氏名（本籍）　齋藤　健（青森県）
学位の種類　博士（理学）
学位記番号　甲第1297号
学位授与の日付　2023年3月19日
学位授与の要件　学位規則第4条第1項該当
学位論文題目　**Measures for Symmetry of Marginal Distribution in Contingency Table Analysis（分割表解析における周辺分布に関する対称性を測る尺度）**

論文審査委員　（主査）教授　田畑　耕治
教授　渡邉　昇　　教授　宮本　暢子
教授　田中真紀子　　教授　瀬尾　隆

論文内容の要旨

分割表解析は様々な分野で用いられている．例えば，社会科学，経済学，医療や薬学の分野で活用されている．分割表解析では，変数間の独立性に関心がある場合が多いが，行分類と列分類が同じ正方分割表では対称性に関心がある．

分割表のカテゴリには名義カテゴリと順序カテゴリの 2 種類が存在する．名義カテゴリは「A党」,「B党」,「C党」のようなそれぞれのカテゴリ間に明確な順序関係がないものであり，順序カテゴリは「良い」,「普通」,「悪い」のようなそれぞれのカテゴリ間に明確な順序関係があるものである． それぞれのカテゴリの特長の違いから，名義カテゴリと順序カテゴリで異なる解析方法が提案されてきた．

分割表における対称性の研究は McNemar (1947) の 2×2 分割表における対称モデルの検定が始まりである．その後，Bowker (1948) が R×R 分割表へと拡張した．また，Stuart (1955) は周辺同等モデルを，Caussinus (1965) は準対称モデルを提案している．対称モデルは分割表の主対角線に関して,セル確率の対称性を示している．Tomizawa (1985) は分割表の中心点に関して，セル確率の対称性を示している点対称モデル，周辺確率の対称性を示している周辺点対称モデルを提案した．

モデルが成り立たない場合には，分割表の未知の確率構造がそのモデルからどの程度離れているかに関心がある．名義カテゴリ正方分割表に対して，Tomizawa, Seo and Yamamoto (1998) は対称モデルからの隔たりを測る尺度を，Tomizawa and Makii (2001)

は周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を提案した．また，順序カテゴリ正方分割表に対して，Tomizawa, Miyamoto and Hatanaka (2001) は対称モデルからの隔たりを測る尺度を，Tomizawa, Miyamoto and Ashihara (2003) は周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を提案した．さらに，Yamamoto, Tahata, Suzuki and Tomizawa (2011) は周辺点対称モデルからの隔たりを測る尺度を提案し，Iki and Tomizawa (2018) は Yamamoto et al. の尺度における周辺点対称モデルからの最大の隔たりを持つ確率構造を見分けることのできる平均点対称性からの尺度を提案した．

本論文の目的は，分割表の対称性に関する先行研究ついて調査し，周辺分布の対称性に関する新しい尺度を提案することである．また，先行研究と本論文での提案尺度の関係についても解説した．本論文は 4 章から構成されており，以下にその概要を示す．

第 1 章では，分割表解析に関する様々な先行研究の紹介及び各章の概要について述べた．

第 2 章では，多元分割表における 1 次周辺点対称モデルからの隔たりを測る尺度を提案した．二元分割表において，周辺点対称モデルからの最大の隔たりを持つ確率構造は 4 種類存在する．行と列の中心点に関して分割表を 4 つの領域に分割したとき，その確率構造は，分割表の右上，左上，左下，右下の 4 つの領域のどこか 1 か所に確率が集中する場合である．提案尺度は，周辺点対称モデルが成り立つときに尺度の値が 0 になる．また，尺度の値が 1 であることの必要十分条件は分割表の左下部分だけに確率が集中することであり，尺度の値が-1であることの必要十分条件は分割表の右上部分だけに確率が集中することである．周辺点対称モデルからの隔たりを測る尺度である Yamamoto et al.の尺度は，この 4 種類の最大の隔たりを持つ確率構造を区別することができず，Iki and Tomizawa の尺度とも異なるものである．さらに，提案尺度と Iki and Tomizawa の尺度が行と列のそれぞれの周辺確率だけから計算できることに注目して，2 つの尺度を含む形で多元分割表へと拡張を行った．提案尺度の近似信頼区間も導出した．二元分割表における提案尺度を，被験薬とプラセボ薬の投与前と投与後に不眠症の患者がベッドに行ってから眠るまでの時間のデータに対して適用した．同様に，多元分割表における提案尺度を，1984 年と 2016 年における「教育」,「環境」,「貧困対策」に関する政府への意見に関するデータと，2010 年と 2016 年の東京，札幌，那覇の 3 都市における平年気温のデータの 2 種類に適用した．その結果，提案尺度によってこれまでにない新たな結果と解釈を得ることができた．

第 3 章では，名義カテゴリ分割表における局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度と順序カテゴリ分割表における累積局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を提案した．周辺確率が「ただ 1 つ」等しくなっているという制約を持つ局所周辺同等モデルと，累積確率が「ただ 1 つ」等しくなっているという制約を持つ累積局所周辺同等モデルを提案し，各モデルからの隔たりを測る尺度を提案した．これらの尺度の値が 0 であるための必要十分条件は（累積）局所周辺同等モデルが成り立つことであり，尺度の値が 1 であるための必要十分条件は（累積）局所周辺同等モデルから最大の隔たりを持つ確率構造となっていることである．また，提案尺度は Tomizawa and Makii と Tomizawa et al. で提案された部分尺度の重み付き調和平均として定義されている．一方，Tomizawa and Makii の尺度や Tomizawa et al.の尺度は，部分尺度の重み付き算術平均を用いて構成された尺度であるこ

とから，提案尺度と従来尺度の関係についても述べた．さらに，デルタ法を用いて提案尺度の近似信頼区間を導出した．局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を英国における 1964 年，1966 年，1970 年の投票政党の変化のデータに適用し，累積局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を 1955 年と 1975 年での日本の社会階層データに適用した．その結果，これまでにない新しい結果と解釈が得られたことから，提案尺度の有用性が示された．

第 4 章では，本論文の総括を示した．提案した尺度は分割表の周辺対称性からの隔たりを測る方法として有用であることを示した．

論文審査の結果の要旨

カテゴリカルデータの解析において，分割表は最も基本的なツールである．分割表解析の目的は，主に行変数と列変数の統計学的独立性が成り立つかどうかを調べることである．そのための方法として，ピアソンのカイ二乗検定などが提案されている．また，統計学的独立性が成り立たない場合には，調整済み残差（Haberman, 1973), 独立モデルを拡張した一様連関モデル（Goodman, 1979）などの当てはめ，連関の尺度 (Kendall, 1945; Somers, 1962; Theil, 1970）を用いた解析が行われる．

行変数と列変数が同じ分類からなる分割表は，正方分割表と呼ばれることがある．正方分割表は，観測度数の多くが分割表の主対角線付近に集中する傾向がある．したがって，多くの場合に統計学的独立性は成り立たない．そのため，統計学的独立性に代わって対称性の構造に関する解析が行われる．例えば, Bowker (1948) の対称モデル, Stuart (1955) の周辺同等モデル，Caussinus (1965) の準対称モデルなどがある．また，これらの対称性のモデルが，与えられた分割表データに対して適合しない場合には，モデルからの隔たりを測る尺度が提案されている (Tomizawa, Seo and Yamamoto, 1998; Tomizawa and Makii, 2001; Tahata, Miyamoto and Tomizawa, 2004).

Wall and Lienert (1976) は，対称モデルと異なる点対称モデルを提案した．また，Tomizawa (1985) は，準点対称モデルと周辺点対称モデルを導入し，点対称モデルが成り立つための必要十分条件を与えた．さらに，これらのモデルからの隔たりを測る尺度も提案されている (Tomizawa, Yamamoto and Tahata, 2007; Yamamoto, Tahata, Suzuki and Tomizawa, 2011).

本論文は，正方分割表解析におけるモデルと分解，尺度に関する調査結果をまとめており，特に，周辺分布の対称性に関する尺度に焦点を当てている．本論文の目的は，周辺分布の対称性に関する新しい尺度を提案し，先行研究との関係について解説することである．本論文は，4 つの章から構成されている．

第 1 章では，分割表解析に関するモデルと分解，尺度が紹介され，各章の概要が述べられている．

第2章では，多元分割表における平均1次周辺点対称性からの隔たりを測る尺度を提案している．Yamamoto et al. (2011) は，周辺点対称モデルからの最大の隔たりを持つ確率構造を定義した．その確率構造は，大きく4種類に分類することができる．Iki and Tomizawa (2018) は，そのうちの2種類の最大の隔たりを持つ確率構造を区別する平均点対称性からの尺度を提案した．本論文で提案された尺度は，Iki and Tomizawa (2018) で区別することが出来ない確率構造を区別可能にした．また，提案尺度の近似信頼区間を導出し，実際のデータに提案尺度を適用することにより新しい結果と解釈を与えている．さらに，提案尺度を多元分割表における平均1次周辺点対称性からの隔たりを測る尺度に拡張している．

第3章では，名義カテゴリ分割表において局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度，順序カテゴリ分割表において累積局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度を提案している．局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度は，Tomizawa and Makii (2001) で提案された部分尺度の重み付き調和平均で定義されている．同様に，累積局所周辺同等モデルからの隔たりを測る尺度は，Tomizawa, Miyamoto and Ashihara (2003) で提案された部分尺度の重み付き調和平均で定義されている．これらの尺度の値が0であるための必要十分条件は（累積）局所周辺同等モデルが成り立つことであり，尺度の値が1であるための必要十分条件は（累積）局所周辺同等モデルから最大の隔たりを持つ確率構造となっていることである．また，本論文で提案された尺度と先行研究で提案された尺度の関係についても述べている．さらに，デルタ法を用いて提案尺度の近似信頼区間を導出し，実際のデータに提案法を適用し，これまでにない新たな結果と解釈を与えている．

第4章では，第2章と第3章で述べられなかった尺度の性質について，具体例を用いて解説されている．また，パラメータの選択に関する方針についても述べられている．さらに，本論文の総括が示されている．

以上，本論文は理論面と応用面の両面において大変高く評価できるものであり，分割表統計解析の分野に，独創的な新しい解析法を与えており，この分野に大きな貢献をしている．よって理学的に価値ある知見と成果を得たもので博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める．