氏名（本籍）	村松　亮（むらまつ りょう）（静岡県）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	甲第1283号
学位授与の日付	2023年3月19日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
学位論文題目	**Estimates on modulation spaces for Schrödinger operators with time-dependent magnetic fields** **（時間依存する磁場中のシュレーディンガー作用素のモジュレーション空間における評価）**
論文審査委員	（主査）教授　加藤　圭一 教授　太田　雅人　　教授　横田　智巳 教授　小池　直之　　教授　伊藤　弘道

論文内容の要旨

本論文では, 以下の時間依存する磁場中のシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える:

$$
\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = V(t,x)u(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}
$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\nabla=(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)$, $V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x)=(a_1(t,x),\cdots,a_n(t,x))$ とし, $(\nabla-i\boldsymbol{a}(t,x))^2=\sum_{k=1}^n(\partial_{x_k}-ia_k(t,x))^2$ である. また, V と $\boldsymbol{a}$ は (t,x) について C^∞ 級であると仮定する.

上記方程式は, 電磁場中の電子の波動関数が時間発展する様子を記述した偏微分方程式であり, $\boldsymbol{a}(t,x)$ は磁場に, $V(t,x)$ は電場に対応するポテンシャルである. 本研究の目的は, 初期値問題 (1) の解のモジュレーション空間上でのアプリオリ評価の成立を示すことである.

モジュレーション空間はFeichtinger(1983) によって導入された関数空間であり, Sjöstrand class という擬微分作用素のクラスを特徴づけるなどの擬微分作用素論との関連性や, 特定のモジュレーション空間は双線形評価を満たすため非線形方程式との相性が良いこと

など様々な興味深い性質が指摘されてきた．特に，Wang-Zhao-Guo(2006) および Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers(2007) は，「自由粒子にたいするシュレーディンガー方程式の解作用素は，ルベーグ空間やベゾフ空間上では一般に有界作用素でないが，モジュレーション空間上では有界になる」という，他の関数空間には見られない重要な結果を示した．この結果はポテンシャル中にある粒子に対するシュレーディンガー方程式に拡張することができて，Cordero-Gröchenig-Nicola-Rodino(2012) および Kato-Kobayashi-Ito(2014) では，$\boldsymbol{a}(t,x)\equiv 0$ で，$V(t,x)$ が $|\alpha|\geq 2$ を満たす任意の多重指数について $|\partial_x^\alpha V(t,x)|\leq C$ をみたすならば，モジュレーション空間 $M^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ 上で同様の結果が成立することが示された．この結果は，モジュレーション空間上での解作用素の有界性にはポテンシャルの空間増大度が重要な役割を果たすことを示唆している．つまり，電場に対応するポテンシャル $V(t,x)$ の空間増大度が 2 次以下ならば，解作用素はモジュレーション空間上で有界となることが示されていた．これらの事実が，磁場を考慮した本研究の方程式 (1) においても成立するかどうか，という問題が自然に考えられる．磁場に対応するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ の場合は，その空間増大度が 1 次以下であれば，モジュレーション空間上での解作用素の有界性が成立することが期待されている．

以上の先行研究を踏まえ，本研究では，空間増大度 1 次以下の時間依存する磁場ポテンシャルに対して，シュレーディンガー方程式の解作用素のモジュレーション空間上有界性が成立することの証明を目指し，解作用素の有界性と同等である解のアプリオリ評価を考察する．

本論文は 4 章から構成される．以下では，各章の内容を説明するとともに主結果を述べる．

第 1 章では，本論文で考える問題と本論文の主結果を述べ，先行研究を紹介し，本論文の概要について述べる．

第 2 章では，本論文で用いる波束変換，及びモジュレーション空間の定義や，関連する基本的事実を紹介する．主定理を述べるため，ここでも用語を定義しておく．

f を緩増加超関数，φ を恒等的に 0 でない急減少関数とする．このとき，窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f(x,\xi)$ を，

$$W_\varphi f(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi(y-x)}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy$$

で定める．また，緩増加超関数 f がモジュレーション空間 $M_\varphi^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ に属するとは，

$$\|f\|_{M_\varphi^{p,q}}\equiv\left\|\|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L_x^p}\right\|_{L_\xi^q}<\infty$$

が成立することであると定義する．

第 3 章では，初期値問題 (1) の解のアプリオリ評価について，磁場ポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ が x の一次多項式で表される場合を考察する．この場合の磁場ポテンシャルは最も典型的な例である空間に関して一様な磁場を表す．波束変換による (1) の解表示を用いることで，次の結果を得た．

主結果 1． $1\leq p\leq\infty$, $T>0$, $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする．また $\boldsymbol{a}(t,x)$ は各成分が C^∞ 級関数 $a_{k,l}(t)$ を用いて

$$a_k(t,x) = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}(t) x_l$$

と表せるとし, $V(t,x) \equiv 0$ とする．このとき, ある定数 $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解 $u(t,x)$ は

(2) $$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

をみたす．ただし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$.

第4章では, 空間増大度が1次未満となるような一般の磁場ポテンシャルに対して, 解のアプリオリ評価を考察する．第3章で扱った, x の一次多項式で表される $\boldsymbol{a}(t,x)$ の場合は, (1) の解を波束変換で表示すると, 通常は剰余項に現れる ξ に関して発散する部分が消去される．しかし, 一般の磁場ポテンシャルの場合は当然この発散部分は消去されない．この部分を処理するために, 方程式に対応する古典軌道の評価を用いる．また, 磁場ポテンシャルの増大度がちょうど1次の場合および1次未満でも微分することで減衰しない場合は古典軌道の評価を用いても発散項を押さえることができない．したがって, 磁場ポテンシャルに以下のような仮定を課すことで, 次の結果を得た.

主結果 2． $1 \le p \le \infty$, $T > 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする．また $\boldsymbol{a}(t,x)$ は, $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 α に対し,

$$^{\exists}C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^{\forall}(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\ \max_{1 \le j \le n} |\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}.$$

をみたすとし, $V(t,x) \equiv 0$ とする．このとき, ある定数 $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解 $u(t,x)$ は

(3) $$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

をみたす．ただし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$.

さらにこれら主結果と先行研究を組み合わせることで, Kato らの先行研究を包括する次の結果を得る.

主結果 3． $1 \le p \le \infty$, $T > 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする．また $\boldsymbol{a}(t,x) = \boldsymbol{a_1}(t,x) + \boldsymbol{a_2}(t,x)$ は, $\boldsymbol{a_1}(t,x)$ が主結果1の $\boldsymbol{a}(t,x)$ と, $\boldsymbol{a_2}(t,x)$ 主結果2の $\boldsymbol{a}(t,x)$ と同じ仮定をみたすとし, $V(t,x)$ は $|\alpha| \ge 2$ を満たす任意の多重指数について $|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C$ をみたすとする．このとき, ある定数 $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解 $u(t,x)$ は

(4) $$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

をみたす．ただし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$.

論文審査の結果の要旨

本論文では，時間に依存する磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式

$$i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}(\nabla_x - ia(t,x))^2 u(t,x) = 0 \tag{1}$$

に対し，変調（Modulation）空間での評価を行っている．変調空間 $M^{p,q}$ とは，

$$\|u\|_{M^{p,q}_\phi} = \|\|W_\phi(x,\xi)\|_{L^p_x}\|_{L^q_\xi}$$

が有限となる緩増加超関数の全体のことである．ただし，波束変換 $W_\phi f$ は

$$W_\phi f(x,\xi) = \int \overline{\phi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy$$

である．本論文の主な主張は以下の通りである．

定理. $1 \le p \le +\infty$ とし，$a(t,x)$ は時間に依存する係数をもつ x の *1* 次式であるか，あるいは，次をみたすとする：ある $\rho < 1$ があって，すべての多重指数 α に対し

$$|\partial_x^\alpha a(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

このとき，任意の $T > 0$ に対し, ある定数 $C_T > 0$ があって，$u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (1) の解に対し

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

が成り立つ．

Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers(2007) はポテンシャルのない場合に解の変調空間での評価を行っている．Cordero-K.Gröchenig-F. Nicoka-L. Rodino(2013) および Kato-Kobayashi-Ito(2014) は独立に電場のポテンシャルがある場合に解の変調空間での評価を行っている．本論文はこれらの結果の磁場ポテンシャルがある場合の拡張である．本論文での証明の基本的な枠組みは Kato-Kobayashi-Ito で用いられた波束変換を用いる方法である．

本論文は４章で構成されており，第１章では，主結果と研究の背景が述べられ，第２章で波束変換や変調空間の性質を準備し方程式 (1) の波束変換について述べている．

第３章では，上記定理の一部である磁場ポテンシャルが空間の変数について１次式の場合を扱っており，解の変調空間 $M^{p,p}$ ノルムを初期値の $M^{p,p}$ ノルムで評価している。証明の方針は Kato-Kobayashi-Ito(2014) の方法を参考にして，方程式を波束変換し，両辺の $L^p_x L^p_\xi$ をとって，グロンウォールの不等式に持ち込む方法である．証明の方法は新奇性が高いとは言えないが，磁場ポテンシャルの項を波束変換した場合評価しなければならない項の数が多くなり，全く同様に証明ができるわけではない．また，磁場ポテンシャルをもつ場合の変調空間での評価はこれまで行われてきておらず，結果は新しいものである．

第４章では，上記定理の残りの部分である磁場ポテンシャルが時刻 t および位置 x

の関数だがその増大度が劣１次の場合に，解の変調空間 $M^{p,p}$ ノルムを初期値の $M^{p,p}$ ノルムで評価している．この場合は磁場ポテンシャルの項を波束変換したときに波束変換後の変数 (x,ξ) のうち，ξ の１次の項が現れ，ξ に関して積分あるいは L^∞ 評価を行うときに困難が生じ，Kato-Kobayashi-Ito の方法が使えない．そのため，$M^{\infty,\infty}$ の場合の評価を行った後，Riesz-Thorin の補間定理を用いている．また，$M^{\infty,\infty}$ の場合の評価を行う際に，独自の工夫が必要となっている．

本論文は磁場ポテンシャルのみがある (1) の場合を扱っているが，論文中でも注意しているように磁場および電場のポテンシャルがある方程式に対し，$V(t,x)$ が２次以下の増大度をもつ場合に同様の結果を得ることができる．

以上のように，本論文は今まで得られていなかった磁場ポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解の変調空間での評価を独自の方法を用いて行っている．したがって，博士（理学）の学位論文として，十分に価値があると認める．