氏名（本籍）　片山裕太（東京都）
学位の種類　博士（理学）
学位記番号　甲第1280号
学位授与の日付　2023年3月19日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
学位論文題目　**Studies on number fields whose *L*-functions coincide**
（*L* 関数が一致する代数体に関する研究）

論文審査委員　（主査）教授　木田　雅成
教授　眞田　克典　　教授　功刀　直子
教授　佐藤　隆夫　　教授　関川　浩

論文内容の要旨

本論文では，有理数体上の素数次巡回拡大体，並びに基本アーベル拡大体の L 関数が一致する条件およびその帰結に関する研究を行う．

K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限次ガロア拡大とし，G をそのガロア群とする．χ を G の複素線形既約表現 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ の指標とする．指標 χ に対して Artin L 関数 $L(s,\chi)$ が定義される．L 関数の一致とは異なる 2 つの K の部分体 F_1, F_2 と $\mathrm{Gal}(K/F_i)$ の指標 ψ_i があって有限個のオイラー因子を除いて

$$L(s,\psi_1) = L(s,\psi_2)$$

が成り立つことをいう．

このような現象は Hecke (1925) が初めて発見した．具体的にはある実 2 次体と虚 2 次体の L 関数が一致する例を Hecke は構成した．その後の研究 (木田-南村 (2017)，Kani (2014)) により，2 つの 2 次体の L 関数が一致する条件は，その 2 つの 2 次体が，ガロア群が位数 8 の二面体群 D_4 と同質なガロア拡大体の部分体であることが示された．このように，L 関数が一致する現象はガロア群の構造と密接に関係していることが分かってきた．

一方，新谷 (1978) は二重三角関数の特殊値の積が，実 2 次体のアーベル拡大を構成する単数であると予想した．この値は現在では新谷単数と呼ばれている．新谷単数は実 2 次体の部分ゼータ関数の 0 での微分の値を用いた表示を持つ．一方，虚 2 次体の類指標の L 関数の $s = 0$ での微分の値に楕円単数が現れることが知られており，実 2 次体と虚 2 次体の

L 関数の一致が起こる場合には，新谷単数と楕円単数を結びつけることができる．このアイデアによって新谷は自身の予想を部分的に解決した．しかし，新谷の定理の仮定はある合同条件を満たす実 2 次体の単数の存在など，条件が多く複雑で，定理の適用できる範囲が特定しづらい．そこで木田-南村の結果をもとに新谷の定理の条件をガロア群に関する群論的な条件で記述したものが博士論文の前半の主定理である．

主定理 1．$K/\mathbb{Q}$ をガロア拡大とし，G をそのガロア群とする． G が位数 8 の二面体群 D_4 と同質で，かつ K が CM ではない虚な体であると仮定する．さらに複素共役の共役類 C を含む，G の指数 2 のアーベル部分群を H とする．F を K の H による固定体とし，F を $\mathbb{R}$ の部分体とみなす．$s \in C$ を $K^{\langle s\rangle}/F$ が選んだ無限素点で不分岐になるようにとると，新谷単数が $K^{\langle s\rangle}$ 内に存在する．

この定理によって，新谷の定理の適用可能な範囲が明確になり，今後，この分野の研究の発展につながることが期待される．

一方，2 次体とは限らない代数体の L 関数の一致に関して，石井 (1986) は，2 つの巡回拡大体の L 関数が一致する十分条件を与えている．また，素数次の巡回拡大体の場合に関して，次のことが示されている．

定理 1 (木田 (2022)). p を素数とする．$K/\mathbb{Q}$ をガロア拡大とし，$G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ をそのガロア群とする．G が p 次ハイゼンベルク群に同質であるとする．このとき G のすべての p 次既約指標 ρ に対して $p+1$ 個の部分体 $F_i\ (i = 1, \ldots, p+1)$ で $\mathbb{Q}$ 上 p 次巡回拡大であるものと F_i のある 類指標 ξ_i があって

$$L(s, \xi_i) = L(s, \rho)$$

が有限個のオイラー因子の差を除いて成り立つ．

この場合には定理の逆も成り立つことが示されている．博士論文の後半では定理 1 をさらに一般化することを考え，基本アーベル p 群をガロア群に持つガロア拡大体の L 関数が一致する十分条件を得た．

主定理 2．p を素数，n を正整数とする．$K/\mathbb{Q}$ をガロア拡大とし，G をそのガロア群とする．G がエクストラスペシャル群 $\mathrm{ES}(n, p)$ と同質であると仮定する．このとき G の p^n 次既約指標 ψ に対して，$N = \prod_{i=1}^{n}(p^i + 1)$ 個の K の部分体 $F_1, \ldots, F_N$ で $\mathbb{Q}$ 上の次数 p^n の基本アーベル p 拡大であるものと，F_i の 類指標 χ_i が存在して

$$L(s, \chi_1) = L(s, \chi_2) = \cdots = L(s, \chi_N) = L(s, \psi)$$

が有限個のオイラー因子の差を除いて成り立つ．

$n = 1$ の場合が定理 1 となり，先行研究の一般化になっている．なお，$n \geq 2$ の場合は，巡回拡大ではない代数体の L 関数が一致する例を与えており，これ以前の研究では知られていなかったものである．

論文審査の結果の要旨

代数体の L 関数やゼータ関数はその代数体固有の重要な数論的情報を持っていると考えられている．例えば有理数体のゼータ関数であるリーマンゼータ関数がオイラー積表示をもつことは，有理整数環が一意分解整域であることの解析的表現である．しかしながら，20 世紀の前半から，Hecke や Gassmann などにより，一つの L 関数やゼータ関数を共有するような代数体の組の例が知られるようになってきた．

新谷卓郎氏は 1976 年の論文において，実 2 次体のアーベル拡大を生成する単数の存在を予想した．この問題は一般の場合にはいまだに未解決であるが，新谷氏は同じ論文において，ある特別な場合を解決している．その証明の際に虚 2 次体と実 2 次体の L 関数の一致が本質的に使われている．

本学位論文では，以上で述べた L 関数が一致するという現象を主題として扱っている．

第 1 章の導入の後，第 2 章では，上述の新谷氏の定理に関する考察を行っている．新谷氏の論文が書かれた当時，L 関数の一致する仕組みがほとんど解明されてなかったが，Kida-Namura (2017) において，L 関数が一致することが，その L 関数に関連するガロア群の構造に強い制限をつけることがわかってきた．本論文では，この結果に基づいて，新谷氏の定理とその証明の構造を詳しく調べ，ガロア群と無限素点に関する条件で新谷氏の定理を書き直している．この結果，新谷氏が証明した当時には，はっきりとしなかった定理の適用範囲を確定することに成功し，これまで知られていなかった大きな体でいわゆる新谷単数の例を計算することも可能になった．

本学位論文の第 3 章は，より多くの L 関数が一致する代数体の族の構成にあてられている．Kida-Katayama (2022) においては，有理数体上の素数次（これを p とする）巡回拡大の $p+1$ 個の L 関数が一致するための必要十分条件が得られている．申請者は有理数体上のガロア拡大で，そのガロア群がエクストラスペシャル p 群とよばれる群に同質になる拡大を考え，その中に含まれる基本アーベル p 群をガロア群にもつ部分体の L 関数が一致することを示している．この結果は先行結果の一般化を与えていることはもちろんであるが，同じ基本アーベル p 群をガロア群にもつ部分体の中で L 関数が一致するものと一致しないのが混在するという新しい現象の発見にもなっている．

以上に述べたように，本学位論文で申請者が得た結果は，L 関数の一致というこれまでになかった視点から，代数体の整数論を見直す結果であり，今後の研究の展開・発展の端緒となるものと評価できる．以上のことから，本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる．