Arquimedes: O Contador de Areia

Archimedes: The Sand-Reckoner

Ivo A. Marques * e Davi M. Cataneo
Instituto de Física – UFG
Av. Esperança, s/n – Campus Samambaia,
Goiânia – GO – 74690-900

(SUBMETIDO: [03/10/2022] - ACEITO: [10/02/2023] - PUBLICADO: [06/04/2023])

Apresentamos a tradução comentada do famoso tratado de Arquimedes de Siracusa "O Contador de Areia". Arquimedes se propôs a determinar um limite superior para o número de grãos de areia que caberiam no 'Universo' de sua época. Ele usou duas definições de 'Universo': a definição comum e a definição de Aristarco de Samos. É justamente nesse tratado que temos a mais antiga alusão à proposta heliocêntrica de Aristarco. Arquimedes concluiu que a quantidade máxima de grãos de areia que caberia no 'Universo' seria, em notação moderna, 10^{51} na definição comum e 10^{63} na definição de Aristarco. Acreditamos que "O Contador de Areia" possa ser utilizado em aulas de Física, Matemática e/ou Astronomia, abordando: a visão de Universo na antiguidade, o procedimento de Arquimedes para a determinação experimental do diâmetro angular do Sol e a problemática da representação de números extremamente grandes antes da invenção dos algarismos indo-arábicos.

Palavras-chaves: Aristarco de Samos; História da Ciência; Astronomia.

We present the commented translation of the famous treatise written by Archimedes of Syracuse "The Sand-Reckoner". Archimedes set out to determine an upper limit to the number of grains of sand that would fit in the 'Universe' of his time. He used two definitions of 'Universe': the common definition and the definition of Aristarchus of Samos. It is precisely in this treatise that we have the oldest allusion of the Aristarchus' heliocentric proposal. Archimedes concluded that the maximum number of grains of sand that could fit in the 'Universe' would be, in modern notation, 10^{51} in the common definition and 10^{63} in Aristarchus' definition. We believe that "The Sand-Reckoner" can be used in Physics, Mathematics and/or Astronomy classes, discussing: the Universe conception in antiquity, the Archimedes experimental procedure to determine the angular diameter of the Sun and the problem of representing extremely large numbers before the invention of the Indo-Arabic numeral system.

Keywords: Aristarchus of Samos; History of Science; Astronomy.

I. INTRODUÇÃO

Ao estudarmos a História da Ciência, devemos ter em mente que todo o conhecimento que temos hoje foi construído pela espécie humana ao longo do tempo. Até coisas simples, como procedimentos aritméticos básicos, tiveram de ser desenvolvidos. Nada surgiu milagrosamente do nada. No passado, suponhamos a 10 mil anos atrás, a espécie humana ainda não tinha uma ideia clara sequer sobre números e, menos ainda, sobre como representá-los [1, 2].

Os gregos da antiguidade tinham, pelo menos, dois sistemas principais de numeração [1, 2]. No primeiro sistema (sistema ático), o mais antigo, eles representavam: 1 por I, 5 por Γ, 10 por Δ, 50 por Γ^{Δ}, 100 por H, 500 por Γ^{H}, 1.000 por X, 5.000 por Γ^{X}, 10.000 por M e 50.000 por Γ^{M}. Considerando a característica aditiva do sistema, por exemplo, o número 57.699 seria representado por $\Gamma^{M}\Gamma^{X}XX\Gamma^{H}H\Delta\Delta\Delta\Delta\Gamma IIII$. Fica evidente a grande dificuldade para representar números muito grandes no sistema ático.

No segundo sistema (sistema alfabético) a cada uma das 24 letras do alfabeto grego foi

* E-mail: ivo@ufg.br

DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

associado um valor numérico. Para formar um sistema consistente eles ainda utilizaram, de forma complementar, três signos de origem fenícia: o 'dígamo', o 'qoppa' e o 'san'. No presente trabalho utilizaremos as letras gregas minúsculas α, β e γ, respectivamente, para representar os três signos de origem fenícia. Assim, para as unidades: $A = 1$, $B = 2$, $\Gamma = 3$, $\Delta = 4$, $E = 5$, $\alpha = 6$, $Z = 7$, $H = 8$ e $\Theta = 9$. Para as dezenas: $I = 10$, $K = 20$, $\Lambda = 30$, $M = 40$, $N = 50$, $\Xi = 60$, $O = 70$, $\Pi = 80$ e $\beta = 90$. Para as centenas: $P = 100$, $\Sigma = 200$, $T = 300$, $\Upsilon = 400$, $\Phi = 500$, $X = 600$, $\Psi = 700$, $\Omega = 800$ e $\gamma = 900$. Para os números de 1.000 a 9.000 eles utilizaram novamente as primeiras 9 letras acima, mas acrescentando uma espécie de acento, $'$, colocado à esquerda. Para números maiores que 9.999 temos a multiplicação pela miríade, ou seja, a multiplicação por 10.000, a qual era representada pela letra M seguida, como um índice superior, do número que seria então multiplicado por 10.000. Também no sistema alfabético temos a característica aditiva, assim, por exemplo, o número 57.699 seria representado por $M^{E}{}'ZX\beta\Theta$. O sistema alfabético traz uma simplificação grande quando comparado ao sistema ático, mas, mesmo assim, há dificuldades significativas para a representação de números extremamente grandes.

Até onde sabemos, Arquimedes de Siracusa foi a primeira pessoa a propor uma forma sistemática para a representação de números extremamente grandes [3]. Ele descreveu sua proposta em, pelo menos, dois tratados: "Princípios" e "O Contador de Areia". O primeiro tratado se perdeu ao longo dos séculos e o segundo será analisado no presente trabalho.

O que sabemos sobre a vida de Arquimedes? Sabemos muito pouco. Os principais pontos que temos, com relativa certeza, é que ele viveu em Siracusa, principal cidade grega no Mediterrâneo Ocidental, e que ele foi morto em 212 a.C., durante a tomada da cidade pelas legiões romanas. Arquimedes é apresentado como uma espécie de engenheiro mecânico chefe da cidade, estando envolvido no projeto das armas de resistência ao cerco romano. Existe uma tradição tardia, de pouca confiabilidade histórica, que aponta que ele teria morrido com 75 anos, o que indicaria que ele teria nascido em 287 a.C.. Além disso, como veremos em "O Contador de Areia", o próprio Arquimedes diz que seu pai era um astrônomo. Basicamente, é isso o que sabemos. E, baseado em sua obra, Arquimedes também era o que podemos chamar hoje como um matemático, possivelmente o mais importante matemático de seu tempo. Além dos poucos dados históricos, temos também algumas anedotas que foram sendo propagadas ao longo dos séculos: como a construção de espelhos com a finalidade de incendiar navios inimigos ou a famosa história do "Eureca !!!" enquanto ele tomava banho. [4]

No tratado "A Medida do Círculo" Arquimedes traz a mais acurada estimativa de π, razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo, da antiguidade. Ele cita que $(6.336)/(2.017 + 1/4) < \pi < (14.688)/(4.673 + 1/2)$, ou seja, $3,140909654 < \pi < 3,142826575$ [5]. Esses valores ele então aproxima para $3+10/71 < \pi < 3+1/7$, ou seja, $3,14084507 < \pi < 3,142857142$ [5]. Para comparação, hoje sabemos que $\pi = 3,141592654\ldots$. Por outro lado, nos tratados "Do Equilíbrio dos Planos" e "Corpos Flutuantes" Arquimedes lançou alguns dos fundamentos para a Física [4, 6]. Devemos destacar que, assim como os árabes na Idade Média, os principais nomes da Renascença e início da revolução científica leram Arquimedes. Nomes como: Piero della Francesca (1415-1492), Regiomontanus (1436-1476), Leonardo da Vinci (1452-1519), Simon Stevin (1548-1620), Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727). Assim, podemos dizer que Arquimedes teve influência direta durante o nascimento da Ciência Moderna.

Visando contribuir para a História e o Ensino da Ciência, no presente trabalho desenvolveremos a tradução comentada do famoso tratado de Arquimedes "O Contador de Areia" (em inglês "The Sand-Reckoner"). Nesse trabalho Arquimedes se propôs a determinar um limite superior para o número de grãos de areia que caberiam no Universo de sua época. Para isso, ele teve que estimar o tamanho do Universo e, literalmente, inventar uma maneira de representar números extremamente grandes.

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

Arquimedes usou duas definições de Universo: a definição comum e a definição de Aristarco de Samos [7, 8]. É justamente nesse tratado que temos a mais antiga alusão à da proposta heliocêntrica de Aristarco.

Para a tradução em português de "O Contador de Areia" partimos da tradução em inglês feita pelo eminente classicista Sir Thomas Little Heath (1861-1940) [9]. Exclusivamente o texto referente à seção "Descrição do procedimento experimental" foi traduzido a partir da versão para o inglês do também renomado Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965) [10]. A tradução foi suplementada com 45 notas explicativas que ajudam a entender melhor o contexto e o teor do tratado.

Embora não esteja associada a uma publicação formal, por completeza, mencionamos a tradução anterior, em português europeu, realizada por A.S.L.N. Leal, E.P. Pereira, S.C.P. Rosa e O. Pombo [11], da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Desta forma, o leitor pode, se assim desejar, comparar as duas traduções e/ou comentários, enriquecendo ainda mais sua experiência com "O Contador de Areia".

Destacamos que os tratados gregos da antiguidade eram escritos via texto corrido e em letras maiúsculas, sem sequer haver a colocação de espaço em branco entre as palavras [4]. *ASSIMESSAFRASEÉUMBOM EXEMPLODECOMOSERIAUMTEXTOGRE GODAÉPOCADEARQUIMES*. Os diagramas geométricos eram simplesmente inseridos próximos ao texto, sem maiores referências. Além disso, não se usavam os sinais: $=$ (igualdade), $>$ (maior que), $<$ (menor que) e / (razão), tudo era expresso de forma literal. Desta forma, sempre que tais sinais aparecerem no texto, deve-se ter em mente que são "transcrições modernizadas". Na presente tradução, seguindo o estilo grego da antiguidade, optamos por não adicionar legenda nas duas figuras da tradução. Por outro lado, em prol da clareza, optamos por apresentar o texto subdividindo-o em seções. Por fim, quando não houver citação explicita no texto de uma determinada nota explicativa, significa que as informações ali constantes vieram do Heath [9] e/ou do Dijksterhuis [10], ou foram desenvolvidas pelos próprios autores do artigo.

Devido a seu tamanho e escopo, acreditamos que "O Contador de Areia" possa ser utilizado, na íntegra ou de forma parcial, em aulas de Física, Matemática e/ou Astronomia, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Universitário. Os três principais pontos que poderiam ser abordados com os estudantes seriam: a visão de Universo na antiguidade, o procedimento de Arquimedes para a determinação experimental do diâmetro angular do Sol e a problemática da representação de números extremamente grandes antes da invenção dos algarismos indo-arábicos. Por fim, esperamos que o trabalho contribua de forma significativa para o aprimoramento do complexo processo de ensino/aprendizagem de Ciências.

II. TRADUÇÃO DE "O CONTADOR DE AREIA"

II.1. Introdução

Existem pessoas, rei Gelão NE1, que pensam que o número de grãos de areia é infinito em quantidade. O que quero dizer, quando me refiro à areia, não é só aquela que existe em Siracusa e no resto da Sicília, mas também àquela que se encontra nas outras regiões, sejam elas habitadas ou não. Outrossim, existem pessoas que, sem considerá-lo infinito, pensam que nenhum número foi nomeado que seja suficientemente grande para exceder à sua quantidade. E é claro que aqueles que sustentam essa visão, se imaginassem uma massa de areia tão grande quanto a massa da Terra, incluindo nessa todos os mares e depressões da Terra preenchidos até a altura da mais alta das montanhas, estariam ainda muito longe de reconhecer que algum número poderia ainda ser expresso de tal forma que excedesse a quantidade da areia aí existente. Mas, eu tentarei mostrar-vos através de provas geométricas, que conseguireis acompanhar, que, dos números nomeados por mim e que constam no trabalho que enviei a Zeuxipo NE2, alguns excedem não só o número da massa de areia igual em magnitude à da Terra preenchida da maneira que acima me referi, mas também da massa igual em magnitude ao do Universo NE3.

Ora, você está ciente de que 'Universo' é o nome dado por muitos astrônomos à esfera cujo centro é o centro da Terra e cujo raio é igual à linha reta entre o centro do Sol e o centro da Terra. Essa é a definição comum, como tendes ouvido dos astrônomos. Mas Aristarco de Samos NE4 desenvolveu um livro, que consiste de algumas hipóteses, no qual as premissas levam ao resultado de que o Universo é muitas vezes maior do que aquele exposto acima. Suas hipóteses são: (i) que as estrelas fixas e o Sol permanecem imóveis; (ii) que a Terra gira ao redor do Sol em uma circunferência de um círculo, com o Sol no meio da órbita; (iii) que a esfera das estrelas fixas, situada sobre o mesmo centro que o Sol, é tão grande que a proporção do círculo em que ele supõe que a Terra gira à distância das estrelas fixas é a mesma proporção que o centro da esfera tem para sua superfície NE5. Ora, é fácil ver que isto é impossível. Como o centro da esfera não tem dimensão, não podemos concebê-lo para ter qualquer proporção com a superfície da esfera. Devemos, no entanto, interpretar Aristarco da seguinte forma: uma vez que imaginamos a Terra como sendo, por assim dizer, o centro do Universo, a proporção que a Terra mantém para o que nós descrevemos como 'Universo' é a mesma proporção que a esfera que contém o círculo no qual ele supõe que a Terra gira mantém para a esfera das estrelas fixas NE6. Pois ele adapta as provas de seus resultados a uma hipótese desse tipo e, em particular, ele parece supor que a dimensão da esfera na qual ele representa a Terra em movimento é igual ao que chamamos de 'Universo'.

Digo então que mesmo que uma esfera fosse feita de areia, tão grande quanto a esfera das estrelas fixas segundo Aristarco, ainda provarei que, dos números mencionados em "Princípios" NE7, alguns excedem em quantidade o número de areia que é igual em magnitude à referida esfera, desde que sejam feitas as suposições abaixo.

II.2. Suposições

1. *O perímetro da Terra é de cerca de* 3.000.000 *estádios NE8 e não maior que isso.*
   É verdade que alguns tentaram, como você certamente está informado, provar que o referido perímetro é de cerca de 300.000 estádios. Mas eu vou mais longe e, colocando a dimensão da Terra 10 vezes o tamanho que meus antecessores imaginaram, suponho que o perímetro seja de cerca de 3.000.000 estádios e não maior NE9.

2. *O diâmetro da Terra é maior do que o diâmetro da Lua, e o diâmetro do Sol é maior do que o diâmetro da Terra.*
   Nessa suposição, sigo a maioria dos astrônomos anteriores.

3. *O diâmetro do Sol é cerca de* 30 *vezes o diâmetro da Lua e não é maior.*
   É verdade que, dos astrônomos anteriores, Eudoxo declarou ser cerca de 9 vezes maior e Fídias, meu pai, 12 vezes, enquanto Aristarco tentou provar que o diâmetro do Sol é maior que 18 vezes, mas menor que 20 vezes o diâmetro da Lua NE10. Mas eu vou ainda mais longe do que Aristarco, para que a verdade da minha proposição possa ser estabelecida além de qualquer disputa. Eu suponho que o diâmetro do NE9.

4. *O diâmetro do Sol é maior do que o lado do quiliágono regular NE11 inscrito em um círculo máximo (na esfera) do Universo NE12.*
   Eu faço tal suposição NE13 porque Aristarco descobriu que o Sol parece ser em torno de 1/720 partes do círculo do zodíaco NE14. Eu mesmo tentei, por um método que agora vou descrever, encontrar experimentalmente o ângulo subtendido pelo Sol, tendo seu vértice no olho NE15.

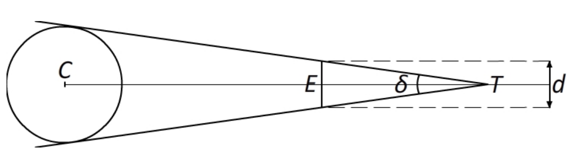
 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

II.3. Descrição do procedimento experimental

Baseado na medição do diâmetro aparente do Sol, δ, uma prova matemática é dada para a "suposição" 4 NE16. Arquimedes explica que é difícil dar um valor exato, porque nem o olho, nem as mãos, nem os instrumentos que devem ser usados são confiáveis para encontrar o valor exato. Será, no entanto, suficiente para ele dar um limite superior e um inferior, obtidos por meio do seguinte procedimento.

Ao longo de uma haste horizontal, montada em uma base vertical, um pequeno cilindro vertical pode ser deslocado. A haste é então apontada na direção do Sol quando este está logo acima do horizonte NE17. O olho é posicionado em uma extremidade e o cilindro é então deslocado na direção do Sol até que este se torne, no limiar, visível à direita e à esquerda do cilindro. Se a pupila do olho fosse um ponto, o ângulo subtendido pelas tangentes traçadas deste ponto até a base do cilindro aparentemente seria um limite inferior para δ. A extensão da pupila do olho complica esse argumento.

De fato, desenhado no plano horizontal da haste, quando ela está apontada para o centro do Sol, o círculo C será a base do cilindro e as tangentes traçadas representarão os raios provenientes das bordas do Sol, os quais se encontrarão no ponto T. Um olho pontual, situado entre C e T, não poderá receber luz solar. Mas, um olho não pontual, cujo diâmetro da pupila seja d NE18, poderá receber, desde que seu centro esteja entre T e o ponto E, onde a distância d se encaixa, no limiar, ao ângulo dos raios do Sol. De fato, nesse caso, o diâmetro da sombra projetada, nessa posição, será menor do que a pupila do olho.



Agora um limite inferior para δ pode ser encontrado colocando, na posição onde o olho vê apenas um pouco do Sol ao redor do cilindro, um disco circular horizontal, cujo diâmetro não é menor do que o diâmetro d da pupila do olho e, então, medindo o ângulo ϕ que é formado pelas linhas que tangenciam este disco e o círculo C.

Para encontrar um limite superior para δ, Arquimedes determina a posição em que o olho não vê mais nada. Essa posição fica entre C e E. As tangentes traçadas a partir desse ponto até círculo C subtendem um ângulo ψ, o qual é maior que δ, e o qual diferirá mais de δ à medida em que o ponto em questão se afaste de E. É claro que poderia ser possível diminuir o limite superior a partir do ângulo subtendido pelas retas tangentes a C e ao disco mencionado acima. Mas, Arquimedes não faz isso, provavelmente porque a imprecisão cometida ao medir o ângulo subtendido pelas tangentes traçadas de um ponto ao círculo C nunca podem dar origem a um valor no lado errado em relação a δ, como poderia, por outro lado, acontecer se ϕ fosse determinado de maneira análoga.

Os resultados encontrados podem ser reproduzidos como: $\phi > R/200$ e $\psi < R/164$, onde R é um ângulo reto NE19.

II.4. Prova da "suposição" (4)

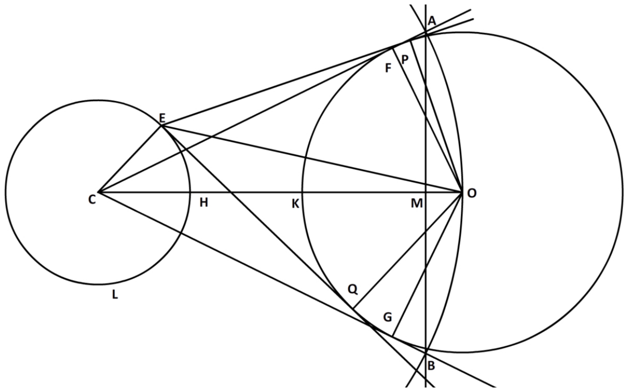
O resultado da experiência mostra que o ângulo subtendido pelo diâmetro do Sol é menor que 1/164 partes e maior que 1/200 partes, de um ângulo reto NE20.

Suponha que o plano do papel seja o plano que passa pelo centro do Sol, o centro da Terra e o olho, no momento em que o Sol acaba de se erguer acima do horizonte. Seja C o centro da Terra, O o centro do Sol e E a posição do olho. Considere que o plano corta a Terra no círculo EHL e o Sol no círculo FKG.

Além disso, suponha que o plano corta a esfera do 'Universo' (a esfera cujo centro é C e raio CO) no círculo máximo AOB. Trace, a partir de E, duas tangentes ao círculo FKG, tocando-o em P e Q. Trace, a partir de C, duas outras tangentes ao mesmo círculo, tocando-o em F e G.

Suponha que a linha CO toca as seções da

Terra e do Sol em H e K, respectivamente. Suponha também que as linhas CF e CG toquem o cículo máximo AOB em A e B, respectivamente. Trace as linhas EO, OF, OG, OP, OQ e AB. Considere que AB corta CO em M.



Assim, uma vez que o Sol esteja logo acima do horizonte, $CO > EO$. Portanto, Ângulo $P\hat{E}Q$ > Ângulo $F\hat{C}G$, em termos abreviados, Ang. $P\hat{E}Q$ > Ang. $F\hat{C}G$. E o Ang. $P\hat{E}Q > 1/200$ de R e o Ang. $P\hat{E}Q < 1/164$ de R, onde R é um ângulo reto NE21. Logo, Ang. $F\hat{C}G < 1/164$ de R, *a fortiori* NE22, a corda AB subtende um arco do grande círculo o qual é menor que 1/656 partes da circunferência desse círculo, ou seja, $AB <$ lado do polígono regular de 656 lados inscrito no círculo.

Ora, lembremos que o perímetro de qualquer polígono inscrito no círculo máximo é inferior a 44/7 de CO NE23. Portanto, $AB/CO < 11/1148$ NE24 e, *a fortiori*, $AB < 1/100$ de CO NE25.

Novamente, uma vez que $CA = CO$ NE26 e AM é perpendicular a CO, enquanto OF é perpendicular a CA, $AM = OF =$ (raio do Sol). Portanto, $AB = 2AM =$ (diâmetro do Sol).

Então, (diâmetro do Sol) $< 1/100$ de CO, e, *a fortiori*, (diâmetro da Terra) $< 1/100$ de CO NE27. Portanto: $CH + OK < 1/100$ de CO, de forma que $HK > 99/100$ de CO, ou $CO/HK < 100/99$. Por outro lado, $CO > CF$, enquanto $HK < EQ$. Portanto, $CF/EQ < 100/99$.

Agora, nos triângulos retângulos CFO e EQO NE28, dos lados sobre os ângulos retos, $OF = OQ$, mas $EQ < CF$ (desde que $EO < CO$). Então, (Ang. $O\hat{E}Q$ dividido pelo Ang. $O\hat{C}F) > CO/EO$. Todavia, (Ang. $O\hat{E}Q$ dividido pelo Ang. $O\hat{C}F) < CF/EQ$ NE29.

Duplicando os ângulos, (Ang. $P\hat{E}Q$ dividido pelo Ang. $A\hat{C}B) < CF/EQ$, ou (Ang. $P\hat{E}Q$ dividido pelo Ang. $A\hat{C}B) < 100/99$. Mas, por hipótese, Ang. $P\hat{E}Q > 1/200$ de R. Portanto, o Ang. $A\hat{C}B > 99/20000$ de R, ou o Ang. $A\hat{C}B > 1/203$ de R.

Segue então que o arco AB é maior do que 1/812 da circunferência do círculo máximo AOB. Logo, *a fortiori*, $AB >$ (lado do quiliágono regular inscrito no círculo máximo) e, como provado acima, AB é igual ao diâmetro do Sol.

II.5. Proposições

Agora, os resultados abaixo podem ser provados.

(1) (diâmetro do 'Universo') < 10.000 (diâmetro da Terra).

(2) (diâmetro do 'Universo') < 10.000.000.000.000 estádios.

II.6. Provas das proposições

(1) Denotemos, por brevidade, o diâmetro do 'Universo' por d_u, o do Sol por d_s, o da Terra por d_e e o da Lua por d_m. Por hipótese, d_s não é maior do que $30d_m$ e $d_e > d_m$, então $d_s < 30\ d_e$.

Assim, a partir da última proposição, $d_s >$ (lado do quiliágono inscrito no círculo máximo), de forma que (o perímetro do quiliágono) $< 1.000\ d_s$, ou (o perímetro do quiliágono) $<$ $30.000\ d_e$.

Mas, o perímetro de qualquer polígono regular com mais de 6 lados inscritos num círculo é maior do que o do hexágono regular inscrito, e portanto maior do que três vezes o diâmetro. Assim, (perímetro do quiliágono) $>$ $3d_u$. Segue-se que $d_u < 10.000\ d_e$.

(2) O perímetro da Terra não é maior do que 3.000.000 estádios e (perímetro da Terra)

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

$> 3d_e$. Assim, $d_e < 1.000.000$ estádios e $d_u <$ 10.000.000.000 estádios.

II.7. Nova suposição

5. Suponha uma quantidade de areia, não superior a uma semente de papoula, que não contém mais de 10.000 grãos. Em seguida, suponha que o diâmetro da semente de papoula não seja inferior a 1/40 da largura de um dedo NE30.

II.8. Ordens e períodos de números

I. Temos nomes tradicionais para números até uma miríade (10.000). Podemos, portanto, expressar números até uma miríade de miríade (100.000.000). Designemos esses números por números de primeira ordem.

Suponhamos então que 100.000.000 seja a unidade da segunda ordem. Assim, os números da segunda ordem vão dessa unidade até $(100.000.000)^2$ NE31.

Similarmente, tomemos o número anterior por unidade da terceira ordem, a qual terminará em $(100.000.000)^3$. E, assim por diante, até chegarmos à ordem $100.000.000^a$ NE32 de números, a qual terminará no número $(100.000.000)^{100.000.000}$ NE33, o qual denotaremos por $P4$.

II. Suponha que os números de 1 a P, descritos acima, formam o primeiro período.

Seja P a unidade da primeira ordem do segundo período e que esta consista nos números de P até $100.000.000P$.

Seja o último número a unidade da segunda ordem do segundo período, e que este termine em $(100.000.000)^2P$.

Podemos continuar desta forma até atingirmos a $100.000.000^a$ ordem do segundo período, o qual terminará com o número $(100.000.000)^{100.000.000}P$, ou P^2.

III. Tomando P^2 como a unidade da primeira ordem do terceiro período, procedemos da mesma forma até atingirmos a $100.000.000^a$ ordem do terceiro período, que terminará em P^3.

IV. Tomemos P^3 como a unidade da primeira ordem do quarto período e assim por diante. Continuando o mesmo processo chegaremos à $100.000.000^a$ ordem do $100.000.000^\circ$ período, que terminará com o número $P^{100.000.000}$ NE34 NE35.

II.9. Octetos

Considere a série de termos em proporção contínua dos quais o primeiro é 1 e o segundo é 10 NE36. O primeiro octeto destes termos NE37 enquadra-se em conformidade na primeira ordem do primeiro período acima descrito, o segundo octeto NE38 na segunda ordem do primeiro período, sendo o primeiro termo do octeto a unidade da ordem correspondente em cada caso. Similarmente para o terceiro octeto, e assim por diante. Podemos, da mesma forma, colocar qualquer número de octetos.

II.10. Teorema

Se houver qualquer número de termos de uma série em proporção contínua, digamos A_1, A_2, A_3, ..., A_m, ..., A_n, ..., A_{m+n-1}, ... dos quais $A_1 = 1$, $A_2 = 10$, $A_3 = 100$, e assim por diante NE39, e se quaisquer dois termos, A_m e A_n, possam ser tomados e multiplicados, o produto $A_m.A_n$ será um termo da mesma série e estará tão distante de A_n quanto A_m está distante de A_1. O produto $A_m.A_n$ também estará distante de A_1 por um número de termos, menor por uma unidade, do que a soma dos números de termos pelos quais A_m e A_n estão, respectivamente, distantes de A_1.

II.11. Prova do teorema

Tomemos o termo que está distante de A_n pelo mesmo número de termos tal que A_m está distante de A_1. Este número de termos é m (o primeiro e o último sendo ambos contados). Então, o termo a ser tomado estará m termos distantes de A_n, desta forma, o termo será A_{m+n-1}.

Temos, portanto, que provar que $A_m.A_n = A_{m+n-1}$.

Ora, termos igualmente distantes de outros termos em uma proporção contínua são proporcionais. Desta maneira, $A_m/A_1 = A_{m+n-1}/A_n$. Mas $A_m = A_m.A_1$, uma vez que $A_1 = 1$. portanto, $A_{m+n-1} = A_m.A_n$.

O segundo resultado agora fica óbvio, uma vez que A_m está m termos distante de A_1, A_n está n termos distantes de A_1 e A_{m+n-1} está $(m + n - 1)$ termos distantes de A_1.

II.12. Aplicação à quantificação da areia

Da suposição 5, o diâmetro da semente de papoula não é inferior a 1/40 da largura de um dedo NE30. Como as esferas estão entre si na razão tríplice de seus diâmetros NE40, segue que:

. (esfera de diâmetro da largura de um dedo) não será maior que 64.000 sementes de papoula;

. (esfera de diâmetro da largura de um dedo) não será maior que $64.000 \times 10.000 = 640.000.000$ grãos de areia;

. (esfera de diâmetro da largura de um dedo) não será maior que 6 unidades de segunda ordem + 40.000.000 unidades de primeira ordem do número de grãos de areia;
(a fortiori)

. (esfera de diâmetro da largura de um dedo) será menor que 10 unidades de segunda ordem do número de grãos de areia.

Neste momento, aumentemos gradualmente o diâmetro da suposta esfera, multiplicando-o por 100 a cada passo. Desta forma, Lembrando que (o volume) da esfera é assim multiplicado por 100^3, ou 1.000.000, o número de grãos de areia que poderiam ser contidos em uma esfera, em cada diâmetro sucessivo, pode ser obtido como segue.

Sendo o diâmetro da esfera 100 vezes a largura de um dedo, o número de grãos de areia será:

$<$ 1.000.000 $\times$ 10 unidades de 2° ordem;
$<$ (7° termo) $\times$ (10° termo);
$<$ 16° termo da série; [10^{15}]
$<$ 10.000.000 unidades de 2^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 10.000 vezes a largura de um dedo, o número de grãos de areia será:

$<$ 1.000.000$\times$ (o último número anterior);
$<$ (7° termo) $\times$ (16° termo);
$<$ 22° termo da série; [10^{21}]
$<$ 100.000 unidades de 3^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 1 estádio, que é menor do que 10.000 vezes a largura de um dedo, o número de grãos de areia será:

$<$ 100.000 unidades de 3^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 100 estádios, o número de grãos de areia será:

$<$ 1.000.000$\times$ (o último número anterior);
$<$ (7° termo) $\times$ (22° termo);
$<$ 28° termo da série; [10^{27}]
$<$ 1.000 unidades de 4^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 10.000 estádios, o número de grãos de areia será:

$<$ 1.000.000$\times$ (o último número anterior);
$<$ (7° termo) $\times$ (28° termo);
$<$ 34° termo da série; [10^{33}]
$<$ 10 unidades de 5^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 1.000.000 estádios, o número de grãos de areia será:

$<$ (7° termo) $\times$ (34° termo);
$<$ 40° termo da série; [10^{39}]
$<$ 10.000.000 unidades de 5^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 100.000.000 estádios, o número de grãos de areia será:

$<$ (7° termo) $\times$ (40° termo);
$<$ 46° termo da série; [10^{45}]
$<$ 100.000 unidades de 6^a ordem.

Sendo o diâmetro da esfera 10.000.000.000 estádios, o número de grãos de areia será:

$<$ (7° termo) $\times$ (46° termo);
$<$ 52° termo da série; [10^{51}]

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

$<$ 1.000 de unidades de 7^a ordem.

Mas, das proposições anteriores, (diâmetro do 'Universo') $<$ 10.000.000.000 estádios. Desta forma, o número de grãos de areia que poderiam ser contidos em uma esfera do tamanho do nosso 'Universo' é inferior a 1.000 unidades de sétima ordem NE41.

A partir disso, podemos também provar que uma esfera do tamanho da esfera que Aristarco atribuiu às estrelas fixas poderia conter um número de grãos de areia inferior a 10.000.000 de unidades de oitava ordem.

Para tanto, por hipótese, (Terra)/('Universo') = ("Universo')/(esfera das estrelas fixas) NE6. E (diâmetro do 'Universo') $<$ 10.000 (diâmetro da Terra), de onde obtemos que (diâmetro da esfera das estrelas fixas) $<$ 10.000 (diâmetro do 'Universo').

Portanto, (esfera das estrelas fixas) $<$ $(10.000)^3$ ('Universo') NE42.

Segue então que o número de grãos de areia que poderiam ser contidos em uma esfera igual à esfera das estrelas fixas seria:

- $<$ $(10.000)^3 \times 1.000$ unidades de 7^a ordem;
- $<$ (13° termo da série) $\times$ (52° termo da série);
- $<$ 64° termo da série; [10^{63}] NE43
- $<$ 10.000.000 unidades de oitava ordem. NE44

II.13. Conclusão

Eu concebo que essas coisas, rei Gelão, aparecerão incríveis para a grande maioria das pessoas que não estudaram matemática NE45. Mas, para aqueles que estão familiarizados e que já refletiram sobre a questão das distâncias e dos tamanhos da Terra, do Sol, da Lua e de todo o Universo a prova conduzirá à persuasão. E foi por isso que achei que o assunto não seria inapropriado para a vossa consideração.

III. NOTAS EXPLICATIVAS

NE1: Gelão foi co-governante de Siracusa, junto com seu pai, o rei Hierão II.

NE2: Sabemos praticamente nada sobre Zeuxipo, apenas que, aparentemente, ele foi um dos "pares" de Arquimedes.

NE3: O que Sir Thomas Little Heath traduz por Universo ('Universo') Eduard Jan Dijksterhuis traduz por Cosmos ('Cosmos').

NE4: Matemático e astrônomo grego que viveu cerca de 310 a.C. a 230 a.C. [7, 8]. Até onde sabemos, ele foi a primeira pessoa a sistematizar um modelo no qual a Terra gira em torno do Sol (modelo heliocêntrico). Como referência, Aristarco foi contemporâneo, mais novo, de Euclides de Alexandria e contemporâneo, mais velho, de Arquimedes.

NE5: Aparentemente, Aristarco queria expressar que o raio da órbita da Terra é muito menor do que o raio da esfera das estrelas fixas [12, 13]. Desta forma, ele justificaria o fato de não observarmos paralaxe para as estrelas fixas ao longo do ano.

NE6: A interpretação de Arquimedes para a hipótese (iii) de Aristarco é que a razão do raio da Terra pela distância Terra/Sol é igual à razão da distância Terra/Sol pelo raio da esfera das estrelas fixas, Figura 1. Ou, em termos dos diâmetros, em notação moderna, $d_e/d_u = d_u/d_A$.

NE7: Aparentemente, "Princípios" é o título do tratado que Arquimedes enviou a Zeuxipo. Esse tratado se perdeu ao longo dos séculos.

NE8: O estádio é uma antiga unidade de medida de comprimento. Ele era relacionado ao tamanho de uma pista de corrida grega, o qual podia varia de cidade para cidade. Os valores mais comumente citados para o estádio, em metros, são: 198, 186, 178, 165 e 149 [14].

NE9: Arquimedes toma, propositalmente, valores maiores que os maiores valores estimados em seu tempo para deixar claro que mesmo assim o que ele propõe se aplica.

NE10: Eudoxo de Cnido foi discípulo na Academia de Platão, foi ele quem elaborou o modelo astronômico das esferas concêntricas [15]. Unicamente por meio dessa passagem ficamos

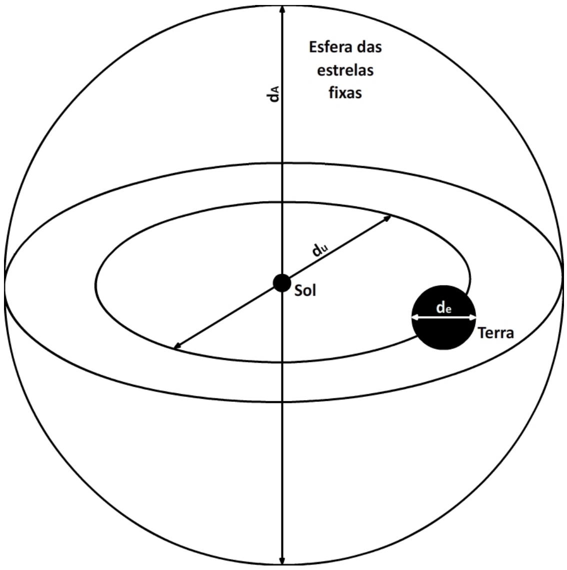


FIGURA 1. Representação esquemática, fora de escala, das distâncias d_e, d_u e d_A.

sabendo que o pai de Arquimedes se chamava Fídias e que ele era um astrônomo [4]. Para Aristarco, ver a nota explicativa número 4 NE4.

NE11: Um quiliágono regular é um polígono regular de 1.000 lados.

NE12: Arquimedes está dizendo que o diâmetro angular do Sol, visto da Terra, é maior que a milésima parte do círculo.

NE13: Na verdade, essa não é realmente uma suposição. Falando estritamente, é uma proposição, afinal, Arquimedes vai, de fato, provar a "suposição" 4.

NE14: Arquimedes está dizendo que Aristarco descobriu que o diâmetro angular do Sol, visto da Terra, é em torno de $(360/720)° = 0,5°$. De fato, na atualidade sabemos que o valor médio do diâmetro angular do Sol é $0,533°$ [16].

NE15: Até esse ponto, devido ao interesse histórico ligado às "palavras de Arquimedes" sobre o assunto, Sir Thomas Little Heath traduziu o tratado de forma literal. O restante do tratado, com exceção da Conclusão, ele reproduziu de forma "modernizada". Desta forma, existem diferenças na escrita matemática da tradução de Heath em comparação com o texto original em grego. Por exemplo, na antiguidade não se usavam os sinais: = (igualdade), > (maior que), < (menor que) e / (razão), tudo era expresso de forma literal. Desta forma, sempre que tais sinais aparecerem no texto, deve-se ter em mente que são "transcrições modernizadas".

NE16: Exclusivamente o texto referente à seção "Descrição do procedimento experimental" foi traduzido a partir da tradução em inglês de Eduard Jan Dijksterhuis. Devemos destacar que Dijksterhuis realizou uma tradução descritiva do procedimento experimental, ou seja, ele não seguiu literalmente as "palavras de Arquimedes", basicamente ele nos conta como Arquimedes realizou o procedimento experimental. Por isso encontramos na tradução, por exemplo, "Arquimedes explica que ..." .

NE17: Os antigos preferiam fazer suas observações do Sol no horizonte, afinal, eles não tinham meios eficientes para reduzir a intensidade da luz solar.

NE18: Para determinar o diâmetro da pupila do olho o seguinte procedimento pode ser realizado. Duas pequenas hastes cilíndricas, de igual espessura e comprimento, uma das quais é branca, e a outra é colorida, são montadas em uma base comum. A extremidade colorida é mantida contra a córnea do olho. Se o diâmetro da haste for menor do que o da pupila, o olho ainda verá algo da haste branca. O experimento é então repetido com hastes de diâmetros crescentes, até que pela primeira vez o olho não veja mais nada da haste branca. O diâmetro é então um limite superior para o diâmetro da pupila.

NE19: Por completeza, apresentamos aqui a tradução, também descritiva, da parte referente ao procedimento experimental conforme o texto de Sir Thomas Little Heath. Lembramos que a tradução descritiva significa que ele não seguiu literalmente as "palavras de Arquimedes", basicamente ele nos conta como Arquimedes realizou o procedimento experimental. "É necessário apenas observar que Arquimedes descreve a seguir como ele chegou a um limite superior e a um limite inferior para o ângulo subtendido pelo Sol. Isso ele fez pegando uma longa haste ou régua, prendendo na ponta dela um pequeno cilindro ou disco e apontando a haste na direção do Sol logo após o

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

seu nascer (para que fosse possível olhar diretamente para ele). Em seguida, ele moveu o cilindro e obteve duas distâncias: uma em que o cilindro escondia todo o Sol e outra onde o cilindro já não escondia todo o Sol. Então ele mediu os ângulos subtendidos pelo cilindro a partir dessas duas posições. Por último, Arquimedes explicou também a correção que julgou necessário fazer porque ‘o olho não vê de um ponto, mas de uma certa área’ ”.

NE20: Menor que aproximadamente $0,55°$ e maior que $0,45°$.

NE21: O ângulo $P\hat{E}Q$ equivale ao tamanho angular do Sol, visto da Terra.

NE22: *A fortiori* é um termo do latim que, em matemática, indica que, aceitas as conclusões anteriores, a conclusão posterior deverá ser necessariamente aceita.

NE23: Ele está dizendo que o perímetro de qualquer polígono inscrito na circunferência é menor do que 44/7 do raio da circunferência, ou seja, $\pi < 22/7 = 3 + 1/7 = 3,142857142\ldots$. Arquimedes demonstra tal afirmativa na proposição 3 de seu tratado “A Medida do Círculo” [5]. Para comparação, hoje sabemos que $\pi = 3,141592654\ldots$.

NE24: $11/1148 = 44/(7 \times 656)$.

NE25: $1/100$ é igual a$0,01$ e $11/1148$ é aproximadamente $0,0096$.

NE26: Lembrar que tanto o ponto A quanto o ponto O estão sobre o arco AOB.

NE27: Lembrar da suposição 2: O diâmetro da Terra é maior do que o diâmetro da Lua, e o diâmetro do Sol é maior do que o diâmetro da Terra.

NE28: Ver Figura 2.

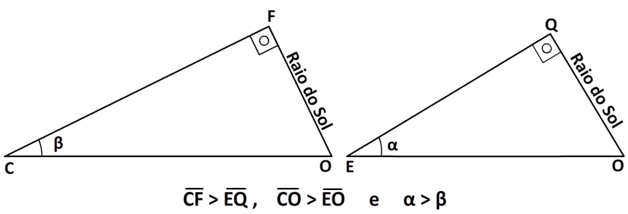


FIGURA 2. Exemplificação gráfica da situação descrita.

NE29: A proposição é equivalente à equação trigonométrica abaixo, onde α e β são ângulos menores de $90°$ e $\alpha > \beta$:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

NE30: A suposição 5 implica que o diâmetro do grão de areia considerado por Arquimedes seria da ordem de 3 centésimos de milímetro, Figura 3. Desta forma, ele está assumindo um valor exageradamente pequeno para deixar claro que mesmo assim o que ele propõe se aplica.

FIGURA 3. Comparação entre o tamanho de uma semente de papoula, que não contém mais de 10.000 grãos de areia, e um dedo indicador humano.

NE31: Uma miríade de miríade de segunda ordem, ou seja, $(10.000 \times 10.000) \times (10.000 \times 10.000)$.

NE32: Miríade-miríade-ésima ordem.

NE33: (miríade $\times$ miríade) elevado a (miríade $\times$ miríade).

NE34: $P^{100.000.000}$ é referido por Arquimedes como sendo uma miríade-miríade de unidades da miríade-miríade-ésima ordem do miríade-miríade-ésimo período.

NE35: Esquema ilustrativo, em notação moderna, do sistema de nomenclatura proposto por Arquimedes:
<u>1° Período</u>

1^a Ordem de 1 a 10^8;

2^a Ordem de 10^8 a 10^{16};

3^a Ordem de 10^{16} a 10^{24};

Etc, etc e etc ao longo das ordens...

$(10^8)^a$ Ordem de $10^{8.(10^8-1)}$ a $10^{(8.10^8)} = P$.

2° Período

1^a Ordem de $P.1$ a $P.10^8$;

2^a Ordem de $P.10^8$ a $P.10^{16}$;

Etc, etc e etc ao longo das ordens...

$(10^8)^a$ Ordem de $P.10^{8.(10^8-1)}$ a $P.10^{(8.10^8)} = P^2$.

Etc, etc e etc ao longo dos períodos...

$(10^8)^\circ$ Período

1^a Ordem de $P^{(10^8-1)}.1$ a $P^{(10^8-1)}.10^8$;

1^a Ordem de $P^{(10^8-1)}.10^8$ a $P^{(10^8-1)}.10^{16}$;

Etc, etc. e etc. ao longo das ordens...

$(10^8)^\circ$ Ordem de $P^{(10^8-1)}.10^{8.(10^8-1)}$ a $P^{(10^8-1)}.10^{8.10^8} = P^{10^8}$.

NE36: Ou seja, a progressão geométrica 1, 10^1, 10^2, 10^3, $\ldots$

NE37: 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 e 10^7.

NE38: 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14} e 10^{15}.

NE39: De forma a ter a progressão geométrica 1, 10, 10^2, ..., 10^{m-1}, $\ldots$, 10^{n-1}, $\ldots$, 10^{m+n-2}, $\ldots$

NE40: Lembrar que o volume da esfera é proporcional ao cubo do diâmetro.

NE41: Desta forma, Arquimedes mostra que o número de grãos de areia que poderiam ser contidos no 'Universo' de sua época é inferior a 10^{51}.

NE42: Nesse caso estamos nos referindo ao volume. Lembrar que o volume da esfera é proporcional ao cubo do diâmetro.

NE43: Desta forma, Arquimedes mostra que o número de grãos de areia que poderiam ser contidos no Universo (esfera das estrelas fixas) segundo a proposta de Aristarco é inferior a 10^{63}. Até onde sabemos, o Universo de Aristarco foi o maior a ser imaginado na antiguidade.

NE44: O sistema de nomenclatura proposto por Arquimedes para números grandes têm o potencial de descrever números tão grande, mas tão grande, que mesmo o número de grãos de areia que poderiam ser contidos na esfera das estrelas fixas pertence apenas à oitava ordem do primeiro período.

NE45: Na Conclusão, Sir Thomas Little Heath volta a traduzir o tratado de forma literal.

IV. CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentamos a tradução comentada do famoso tratado de Arquimedes de Siracusa "O Contador de Areia". Se dirigindo ao rei Gelão, o siracusano inicia o tratado discorrendo sobre a questão do infinito e dos números extremamente grandes, usando o número de grãos de areia como exemplo. Ele cita seu tratado anterior "Princípios", no qual desenvolveu uma forma de representar números extremamente grandes. Então ele propõe usar seu sistema de nomeação para dar um limite superior para o número de grãos de areia que caberiam no Universo de sua época. Desta forma, primeiramente, ele teve que estimar o tamanho do Universo.

Arquimedes dá então a definição comum de 'Universo', como sendo a esfera cujo centro é o centro da Terra e cujo raio é igual à linha reta entre o centro do Sol e o centro da Terra. Logo depois ele apresenta a definição de Aristarco de Samos. É justamente nesse tratado que temos a mais antiga alusão à proposta heliocêntrica. O modelo de Aristarco pressupõe o Sol imóvel, com a Terra girando ao seu redor. Assim, o

 DOI: http://dx.doi.org/10.13102/sscf-v18i0-85670

'Universo' de Aristarco teria o tamanho da esfera das estrelas fixas, a qual estaria centrada no Sol.

Ele então apresenta 4 suposições, sendo que a última "suposição" é, na verdade, uma proposição, afinal ele irá prová-la na sequência. A primeira suposição é que o perímetro da Terra é menor do que 3.000.000 estádios. A segunda suposição é que o diâmetro da Terra é maior do que o diâmetro da Lua, e o diâmetro do Sol é maior do que o diâmetro da Terra. A terceira suposição é que o diâmetro do Sol é cerca de 30 vezes o diâmetro da Lua. Por fim, a quarta "suposição" é que o diâmetro do Sol é maior do que o lado do quiliágono regular inscrito em um círculo máximo na esfera do Universo, ou seja, o diâmetro angular do Sol, visto da Terra, é maior que a milésima parte do círculo. Mais uma vez ele então cita Aristarco de Samos, como sendo a pessoa que descobriu que o diâmetro angular do Sol, visto da Terra, é em torno de $0,5°$. Dando continuidade, ele descreve o método experimental que usou para determinar um limite superior e um limite inferior para o diâmetro angular do Sol. Destacamos que exclusivamente a seção "Descrição do procedimento experimental" foi traduzida a partir da tradução em inglês de Eduard Jan Dijksterhuis, o qual fez uma tradução descritiva para o procedimento experimental, ou seja, basicamente ele nos conta como foi realizado o procedimento. Na seção seguinte Arquimedes prova a "suposição 4".

Ele apresenta, e prova, duas proposições: que o diâmetro do 'Universo' < 10.000 vezes o diâmetro da Terra e que o diâmetro do 'Universo' < 10.000.000.000.000 estádios. Ele introduz uma nova suposição, que o diâmetro de um grão de areia seria em torno de 3 centésimos de milímetro. Com isso ele termina, digamos, a parte astronômica do tratado.

Arquimedes então faz a apresentação do seu sistema de representação de números extremamente grandes. Por fim, ele aplica esse sistema para estimar a quantidade máxima de grãos de areia em algumas situações, culminando no valor, em notação moderna, 10^{51} para a definição comum de 'Universo' e 10^{63} para o 'Universo' de Aristarco. Então ele conclui o tratado voltando a se referir diretamente ao rei Gelão.

Do ponto de vista histórico, "O Contador de Areia" é um tratado chave para o estudo das concepções de 'Universo' no mundo grego da antiguidade. Além disso, devido a seu tamanho e escopo, acreditamos que ele possa ser utilizado, na íntegra ou de forma parcial, em aulas de Física, Matemática e/ou Astronomia, tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Universitário. Os três principais pontos que poderiam ser abordados com os estudantes seriam: a visão de Universo na antiguidade, o procedimento de Arquimedes para a determinação experimental do diâmetro angular do Sol e a problemática da representação de números extremamente grandes antes da invenção dos algarismos indo-arábicos.

[1] G. Ifrah, *Os Números: A História de Uma Grande Invenção.* 11^a Edição. São Paulo: GloboLivros (2005).

[2] C.B. Boyer, *Fundamental Steps in the Development of Numeration.* Isis **35**, (2) 153 (1944).

[3] J.P. Baptista, L. Ferracioli, *Os Grandes Números.* Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, (1) 130 (2001).

[4] R. Netz, W. Noel, *Códex Arquimedes.* Rio de Janeiro: Record (2009).

[5] G.L. Grudtner, F.M. Bertato, I.M.L. D'Ottaviano, *A Medida do Círculo: Uma tradução do texto ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ de Arquimedes.* Rev. Bras. Hist. Mat. **21**, (42) 1 (2021).

[6] A.K.T. Assis, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a lei da Alavanca.* São Paulo: Livraria da Física (2011).

[7] T. Heath, *The Copernicus of Antiquity: Aristarchus of Samos.* London: Macmillan (1920).

[8] L.V. Freitas, R.M. Santucci, I.A. Marques, *Reinventando o método de Aristarco.* Rev. Bras. Ens. Fís. **43**, e20210062 (2021).

[9] T.L. Heath, *The Works of Archimedes.* Cambridge: Cambridge University Press (1897).

[10] E.J. Dijksterhuis, *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press (1987).

[11] Página da Internet: `http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/contadorareia/index.htm`. Acessada em: 15/06/2022.

[12] O. Neugebauer, *Archimedes and Aristarchus*. Isis **34**, (1) 4 (1942).

[13] R. von Erhardt, E. von Erhardt-Siebold, *Archimedes' Sand-Reckoner: Aristarchos and Copernicus*. Isis **33**, (5) 578 (1942).

[14] A. Diller, *The Ancient Measurements of the Earth*. Isis **40**, (1) 6 (1949).

[15] A.M. Velásquez-Toribio, M.V. Oliveira, *Primeiro modelo matemático da cosmologia: as esferas concêntricas de Eudoxo*. Rev. Bras. Ens. Fís. **41**, e20180096 (2019).

[16] Página da Internet: `https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html`. Acessada em: 09/05/2022.