fuertes variaciones en el error por ejemplo variaciones menores a 20% del error en valor absoluto obtenido del análisis del error realizado previamente. Esta estrategia no se aplica en este trabajo y su implementación se deja para trabajos futuros.



- b. El problema descrito anteriormente es de interés cuando el salto en la discontinuidad es apreciable en la data utilizada, es decir, si la discontinuidad representa un salto muy pequeño de orden 10^{-4} con respecto a la variabilidad de los datos, esta puede ser no detectada por el procedimiento, motivado a los errores de redondeo en los cálculos. Si la discontinuidad es evitable esta podría ser detectada siempre y cuando la partición \mathcal{P}_n contenga el punto de salto. Por otra parte, estos casos no son de interés en muchas aplicaciones prácticas, tales como las de geología estructural.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Con la finalidad de mostrar la efectividad del método propuesto en la sección anterior para detectar puntos de discontinuidad, se han elegido tres conjuntos de datos sintéticos, cada uno con más de un punto de discontinuidad. Los ejemplos se realizaron utilizando el espacio de funciones definido en (3), para $m = 1$ (funciones polinómicas por partes de grado 1). Es necesario aclarar que al no contar con un conjunto de datos provenientes de un problema real, los resultados se presentan utilizando datos sintéticos, sin que esto reste efectividad al método propuesto. Por otro lado, en los ejemplos se puede observar que no se utilizan datos triviales, sino que mas bien, los datos utilizados, presentan comportamientos irregulares, como espacios en blanco en la distribución de los puntos, los cuales pudieran contribuir a detectar discontinuidades falsas, o cambios abruptos en las pendientes. Cabe resaltar, que los ejemplos son ilustrativos de la aplicación del método propuesto para la aproximación de los puntos donde ocurren discontinuidades de salto finito. En ningún momento nuestro objetivo es mostrar un análisis exhaustivo con los ejemplos aquí mostrados, pero si mostrar las bondades del método de aproximación.

3.1 Ejemplo 1

Los datos para este ejemplo es un conjunto $D_1 = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, 300\}$, de $k = 300$ puntos, tomados aleatoriamente con abscisas en el intervalo $[-5, 10]$, ver Figura 4. En esta figura se puede ob-

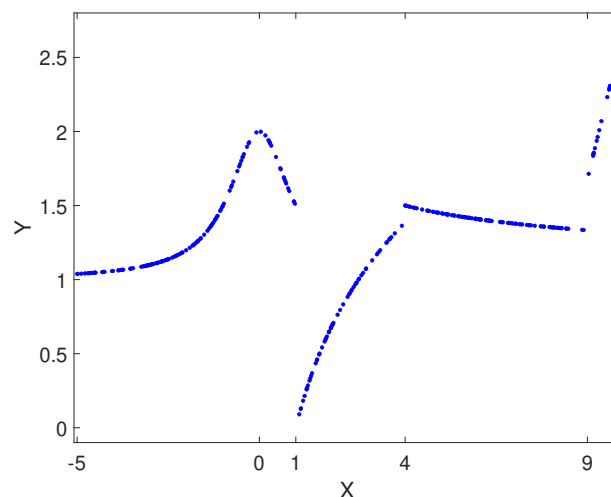


Figura 4. Gráfica de los datos D_1 .

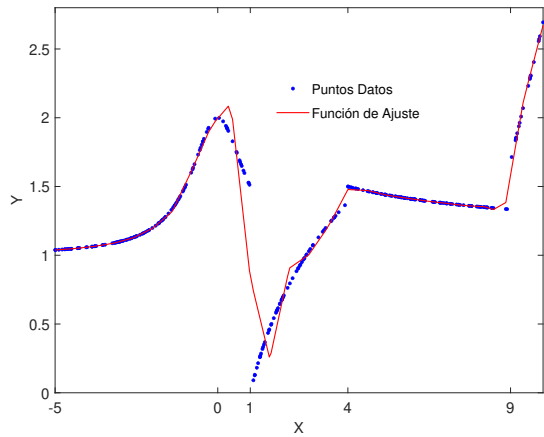
servar que estos datos tienen discontinuidades de tipo salto finito en $x = 1$, $x = 4$ y $x = 9$. Además, D_1 no contiene puntos con abscisas en $x = 1$ y $x = 9$, es decir solo el punto de discontinuidad $x = 4$ es parte de los datos. También, se puede observar los cambios abruptos en la pendiente de la curva en un entorno de los puntos de discontinuidad.

Al implementar el Algoritmo 1. para estos datos, con diferentes valores de n , es decir, aumentando progresivamente la dimensión del espacio vectorial \mathbf{V} , se obtuvo funciones de ajuste de los datos y sus respectivas funciones de error puntual cuyos resultados se resumen en la Tabla 1.

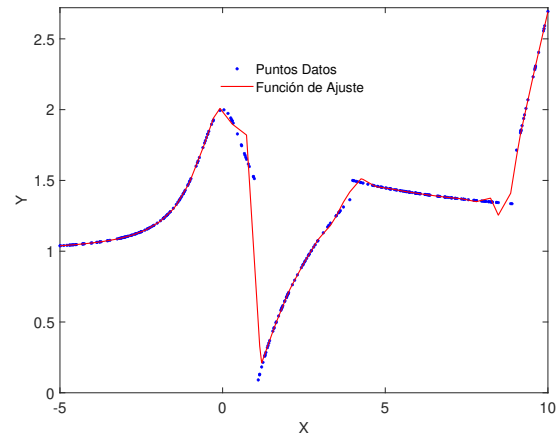
Tabla 1. Resultados al aplicar el Algoritmo 1 en los datos D_1

Valores de n	Puntos de discontinuidad estimados en cada iteración									
26			1.035			1.495	3.955			8.965
27			1.035				3.955			8.965
28			1.035				3.955			8.965
29			1.035		1.3525		3.955			8.965
30			1.035				3.955	8.665		8.965
31			1.035				3.955			8.965
32			1.035				3.955			8.965
33			1.035			1.495	3.955			8.965
34			1.035				3.955			8.965
35	0.805		1.035				3.955			8.965
36			1.035		1.3525		3.955			8.965
37			1.035				3.955			8.965
38			1.035				3.955			8.965
39			1.035				3.955			8.965
40		0.8825	1.035				3.955		8.875	8.965
41			1.035				3.955			8.965
42			1.035	1.17			3.955			8.965
43			1.035				3.955			8.965
44			1.035				3.955			8.965
45		0.8825	1.035				3.955			8.965

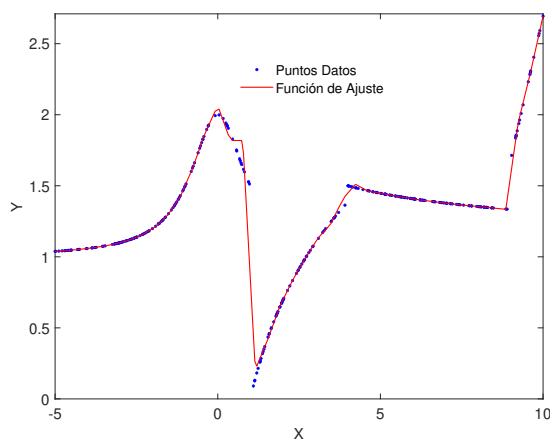
La primera columna de la Tabla 1, se refiere a los valores de n para los cuales se aplicó el Algoritmo 1. Se observa que el algoritmo se aplicó iterativamente para valores de n que van desde 26 hasta 45. Las siguientes columnas de la Tabla 1, muestran los puntos que capta el criterio (7), seleccionado aquellos donde la variación del error era mayor al 10% de la variación máxima encontrada. En estos puntos ocurre la Z-forma y son candidatos a ser puntos de discontinuidad. Se puede observar por ejemplo, que en la iteración correspondiente a $n = 29$, el método estimó los puntos 1.035, 1.3525, 3.955 y 8.965 como posibles puntos de discontinuidad. De igual modo, se puede observar el mismo comportamiento en la fila correspondiente a $n = 36$. La Tabla 1 muestra que la intersección de los conjuntos de puntos generados en cada iteración (valores en cada fila), son los puntos 1.035, 3.955 y 8.965, los cuales son buenas aproximaciones a los puntos de discontinuidad esperados. En conclusión, el método obtuvo una buena aproximación de los puntos de discontinuidad de los datos.



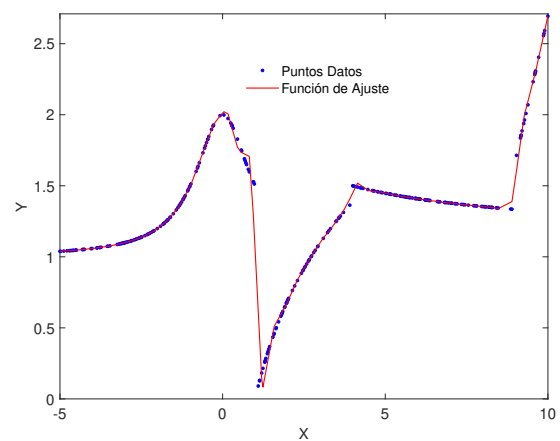
(a) Gráfica de los datos D_1 y la función de ajuste para $n = 26$



(b) Gráfica de los datos D_1 y la función de ajuste para $n = 35$



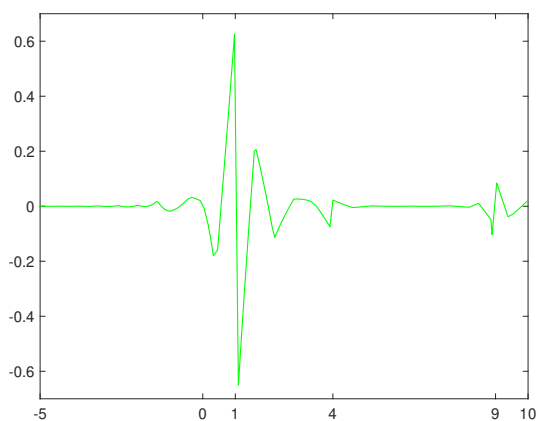
(c) Gráfica de los datos D_1 y la función de ajuste para $n = 40$



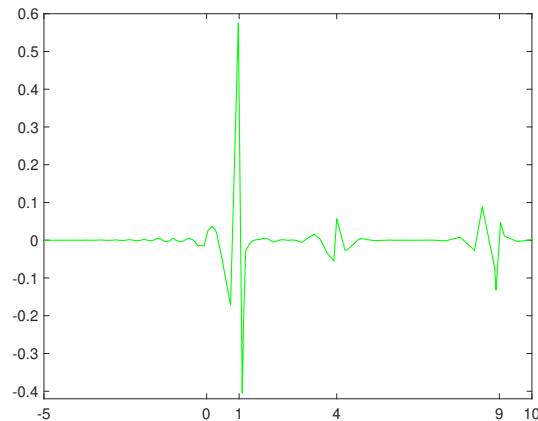
(d) Gráfica de los datos D_1 y la función de ajuste para $n = 42$

Figura 5. Gráficas del conjunto de datos D_1 y la función ajuste para distintos valores de n .

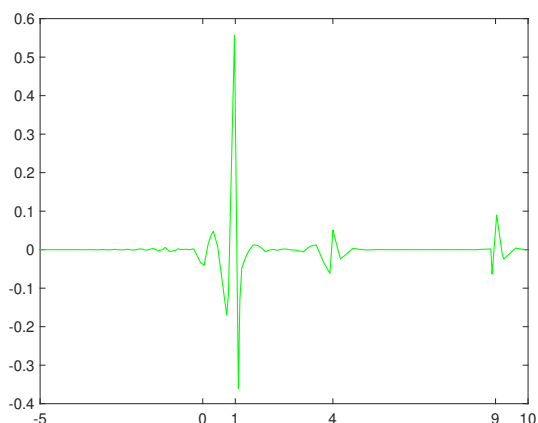
En la Figura 5, se muestran cuatro gráficas de los datos junto con la función de ajuste para valores de $n = 26, 35, 40$ y 42 . Se observa que la función de ajuste se aproxima mejor a los datos en la medida que n aumenta, lo cual es un indicador de que el problema (5) está bien implementado computacionalmente. En las gráficas de la función de ajuste, a simple vista no es observable el fenómeno de Gibbs, por lo cual, los puntos de discontinuidad no son predecibles a partir de estas gráficas. Por consiguiente, es necesario aplicar el criterio (7), para la estimación de los puntos de discontinuidad.



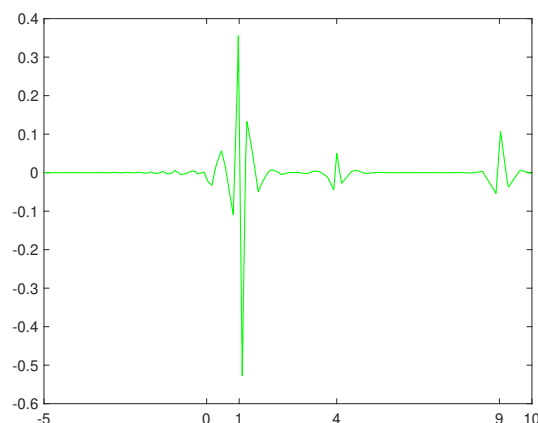
(a) Gráfica del error puntual para $n = 26$



(b) Gráfica del error puntual para $n = 35$



(c) Gráfica del error puntual para $n = 40$



(d) Gráfica del error puntual para $n = 42$

Figura 6. Gráficas del error puntual asociados a los datos D_1 para distintos valores de n .

En la Figura 6, se muestran gráficas de la función error puntual asociadas a las funciones de ajuste obtenidas para los valores de n en la Figura 5. En ellas, se puede apreciar todas las Z-formas de la función error puntual. No obstante, en la Tabla 1 solo se muestran los puntos de aquellas Z-formas que cumplen con el criterio (7) con un módulo de variación mayor al 10% de la variación máxima. En estas gráficas, se pueden observar que las máximas variaciones del error ocurren en los puntos de discontinuidad de los datos y en la medida que n aumenta, las otras variaciones se van atenuando a cero.



3.2 Ejemplo 2

En este ejemplo, el conjunto de datos $D_2 = \{(x_i, y_i), i = 1 \dots 100\}$ consta de $K = 100$ puntos tomados de manera aleatoria con abscisas en el intervalo $[0.5, 4]$. En la Figura 7 se muestra la gráfica de estos datos. Aunque a simple vista no es tan evidente, estos datos presentan dos discontinuidades en $x = 1.8$ y $x = 3$.

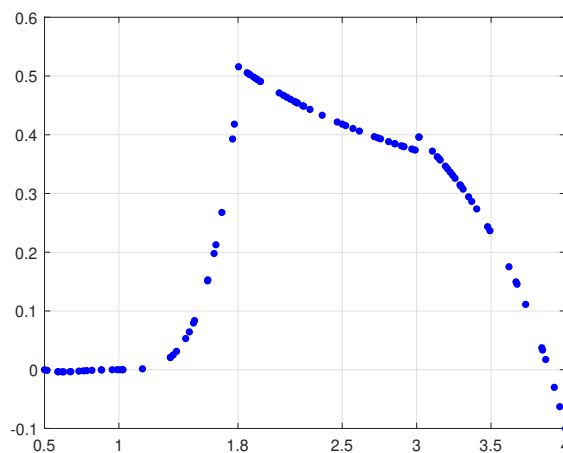


Figura 7. Gráfica del conjunto de datos D_2

Es importante señalar tres características de estos datos: 1) no se cuenta con un conjunto generoso de datos (solo 100 datos), 2) la aleatoriedad de los datos hace que su dispersión sea más notoria en unos lugares que en otros, y 3) en algunos puntos, los datos muestran cambios abruptos en las pendientes de la gráfica de función f a la cual pertenecen. Estos hechos, sin duda alguna, dificultan la detección de los puntos de discontinuidad y hacen interesante a este ejemplo.

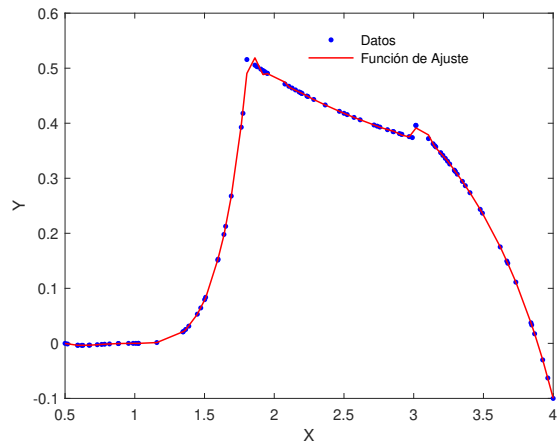
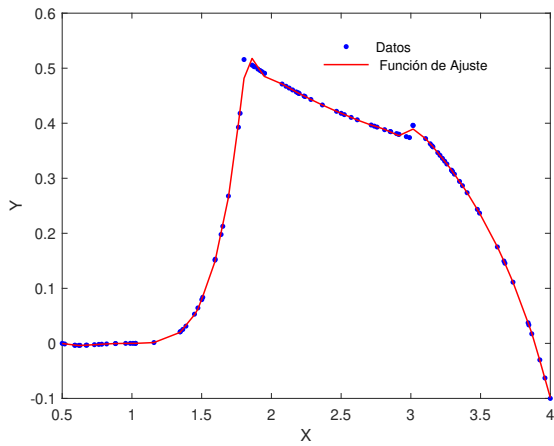
Los resultados al aplicar al Algoritmo 1. a estos datos, se muestran en la tabla 2 y se obtuvieron

Tabla 2. Resultados al aplicar el Algoritmo 1 en los datos D_2

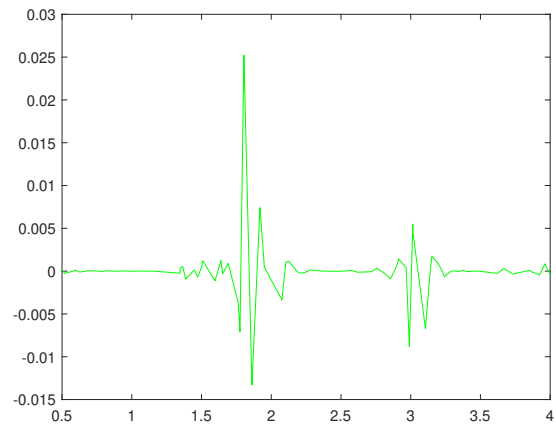
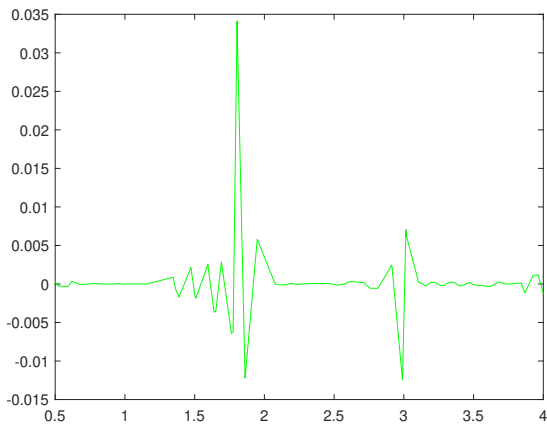
n	Puntos de discontinuidad estimados									
30			1.5518		1.8326				2.9413	3.0025
31										3.0025
32					1.8326					3.0025
33				1.7898	1.8326				2.9413	3.0025
34	1.3461	1.4179				1.8676	1.9403	2.8765		3.0025
35					1.8326					3.0025
36		1.4179		1.7898			1.9403		2.9413	3.0025
37					1.8326					3.0025
38				1.7898	1.8326					3.0025

eligiendo aquellos puntos asociados con variaciones del error mayores al 20% de la variación máxima. A pesar de los datos, los resultados en esta tabla arrojan resultados alentadores. Claramente, la Tabla 2 muestra que en $x = 3.0025$ se estima una discontinuidad, mientras que los datos de las columnas 5

y 6 indican que en un entorno de $x = 1.8$ se estima otra discontinuidad (aunque con menos precisión). La falta de precisión en la detección de esta última discontinuidad en un entorno de $x = 1.8$ es debido a las características que no son favorables en los datos.



(a) Gráfica de los datos D_2 y la función de ajuste para $n = 30$ (b) Gráfica de los datos D_2 y la función de ajuste para $n = 38$



(c) Gráfica del error puntual para $n = 30$

(d) Gráfica del error puntual para $n = 38$

Figura 8. Gráficas de los datos D_2 , la función de ajuste y el error puntual para $n = 30$ y $n = 38$.

En las figuras 8 (a) y 8 (b) se muestran la gráfica de los datos y la función de ajuste para valores de $n = 30$ y $n = 38$, respectivamente. Igual que en el ejemplo 1, se observa que el ajuste mejora cuando n aumenta. Por otra parte, en las figuras 8 (c) y 8 (d) se muestran las gráficas de la función error puntual asociadas a los ajustes obtenidos para $n = 30$ y $n = 38$, respectivamente. En estas gráficas se confirman los resultados de la Tabla 2, las máximas variaciones del error ocurren en un entorno de $x = 1.8$ y en $x = 3$.



3.3 Ejemplo 3

En este ejemplo, el conjunto de datos D_3 utilizado se obtiene de la misma fuente que generó el conjunto de datos D_2 , del Ejemplo 2, pero ahora con una cantidad mayor de datos. En este caso, el conjunto D_3 posee $k = 300$ datos. Al ser más amplio el conjunto de datos, se puede realizar iteraciones del algoritmo 1, incrementando la dimensión del espacio de funciones. En la Figura 9 se muestra la gráfica de los datos del conjunto D_3 , en la cual se puede observar la mayor densidad de datos, con respecto al conjunto D_2 mostrados en la Figura 7. En esta gráfica se puede observar con más claridad la

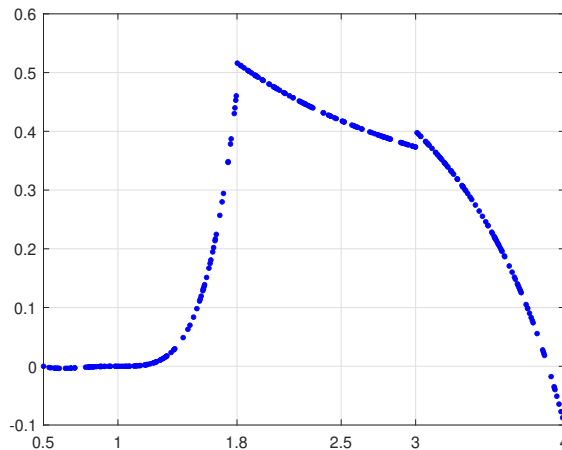


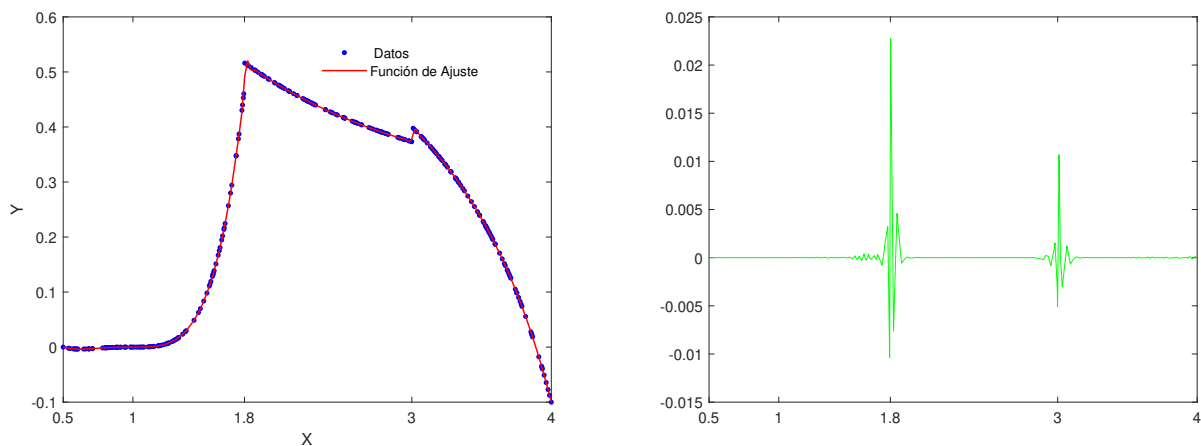
Figura 9. Gráfica del conjunto de datos D_3

discontinuidad de tipo salto finito en los puntos $x = 1.8$ y $x = 3$, además el salto en la discontinuidad es de orden pequeño. En este caso, se aplica el Algoritmo 1 para valores de n que van desde 95 hasta 105. Los resultados se pueden ver en la Tabla 3, donde claramente se observa que los puntos

Tabla 3. Resultados al aplicar el Algoritmo 1 en los datos D_3

n	Puntos de discontinuidad estimados				
95		1.7985		3.00425	
96			2.98873	3.00425	3.02641
97		1.7985		3.00425	
98		1.7985		3.00425	
99				3.00425	
100		1.7985		3.00425	
101		1.7985		3.00425	
102		1.7985		3.00425	
103		1.7985		3.00425	
104	1.77108			3.00425	
105		1.7985		3.00425	

de discontinuidad estimados son $x = 1.7985$ y 3.0042 , los cuales son buenas aproximaciones a los resultados esperados. La Figura 10, muestra las gráficas de los datos junto con el ajuste y la función error, en la cual se confirman los resultados de la tabla.



(a) Gráfica de los datos D_3 y la función de ajuste para $n = 105$.

(b) Gráfica del error puntual para $n = 105$.

Figura 10. Gráficas de los datos D_3 , la función de ajuste y el error puntual para $n = 105$.

4. CONCLUSIONES

- Se desarrolló un método numérico novedoso que permite aproximar los puntos de discontinuidad de tipo salto finito en un conjunto de datos en \mathbb{R}^2 , incluyendo los casos en que los puntos de discontinuidad pertenecen o no a los datos.
- La efectividad del método queda demostrada al detectar discontinuidades en datos aleatorios, no triviales, con cambios abruptos de la pendiente, con vacíos que pudieran conducir a una detección falsa de discontinuidades.
- El método puede estimar puntos donde la discontinuidad tiene saltos hasta el orden de 10^{-4} .
- El método desarrollado presenta ventajas cuando la dimensión del espacio de ajuste es mucho más pequeña que la cantidad de datos.
- Se recomienda para trabajos futuros extender el método a datos en \mathbb{R}^3 .

5. DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES DE LOS AUTORES

Los autores declaran no tener conflicto de intereses.



6. REFERENCIAS

- Apprato, D., Arcangéli, R., y Manzanilla, R. (1987). Sur la construction de surfaces de classe c^k à partir d'un grand nombre de données de lagrange. *Modélisation mathématique et analyse numérique.*, 21,(4), 529–555.
- Apprato, D., y Gout, C. (2000). A result about scale transformation families in approximation: application to surface fitting from rapidly varying data. *Numerical Algorithms.*, 23, 263–279.
- Arcangéli, R. (1989). Some application of discrete d^m -spline mathematical methods in computer aided geometric design. in: Lyche, t. and schumaker, l.(eds.). *Academic Press, INC.*, 35–44.
- Arcangéli, R., Manzanilla, R., y Torrens, J. (1997). Approximation spline de surfaces de type explicite comportant des failles. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 31(5), 643–676. Descargado de http://www.numdam.org/item/?id=M2AN_1997__31_5_643_0
- Gibbs, J. W. (1898). Fourier's series. *Letter in Nature*, 59, 606. doi: 10.1038/059200b0
- Gout, C., Guyader, C. L., Romani, L., y Saint-Guirons, A. (2008, marzo). Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D^m splines and the finite element method. *Numerical Algorithms*, 48(1-3), 67–92. doi: 10.1007/s11075-008-9177-8
- Gout, C., y Ramière, I. (2003). Surface approximation from rapidly varying bathymetric data. *IEEE IGARSS.*, 4(IV), 2679–2681.
- Gutzmer, T., y Iske, A. (1997). Detection of discontinuities in scattered data approximation. *Numerical Algorithms*, 16,(2), 150–170. doi: 10.1023/A:1019139130423
- Jerri, A. J. (1998, 01). The gibbs phenomenon in fourier analysis, splines and wavelet approximations. *Mathematics and Its Applications. Springer-Science+Business Media, B.V.*
- Manzanilla, R. (1986). Sur l'approximation de surfaces définies par une équation explicite. *Thèse, Université de Pau.*
- Palma, P., Gallo, R., y Manzanilla, R. (2021, September). Detection of Discontinuity Points in one Variable Functions using Space of Trigonometric Functions . *Compama. Bull. Comput. Appl. Math*, 9(2).
- Rivera-Roman, E., y Martinez-Gonzalez, R. (2018). Características del fenómeno de gibbs. *Impulso tecnológico*, 15(37°), 14–16.
- Rodríguez del Río, R., y Zuazua Iriondo, E. (2003). Series de fourier y fenómeno de gibbs. *Cubo. Matemática Educativa*, 5(2), 185–224.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORES

Autor	Contribución
Víctor Lino	Metodología, búsqueda de bibliografía, diseño del artículo y resultados numéricos.
Rodolfo Gallo	Redacción, algoritmos y diseño experimental.
Raúl Manzanilla	Concepción y criterio para la ubicación de los puntos de discontinuidad.